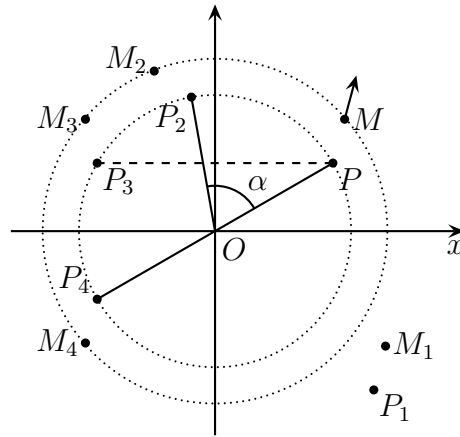


SYMÉTRIES

Soit un plan repéré par les axes (Ox) et (Oy) . Une charge q placée en P crée un champ électrostatique qui vaut le vecteur représenté au point M . Nous faisons suivre la même transformation aux points P et M .

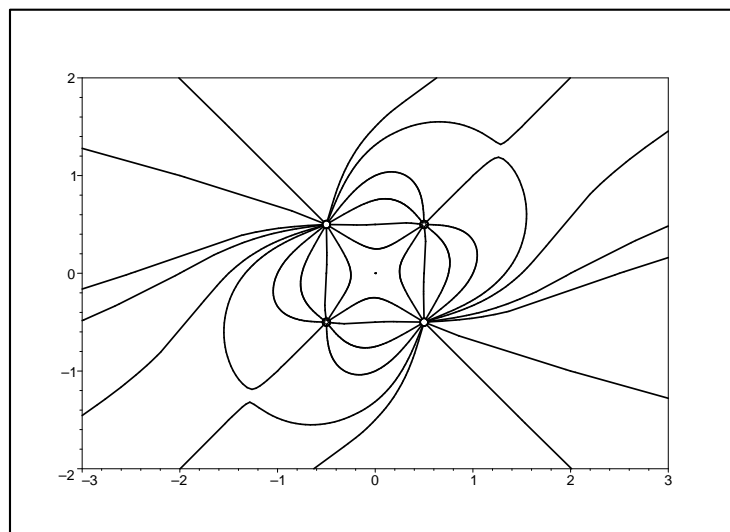


Représenter le champ \vec{E} au cours de ces transformations.

- $(P, M) \xrightarrow{\text{translation}} (P_1, M_1)$
 $(P, M) \xrightarrow{\text{rotation d'angle } \alpha} (P_2, M_2)$
 $(P, M) \xrightarrow{\text{symétrie par rapport à } (yOz)} (P_3, M_3)$
 $(P, M) \xrightarrow{\text{symétrie par rapport au point } O} (P_4, M_4)$

LIRE LES LIGNES DE CHAMP

Quatre charges sont disposées aux quatre coins d'un carré, celle en haut à droite est positive.



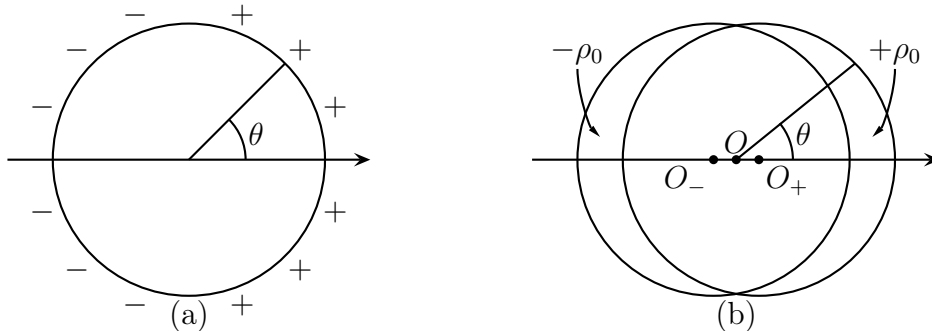
1. Orienter les lignes de champ et en déduire le signe de chaque charge.
2. Déterminer les symétries du champ.

3. Voyez-vous un point de champ nul ?

DISTRIBUTIONS ÉQUIVALENTES

Le schéma (a) ci-dessous représente une sphère de centre O et de rayon R portant la charge surfacique $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$.

Le schéma (b) représente deux boules de rayons R , de centres respectifs O_+ et O_- d'abscisses $+a$ et $-a$ sur l'axe (Oz) , chargées uniformément en volume avec les densités respectives $+\rho_0$ et $-\rho_0$.



Montrer que la première distribution peut être obtenue comme la limite de la seconde lorsque la distance a tend vers zéro, à condition d'imposer une relation particulière entre ρ_0 , a et σ_0 .

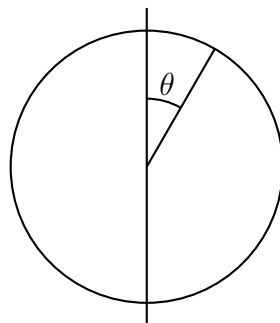
CHARGE DANS UNE SPHÈRE

Une boule de rayon R est chargée avec la densité volumique $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ où r est la distance au centre.

Déterminer la charge contenue dans une boule quelconque de rayon $r \leq R$.

SPHÈRE NON UNIFORMÉMENT CHARGÉE EN SURFACE

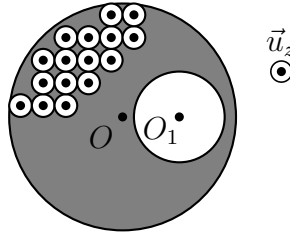
On considère une sphère chargée en surface de charge surfacique $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$ (voir schéma ci-dessous).



Déterminer le champ \vec{E} en tout point à l'intérieur de la sphère. On pourra utiliser les résultats de l'exercice 3.

CAVITÉ DANS UN CYLINDRE

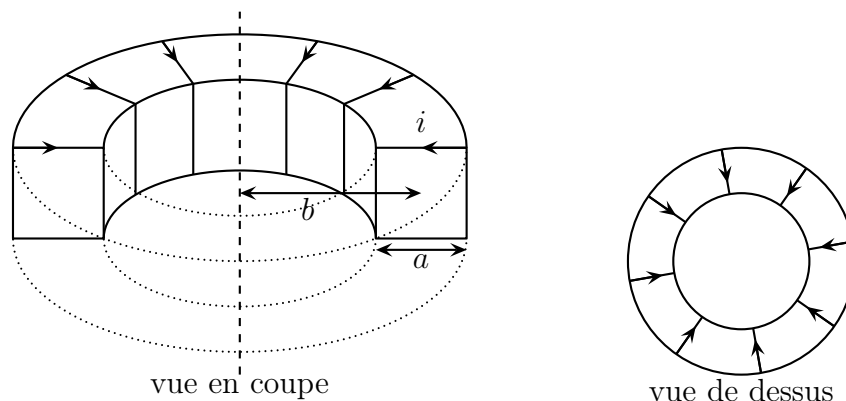
N fils infinis tous parcourus par un courant d'intensité i sont réunis sous la forme d'un cylindre de rayon R avec une densité $n = \frac{N}{\pi R^2}$ de fils par unité de surface.



1. Montrer que le champ $\vec{B}(M)$ en un point M intérieur à ce cylindre peut s'exprimer vectoriellement en fonction de μ_0 , i , \vec{u}_z et \vec{OM} .
2. On enlève quelques fils du conducteur précédent qui présente alors une cavité cylindrique « décentrée » dont l'axe (O_1z_1) est parallèle à (Oz) . Dans le reste du cylindre initial la densité de fil vaut toujours n .
Déterminer le champ magnétique dans la cavité.

TORE À SECTION CARRÉE

On considère un tore constitué de spires carrées de côté a , le centre de chaque spire étant à la distance b du centre du tore. Le nombre N de spires est très grand et chacune est parcourue par un courant d'intensité i .

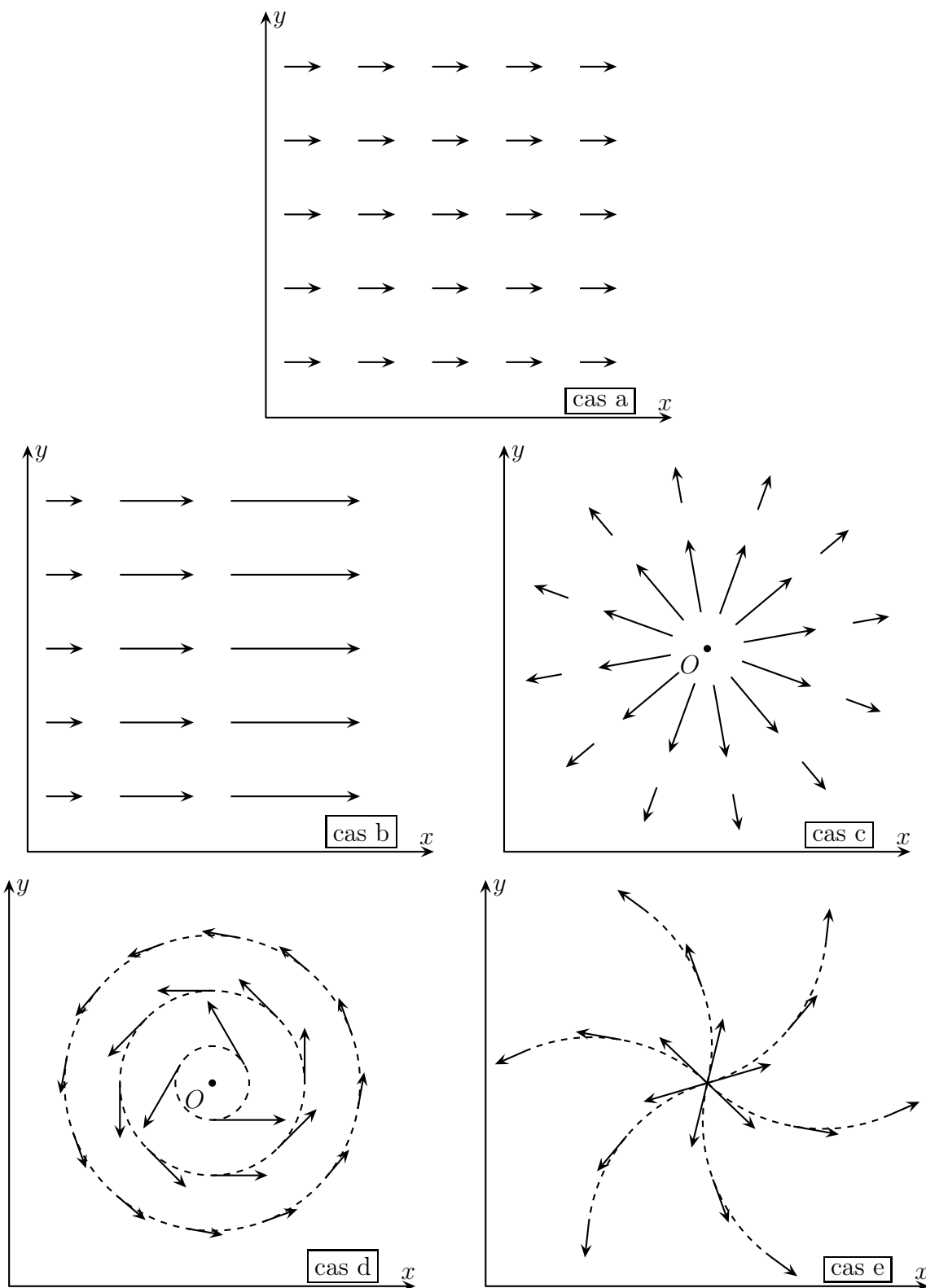


1. Déterminer le champ magnétique \vec{B} créé en tout point de l'espace par le tore.
2. Déterminer l'expression du flux Φ du champ magnétique \vec{B} à travers une spire.

LECTURE DE CARTE

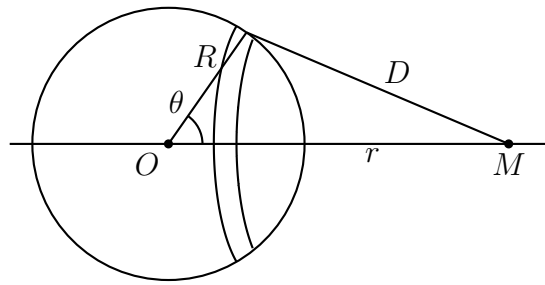
Les schémas suivants représentent quelques cartes de champs bidimensionnels dans le plan (Oxy) et de la forme : $\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y)\vec{u}_x + E_y(x,y)\vec{u}_y$.

Préciser dans chaque cas s'il peut s'agir d'un champ électrostatique et, si oui, déterminer la répartition de charges à l'origine d'un tel champ, si non, expliquer pourquoi.



SPHÈRE UNIFORMÉMENT CHARGÉE EN SURFACE

On considère une sphère chargée uniformément en surface avec la densité surfacique σ .



1. Déterminer le potentiel en tout point de l'espace en s'inspirant du découpage représenté ci-dessus.
2. Déterminer le champ partout dans l'espace :
 - (a) à partir du potentiel trouvé précédemment ;
 - (b) à l'aide du théorème de GAUSS.

