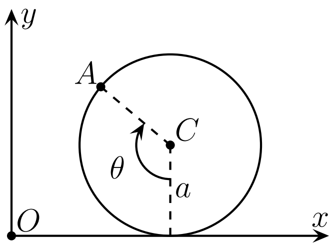
Roue de vélo

Une roue circulaire de rayon a roule sans glisser sur l'axe (Ox) tout en restant dans le plan (Oxy). Un point A de la roue coïncide à l'instant $t = 0$ avec l'origine du repère. Le centre C a une vitesse constante $\vec{v}_0$.



1. Déterminer les coordonnées de A à l'instant t.
2. Calculer le module du vecteur vitesse de A et commenter.

Mouvement parabolique

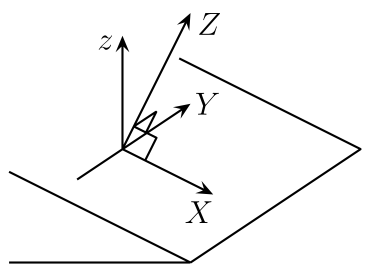
Un point mobile M décrit une parabole d'équation $y = \alpha\, x^2$ ($\alpha > 0$). La composante v_x de sa vitesse est constante.

Déterminer v_y et la norme v de la vitesse en fonction de v_x et de x.

Plan incliné

Un objet représenté par un point matériel M glisse sans frottements sur un plan incliné. Sont définis par rapport à ce plan :

- (Oz) : axe vertical ;
- (OX) : axe de plus grande pente orienté vers le bas ;
- (OZ) : axe normal au plan incliné ;
- α : angle (Oz),(OZ) (remarquons que α est également l'angle de la ligne de la plus grand pente avec l'horizontale).

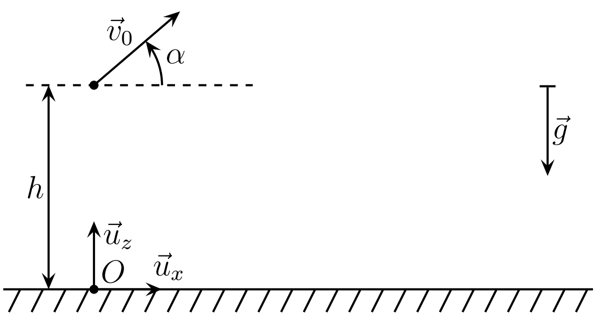


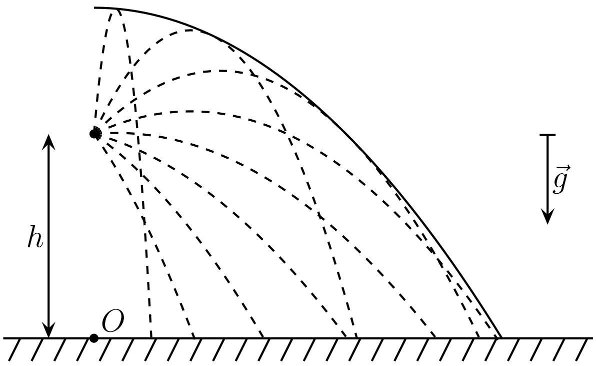
La position d'un point sur le plan incliné est représenté par les coordonnées (X,Y).

1. **Étude statique.** M est immobile, retenu par un fil parallèle au plan incliné.
   Déterminer la tension du fil ainsi que la réaction du plan incliné.
2. **Étude dynamique.**
   Déterminer l'accélération du M, la réaction du plan et la nature des trajectoires en fonction de la vitesse initiale $\vec{v}_0$.

Parabole de sécurité

On considère un objet lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ d'une hauteur h.

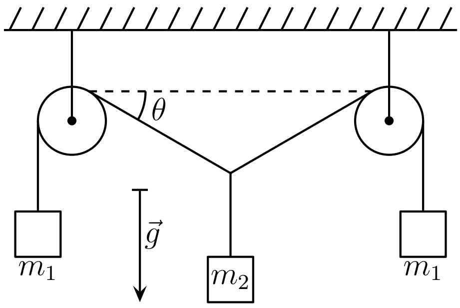




1. Déterminer la trajectoire de l'objet.
2. Déterminer la flèche de l'objet, *i.e.* la cote du point le plus haut atteint.
3. Déterminer l'expression de la courbe limitant les points accessibles des points non accessibles par un tir à v_0 fixé et à α variable (cf. schéma ②). *En dessous de cette courbe, un point peut éventuellement être atteint, au dessus de cette courbe, c'est impossible, le lieu est en sécurité, d'où le nom donné à cette courbe.*

Poulies à l'équilibre

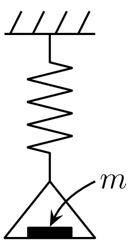
Les poulies et les fils disposés selon le schéma ci-dessous sont idéaux.



Déterminer l'angle θ à l'équilibre.

Ne pas tomber

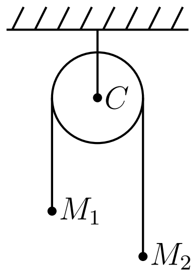
À l'extrémité inférieure d'un ressort vertical de raideur k est suspendu un plateau de masse négligeable sur lequel on a placé un objet de masse m. On lâche le plateau sans vitesse initiale après l'avoir descendu d'une altitude A par rapport à sa position d'équilibre. Les frottements sont négligés.



Déterminer la valeur de A à ne pas dépasser afin que l'objet ne décolle jamais du plateau.

Machine d'Atwood

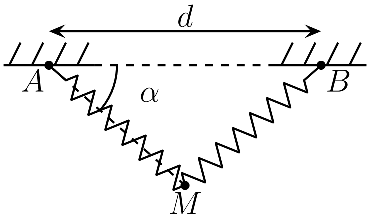
Deux objets de masse m_1 et m_2 , assimilés à des points matériels, sont suspendus aux deux brins d'un fil idéal qui passe dans la gorge d'une poulie idéale, accrochée en un point fixe. On pose : $\vec{a}(M_1) = a_1(t)\,\vec{u}_z$ et $\vec{a}(M_2) = a_2(t)\,\vec{u}_z$.



Déterminer $a_1(t)$ et $a_2(t)$ ainsi que l'intensité des forces T_1 et T_2 que le fil exerce sur M_1 et M_2.

Un certain équilibre

Un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0, est fixé par ses extrémités en deux points A et B de même altitude et distants de d. Il est lesté en son milieu par un objet quasi ponctuel de masse m.



1. Montrer que la force que le ressort exerce en chacun de ses point est la même (en intensité) que celle qu'elle exerce à son extrémité.
2. Déterminer l'angle α à l'équilibre analytiquement et numériquement.

Données : $m = 1{,}2$ kg ; $g = 9{,}8$ m.s^{-2} ; $\ell_0 = 1{,}0$ m ; $k = 2{,}3.10^2$ N.m^{-1} ; $d = 1{,}2$ m.

Chute avec frottements fluides quadratiques

Un objet de masse m, modélisé par un point matériel, est lancé verticalement, vers le haut depuis le point O avec une vitesse de valeur v_0. L'action de l'air se réduit à une force de frottement opposée à la vitesse et de norme $f = k\,v^2$. On note $v_{\text{lim}} \overset{\text{not}}{=} \sqrt{\dfrac{m\,g}{k}}$ et $\ell \overset{\text{not}}{=} \dfrac{m}{2\,k}$.

1. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $\xi(z) \overset{\text{not}}{=} v^2(z)$ lors de la montée et lors de la descente.
2. Résoudre cette équation différente pour la montée et la descente.
3. Déterminer la vitesse lorsque l'objet retombe en O.

Chute d'une bille de plomb

On considère une sphère de plomb de rayon a et de masse volumique ρ.

1. Dans un premier temps, la sphère est suspendue à un point fixe O par un fil et se trouve placée dans une soufflerie ; la vitesse du vent, horizontale, a pour valeur v_0 et le fil fait alors un angle α avec la verticale.
   Sachant que la résistance de l'air est de norme $f = k\,\pi\,a^2\,{v_0}^2$ où v_0 est la vitesse du vent, déterminer le coefficient k dans le système S.I.
2. Cette sphère est maintenant lâchée dans l'air immobile, hors de la soufflerie, sans vitesse initiale. La norme de la force de frottement s'écrit alors $f = k\,\pi\,a^2\,v^2$ où v est cette fois ci la vitesse de l'objet et avec le même k qu'à la question précédente.
   (a) Justifier la différence entre les expressions des forces de frottement à la première et à la deuxième question.
   (b) Calculer sa vitesse limite ; à quelle hauteur de chute dans le vide cette vitesse correspond-elle ?
   (c) Pour une chute de deux mètres de haut, quelle fraction du poids la force de frottement représente-t-elle ?

Données : $a = 1{,}0$ cm ; $\rho = 11{,}34$ g.cm^{-3} ; $v_0 = 10$ m.s^{-1} ; $\alpha = 1{,}68.10^{-1}$ rad ; $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

Centrifugeuse

Au cours de leur entraînement, pour habituer leurs organismes à supporter les fortes accélérations du décollage et de l'entrée dans l'atmosphère, les cosmonautes sont placés sur un siège fixé à l'extrémité d'un bras de longueur ℓ, en rotation de vitesse angulaire ω dans un plan horizontal.

Calculer ω en tours par minute, si $\ell = 5{,}0$ m et si l'accélération obtenue a pour valeur $6\,g$. Donner la nationalité de ces hommes de l'espace.
Donnée : $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

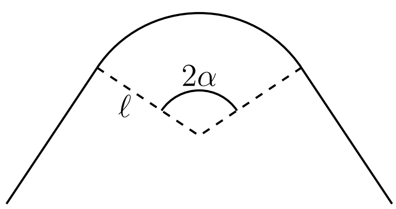
Spirale

Un mobile M parcourt avec une vitesse de norme constante v la spirale d'équation polaire : $r(\theta) = a\,\theta$.

Exprimer en fonction de θ et de v le vecteur vitesse de M.

Les dangers de la vitesse

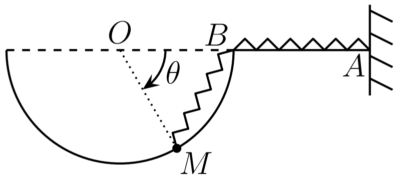
Une automobile, assimilée à un point matériel, circule à la vitesse v uniforme, sur une piste au profil accidenté. Elle franchit une bosse, modélisée par deux portions rectilignes raccordées par un arc de cercle de rayon ℓ et d'angle 2α.



À quelle condition garde-t-elle le contact avec le sol ?

Point matériel dans une rigole

Un point matériel M de masse m dans le référentiel du laboratoire est solidaire d'une rigole circulaire (de centre O et de rayon b) sur laquelle il peut glisser sans frottement. Il est fixé en un point A du plan horizontal par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Le bord de la rigole est à la distance ℓ_0 du point A.



1. Déterminer la position d'équilibre θ_0 en fonction de m, g, k et b.
2. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de M vérifiée par $\theta(t)$.
3. Déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre. On pourra poser $\theta(t) = \theta_0 + \varepsilon(t)$ dans l'équation différentielle avec $\varepsilon(t) \ll \theta_0$ et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $\varepsilon(t)$.

Quatre souris en formation

Quatre souris A, B, C et D se trouvent aux quatre coins d'un carré fictif $ABCD$ de côté a et chacune court en direction de l'autre avec la même valeur constante de la vitesse v. A court vers B, B vers C, C vers D et D vers A. On choisit le centre du carré initial comme origine O du repère.

1. Au bout de combien de temps se rencontreront-elles ?
2. Quelle distance L auront-elles parcourue ?
3. Déterminer la trajectoire $r(\theta)$ de la souris A avec comme positions initiales en coordonnées polaires : $A\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $B\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi}{4}\right)$, $C\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $D\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},-\dfrac{3\,\pi}{4}\right)$.
4. Déterminer les équations du mouvement $r(t)$ et $\theta(t)$.

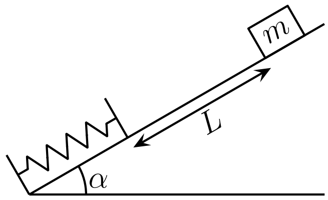
promeneur du dimanche

Un homme partant du point O décrit l'axe (Oy) avec la vitesse constante v. Son chien part du point A sur (Ox) perpendiculaire à (Oy) ($OA = a$) et se dirige constamment vers lui à la vitesse $2v$.

Déterminer la trajectoire du chien et le temps mis pour rejoindre son maître.

Masse et ressort

On abandonne sans vitesse initiale un cube de masse m sur un plan matériel incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le cube glisse alors sans frottement sur la ligne de plus grande pente sur une distance L avant de rencontrer un butoir solidaire d'un long ressort (idéal) de raideur k, disposé comme l'indique le schéma ci-contre.

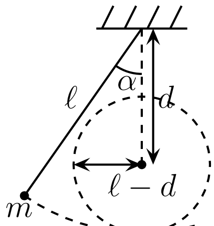


Les masses du ressort et du butoir sont négligeables, on admettra que cela implique la continuité de la vitesse de la masse lors du choc. On modélisera le cube par un point matériel.