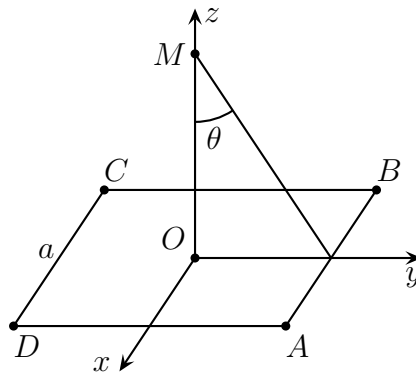
BOULE NON HOMOGENÈME

On considère une boule de rayon R chargée en volume avec la densité $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$.

Déterminer le champ électrostatique \vec{E} et le potentiel V en tout point de l'espace.

SPIRE CARRÉE

Déterminer le champ \vec{E} en tout point de l'axe d'une spire carrée de côté a et de charge linéique constante λ .



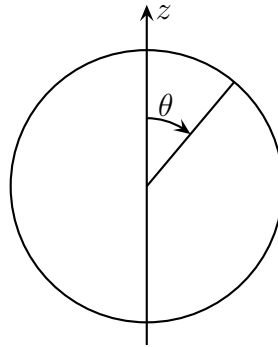
On donnera le résultat en fonction de z et des grandeurs caractéristiques du problème.

HÉMISPHERE CHARGÉ

Une demi-sphère de rayon R est uniformément chargée en surface. Déterminer le champ électrostatique en son centre O .

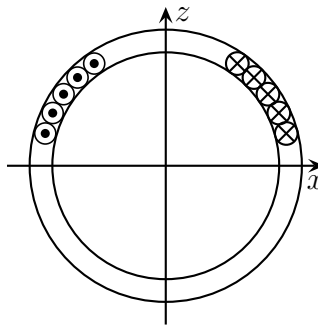
RÉPARTITION NON HOMOGENÈME EN SURFACE

Déterminer l'expression du champ électrostatique au centre d'une sphère surfaciquement chargée avec la densité surfacique $\sigma(\theta)$ telle que $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ où $0 \leq \theta \leq \pi$.



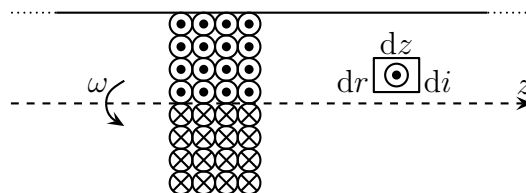
SPHÈRE RECOUVERTE DE SPIRES

Une sphère de rayon R est recouverte d'un grand nombre N de spires jointives parcourues dans le même sens par un courant d'intensité I . Calculer le champ magnétique créé par cette distribution de courants au centre O de la sphère.



CYLINDRE CHARGÉ EN ROTATION

Un long cylindre, supposé infini, de rayon R et chargé uniformément en volume avec la densité ρ , tourne à vitesse angulaire ω constante autour de son axe (Oz) relativement au référentiel \mathcal{R} . Le milieu a les mêmes propriétés magnétiques que celles du vide et il n'existe pas de charges surfaciques.



On modélise ce dispositif par un ensemble de spires circulaires d'axe (Oz) de rayon $0 \leq r \leq R$ et parcourues par le courant i .

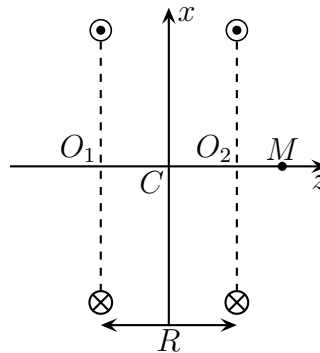
- Déterminer la charge dq qui traverse la section comprise entre r et $r + dr$ et entre z et $z + dz$ pendant la durée dt .

En déduire l'intensité $di = \frac{dq}{dt}$ traversant la spire comprise entre r et $r + dr$ et entre z et $z + dz$.

- Déterminer alors, dans le référentiel \mathcal{R} , l'expression du champ magnétostatique créé par une telle distribution de courant en mouvement.
- Ces charges sont-elles aussi source d'un champ électrostatique ? Le déterminer s'il existe.

BOBINES D'HELMHOLTZ

- Une bobine circulaire de centre O , d'axe (Ox) et de rayon R comporte N spires parcourues par un courant d'intensité I . On négligera l'épaisseur des spires. Soit $\vec{B} = B\vec{u}_x$ le champ magnétique en un point d'abscisse x de l'axe de la spire et B_0 le champ au centre O de la bobine.
Exprimer $y = \frac{B}{B_0}$ en fonction de $u = \frac{x}{R}$. Tracer la courbe $y(u)$ et placer les points d'inflexion.
- Deux bobines identiques à la précédente, de centres O_1 et O_2 , et parcourues dans le même sens par un courant d'intensité I , sont disposées sur le même axe (Cx) , C étant le milieu de O_1O_2 . O_1O_2 a la valeur R .



Calculer B_C , l'intensité du champ au point C .

Exprimer $Y = \frac{B}{B_C}$ en fonction de $\xi = \frac{CM}{R} = \frac{x}{R}$. Tracer $Y(\xi)$.

- Effectuer un développement limité à l'ordre 4 en ξ au voisinage de $\xi = 0$ à l'aide de développement de Taylor de la fonction $y(u)$ en $\pm 1/2$.
- Dans quel domaine le champ est-il constant au millième près le long de l'axe ? Conclure.

DIPÔLE LINÉAIRE

Un segment de longueur $2a$ de l'axe (Oz) porte respectivement les charges linéiques constantes λ et $-\lambda$ sur les parties $0 < z < a$ et $-a < z < 0$.

- Calculer le champ \vec{E} en un point du plan $z = 0$ situé à la distance b de l'origine.
- Lorsque $b \gg a$, interprétez ce résultat à l'aide du concept de dipôle.

DIPÔLE SUR L'AXE D'UNE SPIRE

Soit une spire circulaire de rayon R de charge linéique $\lambda > 0$.

- Calculer le champ \vec{E} en tout point de l'axe \vec{u}_z de la spire.

2. Un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = p \vec{u}_z$ ($p > 0$) est placé sur l'axe de la sipe. Déterminer ses positions d'équilibre et discuter leur stabilité.

QUADRIPÔLE

On considère une charge $2q$ placée en O et deux charges $-q$ placées sur l'axe (Ox) respectivement au point d'abscisse $x = -a$ et $x = +a$.

Calculer le potentiel en un point M situé à la distance $r \gg a$ de O .

DISQUE

Un disque circulaire de centre O , de rayon R d'épaisseur a est uniformément chargé avec une densité surfacique σ sur la face supérieure et $-\sigma$ sur la face inférieure.

1. Déterminer l'expression du potentiel $V(z)$ en un point M de l'axe Oz du disque de cote z à grande distance, *i.e.* tel que $OM \gg a$.
2. En déduire l'intensité du champ électrique en M .
3. Retrouver le potentiel en M en décomposant le disque en petits dipôles électriques dont on précisera le moment.
4. Déterminer le champ électrique en un point M' très voisin du point M de cote z , à la distance r de cet axe. Quelle est sa direction par rapport à (Oz) ?

MOMENT DIPOLAIRE INDUIT ET POLARISABILITÉ

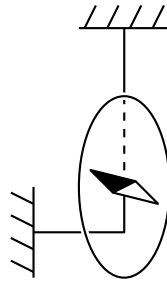
On considère deux ions A_1 et A_2 polarisables, supposés ponctuels distants de r , de charges respectives q_1 et q_2 , placés dans le vide. L'ion A_1 , placé dans le champ \vec{E}_1 produit par l'autre ion, acquiert un moment dipolaire (induit) $\vec{p}_1 = \alpha_1 \varepsilon_0 \vec{E}_1$ et l'ion A_2 , placé dans le champ \vec{E}_2 produit par l'ion A_1 acquiert le moment dipolaire $\vec{p}_2 = \alpha_2 \varepsilon_0 \vec{E}_2$; les coefficients positifs α_1 et α_2 qui caractérisent les ions s'appellent polarisabilité de A_1 et A_2 respectivement.

Exprimer les moments dipolaires \vec{p}_1 et \vec{p}_2 de chaque ion en fonction de q_1 , q_2 , r , $\vec{r} = \overrightarrow{A_1 A_2}$ et des coefficients β_1 et β_2 liés aux polarisabilités par $\beta_1 = \alpha_1 / (4\pi)$ et $\beta_2 = \alpha_2 / (4\pi)$.

COMPOSANTE HORIZONTALE DU CHAMP GÉOMAGNÉTIQUE

Un petit aimant, ou une petite aiguille aimantée, assimilable à un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$ subit, lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique \vec{B} uniforme, un couple de moment $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$. Cette expression est généralisable, concernant le moment des forces au point où est placé l'aimant, lorsque le champ magnétique n'est pas uniforme.

On se propose de mesurer la norme de la composante horizontale \vec{B}_H du champ magnétique terrestre en un lieu. À Paris B_H est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-5}$ T. Pour cela on dispose d'une petite aiguille aimantée montée sur pivot, donc mobile autour d'un axe vertical sans frottements. Ce petit aimant est placé au centre O d'une bobine plate comportant N spires circulaires de rayon R chacune (on néglige la section des fils) contenue dans un plan vertical et alimentée par un courant continu d'intensité I réglable.



Les rotations éventuelles de l'aiguille sont mesurables sur un cercle gradué, la graduation 0 correspondant à la position où l'aiguille est dans le plan de la bobine.

1. Méthode de la boussole des tangentes

Sachant que l'on peut choisir le plan de la bobine, proposer un protocole de mesure de la composante \vec{B}_H du champ magnétique terrestre.

L'expérience a été réalisée avec \vec{B}_H contenue dans le plan de la bobine. Lorsque l'intensité passe d'une valeur nulle à la valeur I , l'aiguille tourne d'un angle α . En déduire \vec{B}_H .

Données : $N = 5$; $R = 12,0$ cm ; $I = 0,381$ A ; $\alpha = 20,0$ °.

2. Méthode des oscillations

On utilise le même matériel que précédemment mais cette fois la position de référence (ou d'équilibre) de l'aiguille est perpendiculaire à la bobine. On désigne par B_C la norme du champ magnétique créé par ce circuit. On suppose I tel que $B_C < B_H$. On admet que l'aiguille se comporte, du seul point de vue cinétique, comme une tige sans masse de longueur 2ℓ aux extrémités de laquelle il y a deux masses $m/2$. On notera $J \stackrel{\text{not}}{=} m\ell^2$.

Montrer que la position d'équilibre de l'aiguille aimantée n'est pas modifiée par l'existence d'un tel courant I dans la bobine.

Montrer que la période des petites oscillations de l'aiguille, préalablement écartée de sa position d'équilibre, dépend du sens du courant dans le circuit. Désignant par T et T' les périodes des oscillations quasi-sinusoïdales observées pour les deux sens (à préciser), établir la relation

$$B_H = \frac{T'^2 + T^2}{T'^2 - T^2} \times B_C.$$

CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

On considère le champ électrique suivant, régnant dans une partie de l'espace vide de charge et de courant :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t + k z) \vec{u}_x + E_0 \sin(\omega t + k z) \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$

1. Vérifier la compatibilité de cette expression avec les lois de Maxwell.
2. Déterminer le champ magnétique associé.
3. Déterminer le vecteur de POYNTING de ce champ électromagnétique.

PLAQUE DE CUIVRE EN RÉGIME PERMANENT

Soit un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' parallèles au plan (Oxy) et de cotes respectives suivant zz' égales à $+\frac{a}{2}$ et $-\frac{a}{2}$. Ces plans délimitent une plaque de cuivre homogène, d'épaisseur a , de perméabilité μ_0 , de permittivité ε_0 et de conductivité γ .

Une densité volumique de courant continu et constant $\vec{j} = j \vec{u}_x$ ($j > 0$) parcourt ce conducteur de dimension infinie suivant \vec{u}_x et \vec{u}_y . La densité superficielle de courant est nulle.

1. Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par cette distribution en un point M quelconque (intérieur ou extérieur de la plaque). On ne se contentera pas de vagues références à la symétrie, mais on s'attachera à construire une véritable démonstration, sans oublier d'étudier la parité du champ.
2. En déduire $\vec{B}(M)$ par le théorème d'AMPÈRE.
3. Retrouver directement $\vec{B}(M)$ par les équations de MAXWELL (à partir des composantes du rotationnel).
4. Calculer la densité volumique de puissance dissipée dans la plaque.

Retrouver le résultat à l'aide du vecteur de POYNTING.

A.N. : $j = 1,0 \text{ A.mm}^{-2}$; $\gamma = 6,2.10^7 \text{ S.m}^{-1}$.

PLAQUE DE CUIVRE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE VARIABLE

Cet exercice est la suite du précédent et la densité de courant précédente est supprimée.

1. Une source de champ magnétique uniforme et constant est placée au-dessus de \mathcal{P} .
La présence de la plaque modifie-t-elle le champ magnétique ?
2. La plaque est maintenant plongée dans un champ uniforme mais alternatif : $\vec{B} = B \vec{u}_x$ avec $B = B_0 \cos(\omega t)$ (B_0 et ω constants).

On supposera la fréquence suffisamment basse pour que le champ magnétique reste approximativement uniforme dans tout le conducteur.

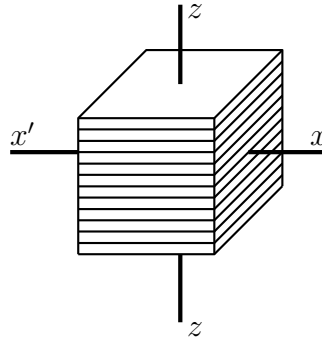
- (a) Montre que l'existence du champ magnétique \vec{B} variable dans le temps implique l'apparition d'un champ électrique \vec{E} et, dans la plaque, d'un courant induit de densité \vec{j} .
- (b) Par des arguments de symétrie, qu'on s'attachera, ici encore, à rendre aussi précis que possible, montrer que \vec{E} est parallèle à \vec{u}_y avec $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$.
- (c) Par le calcul de la circulation de \vec{E} sur un contour convenablement choisi, déterminer $\vec{E}(M)$.

Donner la densité de courant $\vec{j}(M)$ correspondante et tracer le graphique de l'amplitude de cette densité en fonction de z .

3. On considère une portion de la plaque limitée par un cylindre droite de génératrices parallèles à (Oz) et dont les bases, situées dans les deux plans $z = \pm \frac{a}{2}$ ont pour aire S . On note le volume $\tau = S a$ le volume de cette portion de plaque. Calculer la puissance $p(\tau)$ dissipée en moyenne, sur une période, par effet JOULE dans le volume τ et la puissance volumique moyenne $\tilde{p} = \frac{p(\tau)}{\tau}$.
Exprimer \tilde{p} en fonction de γ , ω et B_0 .

A.N. : $a = 5,0 \text{ cm}$; $\omega = 100 \pi \text{ rad.s}^{-1}$; $B_0 = 1,0 \text{ T}$.

4. Un cube fait de plaques de cuivre isolées et empilées comme l'indique la figure ci-dessous, peut être soumis à un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ ou $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$.



Dans quel cas la puissance volumique moyenne dissipée par les courants dans la plaque, appelés courants de FOUCAULT, est-elle la plus grande ?

CONDENSATEUR EN RÉGIME LENTEMENT VARIABLE

Les armatures d'un condensateur plan sont des disques de rayon a distants de e et l'axe Oz . On néglige les effets de bord et on suppose le régime lentement variable. On admet que le champ électrique dans tout le condensateur est uniforme mais non permanent $\vec{E} = E(t) \vec{u}_z$. On étudie dans cet exercice la décharge du condensateur : $E(t) = E_0 e^{-t/\tau}$.

1. Déterminer le champ magnétique dans le condensateur.

On montrera, par étude des symétries, qu'il est de la forme $\vec{B}(M,t) = B(r,z,t) \vec{u}_\theta$.

2. Calculer les contributions électrique et magnétique U_e et U_m à l'énergie électromagnétique, ainsi que le rapport que l'on exprimera en fonction de a et de $\lambda = c\tau$.

Montrer que, en régime lentement variable (préciser), on peut considérer le condensateur comme un système purement électrique.

3. Donner l'expression du vecteur de POYNTING $\vec{\Pi}$ en un point intérieur au condensateur.

Exprimer le flux de $\vec{\Pi}$ à travers la surface S du condensateur et conclure.

PLAQUE SOUMISE À UN CHAMP MAGNÉTIQUE VARIABLE

On considère une plaque infinie selon les directions Oy et Oz de conductivité γ et d'épaisseur est e située entre les plans $x = -\frac{e}{2}$ et $x = +\frac{e}{2}$. Cette plaque est placée dans le champ magnétique $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$.

On se place dans l'approximation de l'ARQS, en régime sinusoïdal établi et on travaille en notation complexe, *i.e.* on cherchera \vec{E} et \vec{B} sous la forme $\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0(x,y,z) e^{i\omega t}$ et $\vec{B}(M,t) = \vec{B}_0(x,y,z) e^{i\omega t}$.

1. Montrer que le champ magnétique obéit à l'équation aux dérivées partielles : $\vec{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

2. En supposant que le champ \vec{B} en $x = \pm \frac{e}{2}$ s'écrit, en notation complexe, $\vec{B} = B_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z$, déterminer la distribution de courant volumique \vec{j} au sein de la plaque.

On utilisera les fonctions hyperboliques complexes.

DÉCHARGE D'UNE BOULE CONDUCTRICE DANS L'AIR

Une boule conductrice, de centre O et de rayon R , porte initialement la charge Q_0 uniformément répartie en surface. Elle est abandonnée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité γ . À l'instant t , la boule porte la charge $Q(t)$.

On cherche le champ électromagnétique $(\vec{E}_{(M,t)}, \vec{B}_{(M,t)})$ en un point M de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques de centre O .

- Déterminer $\vec{B}_{(M,t)}$ et $\vec{E}_{(M,t)}$ à l'extérieur de la boule.
- Établir l'équation différentielle vérifiée par $Q(t)$.
La résoudre et commenter.
- Calculer de deux façons différentes l'énergie totale dissipée dans le milieu et commenter.

ÉMISSION RADIOACTIVE

Une masse radioactive, ponctuelle, initialement neutre, située au point O émet, à partir de l'instant $t = 0$, des particules α avec une vitesse supposée constante et de façon isotrope : à l'instant t la charge électrique située en O est $q(t) = q_0 (e^{-t/\tau} - 1)$.

- Calculer le champ électrique $\vec{E}_{(M,t)}$ et le champ magnétique $\vec{B}_{(M,t)}$ pour $t > 0$ et commenter.
- Exprimer la densité volumique de charge $\rho_{(M,t)}$ et la densité volumique de courant $\vec{j}_{(M,t)}$ pour $t > 0$.
- Vérifier la compatibilité des résultats obtenus avec la relation locale de conservation de la charge et avec les équations de MAXWELL.

On donne, pour un champ $\vec{a} = a(r,t) \vec{u}_r$ en coordonnées sphériques : $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a)}{\partial r}$.

- En déduire la densité volumique d'énergie électromagnétique, le vecteur de POYNTING et la puissance volumique fournie par le champ électromagnétique aux particules α . Commenter.

CHAMP CRÉÉ PAR UNE NAPPE DE COURANT

- Le plan xOy est parcouru par un courant de densité surfacique de courant $\vec{j}_s = j_0 \cos(\alpha y) \vec{u}_x$.
On cherche à déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par ce plan dans tout l'espace.
 - Montrer que $\vec{B}(M) = B_y(y,z) \vec{u}_y + B_z(y,z) \vec{u}_z$.
 - On pose $\vec{B}(M) = \operatorname{Re}(\underline{\vec{B}}(M))$ où $\underline{\vec{B}}(M) = \underline{B}_0(z) e^{i\alpha y}$.
Quelle est la parité des fonctions $\underline{B}_{0y}(z)$ et $\underline{B}_{0z}(z)$?
 - Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiées par $\underline{\vec{B}}(M)$.
Déterminer entièrement le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M)$. Attention : il faut distinguer les régions $z > 0$ et $z < 0$.
- Le plan xOy est maintenant parcouru par un courant de densité surfacique

$$\vec{j}_s = j_0 \cos(\omega t - \alpha y) \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < \frac{\omega}{c}$$

En suivant une démarche similaire à celle de la question précédente, déterminer le champ électromagnétique $\vec{E}_{(M,t)}$ et $\vec{B}_{(M,t)}$ créés par ce plan dans tout l'espace.

EFFET MEISSNER DANS UN SUPRACONDUCTEUR

Dans un matériau supraconducteur, il existe une densité volumique de courant \vec{j} liée au potentiel vecteur \vec{A} par la relation $\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{A}$ (appelée *équation de LONDON*) où λ est une constante positive, caractéristique du matériau.

1. À quelle condition sur \vec{A} une telle relation peut-elle être satisfaite en régime permanent ?
2. Déterminer l'équation aux dérivées partielles satisfaite en tout point intérieur au matériau par le champ magnétique \vec{B} .
3. On considère une plaque supraconductrice d'épaisseur $2d$, dont les faces sont de dimensions assez grandes devant d pour pouvoir négliger les effets de bord. on choisit l'origine d'un repère orthonormé direct ($Oxyz$) au milieu de la plaque, l'axe Oz étant perpendiculaire à ses faces qui ont pour équations $z = -d$ et $z = +d$. Cette plaque est plongée dans un champ magnétique qui, en l'absence de plaque, est statique et uniforme, égal à $\vec{B}_0 = b_0 \vec{u}_z$.
 - (a) Déterminer le champ magnétique à l'intérieur de la plaque en supposant la condition $\vec{B}(d) = \vec{B}(-d) = \vec{B}_0$.
 - (b) En déduire le vecteur densité de courant \vec{j} à l'intérieur de la plaque.
 - (c) Quel est le champ magnétique créé à l'intérieur de la plaque par cette distribution de courant ?

Justifier l'hypothèse faite à la question 3a et conclure.

4. Un modèle microscopique donne $\lambda = \frac{m}{\mu_0 n_s e^2}$ où m est la masse d'un électron, e la charge élémentaire et n_s la densité volumique d'électrons supraconducteurs.
Données : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m⁻¹ ; $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg et $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
 - (a) Calculer λ pour $n_s = 1,0 \cdot 10^{29}$ m⁻³.
 - (b) Tracer les graphes des composantes non nulles de \vec{B} et \vec{j} en fonction de z .
 - (c) Calculer l'épaisseur minimale $2d_m$ de la plaque pour que le champ en son milieu soit inférieur à $\frac{B_0}{100}$.
 - (d) Pour $d \gg \lambda$, à quelle distance de la surface de la plaque la densité de courant est-elle réduite à un centième de sa valeur à la surface ?

DISPOSITIF ACCÉLÉRATEUR D'IONS

Deux plaques parallèles infiniment fines, distantes de d_0 sont placées dans le vide. Elles sont portées respectivement aux potentiels $V_1 = 0$ et V_2 . On injecte des ions positifs de masse m , de charge e , près de la grille 1. Il apparaît alors entre les grilles une densité volumique de charge $\rho(x)$ et un vecteur densité de courant ionique $\vec{J} = J(x) \vec{u}_x$ où Ox est un axe perpendiculaire aux plaques, l'origine étant prise au niveau de la grille 1. On cherche à relier $J(x)$ à la différence de potentiel entre les grilles 1 et 2. En $x = 0$, les ions ont une vitesse nulle. À l'abscisse x , la vitesse d'un ion est $v(x)$.

1. Montrer que $J(x)$ est indépendant de x . On le note J_0 .
2. Établir trois relations reliant le potentiel électrostatique $V(x)$, la vitesse d'un ion $v(x)$ et la densité volumique de charges $\rho(x)$ dans le plan d'abscisse x .
 Quel est le signe de $V(x)$.

3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $V(x)$ et la résoudre.
On mettra $V(x)$ sous la forme $V(x) = Ax^{4/3}$ où A est une constante à déterminer en fonction de j_0 , ε_0 , m et e .
4. Exprimer J_0 en fonction de V_2 pour des ions de masse molaire $M = 40 \text{ g.mol}^{-1}$ et des électrodes distantes de 10 cm. Donner alors l'allure de la courbe $J_0(V_2)$.
Données : $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$; $\varepsilon_0 = 8,84.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$; $\mathcal{N}_A = 6,0.10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
5. Montrer que $v(x) = \left(\frac{x}{d_0}\right)^p v(d_0)$ où p est un exposant rationnel à déterminer.
En déduire l'expression du temps de transit τ d'un ion entre les plaques en fonction du potentiel V_2 .

DIODE À VIDE

On considère un cylindre métallique de rayon R et de hauteur h porté au potentiel E_0 . Sur l'axe de révolution du cylindre, on place un fil conducteur relié à la masse qui émet des électrons avec une vitesse quasi-nulle.

1. Quel doit être le signe du potentiel du cylindre pour capter les électrons ?
2. Déterminer l'équation vérifiée par le potentiel $V(r)$ à la distance r du fil conducteur en fonction du courant I . On s'inspirera de l'exercice précédent.

Pour une grandeur $\xi(r)$, le laplacien s'écrit, en cylindrique : $\Delta \xi(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\xi(r)}{dr} \right)$.

3. On cherche une solution particulière de la forme $V(r) = V_0 r^\alpha$.
Déterminer α et V_0 .
En déduire la relation entre I et E_0 .

POTENTIEL ÉCRANTÉ

Une solution de chlorure de sodium contient c_0 ions sodium et c_0 ions chlorure par unité de volume. Elle est en équilibre thermique à la température T . On se propose de déterminer le potentiel électrostatique qui règne autour d'un ion positif puis de déterminer la surpression due à la présence d'espèces chargées dans la solution.

On suppose que les densités volumiques d'ions positifs $n_+(r)$ et d'ions négatifs $n_-(r)$ à la distance r de cet ion obéissent à la loi de BOLTZMANN : la densité n de particules de charges q est liée au potentiel par $n = n_0 \exp\left(-\frac{qV}{k_B T}\right)$ où k_B est la constante de BOLTZMANN.