1. Déterminer la longueur maximale dont le ressort est comprimé.
2. En quel point la vitesse du cube est-elle maximale ?

Un pendule qui s'enroule

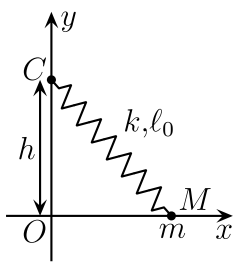
Un point M de masse m est suspendu à un point fixe A par un fil de longueur ℓ, constituant ainsi un pendule ; on abandonne ce pendule sans vitesse initiale, le fil faisant avec la verticale un angle α. Une tige fixe est placée à l'aplomb du point A à la distance $d < \ell$ de A, de sorte que le fil heurte cette tige lorsque le pendule passe par sa position d'équilibre.



1. Montrer que la vitesse de M se conserve au cours du choc.
2. En prenant $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, déterminer la condition pour que le fil s'enroule autour de la tige en restant tendu.

Oscillateur anharmonique

On dispose d'un ressort élastique de raideur k, de longueur naturelle ℓ_0 (longueur au repos) et de masse négligeable. L'une des extrémités de ce ressort est relié à un point C et l'autre à un anneau de masse m, coulissant sans frottements sur un axe (Ox) horizontal dont la distance h au point C peut être réglée à volonté.



1. Que peut-on prévoir concernant le comportement du système pour les cas : $\ell_0 < h$ et $\ell_0 > h$? On envisagera d'abord une réponse intuitive, puis une étude fondée sur l'énergie potentielle de ce système à évolution conservative pour vérifier ces affirmations.

2. Le cas $\ell_0 = h$ est un cas limite intéressant correspondant à des oscillations qualifiées d'anharmoniques, car non sinusoïdales. Ayant réglé la distance OC pour se trouver dans une telle situation, on abandonne sans vitesse initiale l'anneau à la distance $x = a$ du point O.

   Montrer que l'intégrale première du mouvement (*i.e.* l'écriture de la conservation de l'énergie mécanique) se simplifie en : $\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \dfrac{k}{8\,{\ell_0}^2}(a^4 - x^4)$ après un développement limité à l'ordre le plus bas de l'énergie potentielle.

   En déduire que la période d'un tel mouvement est de la forme $T = 8\,I\left(\dfrac{\ell_0}{a}\right)\left(\dfrac{m}{k}\right)^{1/2}$, où $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}} \simeq 1{,}31$.

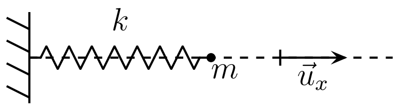
Oscillations à une dimension

Une particule de masse m se déplace sans frottement sur un axe (Ox) galiléen dans le champ de force $F(x)$ dérivant de l'énergie potentielle : $E_\mathrm{p}(x) = \dfrac{m\,\omega^2}{2}\left(x^2 + \dfrac{a^4}{x^2}\right)$, où ω et a étant des constantes positives. On se restreint à $x > 0$.

1. (a) Montrer qu'il existe une position d'équilibre stable.
   (b) Calculer la période des oscillations autour de cette position d'équilibre.
2. (a) La particule occupant la position d'équilibre avec une vitesse initiale de valeur v_0 quelconque, montrer qu'elle décrit ultérieurement un mouvement périodique.
   (b) Exprimer la vitesse $\dot{x}$ en fonction de la position et des autres constantes de l'énoncé.
   (c) En remarquant que $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\dot{x}}$, écrire l'intégrale permettant de calculer la période T des oscillations.
   (d) Montrer que l'intégrale précédente s'exprime en fonction de $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u\,(1-u)}} = \pi$.
   (e) Commenter le résultat obtenu.

Oscillateur amorti

On considère une masse au bout d'un ressort horizontal soumis à une force de frottement solide.



On rappelle qu'un frottement solide se caractérise par :
- ➜ lorsque $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{f}\cdot\vec{v} < 0$ et $\|\vec{f}\| = \lambda\,N$ où λ est le coefficient de frottement et N la norme de la réaction normale du support.
- ➜ lorsque $\vec{v} = \vec{0}$, $\|\vec{f}\| < \lambda N$.

On choisit l'origine du repère de telle sorte que lorsque la masse m est en O, le ressort a sa longueur naturelle. On note ${\omega_0}^2 = \dfrac{k}{m}$.

1. Montrer qu'il existe une plage d'équilibre, *i.e.* que l'on peut avoir $x(t) = \mathrm{C^{te}}$ pour x compris entre $-a$ et a (a à déterminer).
2. Écrire l'équation différentielle du mouvement. On introduira $\varepsilon = \pm 1$ tel que $\varepsilon\,\dot{x} < 0$.
3. (a) Déterminer la solution $x_1(t)$ de l'équation différentielle lorsque $\varepsilon = 1$ (préciser le sens du mouvement) avec $x_1(0) = X_1 > a$ et $\dot{x_1}(0) = 0$.
   (b) Déterminer la solution $x_2(t)$ de l'équation différentielle lorsque $\varepsilon = -1$ (préciser le sens du mouvement) avec $x_2(0) = X_2 < -a$ et $\dot{x_2}(0) = 0$.
4. (a) Montrer que, dans le plan de phase $(x,\dfrac{\dot{x}}{\omega_0})$, $x_1(t)$ correspond à un demi cercle, dont on déterminera le rayon, situé dans le demi-plan inférieur et centré sur $(a,0)$.
   (b) Montrer que, dans le plan de phase $(x,\dfrac{\dot{x}}{\omega_0})$, $x_2(t)$ correspond à un demi cercle, dont on déterminera le rayon, situé dans le demi-plan supérieur et centré sur $(-a,0)$.
   (c) En déduire la construction graphique de la trajectoire du mouvement dans le plan de phase à partir de la condition initiale : $x(0) = X_0 > a$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Théorème du viriel

Soit une particule de masse m, de vitesse $\vec{v}$, soumise à la force $\vec{F}$ et repérée par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, O étant un point fixe d'un référentiel galiléen.

1. (a) En posant $A = m\vec{v}\cdot\vec{r}$, exprimer $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $\vec{F}\cdot\vec{r}$ et de l'énergie cinétique E_c de la particule.
   (b) En déduire que si la particule reste à distance finie du point O et garde une vitesse finie, on a la relation : $\langle E_\mathrm{c}\rangle = -\dfrac{1}{2}\langle\vec{F}\cdot\vec{r}\rangle$ où le symbole $\langle\ \ \rangle$ représente la valeur moyenne dans le temps prise sur une durée très longue.
2. On suppose maintenant que $\vec{F}$ dérive du potentiel $V(r) = -k\,r^{-n}$, *i.e.* s'écrit $\vec{F} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\,\vec{u}_r$.
   (a) Déduire de la question 1b une relation entre E_c et V.
   (b) Expliciter ce résultat quand $V(r)$ est un potentiel d'oscillateur harmonique ($n = -2$).

Associations de ressorts

Déterminer la constante de raideur du ressort équivalent à l'association de deux ressorts idéaux de même longueur naturelle ℓ_0 mais de raideur k_1 et k_2 différentes mis bout à bout (association série) ou côte à côte (association parallèle).

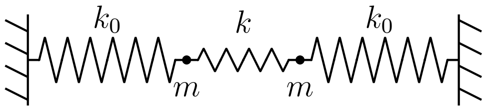
Mesure de viscosité

Une sphère de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0. Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η, la sphère est soumise à une force de frottement donnée par la formule de Stokes : $\vec{f} = -6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la sphère dans le liquide. On néglige la poussée d'Archimède.

1. Écrire l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période T.
2. Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables, la période des oscillations est T_0. Déterminer le coefficient de viscosité η du liquide en fonction de m, r, T et T_0.

COUPLAGE D'OSCILLATEURS

On considère le dispositif représenté sur le schéma ci-dessous. Les positions des deux masses sont représentées par leur abscisses comptées à partir de leur position d'équilibre.

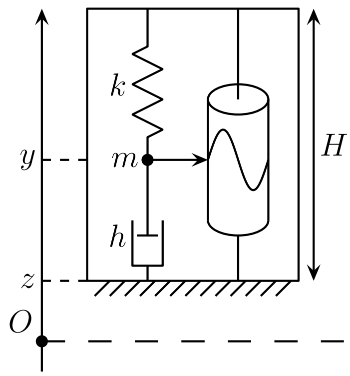


On suppose que lorsque $x_1 = x_2 = 0$, les ressorts ont leurs longueurs naturelles. Les deux masses glissent sans frottement sur l'axe (Ox) qui est horizontal.

1. Écrire les équations du mouvement des deux masses.
2. On pose $X(t) = x_1(t) + x_2(t)$ et $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$. À quelles équations satisfont $X(t)$ et $x(t)$?
3. À l'instant $t = 0$, les conditions initiales sont les suivantes : $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x_1}(0) = v_0$, $\dot{x_2}(0) = 0$. Déterminer les expressions complètes de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

SISMOGRAPHE

Un sismographe est constitué d'un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0, d'un amortisseur de coefficient de frottement h et d'une masse m considérée comme ponctuelle. Le ressort et l'amortisseur sont fixés à un cadre rigide. Un stylet reproduisant les déplacements verticaux de la masse m par rapport au cadre est fixé au niveau de la masse m (voir figure).



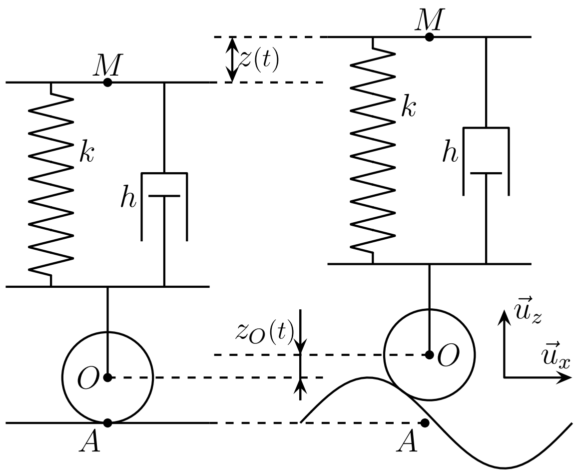
Le cadre est mis en mouvement vertical sinusoïdal : $z(t) = Z\cos(\omega t)$. Le référentiel $\mathscr{R}$ repéré par $(O,\vec{u}_z)$ est supposé galiléen.

1. Déterminer l'équation d'évolution de $y(t)$, cote de la masse M dans le référentiel $\mathscr{R}$.
2. En déduire l'équation d'évolution de $x(t)$, écart entre la longueur $\ell(t)$ du ressort à un instant t et sa longueur $\ell_{\text{éq}}$ à l'équilibre.
3. Déterminer l'amplitude réelle X des oscillations de la masse et tracer l'allure pour quelques valeurs du facteur de qualité.

4. Comment choisir Q pour que X vaille Z à 5 % près sur la plus grande plage de pulsations possible ?

Amortisseur d'un véhicule

Un véhicule automobile est modélisé par une masse m placée en M et reposant sur une roue de centre O par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k mis en parallèle avec un amortisseur de coefficient d'amortissement h. En toutes circonstances, l'axe OM reste vertical. On se propose d'étudier le comportement du véhicule lorsqu'il a la vitesse v suivant (Ox) sur une route dont le profil impose au centre O de la roue un déplacement $z_O(t) = a \cos\left(2\,\pi\,\dfrac{x}{\lambda}\right)$ par rapport à sa position initiale.



On repère le mouvement de la masse par son déplacement $z(t)$ par rapport à sa position au repos lorsque le véhicule est immobile.

On admet que le référentiel lié à la voiture et repéré par $(A,\vec{u}_x,\vec{u}_z)$ est galiléen.

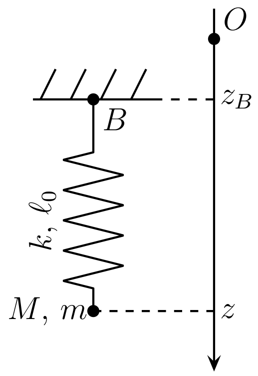
1. Que représente λ dans l'expression de $z_O(t)$?
2. Établir l'équation différentielle en $z(t)$ du mouvement de la masse lorsque la vitesse v suivant x est constante.
3. Déterminer l'amplitude du mouvement d'oscillation vertical du véhicule en régime permanent. À quelle allure convient-il de rouler pour que cette amplitude soit aussi faible que possible ?

Bilan énergétique en régime forcé

Un ressort idéal de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0 est disposé verticalement.

Son extrémité supérieure B est reliée à un bâti dont on peut faire varier la cote de manière sinusoïdale, $z_B(t) = A \cos(\omega\,t)$, et un corps M assimilable à un point de masse m est accroché à son autre extrémité.

L'action de l'air ambiant se traduit par une force de frottement du type $\vec{f} = -h\vec{v}$, $\vec{v}$ étant la vitesse de M dans le référentiel $\mathscr{R}(O,\vec{u}_z)$ avec $\vec{u}_z$ vers le bas, et h un coefficient positif.



1. Déterminer l'équation d'évolution de la cote $z(t)$ de M. On introduira la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.
2. En déduire l'équation d'évolution de $x(t) = z(t) - z_{\text{éq}}$, écart à l'équilibre de la masse.
3. Déterminer les amplitudes complexes $\underline{X_{\text{m}}}$ et $\underline{V_{\text{m}}}$ respectivement de l'écart à l'équilibre et de la vitesse de M.
4. Déterminer les déphasages ϕ et φ respectivement entre l'écart à l'équilibre $x(t)$ et le terme excitateur $z_B(t)$ puis entre la vitesse $\dot{x}(t)$ et le terme excitateur $z_B(t)$.
5. En reprenant la notation réelle, déterminer les expressions de :
   (a) l'énergie $\mathscr{E}_{\text{f}}$ fournie par les frottements en une période ;
   (b) l'énergie $\mathscr{E}_{\text{r}}$ fournie par le ressort en une période ;
   (c) l'énergie $\mathscr{E}_{\text{p}}$ fournie par le poids en une période ;
   (d) l'énergie cinétique $\mathscr{E}_{\text{c}}$ maximale ;
   (e) la différence $\Delta\mathscr{E}_{\text{pp}}$ des énergie potentielle entre les cotes maximale et au repos de M.
6. Écrire et vérifier le bilan énergétique en fonction des énergies calculées à la question précédente.

Particule dans un puits de potentiel

On considère un point matériel M de masse m astreint à se déplacer sur un axe (Ox) avec $x \geqslant 0$ et soumis à un champ de forces dérivant du potentiel $E_{\text{p}}(x) = E_0 \left(\dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{a}{x}\right)$.

1. Tracer l'allure de $E_{\text{p}}(x)$.
2. Déterminer la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ en fonction de E_0 et a.
3. (a) Faire un développement limité à l'ordre 2 de $E_{\text{p}}(x)$ autour de $x_{\text{éq}}$ et en déduire l'équation d'évolution de $\varepsilon(t)$ défini par $x(t) = x_{\text{éq}} + \varepsilon(t)$.
   (b) Montrer que l'on a, alors, $x(t) = x_{\text{éq}} + X_{\text{m}} \cos(\omega_0\, t + \varphi)$ où ω_0 est une pulsation à déterminer en fonction de E_0 et $x_{\text{éq}}$ et $X_{\text{m}} \ll x_{\text{éq}}$.
4. (a) Faire un développement limité à l'ordre 3 de $E_{\text{p}}(x)$ autour de $x_{\text{éq}}$ et en déduire la nouvelle équation d'évolution de $\varepsilon(t)$.
   (b) On suppose que $x(t) = x_{\text{éq}} + A + X_{\text{m}} \cos(\omega_0\, t) + B \cos(2\,\omega_0\, t)$ avec $A \ll X_{\text{m}}$, $B \ll X_{\text{m}}$ et $X_{\text{m}} \ll x_{\text{éq}}$.
   Déterminer les expressions de A et A.
   (c) Commenter.

On rappelle que, pour $\varepsilon \ll 1$: $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\,\varepsilon + \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}\,\varepsilon^2 + \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)}{6}\,\varepsilon^3$.

Tournez manège

À la fête foraine, un observateur H regarde depuis le sol un manège. Il observe les mouvements d'un cheval C animé d'un mouvement alternatif vertical par rapport au plateau et d'une voiture V fixé au plateau du manège.

On note $\mathscr{R}_\mathrm{C}$, $\mathscr{R}_V$ et $\mathscr{R}_H$ les référentiels respectivement liés à C, V, H. La voiture se trouve à $d_V = 5{,}0$ m de l'axe de rotation du manège et l'observateur H à $d_H = 10$ m.

1. Décrire :
   (a) la trajectoire de C dans $\mathscr{R}_V$ et dans $\mathscr{R}_H$;
   (b) la trajectoire de H dans $\mathscr{R}_V$.
2. Déterminer, pour un tour de manège :
   (a) la distance parcourue par V dans $\mathscr{R}_H$;
   (b) celle parcourue par H dans $\mathscr{R}_V$.

Palet sur une demi-sphère

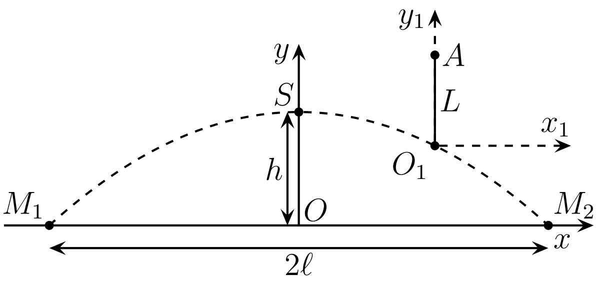
Un palet que l'on considérera ponctuel est placé au sommet d'une demi-sphère de rayon R fixée à une plate-forme mobile. La plate-forme tractée se met en mouvement avec une accélération horizontale a_0 constante.

En négligeant tout frottement avec l'air et avec demi-sphère, déterminer l'équation donnant l'angle de rupture du contact entre le palet et la demi-sphère en fonction de a_0/g et résoudre graphiquement l'équation précédente.

Poids apparant dans un véhicule

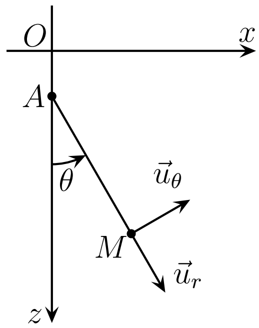
Un véhicule a un mouvement de translation uniforme de vitesse $\vec{v}$ sur une route curviligne d'équation cartésienne $y = f(x)$. On lui associe un référentiel $\mathscr{R}'$ de centre O_1 et en translation par rapport au référentiel terrestre $\mathscr{R}$. Un passager modélisé par un point matériel A de masse m est lié à l'origine O_1 par un siège modélisé par une tige verticale de longueure fixe L. On a donc A immobile dans $\mathscr{R}'$.

1. Montrer que la composante cartésienne, suivant la verticale ascendante (Oy) de l'accélération de O_1 dans $\mathscr{R}$ s'écrit $\dfrac{v^2\,f''}{(1+f'^2)^2}$, f' et f'' désignant les dérivées première et seconde de f par rapport à x.
2. Calculer la composante verticale R_y de la force que le siège exerce sur le passager, c'est ce que l'on appelle poids apparant.
3. Montrer que $R_y = P$ (poids du passager) lorsque le véhicule est au repos et comparer le poids apparant au poids du passager suivant que la route forme une bosse ou un creux.
4. Le profil de la route forme une bosse assimilable à un arc de parabole dont les caractéristiques sont données sur la figure suivante.



Pour quelle valeur de la vitesse y a-t-il impesanteur (poids apparant nul) en S ?

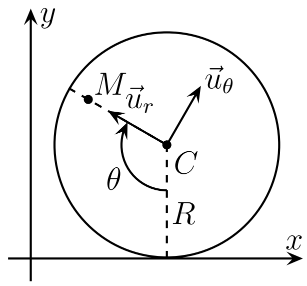
Oscillateur paramétrique mécanique



1. Établir l'équation d'évolution de $\theta(t)$ d'un pendule simple réalisé avec une masse m placée à l'extrémité d'une tige de masse négligeable et de longueur ℓ dont l'autre extrémité A oscille verticalement autour de l'origine O : $\overrightarrow{OA} = h\,\cos(\gamma\,t)\,\vec{u}_z$. On note ${\omega_0}^2 = \dfrac{g}{\ell}$ et $\alpha = \dfrac{h\,\gamma^2}{g}$.
2. En supposant que le pendule oscille à faible amplitude ($i.e.$ $\sin\theta \simeq \theta$), on va montrer qu'il existe une valeur de γ telle que l'amplitude des oscillation augmente : c'est la résonance paramétrique.
   (a) Après avoir simplifié puis multiplié par $\dot{\theta}$ l'expression précédente, montrer que l'on a :
   $$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\theta}^2 + {\omega_0}^2\,\theta^2) = -{\omega_0}^2\,\alpha\,\theta\,\dot{\theta}\,\cos(\gamma\,t)$$
   (b) On suppose que $\theta(t) = A(t)\,\cos(\omega_0\,t+\varphi)$ avec $A(t)$ lentement variable sur une période propre, $i.e.$ $\dot{A}\,T_0 \ll A$.
   Montrer, dans ces conditions, que l'équation précédente se ramène à :
   $$\frac{1}{A^2}\frac{\mathrm{d}A^2}{\mathrm{d}t} = \omega_0\,\alpha\,\sin(2\,\omega_0\,t + 2\,\varphi)\,\cos(\gamma\,t)$$
   (c) Calculer la valeur moyenne de $\dfrac{1}{A^2}\dfrac{\mathrm{d}A^2}{\mathrm{d}t}$ et montrer que pour $\gamma = 2\,\omega_0$, on a :
   $$\left\langle \frac{1}{A^2}\frac{\mathrm{d}A^2}{\mathrm{d}t} \right\rangle \neq 0$$
   Conclure sur l'augmentation de l'amplitude des oscillations.

Valve sur une roue

Une roue de rayon R et de centre C roule sans glisser sur l'axe (Ox) en restant dans le plan (xOy). La valve est au point M à une distance b de l'axe de la roue. On note v_C (resp. a_C) la norme de la vitesse (resp. de l'accélération) de C par rapport à la route.



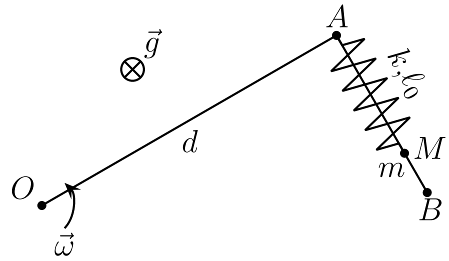
1. En utilisant la méthode du changement de référentiel, exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération de M par rapport à la route.
2. Déterminer la norme maximale du vecteur accélération de la valve.
   Faire l'application numérique avec $R = 30$ cm, $b = 20$ cm, $v_C = 100$ km.h^{-1} et $a_C = 2{,}0$ m.s^{-2}.

Périodes sidérales

1. **Jour solaire et jour sidéral**
   La durée du jour solaire moyen est la durée T_m qui sépare, en moyenne, deux positions successives du Soleil au zénith dans son mouvement dans le référentiel terrestre. La durée du jour sidéral est la durée T_s que met la Terre pour faire un tour sur elle-même dans le référentiel géocentrique (référentiel dans lequel le centre de la Terre est immobile).
   Montrer que $T_\mathrm{m} - T_\mathrm{s} = \dfrac{{T_\mathrm{m}}^2}{T_\mathrm{a} + T_\mathrm{m}}$ où T_a est la période de révolution de la Terre autour du Soleil.
   Calculer $T_\mathrm{m} - T_\mathrm{s}$ sachant que $T_\mathrm{m} = 86\,400$ s et $T_\mathrm{a} = 365{,}25\,T_\mathrm{m}$.
2. **Lunaison synodique et lunaison sidérale**
   La lunaison synodique est la durée T_n qui sépare deux positions successives de la nouvelle lune. La lunaison sidérale est la durée T_s de révolution de la Lune autour de la Terre dans le référentiel géocentrique (référentiel dans lequel le centre de la Terre est fixe).
   Montrer que $T_\mathrm{n} - T_\mathrm{s} = \dfrac{{T_\mathrm{s}}^2}{T_\mathrm{a} - T_\mathrm{s}}$ où T_a est la période de révolution de la Terre autour du Soleil.
   Calculer $T_\mathrm{n} - T_\mathrm{s}$ en jour, sachant que $T_\mathrm{s} = 27{,}3$ j et $T_\mathrm{a} = 365{,}25$ j.

Tachymètre

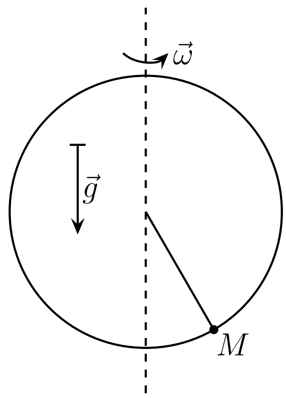
Le L métallique OAB tourne à vitesse angulaire constante ω dans le plan horizontal autour de l'axe vertical (Oz). Un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0 est fixé en A au dispositif et à son extrémité est attaché un anneau de masse m qui coulisse sans frottement sur la partie rectiligne AB. On désigne par $\ell_{\text{éq}}$ la longueur du ressort à l'équilibre dans le référentiel tournant.



1. Déterminer l'expression de $\ell_{\text{éq}}$ en fonction de ω.
2. L'appareil peut-il servir de tachymètre ?

Anneau sur un cerceau

Un anneau de masse m peut glisser sans frottement sur un cerceau de rayon R placée dans un plan vertical ; ce dernier tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de son diamètre vertical par rapport au référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. La position de l'anneau est repéré par l'angle θ.



Discuter, suivant les valeurs de R, m, g et ω les positions d'équilibre de l'anneau dans le référentiel lié au cerceau.

Manège

Un manège est en rotation à vitesse angulaire constante ω. Un objet est déposé sans vitesse initiale sur le plateau à la distance r_0 de l'axe. En supposant que l'objet peut se déplacer sans frottement sur le plateau du manège, étudier ses trajectoires dans le référentiel $\widetilde{\mathscr{R}}$ lié au sol lié au sol et dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié au manège suivant que l'objet est déposé par un expérimentateur lié au sol ou par un expérimentateur sur le manège.

Tir sportif

Un champion olympique de tir sportif décide de monter une salle d'entraînement au niveau de l'équateur terrestre.

1. On suppose que le pas de tir est sur l'équateur, que les cibles sont à $D = 100$ m vers l'est et que le tir est initialement horizontal.

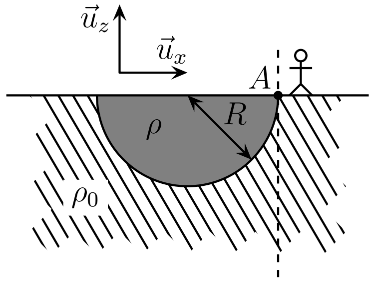
(a) Dans quelle sens (haut, bas, droite, gauche) les balles seront-elles déviées ?

(b) À combien se chiffrera cet écart si on suppose que le mouvement de la balle se fait sans frottement et qu'il dure $t_0 = 0{,}2$ s ?