1. (a) Exprimer la densité volumique $\rho(r)$ de charges en un point M situé à la distance r de l'ion étudié.
Que devient $\rho(r)$ si $eV \ll k_B T$? Cette approximation est valable dans la suite de l'exercice.
- (b) Déterminer entièrement le potentiel électrostatique au point M .
Pour une fonction $\xi(r)$, on a, en coordonnées sphériques :

$$\Delta \xi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \xi(r)}{\partial r} \right) \quad \text{ou} \quad \Delta \xi(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \xi(r))}{\partial r^2}$$

- (c) En déduire le champ électrique en M et la charge $Q(r)$ contenue dans la sphère de rayon r centrée sur l'ion.
Que vaut $\lim_{r \rightarrow \infty} Q(r)$? Commenter.
2. (a) Quelle est l'énergie électrostatique de l'ion étudié?
En déduire l'énergie électrostatique de toute la solution et montrer qu'elle se met sous la forme $U(T, \mathcal{V}) = \frac{-\alpha}{\sqrt{T} \mathcal{V}}$ où α est une constante positive à exprimer en fonction des données du problème et \mathcal{V} le volume de la solution.
- (b) En déduire l'énergie libre associée à cette énergie potentielle. On utilisera la relation entre l'énergie interne et l'énergie libre :

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right) \right)_{\mathcal{V}} = -\frac{U}{T^2}$$

- (c) En déduire la variation de pression due à ces interactions électrostatiques.
Effectuer l'application numérique pour une solution de concentration $c_0 = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ à la température $T = 300 \text{ K}$.

CONDENSATEUR EN RÉGIME VARIABLE

Les armatures d'un condensateur plan sont deux disques de rayon a , distants de e , d'axe (Oz). On applique une différence de potentiels sinusoïdale entre les armatures du condensateur.

1. Dans un premier temps, on suppose que le champ électrique, dans l'espace entre les armatures, est $\vec{E}_0 = E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z$ et on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents.
Calculer le champ magnétique \vec{B}_1 dans le condensateur.
2. Le champ magnétique \vec{B}_1 étant variable, il est lui-même source d'un champ électrique \vec{E}_2 , que l'on suppose nul sur l'axe (Oz).
Déterminer \vec{E}_2 et en déduire l'expression du champ électrique à l'intérieur du condensateur sous la forme :

$$\vec{E} = \left(1 - \alpha \left(\frac{r\omega}{c} \right)^2 \right) \vec{E}_0$$

où α est une constante à déterminer.

À quelle condition se trouve-t-on dans le cadre de l'ARQP ?

Le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}_1) est-il compatible avec l'équation de MAXWELL – AMPÈRE ?

Comment pourrait-on résoudre la difficulté qui se pose ?

3. On cherche une solution exacte du problème sous la forme :

$$\vec{E}(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r\omega}{c} \right)^n \vec{E}_0 = E(r) e^{i\omega t} \vec{u}_z$$

Montrer que $\Delta E(r) = -\frac{\omega^2}{c^2} E(r)$.

Déterminer la relation de récurrence entre les a_n .

On donne, dans le cas particulier d'un champ scalaire à symétrie cylindrique, le laplacien en coordonnées cylindriques : $\Delta \xi(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi(r)}{\partial r} \right)$.

4. On donne les valeurs numériques des trois premiers zéros de la fonction $\frac{E(x)}{E_0}$ où $x = \frac{r\omega}{c}$: 2,40 ; 5,52 ; 8,65.

À partir de quelle fréquence observe-t-on une région de champ nul dans le condensateur ? On prendra $a = 4$ cm.

CÂBLE COAXIAL

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres métalliques d'axe Oz , de rayons a et $b > a$. La couronne cylindrique située entre ces deux conducteurs a les propriétés électromagnétiques du vide. Elle est le siège de champs électrique et magnétiques tels que (en coordonnée cylindrique d'axe Oz) :

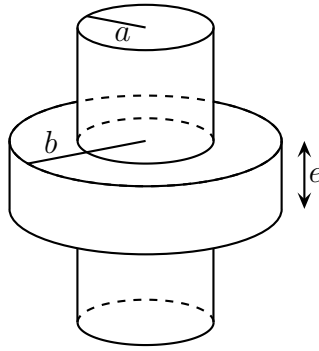
$$\vec{E}_{(M,t)} = E(r) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{B}_{(M,t)} = \vec{B}_0(r) \cos(\omega t - kz)$$

On pourra travailler en notation complexe. On admet que les champs \vec{E} et \vec{B} sont nuls pour $r < a$ et $r > b$.

1. Déterminer $E(r)$. On posera $E_a = \lim_{r \rightarrow a^+} E(r)$.
2. Calculer $\vec{B}_0(r)$. On donne $\overrightarrow{\text{rot}}(\lambda \vec{a}) = \lambda \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} + (\overrightarrow{\text{grad}} \lambda) \wedge \vec{a}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}(f(r) \vec{u}_r) = \vec{0}$.
3. Quelle est la relation entre k et ω ? On donne $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\vec{u}_\theta}{r}\right) = \vec{0}$.
4. Déterminer les densités surfaciques de charges σ_a et σ_b et de courant $\vec{j}_{s,a}$ et $\vec{j}_{s,b}$ sur les armatures cylindriques (en $r = a$ et $r = b$).
Vérifier que l'équation de conservation de la charge sur les armatures est bien compatibles avec les expressions trouvées.
5. Vérifier que $\vec{A} = -\frac{a}{c} \ln \frac{r}{b} E_a \cos(\omega t - kz) \vec{u}_z$ est un potentiel vecteur possible.
En déduire le potentiel scalaire $V(r,z,t)$ qui sera pris nul en tout point du conducteur extérieur.
6. Soit $U(z,t) = V(a,z,t)$ le potentiel du conducteur intérieur à l'abscisse z à l'instant t et $I(z,t)$ l'intensité du courant électrique porté par ce même conducteur.
Montrer que $Z = \frac{U(z,t)}{I(z,t)}$ est indépendant de z et de t .
Donner son expression et son interprétation physique.
7. Déterminer le vecteur de POYNTING puis la puissance moyenne qui traverse une section droite du câble.
Montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de Z et commenter.

CHAUFFAGE PAR INDUCTION

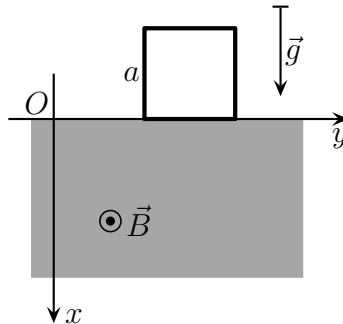
Le champ magnétique $\vec{B} = B(t) \vec{u}_z$ est uniforme dans le cylindre de rayon a .



Calculer la puissance moyenne perdue par effet JOULE dans le disque conducteur de conductivité γ , d'épaisseur e et de rayon b . On justifiera auparavant que $\vec{E} = E(r,z,t) \vec{u}_\theta$. Il n'y a pas de conducteur à l'intérieur du cylindre de rayon a .

FREINAGE PAR INDUCTION

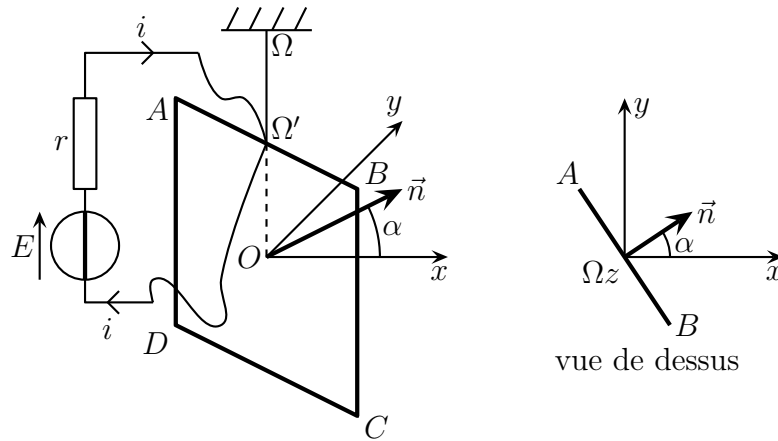
Une spire carrée de côté a , de masse m , tombe dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g \vec{u}_x$. Dans le demi-espace $x > 0$, règne le champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. À l'instant $t = 0$, la spire se trouve dans la situation représentée sur la figure ci-dessous, sa vitesse est $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$, son côté inférieur est en $x = 0$.



1. Montrer que le mouvement ultérieur de la spire reste une translation verticale selon l'axe Ox .
2. Soit R la résistance de la spire. Déterminer la vitesse $v(t)$ de la spire.
3. La spire a maintenant une résistance nulle (spire supraconductrice) et on note L son inductance propre. Reprendre l'étude précédente et préciser la condition d'oscillation de la spire.

APPAREIL À CADRE MOBILE

$ABCD$ est un cadre conducteur, de côté $2a$, de résistance R , de coefficient d'auto-induction négligeable, de moment d'inertie J par rapport à Ωz , constitué d'un enroulement de N spires identiques de surface S . Il est suspendu à un fil de torsion $\Omega\Omega'$, de longueur b , de constante de torsion C (on rappelle que le couple de rappel qui s'exerce sur le fil s'écrit $\vec{\Gamma} = -C \alpha \vec{u}_z$, où α est l'angle de torsion du fil). L'ensemble est plongé dans un champ magnétique radial, de norme uniforme au niveau des côtés AD et BC : $\vec{B} = B_0 \vec{u}_{AB}$ où $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{2a}$ est le vecteur unitaire colinéaire à \vec{AB} .



La position du cadre est repérée par l'angle α entre l'axe Ox et la normale \vec{n} au cadre. Quand le système est à l'équilibre, $\alpha = 0$. Au cours de son mouvement le cadre est soumis à un couple de frottement fluide : $\vec{\Gamma}_{\text{frott}} = -h \frac{d\alpha}{dt} \vec{u}_z$. Le cadre est fermé sur un circuit électrique comportant en série une source de tension de f.é.m. E et une résistance r . Le système est abandonné sans vitesse dans la position définie par l'angle $\alpha_0 = 0$.

1. Analyser ce qui se passe.
2. Déterminer le moment des forces de LAPLACE par rapport à l'axe Ωz et la force électromotrice induite.

En déduire l'équation mécanique du système puis l'équation électrique du circuit.

On posera $\Phi_0 = 4 a^2 N B_0$.

3. Montrer que l'équation du mouvement du cadre se met sous la forme :

$$\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\alpha(t)}{dt} + \omega_0^2 \alpha(t) = \omega_0^2 \alpha_{\text{éq}}$$

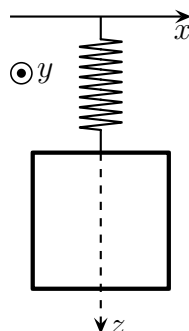
où τ , ω_0 et $\alpha_{\text{éq}}$ sont des constantes à déterminer en fonction des caractéristiques du système. Discuter des différents mouvements possibles selon les paramètres du problème.

4. Montrer que la mesure de la position d'équilibre du cadre permet de déterminer le courant i circulant dans le circuit électrique.

CADRE EN MOUVEMENT

Un cadre carré de masse m de résistance R et de côté a se déplace verticalement dans un champ magnétique $\vec{B} = (B_0 - bz) \vec{u}_y$.

À l'équilibre, le centre du cadre est à la cote z_0 . On le lâche sans vitesse initiale de la position $z_0 + Z_0$.

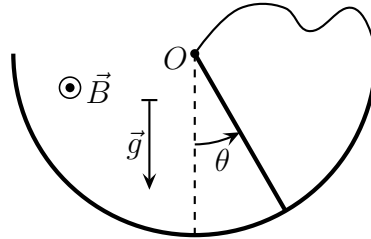


Établir l'équation du mouvement et la résoudre.

Effectuer un bilan énergétique entre les instants t et $t + dt$.

BARRE MOBILE SUR UN RAIL CIRCULAIRE

Une barre conductrice est mobile sur un fil conducteur circulaire. Le circuit est fermé par un fil. La barre, de masse m et de longueur ℓ , est lâchée à l'instant $t = 0$, l'angle $\theta(0)$ étant petit, dans le champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. La liaison avec l'axe est parfaite. La résistance de la barre est R , les résistances des autres éléments du circuit sont négligeables.



Déterminer son mouvement et effectuer un bilan énergétique entre t et $t + dt$.

On supposera que le champ magnétique est assez faible pour que le mouvement soit pseudo-périodique.

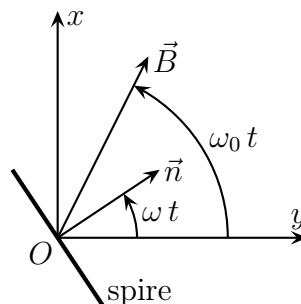
On donne : $J_{Oz} = \frac{m \ell^2}{3}$ et $J_{Gz} = \frac{m \ell^2}{12}$.

MOTEUR ASYNCHRONE

Une spire plate, de surface S , de résistance R et d'inductance L , peut tourner librement autour de l'axe Oz . Elle est soumise à un champ magnétique uniforme dont la norme reste égale à B_0 mais dont la direction tourne au cours du temps : $\vec{B}(t) = B_0 \vec{u}(t)$ où $\vec{u}(t)$ est un vecteur unitaire orthogonal à Oz faisant l'angle $\varphi(t) = \omega_0 t$ avec le vecteur \vec{u}_x .

La spire est animée d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire ω . On pose $(\vec{u}_x, \vec{n}) = \omega t$ où \vec{n} est le vecteur normal à la spire (à l'instant $t = 0$, les vecteurs \vec{n} et \vec{u} coïncident.)

On rappelle qu'une spire plane parcourue par un courant i , de surface S , de normale \vec{n} orientée par i , est assimilable à un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = i S \vec{n}$. Placée dans un champ magnétique extérieur \vec{B} uniforme sur sa surface, elle est soumise aux forces de LAPLACE dont la résultante est nulle et le moment égal à $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$.