2. Mêmes questions si le pas de tir est sur l'équateur et les cible sont à $D = 100$ m vers l'ouest.

Particularité géologique

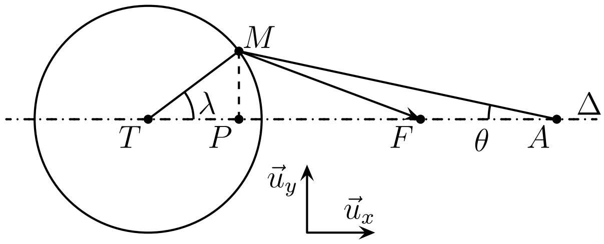
On modélise une particularité géologique (montagne érodée, nappe de pétrole, ...) par une demi sphère de rayon R de densité ρ à la surface de la Terre au sein d'une zone de densité $\rho_0 > \rho$.



1. Justifier que l'accélération de pesanteur $\vec{g}$ fait un angle avec la verticale attendue (en pointillés), c'est-à-dire la verticale qu'il y aurait eu s'il n'y avait pas eu de défaut.
2. Déterminer, au point A, cet écart angulaire α en fonction de g_0 (norme de l'accélération de pesanteur), ρ, ρ_0 et R. Pour cela, on montrera que le défaut est gravitationnellement équivalent à l'ajout, à une Terre sans défaut, d'une demi-sphère de densité $\rho - \rho_0$ et on cherchera la composante sur $\vec{u}_x$ de l'attraction gravitationnelle d'une telle demi-sphère.

Construction de Proctor

La construction de Proctor permet de déterminer très facilement la direction et l'importance relative du terme de marée dû à un astre. La construction est la suivante. On note T le centre de la Terre, R son rayon, A le centre de l'astre, M_A sa masse, Δ la droite (AT) et M le point où l'on veut déterminer la direction du terme de marée. On se place dans le plan ATM. P est le projeté de M sur Δ, F le point tel que $\overrightarrow{TF} = 3\,\overrightarrow{TP}$. Dans ces conditions le terme de marée est proportionnel à $\overrightarrow{MF}$.



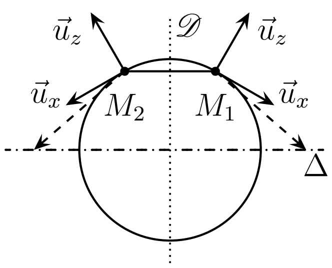
1. On se propose de démontrer la construction précédente.

   (a) Rappeler l'expression vectorielle du terme de marée en M noté $\vec{\mathscr{M}}_A(M)$.

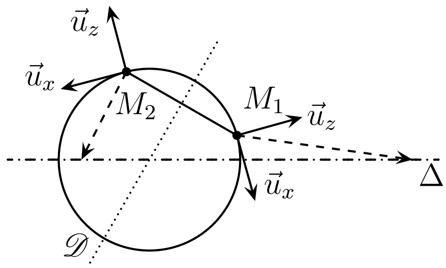
(b) En choisissant $\vec{u}_x = \dfrac{\overrightarrow{TA}}{\|\overrightarrow{TA}\|}$ et $\vec{u}_y = \dfrac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}$ et en notant $d = TA$, $R = TM$, $r = AM$ et λ l'angle $(\overrightarrow{TP},\overrightarrow{TM})$, montrer que $\vec{\mathscr{M}}_A(M) = \dfrac{G\,M_A\,R}{d^3}(2\,\cos\lambda\,\vec{u}_x - \sin\lambda\,\vec{u}_y)$. Comme l'astre responsable du terme de marrée est éloigné (!), on fera les calculs à l'ordre 1 en $\dfrac{R}{d}$ et θ.

(c) Montrer que $\overrightarrow{MF} = \kappa\,(2\,\cos\lambda\,\vec{u}_x - \sin\lambda\,\vec{u}_y)$ en précisant κ et justifer la construction de Proctor.

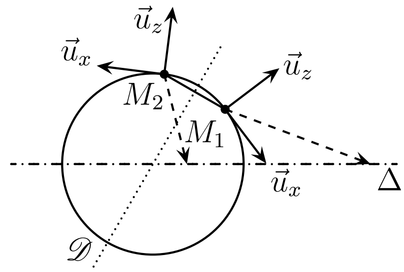
2. À partir des schémas suivants sur lesquels on a représenté en pointillés les directions des termes de marée, expliquer pourquoi les marées de la situation ① sont appelées « semi-diurnes », celles de la situation ② « semi-diurne à inégalité diurnes » et celles du type ③ « diurnes ». La droite $\mathscr{D}$ est l'axe de rotation de la Terre. Sur chacun des schémas, $\vec{u}_z$ représente la verticale locale et $\vec{u}_x$ le vecteur local qui pointe « du large vers la côte ».



situation ①



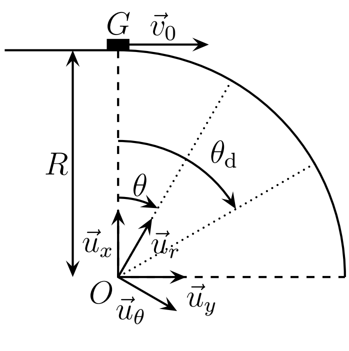
situation ②



situation ③

Vol plané

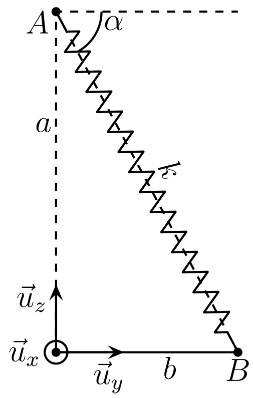
Une luge assimilée à un point matériel G de masse m arrive au niveau d'un profil circulaire avec une vitesse horizontale $\vec{v}_0$. Tant que la luge suit ce profil, elle décrit une trajectoire circulaire de rayon $R = 5{,}0$ m et est repérée par l'angle θ (voir figure). On néglige les frottements. Le référentiel $\mathscr{R}(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ lié à la Terre est supposé galiléen.



1. Écrire l'équation d'évolution de $\theta(t)$ à l'aide du théorème du moment cinétique.
2. En déduire l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de θ, v_0 et R.
3. À l'aide d'une autre loi de mécanique, déterminer l'expression de la réaction exercée par le sol sur la luge.
4. En déduire l'angle θ_d à partir duquel la luge quitte le profil circulaire.
5. Tracer l'allure de θ_d en fonction de v_0 et faire apparaître une valeur limite v_lim. Que se passe-t-il au-delà de cette valeur limite ?

Gravimètre à ressort

Un gravimètre à ressort est constitué d'une tige OB de masse négligeable pouvant tourner autour d'un axe horizontal (Ox) et supportant en B une masse ponctuelle m. Sous l'action du ressort AB, de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0, le dispositif est tel que la tige est horizontale à l'équilibre. On pose alors $OA = a$, $OB = b$, $AB = \ell$ et $\theta = (\vec{u}_y, \overrightarrow{OB})$.



1. À l'aide du théorème du moment cinétique, calculer la longueur $\ell_{\text{éq}}$ du ressort à l'équilibre en fonction de k, m, a, g et ℓ_0. À quelle condition cet équilibre existe-t-il ?
2. Toujours à l'aide du TMC, déterminer la période T_0 des petites oscillations de ce pendule. Que se passe-t-il lorsque $k\,a$ est voisin de $m\,g$?

Système Terre-Lune

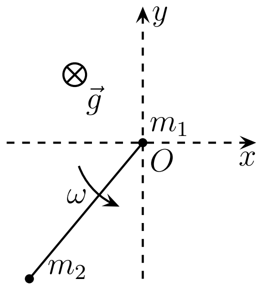
On assimile la Terre et la Lune à deux points matériels, respectivement T et L, de masses respectives m_T et m_L. La distance Terre – Lune est supposée fixe et égale à ℓ ; on admet que ces deux points décrivent des orbites circulaires à la vitesse angulaire constante ω dans le référentiel barycentrique qui leur est associé. Le barycentre G de ces deux astres décrit autour du Soleil, que l'on considère être au point origine O du référentiel héliocentrique, une orbite circulaire de rayon a à la vitesse angulaire constante Ω. Ces deux mouvements sont coplanaires et les rotations ont lieu dans le même sens.

1. Déterminer pour le système Terre – Lune ainsi modélisé l'énergie cinétique dans le référentiel héliocentrique.
2. Déterminer pour ce même système le moment cinétique par rapport à O dans le référentiel héliocentrique.
3. En faisant les approximations nécessaires, simplifier les résultats précédents et en déduire une conséquence importante sur l'étude du mouvement de la Terre autour du Soleil.

Données : $a = 1{,}5.10^{11}$ m ; $\ell = 3{,}8.10^{8}$ m ; $\Omega = 2{,}0.10^{-7}$ rad.s^{-1} ; $\omega = 2{,}7.10^{-6}$ rad.s^{-1} ; $m_T = 6{,}0.0^{24}$ kg ; $m_L = 7{,}4.10^{22}$ kg.

Points reliés par une tige

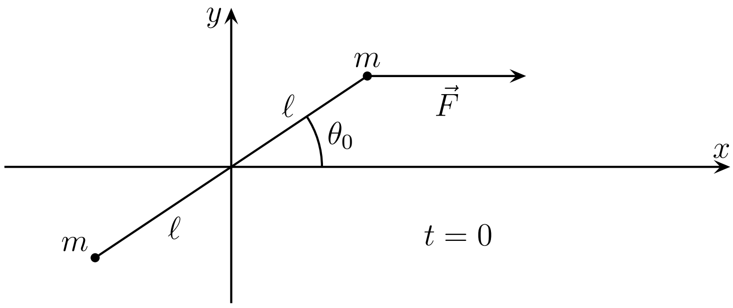
Deux masses m_1 et m_2 reliées par une tige sans masse de longueur ℓ sont astreintes à se déplacer sans frottement sur un plan horizontal (Oxy). Dans un premier temps m_1 est fixe et m_2 décrit un mouvement circulaire autour de m_1 à la vitesse angulaire ω. Au moment où m_2 passe sur l'axe (Oy), instant défini comme origine des dates, on lâche m_1.



Déterminer les équations horaires $x_1(t)$, $y_1(t)$, $x_2(t)$ et $y_2(t)$ des abscisses et des ordonnées de m_1 et m_2.

Points reliés par un fil

Deux points matériels M_1 et M_2 de même masse m glissent sans frottements sur un plan horizontal (Oxy). Ils sont reliés par un fil idéal de longueur $2\,\ell$ et M_1 subit une force constante $\vec{F} = F\,\vec{u}_x$.

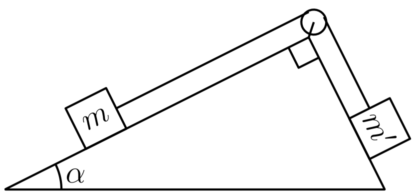


En notant (x_1,y_1) et (x_2,y_2) les coordonnées respectives de M_1 et M_2, les conditions initiales s'écrivent : $x_1(0) = \ell\,\cos\theta_0$, $y_1(0) = \ell\,\sin\theta_0$, $x_2(0) = -\ell\,\cos\theta_0$, $y_2(0) = -\ell\,\sin\theta_0$ avec $\theta_0 \ll 1$ et toutes les vitesses sont nulles.

Déterminer les équations horaires $x_2(t)$ et $y_2(t)$ du mouvement de M_2.

Deux masses sur un plan incliné

Deux masses m et m', reliées par un fil idéal, sont posées sur deux plan inclinés orthogonaux d'intersection horizontale. Les deux masses et le fil sont donc dans un même plan vertical. Initialement les deux masses sont immobiles et on suppose $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ et la poulie idéale.



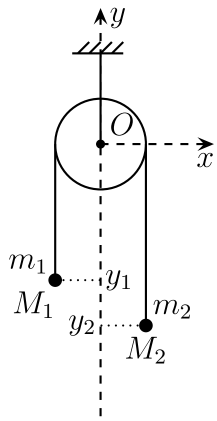
1. Déterminer l'accélération des masses dans l'hypothèse où il n'y a aucun frottement.

2. Le contact de m avec le plan est de type un frottement solide caractérisé par un coefficient $f \stackrel{\text{not}}{=} \tan \varphi$.

   En envisageant les deux cas limites de mouvement dans un sens ou dans l'autre, déterminer le domaine de valeurs de m' qui assurent l'équilibre. On exprimera le résultat en fonction de m, φ et α.

Machine d'Atwood

On considère un dispositif composé de deux masses m_1 et m_2 suspendues en M_1 et M_2, aux extrémités d'un fil sans masse, inextensible, de longueur ℓ. Ce fil passe dans la gorge d'une poulie idéale, sans masse, de rayon R. Il n'y a aucun frottement (ce qui implique que le fil glisse dans la gorge de la poulie).



Le référentiel d'étude $\mathscr{R}(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ est supposé galiléen.

1. Exprimer la longueur $\ell(t)$ en fonction de $y_1(t)$, $y_2(t)$, et R.

   En déduire une relation entre $\dot{y}_1(t)$, $\dot{y}_2(t)$ puis entre $\ddot{y}_1(t)$ et $\ddot{y}_2(t)$.

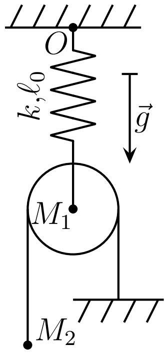
2. À l'aide du principe fondamental de la dynamique appliqué successivement aux deux masses M_1 et M_2, déterminer les accélérations de M_1 et M_2 en fonction des grandeurs caractéristiques du problème.