- Déterminer, en régime permanent, l'intensité $i(t)$ dans la spire, le moment des forces de LAPLACE s'exerçant sur la spire puis sa moyenne temporelle.

Commenter.

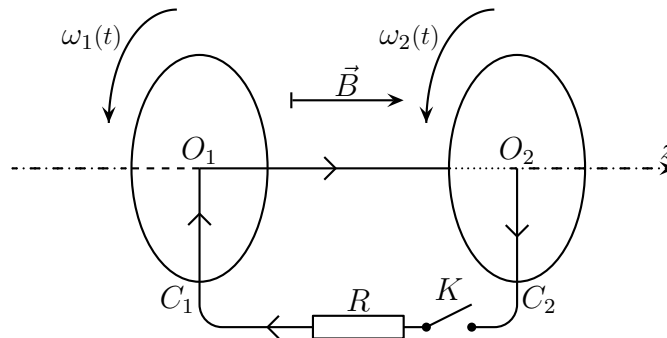
2. Effectuer un bilan énergétique entre les instants t et $t + dt$.
Le couplage est-il parfait ? Interpréter.
3. Comment peut-on créer le champ magnétique tournant ?

COUPLAGE RÉSISTIF ENTRE DEUX DISQUES CONDUCTEURS

On considère deux disques conducteurs, identiques, de masse m , de rayon a et de moment d'inertie J par rapport à leur axe horizontal, autour duquel ils peuvent tourner sans frottement.

On relie par un fil électrique leurs centres O_1 et O_2 . Deux points de la périphérie, C_1 et C_2 , sont reliés par l'intermédiaire d'un interrupteur K et d'une résistance R .

Pour simplifier, on considère que les courants parcourent les disques suivant C_1O_1 et C_2O_2 .



Initialement les disques tournent dans le même sens avec les vitesses angulaires ω_{10} et ω_{20} . On les plonge dans le champ magnétique $\vec{B} = B \vec{u}_z$, uniforme et constant.

À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

1. Établir les équations décrivant l'évolution de $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ en fonction des données.
Pour les résoudre, on posera $D(t) = \omega_1(t) - \omega_2(t)$ et $S(t) = \omega_1(t) + \omega_2(t)$ et on cherchera les équations vérifiées séparément par $D(t)$ et $S(t)$.
Tracer l'allure de $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ sur le même schéma. On suppose $\omega_{20} > \omega_{10}$.
2. Établir l'expression de $i(t)$.
3. Effectuer un bilan énergétique entre les instants $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$.
Commenter.

FREINAGE D'UN CYLINDRE PAR INDUCTION

Un cylindre plein métallique, de conductivité γ , homogène, de masse m , de rayon R et de longueur L , roule sans glisser sur le sol horizontal.

Tous les points de son axe ont une vitesse \vec{v}_0 , perpendiculaire à l'axe. Ce cylindre pénètre, à l'instant initial, dans une zone de champ magnétique uniforme \vec{B}_0 parallèle à \vec{v}_0 . Ce champ existe sur une profondeur h inférieur à L de telle sorte que les deux extrémités du cylindre se trouvent à l'extérieur de la zone de champ.

Le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe est noté J .

1. Décrire qualitativement la suite du mouvement.
2. Exprimer le champ électromoteur en un point M à l'instant t :

$$\vec{E}_m = \vec{v}(M,t) \wedge \vec{B}_0$$

3. On admet que la loi d'OHM s'écrit $\vec{j} = \gamma \vec{E}_m$ et on rappelle la densité volumique des forces de LAPLACE : $\vec{f}_v = \vec{j} \wedge \vec{B}_0$.
- Établir les expressions de la résultante des forces de LAPLACE sur le cylindre et de leur moment par rapport à l'axe Oz .
 - Étudier l'évolution de la vitesse du cylindre.

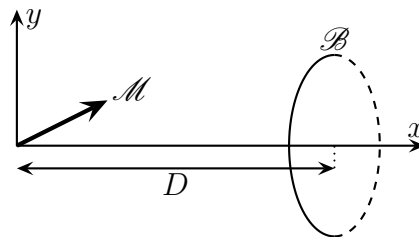
CHAUFFAGE PAR INDUCTION

Un solénoïde « infini » comportant n spires par unité de longueur, de rayon a d'axe Oz , est parcouru par le courant $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$.

- En son centre O , on place un cylindre métallique, de même axe, de longueur L , de rayon $b < a$. On note γ la conductivité électrique du cylindre.
Déterminer les courants qui prennent naissance dans le cylindre en négligeant le champ magnétique créé par les courants induits.
Établir la condition de validité de l'hypothèse précédente en calculant le champ magnétique créé en O par ses courants.
Calculer la puissance moyenne dissipée par effet JOULE.
- On remplace le cylindre par une plaque parallélépipédique de conductivité γ , d'épaisseur e , de largeur ℓ et de longueur L (suivant (Oz)), avec $e \ll \ell \ll L$.
Répondre aux mêmes questions.

INTERACTION D'UNE BOBINE ET D'UN AIMANT TOURNANT

Un dipôle magnétique de moment \mathcal{M} , contenu dans le plan (Oxy) , tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω . Une bobine \mathcal{B} plate contenant N spires d'axe (Ox) , de rayon a , de résistance totale R , d'inductance propre négligeable, est placée à la distance D de O .



On rappelle qu'un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$ est soumis de la part d'un champ magnétique extérieur \vec{B} à un couple de moment $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$.

- Analyser le phénomène et justifier l'aciton d'un opérateur pour maintenir constante la vitesse de rotation du dipôle.
- Déterminer le couple moyen $\langle \vec{\Gamma}_{\text{op}} \rangle$ que doit exercer l'opérateur pour maintenir constante la vitesse de rotation du dipôle.

$$\text{On posera } \Phi_0 = \frac{\mu_0 N a^2 \mathcal{M}}{2(a^2 + D^2)^{3/2}}.$$

3. L'opérateur cesse son action, à un instant pris comme origine des temps.

Que se passe-t-il alors ?

Déterminer l'équation vérifiée par θ dont a tourné le dipôle avant son arrêt. Le moment d'inertie du dipôle par rapport à l'axe (Oz) est noté J .

MOTEUR LINÉAIRE

Un cadre \mathcal{C} , carré, conducteur, de côté $2a$, de centre C , est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t\right) \vec{u}_y$. Il se déplace à la vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_x$, la normale au plan du cadre reste toujours parallèle à Oy (le cadre reste donc toujours dans le plan Oxz).

On suppose que $a \ll \lambda$, on note R la résistance du cadre et L son inductance propre.

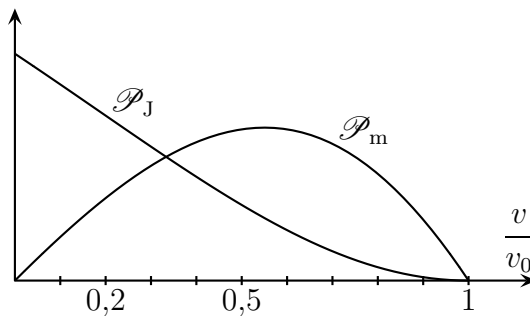
1. Calculer la force instantanée \vec{F} subie par \mathcal{C} .

2. Quelle est sa valeur moyenne ?

À quelle condition a-t-on un moteur ?

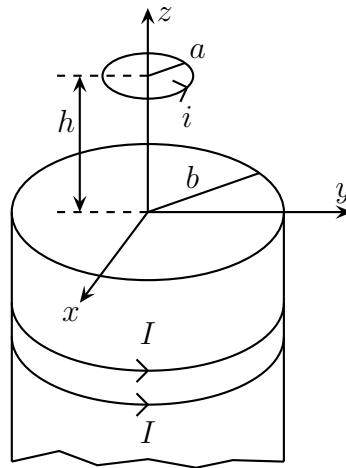
On mettra en évidence une vitesse critique v_0 .

3. Calculer la puissance moyenne \mathcal{P}_m de ce moteur et la puissance dissipée par effet JOULE \mathcal{P}_J . On donne, pour $R = L\omega\sqrt{2}$, les courbes représentant \mathcal{P}_m et \mathcal{P}_J en fonction de $\frac{v}{v_0}$. Commenter.



LÉVITATION D'UNE SPIRE AU DESSUS D'UN SOLÉNOÏDE

Un long solénoïde vertical, d'axe Oz , comprenant n spires circulaires jointives de rayon b par unité de longueur, est parcouru par un courant $I = I_m \cos(\omega t)$. L'origine O de l'axe Oz est prise au centre de la face supérieure du solénoïde. À la cote $z = h > 0$ de l'axe Oz est placée une spire circulaire de rayon a . On suppose que a est petit devant b .



On note $\vec{B}_0 = B_0(z) \cos(\omega t) \vec{u}_z$ le champ magnétique créé par le solénoïde sur son axe.

La spire a une résistance R , un coefficient d'autoinduction L et une masse m . On note $I_1(t)$ le courant dans la bobine un régime permanent.

1. Établir l'équation électrique de la spire.

2. Calculer la valeur moyenne $\langle \vec{F} \rangle$ de la force \vec{F} qui s'exerce sur la spire, en fonction de a , $B_0(z)$, $\frac{dB_0}{dz}$, R , L et ω .

Quel est son signe ?

Pour calculer $\langle \vec{F} \rangle$, on utilisera l'expression suivante du champ magnétique créé par un solénoïde au voisinage de son axe, au premier ordre en r :

$$\vec{B}(r,z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0(z)}{dz} \cos(\omega t) \vec{u}_r + B_0(z) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

3. Quelle est la limite de $\langle F \rangle$ en fréquence élevée ? On la notera F_∞ .

Pour quelle fréquence $\langle F \rangle$ atteint-elle la valeur F_∞ à moins de 1 % près ?

Effectuer l'application numérique pour $R = 1,7 \cdot 10^{-4} \Omega$ et $L = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ mH}$ (valeurs obtenues pour une spire de rayon $a = 0,5 \text{ cm}$ constituée de fils de cuivre de diamètre 2 mm).

4. La spire se situe en $h = 1 \text{ cm}$. On donne à cette altitude $B_0(h) = \mu_0 k$ et $\frac{dB_0}{dz} = \mu_0 k'$ avec $k = 1510 \text{ m}^{-1}$ et $k' = -8 \cdot 10^{-1} \text{ m}^{-2}$.

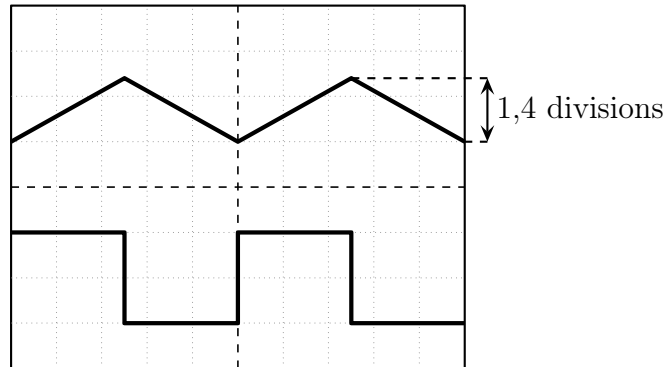
À une fréquence de 30 Hz, quelle doit-être l'intensité efficace dans le solénoïde pour que la force $\langle \vec{F} \rangle$ puisse équilibrer le poids de la spire (la masse volumique du cuivre est $\rho = 8900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

Cet équilibre est-il stable ?

MESURE D'UN COEFFICIENT D'INDUCTANCE MUTUELLE

On considère deux bobines identiques, formées de N spires circulaires de rayon R (bobines plates bobinées sur une seule épaisseur), d'inductance L , que l'on place de façon que les deux bobinages soient coaxiaux, avec le même sens d'enroulement, la distance entre leurs centres étant repérée le long de l'axe commun Oz par la longueur d . On se propose de mesurer le couplage entre les deux bobines en envoyant dans l'une d'elles, dite la première, une tension triangulaire et en comparant à l'oscilloscope cette tension avec la tension induite dans l'autre, celle-ci étant en circuit ouvert. On a branché en série entre le générateur de fonction et la première bobine une résistance $R' = 100 \Omega$. On néglige la résistance R des bobines.

1. Faire le schéma du montage.
2. Les traces observées sur l'oscilloscope ont l'allure suivante :



Les réglages de l'oscilloscope sont les suivants :

- balayage horizontal : 0,2 ms/div ;
- trace supérieure : 1 V/div ;
- trace inférieure variable (voir tableau).

En faisant varier la distance d entre les bobines, on observe pour l'amplitude crête à crête A du signal induit, mesurée en divisions de l'écran, les valeurs suivantes :

Calibre	0,01 V/div			5 mV/div			2 mV/div		1 mV/div
d (cm)	4	5	6	7	8	10	12	16	20
A	4,3	3,3	2,6	4,3	3,4	2,3	4	2,1	2,4

Écrire les équations électriques du circuit.

Établir l'expression de l'inductance mutuelle M entre les deux bobines en fonction de la période T du signal d'entrée, de son amplitude crête à crête Δe , de l'amplitude crête à crête A du signal induit et de la résistance R' .

Calculer alors, en mH, l'inductance mutuelle entre les deux bobines pour chaque valeur de d .