3. Retrouver ce résultat à partir du théorème du moment cinétique appliqué au système $\mathscr{S} = \{ M_1 + M_2 + \text{fil} \}$.

4. Retrouver ce résultat à partir d'un théorème énergétique appliqué au système $\mathscr{S}$.

Oscillateur

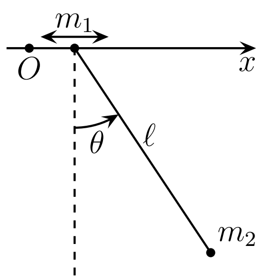
Soit le dispositif représenté ci-dessous. Le ressort est idéal, de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0. Les points matériels M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2 peuvent se déplacer verticalement. La poulie accrochée en M_1 et le fil sont idéaux.



Montrer que la période des oscillations s'écrit : $T = 2\,\pi\,\sqrt{\dfrac{m_1+4\,m_2}{k}}$.

Pendule à deux masses

Un pendule double est constitué de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 placées aux extrémités M_1 et M_2 d'une tige sans masse de longueur ℓ. Le point M_1 est assujetti à se déplacer sans frottement sur l'axe horizontal (Ox). Le pendule peut osciller librement sous l'action de la pesanteur tout en restant dans un même plan vertical contenant l'axe (Ox).

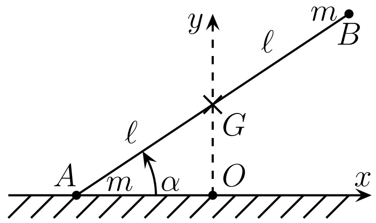


L'ensemble est abandonné sans vitesse initiale, θ ayant la valeur θ_0. Le référentiel $\mathscr{R}(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$ est supposé galiléen.

1. Que peut-on dire du mouvement de G, centre de masse du pendule ?
2. Déterminer, par application du théorème de l'énergie cinétique, une intégrale première du mouvement.
3. Montrer que la pulsation des petites oscillations est $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}\left(\dfrac{m_2}{m_1}+1\right)}$.

Tige tombant sur le sol

On étudie la chute d'une tige sans masse de longueur $2\,\ell$ au bout de laquelle sont fixées deux masses A et B identiques. Le point A est en contact sans frottement avec le sol. Le point B est lâché sans vitesse initiale avec un angle $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. L'équilibre étant instable, le système se met à tomber. On suppose que A est toujours en contact avec le sol.



On note O le point sur le sol à la verticale à l'instant initial du centre de masse G de $\mathscr{S}$, système constitué de la tige et des deux masses.

Le référentiel $\mathscr{R}(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$ est supposé galiléen.

1. Montrer que le mouvement de G est vertical.
2. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de $\alpha(t)$ en fonction uniquement des grandeurs caractéristiques du système.
3. Déterminer l'accélération de G au moment où B touche le sol.
4. Déterminer la vitesse de G au moment où B touche le sol.
5. Montrer que l'hypothèse de contact de A avec le sol est toujours vérifiée.

Trajectoire circulaire

On considère un satellite de masse m sur une trajectoire circulaire de rayon r autour d'un corps sphérique de masse M et de rayon R.

1. Déterminer en fonction de r et des constantes caractéristiques du problème : la vitesse v sur la trajectoire, la période T de révolution, le moment cinétique σ par rapport au centre de la trajectoire, l'énergie mécanique E_{m}.
2. Retrouver l'expression de la constante de la loi de Képler.

Satellite géostationnaire

Un satellite est dit géostationnaire lorsqu'il est immobile dans tout référentiel lié à la Terre

1. Montrer que la trajectoire d'un satellite géostationnaire est obligatoirement dans le plan équatorial.
2. Déterminer l'altitude h d'un tel satellite.

Données : $g_0 = 9{,}81$ m.s^{-2} ; $R_{\mathrm{T}} = 6{,}37.10^6$ m ; jour sidéral : $T = 86{,}2.10^3$ s.

Lancement d'un satellite

Un satellite de masse m est lancé d'une base M_0 située à la latitude λ.

Quelle énergie ΔE faut-il fournir pour le placer une une orbite circulaire de rayon r ? Exprimer le résultat en fonction de m, λ, g_0, et ω_{T} vitesse angulaire de la Terre dans le référentiel géocentrique. Commenter.

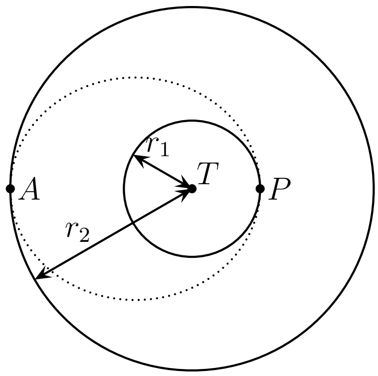
Comète Hale – Bopp

La comète Hale – Bopp a, dans le référentiel de Copernic, dont on prendra le centre S du Soleil pour origine, une trajectoire conique autour de S dont l'excentricité est $e = 0{,}995$ et la période de révolution $T = 2{,}4.10^3$ an. Pour analyser un tel mouvement, on considère que ces deux corps sont à symétrie sphérique et qu'ils forment un système isolé. On note H le centre de la comète.

1. On rappelle que l'équation de la trajectoire de la comète en coordonnées polaires (r,θ) peut s'écrire : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$.
   (a) Donner l'allure de la trajectoire en précisant la position de S, celle de l'aphélie (point le plus éloigné de S) et du périhélie (point le plus proche de S).
   (b) Établir la relation entre p, e et le demi-grand axe a_{H} de l'ellipse.
2. (a) À l'aide de la troisième loi de Képler appliquée à la comète et à la Terre, calculer le demi grand axe de l'ellipse. En déduire p. On rappelle le demi-grand axe de la Terre : $a_{\mathrm{T}} = 1{,}49.10^{11}$ m.
   (b) Calculer, en m, la distance $r_{\max}$ de S à l'aphélie et la distance $r_{\min}$ de S au périhélie. Quelle est la distance qui sépare la Terre de la comète au périhélie de sa trajectoire ?
3. (a) Que peut-on dire de la composante radiale de la vitesse de H au périhélie et à l'aphélie ? Justifier.
   (b) Calculer la vitesse minimale $v_{\min}$ de la comète sachant que sa vitesse maximale a la valeur $v_{\max} = 2{,}00.10^5$ km.h^{-1}.
4. Quelle est l'énergie mécanique de la comète dans son mouvement autour du Soleil ? Calculer sa valeur en joules, sachant que sa masse vaut $m_{\mathrm{H}} = 2{,}0.10^{12}$ kg et que $GM_{\mathrm{S}} = 1{,}33.10^{20}$ m^3.s^{-2}. Commenter le signe de l'énergie.

Ellipse de transfert

On désire transférer un satellite terrestre d'une orbite circulaire basse de rayon r_1 sur une orbite circulaire haute de rayon $r_2 > r_1$ (cf. schéma ci-dessous). Pour cela, en un point P de l'orbite basse, on communique à l'aide de fusées pendant un temps très court une vitesse supplémentaire faisant décrire au satellite une demi-ellipse se raccordant tangentiellement en A à l'orbite haute. Arrivé en A on communique à nouveau au satellite le supplément de vitesse lui permettant de décrire l'orbite circulaire haute.



On note g_0 l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre et R_{T} le rayon terrestre.

1. Exprimer l'énergie totale du satellite sur l'orbite elliptique en fonction de $r_1 + r_2$. On rappelle que r_1 et r_2 sont les distances respectives des périgée et apogée de la trajectoire au centre de la Terre.

2. Calculer la vitesse v_1 du satellite sur son orbite basse et la vitesse v_1' après l'utilisation des fusées ($\vec{v}_1$ et $\vec{v}_1{}'$ sont colinéaires).
3. À quelle vitesse v_2' le satellite atteint-il le point A ? Quelle est la vitesse finale v_2 du satellite sur son orbite haute ?

Points de Lagrange

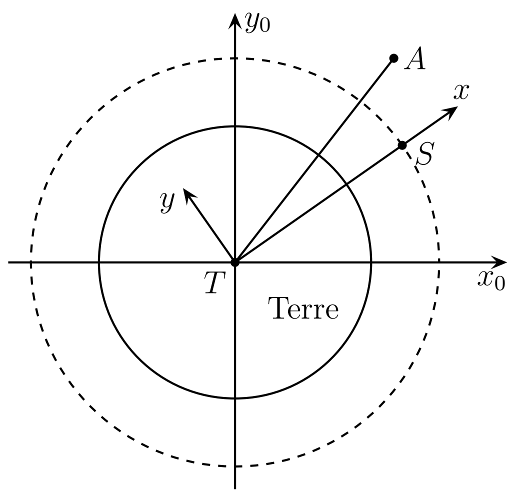
On considère, dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, trois points matériels non alignés A_1, A_2 et A_3 formant un système isolé et interagissant entre eux par la loi de gravitation. On suppose que ces trois points, de masse respectives m_1, m_2 et m_3 constituent un solide et le triangle qu'ils forment tourne uniformément par rapport à $\mathscr{R}$ avec une vitesse angulaire ω perpendiculaire au plan qu'ils définissent. On étudie le système dans le référentiel $\mathscr{R}'$ où $\mathscr{R}'$ est en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par rapport à $\mathscr{R}$ et a pour centre G, le centre d'inertie des trois points matériels.

1. Écrire en fonction de $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ et $\vec{r}_3$ vecteurs positions de A_1, A_2 et A_3 dans $\mathscr{R}'$ et des distances $r_{12} = A_1A_2$ et $r_{13} = A_1A_3$ les forces qui s'exercent sur A_1 dans $\mathscr{R}'$.
2. Appliquer la loi fondamentale de la dynamique à A_1 dans le référentiel et simplifier l'expression puis en déduire que $r_{12} = r_{13}$.
3. En déduire que les trois points matériels sont situés aux sommets d'un triangle équilatéral dont on calculera le côté en fonction des masses et de ω.

Arrimage d'un satellite

Une station orbitale S gravite autour de la Terre sur une orbite circulaire de rayon r_0.

On donne l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre $g_0 = 9{,}81$ m.s^{-2} et le rayon terrestre $R_{\text{T}} = 6{,}36.10^6$ m.



1. Trouver la vitesse de satellisation v_{s} de la station à une altitude de 900 km et calculer sa période de révolution T_0 autour de la Terre.
2. On veut arrimer à cette station un satellite artificiel A, de masse m. Pour étudier les possibilités de cet arrimage, on analyse le mouvement de A dans le référentiel tournant $\mathscr{R} = (Txyz)$ d'origine le centre T de la Terre et dont l'axe (Tx) est défini par le vecteur $\overrightarrow{TS}$. L'axe (Ty) est dans le sens du mouvement de la station.

(a) Expliquer pourquoi l'arrimage du satellite à la station est impossible par freinage ou par accélération si A est initialement sur la même orbite que S.

(b) Effectuer le bilan des forces exercées sur A dans $\mathscr{R}$. Écrire vectoriellement ces forces en fonction de $\vec{r} = \overrightarrow{TA}$, de la vitesse $\vec{v}$ de A par rapport à $\mathscr{R}$ et de $\omega = \dfrac{v_s}{r_0}$.

(c) En déduire la relation vectorielle issue de la loi fondamentale de la dynamique appliquée à A dans $\mathscr{R}$.

3. Dans le cas où $r \simeq r_0$, expliciter l'équation vectorielle précédente selon les axes (Sx) et (Sy). On fera un développement limité de r à l'ordre un en $\dfrac{x}{r_0}$ et $\dfrac{y}{r_0}$.
4. Dans le cas où A et S sont très proches l'un de l'autre, montrer que les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de A dans $\mathscr{R}$ satisfont les équations d'évolution suivantes :

$$\ddot{x}(t) = 3\,\omega^2\,x(t) + 2\,\omega\dot{y}(t) \qquad \text{et} \qquad \ddot{y}(t) = -2\,\omega\,\dot{x}(t)$$

(a) À quelle force soit-on attribuer les termes $2\,\omega\,\dot{y}(t)$ et $-2\,\omega\,\dot{x}(t)$?

(b) Intégrer la deuxième équation en tenant compte des conditions initiales :

$$x(0) = 0\;; \qquad y(0) dezero = y_0\;; \qquad \dot{x}(0) = v_0 \quad \text{et} \quad \dot{y}(0) = 0$$

(c) En déduire que $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonction sinusoïdales de période T_0.

(d) Montrer que la trajectoire de A dans $\mathscr{R}$ est une ellipse sont on déterminera le centre et les axes.

En déduire que la durée nécessaire à l'arrimage peut s'écrire $\alpha\,T_0$, α étant à déterminer.

Quelle doit être la valeur correspondante de y_0 ?

Chute libre ou

Un corps est abandonné sans vitesse initiale à une distance du Soeil égale au rayon de l'orbite de la Terre autour du Soleil.

Caculer numériquement la durée que ce corps mettra pour atteindre le Soleil (considéré comme ponctuel) avec pour seule donnée numérique la durée de révolution de la Terre : 365,25 jours.

Modèle de l'atome de Bohr

L'atome d'hydrogène est constitué d'un proton O, de masse m_p de charge $+e$, et d'un électron M, de masse m_e et de charge $-e$, ayant un mouvement circulaire uniforme, de rayon r et vitesse v autour de O.

Dans le modèle de BOHR, le moment cinétique de l'électron est quantifié : $\sigma_O(M) = n\,\dfrac{h}{2\,\pi}$, où n est un entier et h la constante de Planck. Le référentiel $\mathscr{R}(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ est supposé galiléen.

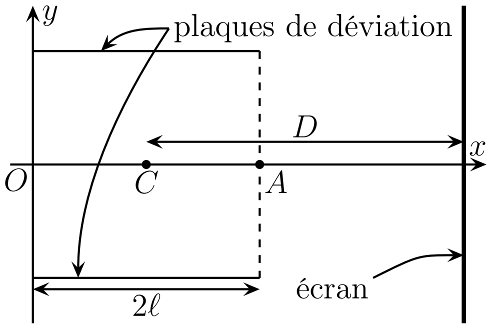
1. Déterminer une relation entre r, v, m, n, h.
2. Sachant que l'électron n'est soumis qu'à la force d'interaction électrostatique qui s'écrit, ici, $\vec{F} = -\dfrac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_r$, déterminer une nouvelle relation entre r et v.
3. En déduire que r se met sous la forme $n^2\,r_0$ où r_0 est à déterminer analytiquement et numériquement.

4. Montrer que l'énergie mécanique de l'électron se met sous la forme $E_{\mathrm{m}} = -\dfrac{E_0}{n^2}$. On rappelle que l'énergie potentielle s'écrit $E_{\mathrm{p}} = -\dfrac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}$.
5. En supposant que l'électron est dans son état fondamental ($n = 1$), calculer numériquement la vitesse de l'électron ainsi que l'énergie d'ionisation de l'atome (l'exprimer en eV).

Données : $h = 6{,}64.10^{-34}$ J.s ; $e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; $\varepsilon_0 = 8{,}84.10^{-12}$ SI ; $m_{\mathrm{e}} = 9{,}1.10^{-31}$ kg.

Oscilloscope analogique

Dans un oscilloscope analogique, les électrons émis par le canon à électrons et accélérés parviennent en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_x$. Ils entrent alors entre les plaques de déviation verticale de longueur $2\,\ell$.



1. Le champ entre les plaques est $\vec{E} = E_0\,\vec{u}_y$. Déterminer l'équation du mouvement des électrons entre les plaques et leur mouvement ultérieur.
2. Si on place un écran à la distance D du centre C des plaques, calculer l'ordonnée Y du point de contact de l'électron sur l'écran.

Tombent les gouttes

On observe le mouvement rectiligne et uniforme, suivant la verticale, d'une gouttelette de glycérine A, sphérique, de rayon r ; la gouttelette est soumise à son poids et à une force de frottement fluide, donnée par la loi de Stokes : $\vec{F} = -6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$ où η est le coefficient de viscosité de l'air. En l'absence de champ électrique, A tombe avec une vitesse limite de valeur v_{lim}.

En présence d'un champ électrique uniforme et constant $\vec{E}$, de direction verticale, de norme E, la gouttelette remonte. La masse volumique de la glycérine est ρ.

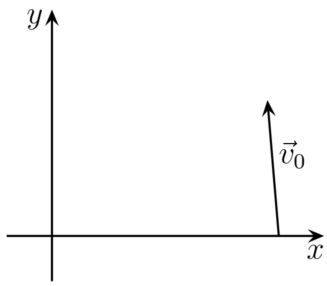
1. Déterminer la dimension de η.
2. Montrer que la vitesse suivant la verticale tend vers une vitesse limite v_{lim} en l'absence de $\vec{E}$. On posera $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{6\,\pi\,\eta\,r}{m}$. Calculer numériquement r.
3. Que devient la vitesse en présence de $\vec{E}$?
4. Un observation prolongée montre que la vitesse subit, par instant, des variations brusques. On mesure en particulier les valeurs suivantes exprimées en mm.s^{-1} : $v_1 = 0{,}270$; $v_2 = 0{,}080$; $v_3 = 0{,}175$; $v_4 = 0{,}363$; $v_5 = 0{,}458$.

   Montrer que ces mesures permettent de conclure à l'existence d'une charge élémentaire. Calculer cette charge.

Données : $\eta = 1{,}8.10^{-5}$ S.I. ; $v_{\text{lim}} = 0{,}392\ \text{mm.s}^{-1}$; $\rho = 810\ \text{kg.m}^{-3}$; $E = 400\ \text{kV.m}^{-1}$; $g = 9{,}80\ \text{m.s}^{-2}$.

Mouvement d'une particule chargée

Une particule non relativiste de charge q de masse m pénètre à $t = 0$ avec une vitesse initial $\vec{v}_0$ en un point A dans une région où règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = -B\,\vec{u}_z$.

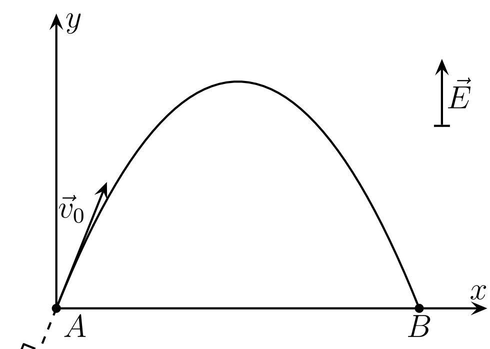


Elle évolue dans un milieu fluide qui exerce sur elle une force $\vec{f} = -k\,\vec{v}$ (k constante positive). On posera $\lambda = \dfrac{k}{m}$ et $\dfrac{q\,B}{m} = \omega$. Les conditions initiales sont : $\overrightarrow{OA} = a\,\vec{u}_x$ et $\vec{v}(0) = -a\,\lambda\,\vec{u}_x + a\,\omega\,\vec{u}_y$.

Déterminer la trajectoire de la particule.

Focalisation d'électrons

Des électrons, préalablement accélérés par une tension V, pénètrent par la fente A supposée très fine dans une région où règne un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\,\vec{u}_y$. On désire recueillir ces électrons à travers une fente B pratiquée dans le plan opaque (xOy), à la distance $AB = L$ de A.



On peut repérer l'angle α que fait le vecteur $\vec{v}_0$ des électrons en A avec l'axe (Ax), ainsi que la norme et le sens du champ électrostatique $\vec{E}$. Le vecteur $\vec{v}_0$ est supposé contenu dans le plan (xOy).

1. Quelles sont les valeurs optimales à donner à α et à $\vec{E}$ pour réaliser la focalisation de ces électrons, sachant que le faisceau incident présente une faible dispersion angulaire $\Delta\alpha$? (*i.e.* α compris entre $\alpha_0 - \dfrac{\Delta\alpha}{2}$ et $\alpha_0 + \dfrac{\Delta\alpha}{2}$.)
2. La largeur de la fente placée en B étant ΔL, donner un ordre de grandeur de la dispersion angulaire $\Delta\alpha$ acceptable pour ne pas atténuer sensiblement l'intensité du faisceau d'électrons étudié.

Données : $V = 10$ kV ; $L = 20$ cm ; $\Delta L = 2{,}0$ mm.

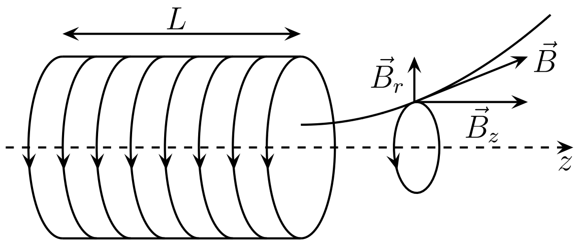
Cadre mobile

Un cadre carré indéformable, de côté a, constitué de N spires parcourues par un courant constant I est mobile autour d'un axe Δ, parallèle à deux de ses côtés et passant par le centre des deux autres. Il est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et orthogonal à l'axe.

1. Quel est le moment scalaire des actions magnétiques qui s'exercent sur le cadre ?
2. En déduire la valeur maximale pour $N = 100$, $I = 0{,}40$ A ; $a = 5{,}0$ cm et $B = 100$ mT.

Action sur un petit circuit

La figure ci-dessous représente un solénoïde circulaire $\mathscr{S}$ de rayon a et de longueur L. Une spire circulaire $\mathscr{C}$ de rayon $b \ll a$ est placée en avant d'une face du solénoïde. $\mathscr{C}$ et $\mathscr{S}$ ont (Oz) pour axe commun et sont parcourus respectivement par les intensités $I > 0$ et $i > 0$ (courants de même sens).

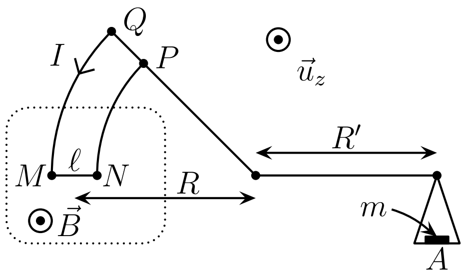


On constate expérimentalement que $\mathscr{C}$ subit une force $\vec{F} = F\,\vec{u}_z$ avec $F < 0$ qui tend l'attirer vers l'intérieur de $\mathscr{S}$. En déplaçant $\mathscr{C}$ le long de l'axe, on constate que cette force est particulièrement intense quand $\mathscr{C}$ se trouve au voisinage de la face de sortie de $\mathscr{S}$.

1. Expliquer l'origine physique de la force observée sur $\mathscr{C}$ et pourquoi seule la composante B_r est à considérer dans l'origine de cette force.
2. Montrer que, au voisinage de l'axe, on a $B_r = -\dfrac{r}{2} \times \dfrac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}$.
3. Montrer que la force subie par le petit circuit vaut $F = \mathscr{M} \times \dfrac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}$ où $\mathscr{M} = i\,\pi\,b^2$.
4. Déterminer analytiquement l'expression de $F(z)$ et numériquement les valeurs de $\dfrac{z_0}{R}$ pour laquelle la force est effectivement la plus intense pour $\dfrac{L}{R}$ valant 1, 2, 5 puis 10.

Balance de Cotton

Une balance de Cotton, réservée aujourd'hui au seul usage pédagogique, permet de mesurer un champ magnétique dans une zone où se dernier est pratiquement uniforme, par exemple dans l'entrefer d'un électroaimant. Le circuit mobile est un circuit plan constitué d'une portion rectiligne MN de longueur ℓ, comprise entre deux arcs conducteurs MQ et NP ; les centres de courbure de MQ et NP coïncident avec l'intersection O du plan du circuit et de l'axe de rotation. L'équilibre de la balance est réalisé à l'aide de masses marquées que l'on place en A sur le plateau accroché à l'extrémité du fléau.



1. Évaluer les actions de Laplace s'exerçant sur les brins du circuit mobile, lorsque celui-ci est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ qui lui est orthogonal.
2. Écrire la condition d'équilibre.
3. Calculer B.

Données : $R = R' = 30$ cm ; $\ell = 2{,}0$ cm ; $I = 5{,}0$ A ; $m = 2{,}0$ g.

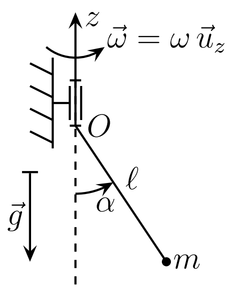
Frottement fluide et frottement solide

Une voiture, assimilée à un point matériel de masse m se déplace sur une route horizontale. Elle est soumise à une force de frottement solide de module $\alpha\, m$ et à la résistance de l'air de module $m\,\beta\,v^2(t)$ avec $v(t)$ la vitesse de la voiture. À l'instant initial, la voiture arrête son moteur, sa vitesse étant v_0.

1. Discuter de la validité et de l'origine des forces de frottement proposées.
2. À quelle date T la voiture s'arrête-t-elle ?
   Quelle est alors la distance L parcourue ?

Pendule conique

Une masse ponctuelle m est fixée à l'extrémité A d'une tige de longueur $\ell = OA$ et de masse négligeable, fixée en O et tournant autour de l'axe vertical (Oz) à vitesse angulaire constante ω en restant dans le plan vertical. Soit $\alpha = \mathrm{C^{te}}$ l'angle que fait cette tige avec la verticale.

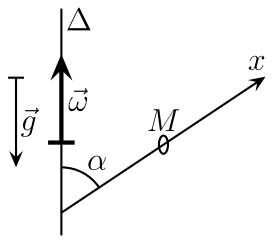


1. En faisant l'analyse des forces dans un référentiel qui sera précisé, calculer $\cos\alpha = f(\omega)$ et tracer la courbe représentant α en fonction de ω.
2. En se plaçant dans un référentiel tournant avec la tige, montrer que l'énergie potentielle de la masse m se compose de deux termes.
   Les expliciter et retrouver l'expression de $\cos\alpha$ à partir de celle de l'énergie potentielle E_{p}.

3. On se propose d'examiner en détail ce qui se passe pour les faibles valeurs de α.
   Tracer l'allure de la courbe $E_p(\alpha)$ en distinguant les deux cas possibles suivant la valeur de ω.
   Expliquer à l'aide des courbes l'allure de la courbe $\alpha(\omega)$.

Anneau sur tige en rotation

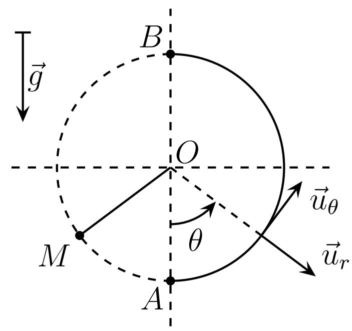
Un axe matériel (Ox) est en rotation uniforme avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical Δ. Un point matériel M de masse m coulisse sans frottement sur (Ox).