3. Le champ magnétique créé par la première bobine, parcourue par un courant I_1 , en un point de son axe situé à la distance z de son centre, est de la forme $\vec{B} = B_0(z) \vec{u}_z = I_1 \varphi(z) \vec{u}_z$.

Déterminer $\varphi(z)$.

Montrer que, en un point proche de l'axe, le champ magnétique est, à l'ordre 2 en r :

$$\vec{B}_{(r,z)} = -\frac{r}{2} \frac{dB_0(z)}{dz} \vec{u}_r + \left(B_0(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2} \right) \vec{u}_z$$

Exprimer le flux du champ magnétique créé par la première bobine à travers la deuxième.

En déduire l'expression du coefficient d'inductance mutuelle entre les deux bobines, en fonction de R , N , $\varphi(d)$ et $\varphi''(d)$.

On prend des bobines de 7 cm de rayon, comportant 100 spires. Le modèle théorique ci-dessus donne $M = 43 \mu\text{H}$ pour $d = 20$ cm et $M = 0,16$ mH pour $d = 5$ cm.

Ces résultats sont-ils en accord avec les résultats expérimentaux ? Commenter.

ONDE PLANE PROGRESSIVE

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique :

$$\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad E_x = E_0 \exp \left(j \left(\frac{k}{3} (2x + 2y + z) - \omega t \right) \right)$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6.10^{-7}$ m.

1. Calculer la fréquence de l'onde.
2. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde ?
3. Calculer la valeur numérique de la constante k .
4. Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.
5. Exprimer E_y en fonction de E_x .
6. Calculer le champ magnétique \vec{B} de cette onde.
7. Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde.
8. Calculer le vecteur de POYNTING de cette onde et sa moyenne temporelle.
Commenter.

POLARISATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

1. Décrire l'état de polarisation des ondes suivantes :

$$(a) \vec{E} = E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x + E_0 \cos \left(\omega t + kz + \frac{\pi}{3} \right) \vec{u}_y$$

$$(b) \vec{E} = E_0 \cos \left(\omega t - kz - \frac{\pi}{8} \right) \vec{u}_x + E_0 \cos \left(\omega t - kz - \frac{\pi}{8} \right) \vec{u}_y$$

2. Donner l'expression d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant dans le sens des x négatifs, à polarisation circulaire droite.

ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

On donne la représentation complexe du champ électrique d'une onde électromagnétique dans le vide, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_0 \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right) \exp(j(\omega t - k_0 z)) \\ \underline{\alpha} E_0 \sin \left(\frac{\pi y}{a} \right) \exp(j(\omega t - k_0 z)) \end{cases}$$

où $\underline{\alpha}$ est complexe et k_0 positif.

1. Déterminer $\underline{\alpha}$ et k_0 en fonction de E_0 , ω , a et c .
2. Déterminer le champ magnétique \vec{B} associé à cette onde.
3. Cette onde est-elle plane ? progressive ? harmonique ? transverse électrique ? transverse magnétique ?

4. Calculer le vecteur de POYNTING et sa valeur moyenne dans le temps.

RÉFLEXION D'UNE OPPMPC

Une OPPM polarisée circulairement droite se propageant dans le vide suivant le vecteur d'onde $\vec{k} = k \vec{u}_x$ tombe en $x = 0$ sur un plan métallique parfaitement conducteur.

On admet que le champ électrique est nul en $x = 0$.

On choisit l'origine de temps de telle sorte que $E_{i,z}(0,0) = 0$ et $E_{i,y}(0,0) = E_0 > 0$.

1. Écrire les composantes du champ électrique $\vec{E}_i(x,t)$ de l'onde incidente en fonction de x , ω , t , k et E_0 .
En déduire les expressions du champ magnétique et du vecteur de POYNTING de l'onde incidente.
2. Quel est le vecteur d'onde de l'onde réfléchi ?
Déterminer les composantes du champ électrique $\vec{E}_r(x,t)$ de l'onde réfléchi en fonction de x , ω , t , k et E_0 .
Quelle est sa polarisation ?
En déduire les expressions du champ magnétique et du vecteur de POYNTING de l'onde réfléchi.
Même question pour l'onde résultante (superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchi).
3. Déterminer les densités surfaciques de charges et de courant à la surface du conducteur parfait.

MODES PROPRES D'UNE CAVITÉ SANS PERTES

Une cavité sans perte d'axe Ox et de longueur L est constituée par l'association de deux miroirs métalliques parfaits confondus respectivement avec les plans $x = 0$ et $x = L$. On suppose qu'à l'intérieur de la cavité le champ électrique d'une onde monochromatique polarisée selon \vec{u}_x a pour représentation complexe :

$$\vec{E}(x,t) = E_1 \exp(j(\omega t - kx)) \vec{u}_z + E_2 \exp(j(\omega t + kx)) \vec{u}_z$$

1. Quelles sont les conditions aux limites imposées par la présence d'un métal parfait en $x = 0$ et $x = L$?
2. En déduire l'expression de E_2 en fonction de E_1 et la suite f_n des valeurs possibles de la fréquence de telles ondes pouvant exister dans la cavité. On exprimera f_n en fonction d'un entier naturel n non nul et d'une fréquence particulière f_1 dépendant de L et c . Ces fréquences correspondent aux modes propres de la cavité.
3. (a) Établir l'expression $\vec{E}_n(x,t)$ du champ électrique dans la cavité à la fréquence f_n en fonction de E_1 , n , x , L et c .
(b) Justifier l'expression d'onde stationnaire donné à ce type d'onde.
(c) Montrer qu'il existe des abscisses x_p où le champ électrique est constamment nul.
Donner la distance entre deux valeurs consécutives de x_p .
(d) En déduire le champ magnétique $\vec{B}_n(x,t)$ associé à cette onde.
Expliciter les abscisses x'_p des points où le champ magnétique est constamment nul.

RÉFLEXION SUR UN MÉTAL RÉEL

Une onde électromagnétique, plane, progressive, monochromatique, arrive sous incidence normale sur un milieu conducteur, de conductivité γ , occupant le demi espace $z > 0$. Le vecteur d'onde de l'onde incidente est $\vec{k}_0 = k_0 \vec{u}_z$, son champ électrique s'écrit, en notation complexe : $\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - k_0 z)}$.

1. Établir la relation de dispersion dans le métal en faisant les approximations qui s'imposent.
2. L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise.
Déterminer les coefficients de réflexion \underline{r} et de transmission \underline{t} pour l'amplitude du champ électrique.
3. Déterminer le pouvoir réflecteur du milieu métallique défini comme le rapport de l'énergie réfléchie et de l'énergie incidente en $z = 0$.
4. Calculer la puissance moyenne dissipée par effet JOULE dans le cylindre d'axe Oz , de surface de base S , s'étendant du plan $z = 0$ jusqu'à l'infini.
Comparer à la puissance transmise par l'onde incidente en $z = 0$. Conclusion.

DISPERSION DANS LE PLASMA INTERSTELLAIRE

Le plasma interstellaire est constitué d'électrons de masse m , de charge $-e$, de nombre volumique n , en mouvement non relativiste de vitesse v , et d'ions supposés fixes. Il est localement neutre et le reste au passage d'ondes électromagnétiques. Avec ces hypothèses, on cherche des solutions des équations de MAXWELL sous la forme d'ondes planes progressives monochromatiques (appelées OPPM dans la suite) de vecteur d'onde \vec{k} , de pulsation ω :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

1. (a) Montrer que de telles solutions n'existent que si la densité de courant \vec{j} des électrons est elle-même une OPPM de même vecteur d'onde et de même pulsation, c'est-à-dire de la forme :

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- (b) Montrer que \vec{j} est orthogonal à \vec{k} .
2. Écrire l'équation du mouvement de l'électron et montrer que l'effet du champ magnétique y est négligeable.
Montrer que les vecteur \vec{j} et \vec{E} sont colinéaires et déterminer la conductivité $\underline{\sigma}$ du plasma. Commenter.
3. À l'aide des équations de MAXWELL, exprimer \vec{j}_0 en fonction de ω , \vec{k} , \vec{E}_0 et \vec{B}_0 .
En déduire une nouvelle expression de $\underline{\sigma}$.
4. En déduire la relation de dispersion $\omega(k)$.
En posant $K = \sqrt{\frac{\mu_0 n e^2}{m}}$, établir les expressions des vitesses de phase et de groupe des ondes électromagnétiques dans le plasma.
Quelle relation vérifient-elles ?
5. Deux trains d'ondes de longueur d'onde respectives λ_1 et $\lambda_2 > \lambda_1$ sont émis au même instant par un objet stellaire situé à une distance L .
En supposant $K_2 \lambda_1^2 \ll 1$ et $K_2 \lambda_2^2 \ll 1$, montrer que le terme principal dans la différence $\delta t = t_2 - t_1$ des temps de réception des deux signaux est donné par :

$$\delta t = \frac{L K^2}{8 \pi^2 c} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$$

A.N. : des mesures de dispersion à partir de de signaux émis par le pulsar du Crabe conduisent à une limite supérieure égale à $2,8 \cdot 10^4 \text{ m}^{-3}$ pour le nombre volumique n des électrons du plasma interstellaire.

Quelle serait dans ces conditions la limite δt pour $\lambda_1 = 0,4 \text{ } \mu\text{m}$ et $\lambda_2 = 0,8 \text{ } \mu\text{m}$ de signaux émis par une étoile située à $L = 10^3$ année lumière.

RÉFLEXION SUR UN MÉTAL SOUS INCIDENCE OBLIQUE

Une onde plane monochromatique, de pulsation ω , de vecteur d'onde \vec{k}_0 , polarisée rectilignement selon le vecteur unitaire \vec{u} , se propage dans le vide et arrive sous une incidence $\alpha = (-\vec{u}_z, \vec{k}_0)$ dans le plan $z = 0$ sur un métal conducteur parfait, occupant le demi espace $z < 0$.

On écrira en notation complexe, le champ électrique de l'onde incidente sous la forme

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r})} \vec{u}$$

1. Montrer qu'il existe nécessairement une onde réfléchie.
2. Déterminer les expressions du champ électrique \vec{E}_r et du champ magnétique \vec{B}_r réfléchis dans les deux cas suivants :
 - \vec{u} est dans le plan d'incidence défini par \vec{u}_z et \vec{k}_0 ;
 - \vec{u} est perpendiculaire au plan d'incidence.
 On évitera les calculs au profit des schémas.
 Dans les deux cas, préciser le déphasage introduit par la réflexion métallique.
3. Dans les deux cas, déterminer la densité surfacique de charges σ et la densité surfacique de courant \vec{j}_s qui apparaissent dans le plan $z = 0$.

PRESSION DE RADIATION

1. Soit une onde plane, monochromatique, de fréquence ν , de propageant dans la direction et le sens de \vec{u}_x , dont le champ électrique est $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$. On rappelle que l'éclairement \mathcal{E} est la puissance moyenne qui traverse une surface d'aire unité perpendiculaire à la direction de propagation.
 Exprimer \mathcal{E} en fonction de ε_0 , c et E_0 .
2. On considère cette onde comme un faisceau de photons se propageant dans la direction et le sens de \vec{u}_x . L'énergie d'un photon associé à cette onde est $h\nu$ et sa quantité de mouvement est $\frac{h\nu}{c} \vec{u}_x$.
 - (a) Exprimer le nombre N_0 de photons traversant par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire à Ox en fonction de \mathcal{E} et de ν .
 - (b) L'onde arrive sur une surface plane perpendiculaire à Ox d'aire S , parfaitement réfléchissante. On étudie le rebond des photons sur cette surface.
 Quelle est la quantité de mouvement reçue par la paroi au cours d'un choc photon – paroi ?
 Quelle est la force subie par la paroi en fonction de \mathcal{E} , S et c ?

Exprimer la pression p subie par la paroi en fonction de \mathcal{E} et c puis en fonction de ε_0 et E_0 .

- (c) Reprendre la question ci-dessus lorsque la paroi est parfaitement absorbante.
 (d) Calculer \mathcal{E} , E_0 et p sur une paroi totalement absorbante pour un laser ayant un diamètre $d = 5$ mm et une puissance moyenne de 100 W (laser utilisé industriellement pour la découpe de feuilles.)

3. (a) L'onde est maintenant absorbée par une sphère de rayon a , bien inférieure au rayon du faisceau.

Quelle est, en fonction de \mathcal{E} , a et c la force \vec{F} subie par la sphère ?

- (b) Le Soleil donne au voisinage de la Terre (juste au dessus de l'atmosphère terrestre) l'éclairement $\mathcal{E} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ W.m}^{-2}$. L'émission est isotrope, la distance Terre – Soleil est égale à $D = 150 \cdot 10^6$ km et sur une surface de dimension petites devant D , l'onde arrivant du Soleil est quasi plane.

Quelle est la puissance P_0 émise par le Soleil ?

Un objet sphérique, de rayon a , de masse volumique μ , est, dans le vide interplanétaire, à la distance r du Soleil et absorbe totalement le rayonnement solaire.

Évaluer le rapport entre la force due à l'absorption du rayonnement solaire et la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur cet objet dans les deux cas suivants :

→ cas d'une météorite : $\mu = 3,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $a = 1$ m

→ cas d'une poussière interstellaire : $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $a = 0,1 \text{ }\mu\text{m}$

Commenter.