1. Déterminer la position d'équilibre M_0 de M par rapport à la barre (Ox).
2. M étant abandonné sans vitesse initiale relativement à (Ox) à une distance a de M_0, donner l'expression de $x(t)$.
   La position d'équilibre M_0 est-elle stable ou instable ?
3. Calculer à la date t la composante de l'action de M sur (Ox) perpendiculaire au plan (Δ,Ox).

Liaison unilatérale

Un point matériel M de masse m est fixé à l'extrémité d'une tige OA de longueur R, de masse négligeable, mobile sans frottement autour d'un axe horizontal passant par O. Soient OA et OB les positions d'équilibre respectivement stable et instable de OM.



1. La tige est abandonnée sans vitesse, M étant très légèrement à gauche de B.
   Quelle est la vitesse de M à son passage en A ?
2. Au passage en A, M se détache de la tige et se met à glisser sans frottement sur une demi sphère de centre O et de rayon R.
   Établir l'équation différentielle régissant le mouvement de M sur la sphère. On pose $\omega^2 = \dfrac{g}{R}$.
3. Déterminer la réaction N que la sphère exerce sur M en fonction de θ.
   Montrer qu'en un certain point C, M quitte la sphère.
   Déterminer θ_C, la vitesse de M en C et exprimer sous la forme d'une intégrale la durée T qui sépare les passage en A et C.

4. Décrire le mouvement ultérieur de M.

Accéléromètre

Un pendule simple est constitué par une masse ponctuelle m suspendue par un fil de longueur ℓ, l'autre extrémité est fixée en un point O au plafond d'un train. Ce train est animé d'un mouvement de translation rectiligne, parallèle à la direction horizontale $x'x$ d'un référentiel galiléen $\mathscr{R}$ et d'accélération constante γ par rapport à $\mathscr{R}$.

1. Déterminer l'angle α que fait le fil du pendule avec la direction $y'y$, verticale du référentiel $\mathscr{R}$ lorsque le pendule est en équilibre pour un observateur placé dans le train.
2. Cet observateur étudie les oscillations du pendule autour de cette position d'équilibre dans le plan (Oxy). La position du pendule est alors repéré par l'angle θ que fait le fil avec $y'y$.

   Déterminer le moment cinétique du pendule par rapport à O ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans un référentiel lié au train.

   En déduire la période des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre.

Modélisation d'un choc élastique

Un chariot assimilable à un point matériel de masse m, est mobile sans frottement sur un plan horizontal. Ce chariot est muni à son extrémité d'un ressort de raideur k pouvant se comprimer. Par l'intermédiaire de ce ressort, le chariot, animé d'une vitesse v_0, heurte un obstacle fixe. On admettra que l'énergie mécanique se conserve entre juste avant et juste après le contact.

1. Déterminer la durée τ pendant laquelle le ressort reste en contact avec l'obstable (durée du choc).

   Quel est l'enfoncement maximal du ressort ?

   Quelle est la force maximale exercée par le ressort ?
2. Que deviennent les expressions précédentes lorsque $k \to \infty$?

   Que devient le produit de la force maximale exercée par le ressort par la durée du choc ?
3. Quelle est la vitesse v' après le choc ?

   En déduire sans calcul la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t)\,\mathrm{d}t$ où t_0 est l'instant caractérisant le début du choc, τ est la durée du choc et $F(t)$ la force exercée par le choc.

Freinage d'un satellite

Un satellite S de masse m décrit autour de la Terre assimilée à un astre à symétrie sphérique une orbite circulaire de rayon r.

1. Exprimer en fonction de r et de la masse M de la Terre : l'énergie potentielle de gravitation E_p de S, son énergie cinétique E_c dans le référentiel géocentrique, son énergie mécanique E.
2. Les hautes couches de l'atmosphère freinent très légèrement S.

   Décrire l'évolution de la trajectoire de S sans nouveau calcul.

3. On admet que la force de frottement subie par le satellite est de la forme $-k\,\vec{v}$.
   Quelle est la signification physique de la grandeur $\tau = \dfrac{m}{k}$?
4. En supposant le frottement très faible (préciser), exprimer la variation relative par révolution $\dfrac{\Delta r}{r}$ du rayon de l'orbite en fonction de r et de la période T_0 du mouvement non perturbé par le freinage.

Impesanteur

Un satellite artificiel S de centre de masse G décrit autour de la Terre de centre O une orbite circulaire de rayon R avec le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \omega\,\vec{u}_z$ par rapport au référentiel géocentrique $\mathscr{R}_0$ supposé galiléen. On désigne par $\mathscr{R}_S = (G,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ un référentiel lié à S. Un point P situé dans le voisinage de S est repéré par ses coordonnées (x,y,z) avec $\dfrac{x}{R}$, $\dfrac{y}{R}$ et $\dfrac{z}{R} \ll 1$. On suppose que $(G,\vec{u}_y)$ pointe en permanence vers O ; dans ces conditions $(G,\vec{u}_x)$ est dirigé dans le sens de rotation.

1. En ne tenant compte, outre les forces d'inertie, que de la force gravitationnelle exercée par la Terre (supposée à symétrie sphérique), établir le système des trois équations différentielles du mouvement de P par rapport à S.
2. Décrire qualitativement l'influence des termes figurant dans les expressions de $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, $\ddot{z}(t)$ en distinguant les termes statiques et les termes dynamiques.
3. Pour un satellite orbitant à faible altitude (quelques centaines de kilomètres) de quelques mètres de dimension, évaluer, en m.s^{-2} l'importance de la partie statique de ces champs résiduels.
4. Pour des conditions initiales quelconques, $\overrightarrow{GP}_0 = a\,\vec{u}_x + b\,\vec{u}_y + c\,\vec{u}_z$ et $\vec{v}_0 = \omega(\alpha\,\vec{u}_x + \beta\,\vec{u}_y + \gamma\,\vec{u}_z)$, donner la solution générale du système précédent en posant $\theta = \omega\,t$.
   Calculer la valeur moyenne temporelle de $\vec{v}$ et commenter le résultat.
5. Représenter graphiquement les cas particuliers suivants :
   ➜ $\vec{v}_0 = \vec{0}$ et $\overrightarrow{GP}_0 = b\,\vec{u}_y$
   ➜ $\vec{v}_0 = \beta\,\omega\,\vec{u}_y$ et $\overrightarrow{GP}_0 = \vec{0}$
   ➜ $\vec{v}_0 = \alpha\,\omega\,\vec{u}_x$ et $\overrightarrow{GP}_0 = \vec{0}$

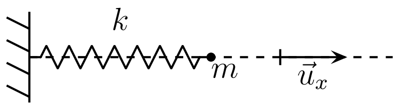
Chute avec force de frottement en v^2

Un point matériel de masse m tombe verticalement dans un fluide. On repère la position et la vitesse $v(t)$ de ce point M sur un axe vertical orienté vers le bas. Le fluide exerce sur M un force de frottement de norme $\lambda\,v^2$.

1. Établir, en notant u la norme de la vitesse pour laquelle la force de frottement est égale au poids, l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse $v(t)$.
2. (a) À l'instant $t = 0$, on a $x = 0$ et $v = 0$.
   Exprimer la vitesse en fonction de g, u, et t.
   (b) En déduire la loi horaire $x(t)$ du mouvement.
3. (a) À l'instant $t = 0$, on a $x = 0$ et $v = 2u$.
   Exprimer la vitesse en fonction de g, u, et t.
   (b) En déduire la loi horaire $x(t)$ du mouvement.

Oscillateur amorti

On considère une masse au bout d'un ressort horizontal soumis à une force de frottement solide.



On rappelle qu'un frottement solide se caractérise par :

➜ lorsque $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{f} \cdot \vec{v} < 0$ et $\|\vec{f}\| = \lambda\, N$ où λ est le coefficient de frottement et N la norme de la réaction normale du support.

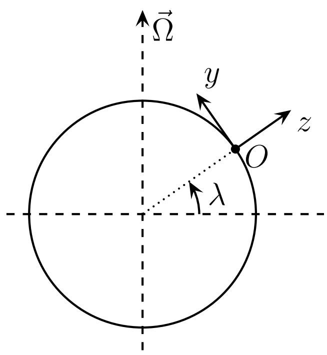
➜ lorsque $\vec{v} = \vec{0}$, $\|\vec{f}\| < \lambda N$.

On choisit l'origine du repère de telle sorte que lorsque la masse m est en O, le ressort a sa longueur naturelle. On note ${\omega_0}^2 = \dfrac{k}{m}$.

1. Montrer qu'il existe une plage d'équilibre, *i.e.* que l'on peut avoir $x(t) = \mathrm{C^{te}}$ pour x compris entre $-a$ et a (a à déterminer).
2. Écrire l'équation différentielle du mouvement. On introduira $\varepsilon = \pm 1$ tel que $\varepsilon\,\dot{x} < 0$.
3. (a) Déterminer la solution $x_1(t)$ de l'équation différentielle lorsque $\varepsilon = 1$ (préciser le sens du mouvement) avec $x_1(0) = X_1 > a$ et $\dot{x}_1(0) = 0$.
   (b) Déterminer la solution $x_2(t)$ de l'équation différentielle lorsque $\varepsilon = -1$ (préciser le sens du mouvement) avec $x_2(0) = X_2 < -a$ et $\dot{x}_2(0) = 0$.
4. (a) Montrer que, dans le plan de phase $(x,\dfrac{\dot{x}}{\omega_0})$, $x_1(t)$ correspond à un demi cercle, dont on déterminera le rayon, situé dans le demi-plan inférieur et centré sur $(a,0)$.
   (b) Montrer que, dans le plan de phase $(x,\dfrac{\dot{x}}{\omega_0})$, $x_2(t)$ correspond à un demi cercle, dont on déterminera le rayon, situé dans le demi-plan supérieur et centré sur $(-a,0)$.
   (c) En déduire la construction graphique de la trajectoire du mouvement dans le plan de phase à partir de la condition initiale : $x(0) = X_0 > a$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Déviation vers l'ouest

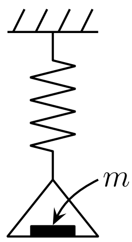
Un objet de masse m est lancé vers le haut selon la verticale ascendante $\vec{u}_z$ d'un lieu de latitude λ avec une vitesse initiale $v_0\,\vec{u}_z$. Le vecteur $\vec{\Omega}$ représente le vecteur vitesse angulaire de rotation instantanée de la Terre. $\vec{\Omega}$ est contenu dans le plan (O,y,z), l'axe (O,x) pointant vers l'Est.



1. Dans un premier temps on suppose le référentiel $(Oxyz)$ galiléen.
   Donner les lois du mouvement définissant $\vec{v}(t)$ et $z(t)$.
   Que représente la grandeur $\eta = \dfrac{\Omega\, v_0}{g}$?
   Que peut-on dire de la valeur de η pour des hauteurs maximales atteintes de l'ordre de quelques centaines de mètres ?
2. On cherche à déterminer la variation Δx observée selon l'axe (Oxx'). On abandonne l'hypothèse de référentiel galiléen pour $(Oxyz)$ et on tient compte de la rotation de la Terre sur elle-même.
   En considérant la force de Coriolis, et en utilisant la loi de vitesse selon (Oz) établie à la question précédente, donner une évaluation de cette déviation.
3. **A.N. :** calculer Δx pour $\lambda = 51\ ^\circ$, $g = 9{,}81$ m.s^{-2} et une altitude maximale atteinte de $h = 100$ m.

Ne pas tomber

À l'extrémité inférieure d'un ressort vertical de raideur k est suspendu un plateau de masse négligeable sur lequel on a placé un objet de masse m. On lâche le plateau sans vitesse initiale après l'avoir descendu d'une altitude A par rapport à sa position d'équilibre. Les frottements sont négligés.



Déterminer la valeur de A à ne pas dépasser afin que l'objet ne décolle jamais du plateau.

Chute d'une bille de plomb

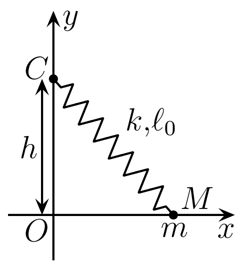
On considère une sphère de plomb de rayon a et de masse volumique ρ.

1. Dans un premier temps, la sphère est suspendue à un point fixe O par un fil et se trouve placée dans une soufflerie ; la vitesse du vent, horizontale, a pour valeur v_0 et le fil fait alors un angle α avec la verticale.
   Sachant que la résistance de l'air est de norme $f = k\,\pi\,a^2\,{v_0}^2$ où v_0 est la vitesse du vent, déterminer le coefficient k dans le système S.I.
2. Cette sphère est maintenant lâchée dans l'air immobile, hors de la soufflerie, sans vitesse initiale. La norme de la force de frottement s'écrit alors $f = k\,\pi\,a^2\,v^2$ où v est cette fois-ci la vitesse de l'objet et avec le même k qu'à la question précédente.
   (a) Justifier la différence entre les expressions des forces de frottement à la première et à la deuxième question.
   (b) Calculer sa vitesse limite ; à quelle hauteur de chute dans le vide cette vitesse correspond-elle ?
   (c) Pour une chute de deux mètres de haut, quelle fraction du poids la force de frottement représente-t-elle ?