On donne la constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ et la masse du Soleil : $M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

ONDE CYLINDRIQUE

On étudie une onde électromagnétique cylindrique, émise par des sources situées le long d'un axe Oz . En coordonnées cylindriques d'axe Oz , le champ électrique s'écrit $\vec{E}(M,t) = E(r) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_z$ où $E(r)$ est réel dans la zone de champ lointain où $kr \gg 1$. L'onde se propage dans le vide.

1. Déterminer le champ magnétique associé à ce champ électrique.

Commenter son expression.

2. Quelle est la valeur moyenne $\langle \vec{\Pi} \rangle$ du vecteur de POYNTING ?

En déduire la puissance moyenne rayonnée à travers un cylindre d'axe Oz de hauteur $h = 1$ m et de rayon $r \gg \frac{1}{k}$.

3. En déduire l'expression de $E(r)$ en fonction de r , \mathcal{P} , k , ω et μ_0 .

4. En déduire la relation de dispersion reliant k et ω en négligeant les termes en $\left(\frac{1}{kr}\right)^2$.

On rappelle l'expression du laplacien d'un champ scalaire de la forme $U(r,t)$ en coordonnées cylindriques :

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right)$$

5. Donner les champs \vec{E} et \vec{B} et décrire la structure de l'onde.

PROPAGATION DANS UN PLASMA

Un plasma neutre est constitué d'électrons libres et d'ions chargés positivement, beaucoup plus lourds que les électrons (on les considérera donc comme fixes). Les électrons, de masse m , de charge $-e$, sont en nombre n_0 par unité de volume.

1. Le milieu est soumis à un champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$.

Déterminer la vitesse des électrons et en déduire que l'on peut associer au plasma une conductivité complexe $\underline{\gamma}$ à exprimer.

2. Le champ électrique est maintenant celui d'une OPPM :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

À quelle(s) condition(s) le résultat de la question 1 est-il encore valable ?

On supposera cette (ces) condition(s) vérifiée(s) dans la suite de l'exercice.

Écrire les équations de MAXWELL dans le plasma.

Montrer que tout revient à remplacer dans les calculs habituels de l'onde plane dans le vide

ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$ où ω_p , appelée *pulsation plasma*, est une constante à déterminer en fonction de n_0 , e , m , ε_0 .

On suppose $\omega \neq \omega_p$.

En déduire, sans calcul, la relation entre ω et k (dite *relation de dispersion*).

Étudier les cas $\omega < \omega_p$ et $\omega > \omega_p$.

RÉFLEXION-TRANSMISSION D'UNE ONDE À LA SURFACE D'UN PLASMA

Cet exercice fait suite au précédent.

Le plasma occupe le demi-espace $z > 0$. Une OPPM polarisée rectilignement se propage dans le vide (demi-espace $z < 0$) et atteint sous incidence normale le plasma. Le champ électrique de cette onde est noté $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$. L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise.

1. On note $\underline{r} E_0$ l'amplitude complexe du champ électrique réfléchi et $\underline{t} E_0$ celle du champ électrique de l'onde transmise.

Calculer \underline{r} et \underline{t} et donner l'expression du champ électrique **réel** de chaque onde (on distinguera les cas $\omega < \omega_p$ et $\omega > \omega_p$).

2. On définit de même les facteurs de réflexion (R) et de transmission (T) en énergie à partir du flux du vecteur de POYNTING associé à chaque onde à travers une surface S du plan $x = 0$.

Calculer R et T et commenter.

RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE DEMI-ONDE

Une antenne filiforme, colinéaire à l'axe Oz , de longueur ℓ , centrée à l'origine, est le siège d'un courant électrique sinusoïdal d'intensité $\underline{I}(z,t) = \underline{I}_0 \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) e^{j\omega t}$ avec $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

On suppose que $\ell = \frac{\lambda}{2}$ (antenne demi-onde).

On admet que cette antenne se comporte comme un ensemble de dipôles électriques oscillants de moment $d\underline{\vec{p}} = \frac{1}{j\omega} I(z,t) dz \vec{u}_z$, *i.e.* qu'un élément de longueur dz est assimilable à un dipôle de moment $d\underline{\vec{p}} = q dz \vec{u}_z$ avec $i(z,t) = \frac{dq}{dt}$.

1. Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'origine O , d'axe Oz . Soient (r', θ', φ') les coordonnées sphériques de M dans un système d'origine S , point de Oz , et toujours d'axe Oz . On se place dans la zone de rayonnement, $r \gg \lambda$.

Montrer que l'on a approximativement $r' = r - z \cos \theta$ et $\frac{\sin \theta}{r} = \frac{\sin \theta'}{r'}$.

En déduire, en utilisant la formule du champ de rayonnement d'un dipôle oscillant, l'expression du champ magnétique $d\vec{B}$ créé par l'élément de longueur dz de l'antenne.

Montrer alors que le champ magnétique total rayonné en M par l'antenne est :

$$\vec{B}_{(M,t)} = j \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} e^{j\omega(t-r/c)} \vec{u}_\varphi$$

2. On admet que localement le champ électromagnétique rayonné par l'antenne a la structure d'une onde plane progressive de direction de propagation \vec{u}_r .

Calculer alors le vecteur de POYNTING en M et sa valeur moyenne dans le temps.

Dans quelle direction rayonne-t-elle le plus d'énergie ?

Calculer la puissance moyenne \mathcal{P} rayonnée par l'antenne à travers une sphère de rayon r .

On donne $\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta = 1,22$.

En déduire la résistance de rayonnement R de l'antenne définie par $\mathcal{P} = R I_{\text{eff}}^2$.

ONDE DANS UN MILIEU DIÉLECTRIQUE LHI

On considère une onde électromagnétique, de fréquence 1 GHz dont le champ électrique est polarisé rectilignement selon \vec{u}_y et se propageant selon \vec{u}_x dans un milieu diélectrique de permittivité relative $\varepsilon_r = 2,56$, de perméabilité magnétique μ_0 , non conducteur.

1. Donner la relation de dispersion.
2. Calculer la norme du vecteur d'onde.
3. Déterminer le champ magnétique et calculer le rapport des normes des champs électrique et magnétique.
4. Calculer la célérité de l'onde.

COUCHE ANTI-REFLET

Une OPPM polarisée rectilignement se propage dans l'air (d'indice 1!) dans la direction des z croissants et atteint sous incidence normale une plaque de verre d'indice n , recouverte d'une couche d'épaisseur e , transparente, d'indice n_0 (on choisira l'origine de l'axe des z au milieu de la couche

d'indice n_0). L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans l'air, une onde réfléchie, une onde transmise dans la couche intermédiaire et une onde transmise dans le verre d'indice n .

Écrire les champs électriques et magnétiques de chacune de ces ondes (en notation complexe) puis les relations de continuité en $z = -\frac{e}{2}$ et $z = \frac{e}{2}$.

Comment faut-il choisir n_0 et e pour annuler l'onde réfléchie dans l'air ?

INCIDENCE DE BREWSTER

Une OPPM polarisée rectilignement se propage dans le vide et atteint sous une incidence définie par l'angle i un milieu diélectrique transparent d'indice n . On cherche un angle i particulier pour lequel aucune onde n'est réfléchie. Cet angle, noté i_B , est appelé *angle de Brewster*.

Rappeler les conditions aux limites que doivent satisfaire les champs de part et d'autre de la surface de séparation entre le vide et le diélectrique.

Déterminer l'angle de Brewster en privilégiant le dessin au calcul. On envisagera les cas où le champ électrique est polarisé dans plan d'incidence ou perpendiculairement à celui-ci.

Calculer sa valeur pour $n = 1,5$.

RÉFLEXION-TRANSMISSION SOUS INCIDENCE QUELCONQUE V.1

On considère deux milieux diélectriques, non magnétiques, homogènes et isotropes, d'indices de réfraction n_1 et n_2 . Le milieu d'indice n_1 occupe le demi-espace $z < 0$, le milieu d'indice n_2 le demi-espace $z > 0$. Le plan $z = 0$ constitue ainsi un dioptre plan. Une onde plane progressive, monochromatique de pulsation ω , se propage dans le milieu d'indice n_1 . Le champ électrique de cette onde est polarisé rectilignement selon \vec{u}_y : son vecteur d'onde \vec{k}_i est situé dans le plan xOz et fait avec Oz un angle i (angle d'incidence). On admet que les ondes réfléchie et transmise par le dioptre sont planes, monochromatiques de pulsation ω , de champs électriques polarisés selon \vec{u}_y . Les champs électriques, à l'instant t et au point M de l'espace, sont écrits sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E}_i(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{u}_y \\ \vec{E}_r(\vec{r}, t) = r E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \vec{u}_y \\ \vec{E}_t(\vec{r}, t) = t E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \vec{u}_y \end{cases}$$

ce qui définit les coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude.

1. Rappeler, sans les démontrer, les relations de passage du champ électromagnétique à la traversée du dioptre.
2. En déduire les lois de la réflexion et de la réfraction de SNELL – DESCARTES (on désignera par i' l'angle de réfraction).
3. Calculer r en fonction de n_1 , n_2 , i et i' .
4. On suppose que $n_2 = n_1 + \delta n$, avec $\delta n \ll n_1$.

Donner l'expression approchée de r .

RÉFLEXION-TRANSMISSION SOUS INCIDENCE QUELCONQUE V.2

Reprendre le calcul du coefficient de réflexion en amplitude de l'exercice précédent dans le cas d'une onde polarisée rectilignement dans le plan d'incidence.

Commenter.

Les champs électriques des ondes incidente, réfléchie et transmise sont notés :

$$\begin{cases} \vec{E}_i(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{u}_i \\ \vec{E}_r(\vec{r}, t) = r' E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \vec{u}_r \\ \vec{E}_t(\vec{r}, t) = t' E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \vec{u}_t \end{cases}$$

où \vec{u}_i , \vec{u}_r et \vec{u}_t sont les vecteurs unitaires donnant les directions des champs électriques. Ils appartiennent au plan d'incidence xOz défini par le vecteur d'onde incident \vec{k}_i et la normale au dioptre $\vec{N} = \vec{u}_z$ et se déduisent respectivement des vecteurs \vec{k}_i , \vec{k}_r et \vec{k}_t par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour du vecteur \vec{u}_y normal au plan d'incidence. Les angles de ce plan sont orientés par \vec{u}_y .

INDICE COMPLEXE D'UN GAZ

On étudie l'interaction d'une onde électromagnétique avec un gaz atomique.

L'onde est une onde plane progressive harmonique, de pulsation ω , se propageant suivant \vec{u}_z et polarisée rectilignement suivant \vec{u}_x , son champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - k z)} \vec{u}_x$$

Chaque atome de la vapeur est décrit par le modèle de l'électron élastiquement lié : chaque électron, de masse m et de charge $-e$, est soumis de la part du cœur de l'atome (noyau + autres électrons) auquel il appartient à une force de rappel $\vec{f} = -m\omega_0^2 \vec{r}$ où \vec{r} est le vecteur position de l'électron par rapport au noyau. L'électron est par ailleurs soumis à une force de frottement $\vec{f}' = -m\Gamma \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Il y a N électrons par unité de volume. La vitesse de l'électron est suffisamment faible pour qu'on puisse le supposer non relativiste.

1. Quelle est l'origine physique de ces deux forces ?
Quelles sont les significations physiques de ω_0 et Γ ?
Quel est la signification physique de \vec{r} ?
2. Écrire l'équation du mouvement d'un électron, la simplifier compte tenu de l'approximation ci-dessus et en déduire l'expression de \vec{r} en régime forcé.
3. Exprimer alors le vecteur polarisation \vec{P} du milieu.
En déduire l'expression de la susceptibilité électrique $\underline{\chi}_e(\omega)$ en fonction de ω , ω_0 , Γ et $\omega_p = \sqrt{\frac{N e^2}{m \epsilon_0}}$.
4. Le milieu ne possède ni charge libre, ni courant libre et n'a pas de propriété magnétique.
Quelle est alors l'équation de dispersion donnant \underline{k}^2 (complexe) en fonction de ω ?
En déduire \underline{n}^2 , carré de l'indice complexe du milieu.
5. On pose $\underline{n} = n' - i n''$.
Donner l'expression du champ réel \vec{E} en fonction de n' et n'' .
Commenter son expression.
Justifier le choix du signe $-$ devant la partie imaginaire de \underline{n} .

6. Exprimer la valeur moyenne temporelle du vecteur de POYNTING et en déduire la distance d caractéristique de l'absorption de l'onde par le milieu.
7. Le milieu étant dilué, on suppose que $|\chi_e| \ll 1$.
- (a) Quelle est alors l'expression approchée de \underline{n} ?
- (b) On étudie l'indice au voisinage de la pulsation ω_0 . On pose $\delta = \omega - \omega_0$ et on suppose $\delta \ll \omega_0$.
Donner alors une expression simplifiée de \underline{n} , puis de n' et n'' .
On donne $\omega_p = 1,3 \cdot 10^{12}$ rad.s⁻¹, $\omega_0 = 3,2 \cdot 10^{15}$ rad.s⁻¹ et $\Gamma = 6,3 \cdot 10^9$ rad.s⁻¹.
Tracer les courbes représentatives de $n'(\omega)$ et $n''(\omega)$. Commenter.

SUSCEPTIBILITÉ D'UN DIÉLECTRIQUE

On étudie un modèle microscopique de milieu diélectrique parfait, homogène, isotrope, localement neutre.

Il est constitué d'atomes schématisés selon le modèle de THOMSON : chaque noyau, de charge $+e$, est supposé fixe, l'électron de charge $-e$, qui lui est associé est soumis de sa part à une force de rappel $\vec{f} = -\lambda \vec{u}$ où \vec{u} est le vecteur position de l'électron par rapport au noyau autour duquel il est lié et λ une constante positive.

On note N le nombre d'atomes par unité de volume et m la masse d'un électron. On étudie la propagation d'une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique, décrite en notation complexe par :

$$\vec{E}(M,t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

- Écrire l'équation régissant le mouvement d'un électron.
La simplifier compte tenu du fait que l'électron n'est pas relativiste.
- Définir et exprimer le vecteur densité de courant \vec{j} lié au mouvement des électrons du milieu.
- Établir l'expression de la susceptibilité électrique $\underline{\chi}_e(\omega)$ du milieu étudié.
Tracer les courbes représentant sa partie réelle et sa partie imaginaire en fonction de ω .
- Déterminer l'équation de dispersion $\underline{k}^2 = f(\omega^2)$.
Tracer la courbe correspondante.
Dans quel domaine de fréquence l'onde peut-elle se propager dans le milieu ?

EFFET FARADAY

On considère un modèle simplifié de la matière dans lequel le nuage électronique d'un atome est représenté par son centre d'inertie G_- de masse m , de charge q . Le centre d'inertie de l'atome G_+ est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen et on pose $\vec{A} = \overrightarrow{G_+ G_-}$.

Le nuage est soumis à une force de rappel $\vec{F} = -k \vec{A}$. On soumet le système à l'action d'un champ électrique sinusoïdal : $\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$. On applique également un champ magnétique statique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ (avec $B_0 > 0$).

On travaille en régime sinusoïdal forcé. Il y a N atomes par unité de volume.

- Quelle est la relation entre \vec{A} et \vec{E} ?

2. Montrer que le vecteur polarisation \vec{P} peut se mettre sous la forme :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \chi_e & i b & 0 \\ -i b & \varepsilon_0 \chi_e & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \chi_e \end{pmatrix} \vec{E}$$

où χ_e et b sont des constantes à déterminer. On considèrera que $(k - m\omega^2)^2 \gg e^2 \omega^2 B_0^2$.

3. Le champ appliqué s'écrit : $\vec{E} = (E_{0x} \vec{u}_x + E_{0y} \vec{u}_y) e^{i(\omega t - kz)}$ où E_{0x} et E_{0z} sont constants. Établir la relation de dispersion et donner la polarisation de l'onde selon la valeur de k .
4. On applique à un tel milieu le champ $\vec{E} = E_{0x} e^{i\omega t} \vec{u}_x$ (en $z = 0$).
Donner le champ obtenu après un parcours de longueur d .
Comment évolue l'état de polarisation sur la distance d ?

RÉFLEXION TOTALE, ONDE ÉVANESCENTE

Un milieu diélectrique d'indice d'indice $n > 1$ occupe le demi-espace $y < 0$ tandis que l'air d'indice 1 occupe le demi-espace $y > 0$. Une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω , de vecteur d'onde \vec{k}_i , se propageant dans le milieu d'indice n tombe sur la surface de séparation $y = 0$ avec un angle d'incidence $(\vec{u}_y, \vec{k}_i) = \theta$. On pose $\alpha = \frac{n\omega}{c} \cos \theta$ et $\beta = \frac{n\omega}{c} \sin \theta$.

- Rappeler sans démonstration les lois de SNELL – DESCARTES.
Quelle est la valeur limite θ_L de θ au-delà de laquelle il y a réflexion totale ?
Dans toute la suite on supposera $\theta_L < \theta < \frac{\pi}{2}$.
- Le champ électrique de l'onde incidente s'écrit, en un point M de l'espace, en notation complexe : $\vec{E}_i = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{u}_x$ où E_0 est une constante réelle et $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$;
Exprimer le champ magnétique \vec{B}_i de l'onde incidente.
- Nous admettrons que le champ électrique de l'onde réfléchie s'écrit en notation complexe :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \vec{u}_x$$

Exprimer le champ \vec{B}_r de l'onde réfléchie.

- Montrer que l'onde incidente donne naissance, en plus de l'onde réfléchie décrite ci-dessus, à une onde transmise.
- On admet que le champ électrique de l'onde transmise s'écrit :

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{-k_2 y + j(\omega t - k_1 z)} \vec{u}_x$$

Établir une relation entre k_1 et θ , puis une relation entre k_2 et θ .

- (a) Déterminer le coefficient de réflexion en amplitude $\underline{r} = \frac{E_{0r}}{E_0}$, puis le coefficient de réflexion en énergie en $y = 0$.
(b) Déterminer le coefficient de transmission en amplitude $\underline{t} = \frac{E_{0t}}{E_0}$, puis le coefficient de transmission en énergie en $y = 0$.
(c) Conclure quant au transfert en énergie.

7. Le milieu diélectrique, d'indice $n > 1$, occupe des domaines $y < 0$ et $y > L$, tandis que l'air, d'indice 1, occupe la zone $0 < y < L$. Une onde plane progressive harmonique se propage dans la zone $y < 0$ et arrive sur la surface de séparation $y = 0$ avec un angle $\theta > \theta_L$.
Expliquer qualitativement ce qu'il se passe si L est « assez faible » (à préciser).

ONDE DE SURFACE

La mer occupe le demi-espace $z < 0$. Elle est assimilée à un milieu conducteur de conductivité γ , de permittivité relative ε_r . L'air occupe le demi-espace $z > 0$, il a les mêmes propriétés électromagnétiques que le vide. On étudiera la propagation d'une onde électromagnétique dont on donne le champ magnétique :

→ dans l'air : $\vec{B}_1 = \underline{f}_1(z) e^{i(k_1 x - \omega t)} \vec{u}_y$

→ dans la mer : $\vec{B}_2 = \underline{f}_2(z) e^{i(k_2 x - \omega t)} \vec{u}_y$

où \underline{f}_1 et \underline{f}_2 sont des fonctions à valeurs complexes.

1. Établir l'équation de propagation de champ magnétique dans chacun des deux milieux.

En déduire les équations différentielles vérifiées par \underline{f}_1 et \underline{f}_2 .

2. On pose $\underline{f}_1(z) = A e^{i\underline{\alpha}z}$ et $\underline{f}_2(z) = A e^{i\underline{\beta}z}$ (où $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ sont complexes).

Déterminer les équations vérifiées par $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$.

Montrer que $\text{Im}(\underline{\alpha}) > 0$ et $\text{Im}(\underline{\beta}) < 0$.

3. En déduire les expressions des champs électriques \vec{E}_1 et \vec{E}_2 associés.

4. Grâce aux conditions de passage des champs, montrer que :

$$A = B ; \quad k_1 = k_2 \quad \text{et} \quad \underline{\alpha} \left(\varepsilon_r + i \frac{\mu_0 \gamma c^2}{\omega} \right) = \underline{\beta}$$

5. On donne $\gamma = 3 \text{ S.m}^{-1}$; $\nu = 30 \text{ kHz}$ et $\varepsilon_r = 80$.

Calculer les valeurs numériques de $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, k_1 et k_2 en faisant les approximations nécessaires.

6. Comparer les modules des composantes du champ électrique selon Ox et selon Oz du champ électrique dans l'eau.

Commenter.

POLARISATION D'ORIENTATION

Dans cet exercice, nous considérons un milieu matériel dont les molécules présentent un moment dipolaire permanent \vec{p} . En l'absence de champ électrique extérieur, sous l'effet de l'agitation thermique, l'orientation des dipôles est aléatoire et le vecteur polarisation est nul. Sous l'action d'un champ électrique, le matériau acquiert une polarisation \vec{P} relié au champ électrique par l'équation :

$$\tau \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P} = \varepsilon_0 \chi_0 \vec{E}$$

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique plane progressive, monochromatique, dont le champ électrique s'écrit en complexe :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

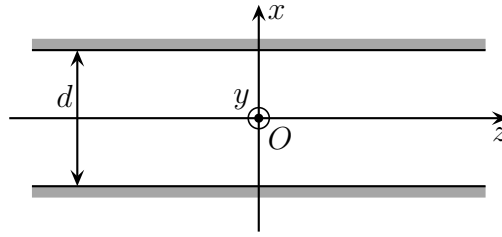
On suppose que le champ électrique de l'onde est transverse.

Le vecteur d'onde \vec{k} est éventuellement complexe. Ce milieu est conducteur, de conductivité σ et il n'a pas de propriétés magnétiques.

1. Quelle est la signification physique de la constante τ ?
2. (a) Déterminer la susceptibilité complexe $\underline{\chi}_e(\omega)$ de ce milieu, en fonction de τ , ω et χ_0 .
 (b) On pose $\underline{\chi}_e(\omega) = \chi'_e(\omega) - i \chi''_e(\omega)$.
 Exprimer $\chi'_e(\omega)$ et $\chi''_e(\omega)$, tracer l'allure de leur graphe.
 Interpréter le comportement du matériau aux fréquences faibles et aux fréquences élevées.
 (c) On se place dans le cas de l'eau : $\tau = 10^{-12}$ s, à la fréquence d'utilisation des fours à micro-onde : $f = 2,45$ GHz.
 Calculer $\omega\tau$, en déduire une expression simplifiée de $\underline{\chi}_e$.
3. Établir la relation de dispersion $\underline{k}^2 = f(\omega)$ en fonction de ω , c , χ_0 , τ et σ .
4. À la fréquence de 2,45 GHz utilisée dans les fours à micro-onde, l'eau a une permittivité relative $\underline{\varepsilon}_r$ de module $|\underline{\varepsilon}_r| = 76$.
 (a) Pour l'eau pure, $\sigma = 10^{-7}$ S.m⁻¹.
 Comparer $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}$ et $\chi_0 \omega \tau$ puis conclure.
 (b) Une pâte alimentaire humide (de la pâte à brioche par exemple) contient toujours des composés ioniques. On considère que le produit $\chi_0 \tau$ pour la pâte humide est du même ordre de grandeur que pour l'eau. La conductivité de la pâte est $\sigma = 0,01$ S.m⁻¹.
 Les sels minéraux ont-ils une influence ?
 (c) En déduire une expression simplifiée de \underline{k}^2 .
5. On pose $\underline{k} = k_0 e^{-i\Phi}$.
 Donner les expressions de k_0 et Φ en fonction de χ_0 , ω , τ et des constantes usuelles.
6. On suppose que $\vec{k} = \underline{k} \vec{u}_z$.
 Montrer que l'onde est absorbée par le milieu et déterminer la distance caractéristique d'atténuation de l'onde en amplitude, notée δ .
7. (a) Dans le cas de l'eau, calculer Φ et δ .
 (b) Même question dans le cas d'une pâte alimentaire sèche de permittivité relative $\varepsilon_r = 10$ et de même temps de relaxation que l'eau.
 Conclure.
8. Donner un ordre de grandeur de la taille caractéristique de la pâte pour que la puissance fournie par l'onde soit à peu près uniforme dans tout son volume. On s'intéressera à une pâte humide puis à une pâte sèche.
9. Pour éviter que les micro-ondes ne sortent du four, on recouvre ses parois d'une épaisseur e d'aluminium.
 Interpréter et évaluer l'épaisseur e minimale nécessaire.

PRINCIPE DE GUIDAGE D'UNE ONDE LUMINEUSE

On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique de pulsation ω dans un guide représenté sur la figure ci-dessous :



Ce guide est constitué d'une couche cœur infinie d'arséniure de gallium (GaAs), d'épaisseur d , insérée entre deux plans parfaitement conducteurs, totalement réfléchissants. L'arséniure de gallium est un matériau semi-conducteur que l'on considérera comme un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope et non magnétique. À la pulsation ω de l'onde, son indice vaut $n = 3,3$.

1. Montrer que le champ électrique de l'onde obéit à l'équation :

$$\Delta \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 n^2 \vec{E} = \vec{0}$$

2. Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par le champ électromagnétique ?
3. On se limite au cas de la propagation des ondes transverses électriques pour lesquelles le champ \vec{E} est orienté selon Oy et on cherche une solution de l'équation vérifiée par \vec{E} sous la forme :

$$\vec{E}(M,t) = \text{Re}(F(x,y) e^{i(\beta z - \omega t)}) \vec{u}_y$$

où β est une constante positive.

- (a) Justifier le fait que $F(x,y)$ ne dépendent pas de y .
- (b) Écrire l'équation différentielle et les conditions aux limites vérifiées par $F(x)$. On posera $k = \frac{\omega}{c}$ où c est la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide. Montrer que ces conditions ne peuvent être satisfaites que si $\beta < kn$.
- (c) On pose $\alpha^2 = k^2 n^2 - \beta^2$ avec α positif. Montrer alors que les solutions n'existent que pour des valeurs discrètes α_p de α que l'on déterminera.
- (d) Dans le cas d'une onde de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 1,4 \mu\text{m}$, comment doit-on choisir l'épaisseur d de la couche de GaAs pour que le guide n'admette qu'un seul mode propre ?

4. On se place dans les conditions où le guide n'admet qu'un seul mode. Donner l'expression du champ électrique correspondant à ce mode.