Données : $a = 1{,}0$ cm ; $\rho = 11{,}34$ g.cm^{-3} ; $v_0 = 10$ m.s^{-1} ; $\alpha = 1{,}68.10^{-1}$ rad ; $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

Oscillateur anharmonique

On dispose d'un ressort élastique de raideur k, de longueur naturelle ℓ_0 (longueur au repos) et de masse négligeable. L'une des extrémités de ce ressort est relié à un point C et l'autre à un anneau de masse m, coulissant sans frottements sur un axe (Ox) horizontal dont la distance h au point C peut être réglée à volonté.



1. Que peut-on prévoir concernant le comportement du système pour les cas : $\ell_0 < h$ et $\ell_0 > h$? On envisagera d'abord une réponse intuitive, puis une étude fondée sur l'énergie potentielle de ce système à évolution conservative pour vérifier ces affirmations.

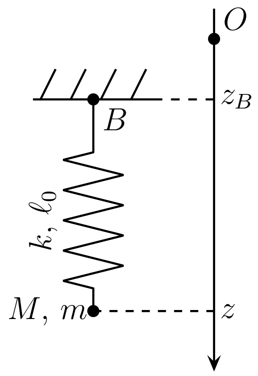
2. Le cas $\ell_0 = h$ est un cas limite intéressant correspondant à des oscillations qualifiées d'anharmoniques, car non sinusoïdales. Ayant réglé la distance OC pour se trouver dans une telle situation, on abandonne sans vitesse initiale l'anneau à la distance $x = a$ du point O.

   Montrer que l'intégrale première du mouvement (*i.e.* l'écriture de la conservation de l'énergie mécanique) se simplifie en : $\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \dfrac{k}{8\,{\ell_0}^2}(a^4 - x^4)$ après un développement limité à l'ordre le plus bas de l'énergie potentielle.

   En déduire que la période d'un tel mouvement est de la forme $T = 8\,I\left(\dfrac{\ell_0}{a}\right)\left(\dfrac{m}{k}\right)^{1/2}$, où $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}} \simeq 1{,}31$.

Bilan énergétique en régime forcé

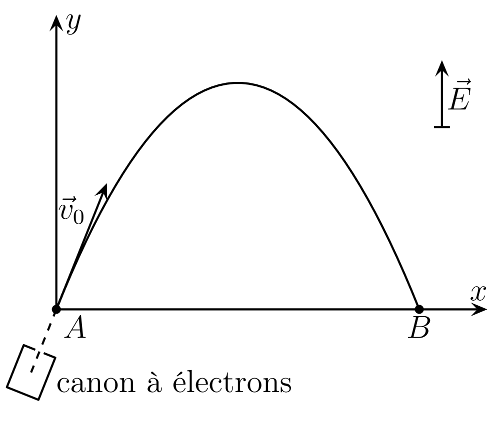
Un ressort idéal de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0 est disposé verticalement. Son extrémité supérieure B est reliée à un bâti dont on peut faire varier la cote de manière sinusoïdale, $z_B(t) = A\cos(\omega t)$, et un corps M assimilable à un point de masse m est accroché à son autre extrémité. L'action de l'air ambiant se traduit par une force de frottement du type $\vec{f} = -h\vec{v}$, $\vec{v}$ étant la vitesse de M dans le référentiel $\mathscr{R}(O,\vec{u}_z)$ avec $\vec{u}_z$ vers le bas, et h un coefficient positif.



1. Déterminer l'équation d'évolution de la cote $z(t)$ de M. On introduira la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.
2. En déduire l'équation d'évolution de $x(t) = z(t) - z_{\text{éq}}$, écart à l'équilibre de la masse.
3. Déterminer les amplitudes complexes $\underline{X_{\text{m}}}$ et $\underline{V_{\text{m}}}$ respectivement de l'écart à l'équilibre et de la vitesse de M.
4. Déterminer les déphasages ϕ et φ respectivement entre l'écart à l'équilibre $x(t)$ et le terme excitateur $z_B(t)$ puis entre la vitesse $\dot{x}(t)$ et le terme excitateur $z_B(t)$.
5. En reprenant la notation réelle, déterminer les expressions de :
   (a) l'énergie $\mathscr{E}_{\text{f}}$ fournie par les frottements en une période ;
   (b) l'énergie $\mathscr{E}_{\text{r}}$ fournie par le ressort en une période ;
   (c) l'énergie $\mathscr{E}_{\text{p}}$ fournie par le poids en une période ;
   (d) l'énergie cinétique $\mathscr{E}_{\text{c}}$ maximale ;
   (e) la différence $\Delta\mathscr{E}_{\text{pp}}$ des énergie potentielle entre les cotes maximale et au repos de M.
6. Écrire et vérifier le bilan énergétique en fonction des énergies calculées à la question précédente.

Focalisation d'électrons

Des électrons, préalablement accélérés par une tension V, pénètrent par la fente A supposée très fine dans une région où règne un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\,\vec{u}_y$. On désire recueillir ces électrons à travers une fente B pratiquée dans le plan opaque (xOy), à la distance $AB = L$ de A.



On peut repérer l'angle α que fait le vecteur $\vec{v}_0$ des électrons en A avec l'axe (Ax), ainsi que la norme et le sens du champ électrostatique $\vec{E}$. Le vecteur $\vec{v}_0$ est supposé contenu dans le plan (xOy).

1. Quelles sont les valeurs optimales à donner à α et à $\vec{E}$ pour réaliser la focalisation de ces électrons, sachant que le faisceau incident présente une faible dispersion angulaire $\Delta\alpha$? (*i.e.* α compris entre $\alpha_0 - \dfrac{\Delta\alpha}{2}$ et $\alpha_0 + \dfrac{\Delta\alpha}{2}$.)
2. La largeur de la fente placée en B étant ΔL, donner un ordre de grandeur de la dispersion angulaire $\Delta\alpha$ acceptable pour ne pas atténuer sensiblement l'intensité du faisceau d'électrons étudié.

Données : $V = 10$ kV ; $L = 20$ cm ; $\Delta L = 2{,}0$ mm.

Particule dans un puits de potentiel

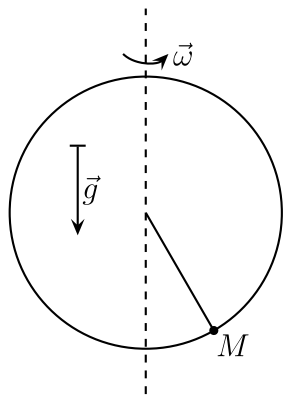
On considère un point matériel M de masse m astreint à se déplacer sur un axe (Ox) avec $x \geqslant 0$ et soumis à un champ de forces dérivant du potentiel $E_\text{p}(x) = E_0 \left(\dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{a}{x}\right)$.

1. Tracer l'allure de $E_\text{p}(x)$.
2. Déterminer la position d'équilibre $x_\text{éq}$ en fonction de E_0 et a.
3. (a) Faire un développement limité à l'ordre 2 de $E_\text{p}(x)$ autour de $x_\text{éq}$ et en déduire l'équation d'évolution de $\varepsilon(t)$ défini par $x(t) = x_\text{éq} + \varepsilon(t)$.
   (b) Montrer que l'on a, alors, $x(t) = x_\text{éq} + X_\text{m} \cos(\omega_0\, t + \varphi)$ où ω_0 est une pulsation à déterminer en fonction de E_0 et $x_\text{éq}$ et $X_\text{m} \ll x_\text{éq}$.
4. (a) Faire un développement limité à l'ordre 3 de $E_\text{p}(x)$ autour de $x_\text{éq}$ et en déduire la nouvelle équation d'évolution de $\varepsilon(t)$.
   (b) On suppose que $x(t) = x_\text{éq} + A + X_\text{m} \cos(\omega_0\, t) + B \cos(2\,\omega_0\, t)$ avec $A \ll X_\text{m}$, $B \ll X_\text{m}$ et $X_\text{m} \ll x_\text{éq}$.
   Déterminer les expressions de A et A.
   (c) Commenter.

On rappelle que, pour $\varepsilon \ll 1$: $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\,\varepsilon + \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}\,\varepsilon^2 + \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)}{6}\,\varepsilon^3$.

Anneau sur un cerceau

Un anneau de masse m peut glisser sans frottement sur un cerceau de rayon R placée dans un plan vertical ; ce dernier tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de son diamètre vertical par rapport au référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. La position de l'anneau est repéré par l'angle θ.



Discuter, suivant les valeurs de R, m, g et ω les positions d'équilibre de l'anneau dans le référentiel lié au cerceau.

Palet sur une demi-sphère

Un palet que l'on considérera ponctuel est placé au sommet d'une demi-sphère de rayon R fixée à une plate-forme mobile. La plate-forme tractée se met en mouvement avec une accélération horizontale a_0 constante.

En négligeant tout frottement avec l'air et avec demi-sphère, déterminer l'équation donnant l'angle de rupture du contact entre le palet et la demi-sphère en fonction de a_0/g et résoudre graphiquement l'équation précédente.

Trajectoire circulaire

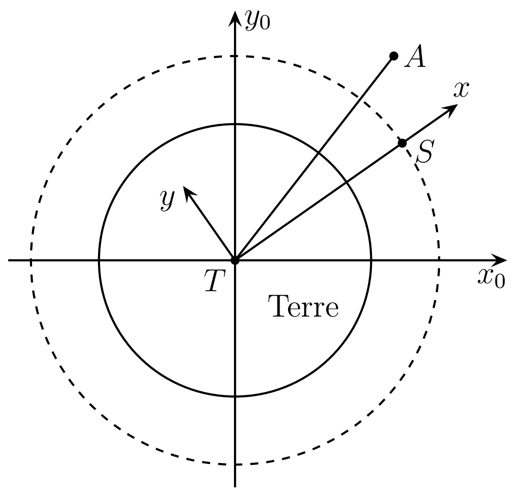
On considère un satellite de masse m sur une trajectoire circulaire de rayon r autour d'un corps sphérique de masse M et de rayon R.

1. Déterminer en fonction de r et des constantes caractéristiques du problème : la vitesse v sur la trajectoire, la période T de révolution, le moment cinétique σ par rapport au centre de la trajectoire, l'énergie mécanique E_{m}.
2. Retrouver l'expression de la constante de la loi de Kepler.

Arrimage d'un satellite

Une station orbitale S gravite autour de la Terre sur une orbite circulaire de rayon r_0.

On donne l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre $g_0 = 9{,}81$ m.s^{-2} et le rayon terrestre $R_{\mathrm{T}} = 6{,}36.10^6$ m.



1. Trouver la vitesse de satellisation v_{s} de la station à une altitude de 900 km et calculer sa période de révolution T_0 autour de la Terre.
2. On veut arrimer à cette station un satellite artificiel A, de masse m. Pour étudier les possibilités de cet arrimage, on analyse le mouvement de A dans le référentiel tournant $\mathscr{R} = (Txyz)$ d'origine le centre T de la Terre et dont l'axe (Tx) est défini par le vecteur $\overrightarrow{TS}$. L'axe (Ty) est dans le sens du mouvement de la station.

(a) Expliquer pourquoi l'arrimage du satellite à la station est impossible par freinage ou par accélération si A est initialement sur la même orbite que S.

(b) Effectuer le bilan des forces exercées sur A dans $\mathscr{R}$. Écrire vectoriellement ces forces en fonction de $\vec{r} = \overrightarrow{TA}$, de la vitesse $\vec{v}$ de A par rapport à $\mathscr{R}$ et de $\omega = \dfrac{v_\text{s}}{r_0}$.

(c) En déduire la relation vectorielle issue de la loi fondamentale de la dynamique appliquée à A dans $\mathscr{R}$.

3. Dans le cas où $r \simeq r_0$, expliciter l'équation vectorielle précédente selon les axes (Sx) et (Sy). On fera un développement limité de r à l'ordre un en $\dfrac{x}{r_0}$ et $\dfrac{y}{r_0}$.
4. Dans le cas où A et S sont très proches l'un de l'autre, montrer que les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de A dans $\mathscr{R}$ satisfont les équations d'évolution suivantes :

$$\ddot{x}(t) = 3\,\omega^2\,x(t) + 2\,\omega\,\dot{y}(t) \qquad \text{et} \qquad \ddot{y}(t) = -2\,\omega\,\dot{x}(t)$$

(a) À quelle force soit-on attribuer les termes $2\,\omega\,\dot{y}(t)$ et $-2\,\omega\,\dot{x}(t)$?

(b) Intégrer la deuxième équation en tenant compte des conditions initiales :

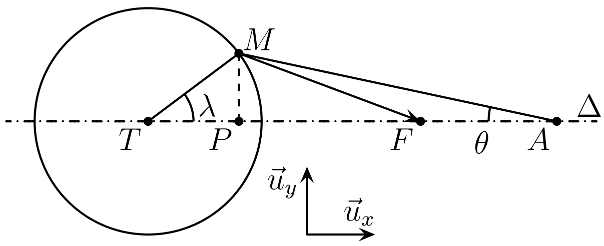
$$x(0) = 0\ ; \qquad y(0) = y_0\ ; \qquad \dot{x}(0) = v_0 \quad \text{et} \quad \dot{y}(0) = 0$$

(c) En déduire que $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonction sinusoïdales de période T_0.

(d) Montrer que la trajectoire de A dans $\mathscr{R}$ est une ellipse sont on déterminera le centre et les axes.
En déduire que la durée nécessaire à l'arrimage peut s'écrire $\alpha\,T_0$, α étant à déterminer.
Quelle doit être la valeur correspondante de y_0 ?

Construction de Proctor

La construction de Proctor permet de déterminer très facilement la direction et l'importance relative du terme de marée dû à un astre. La construction est la suivante. On note T le centre de la Terre, R son rayon, A le centre de l'astre, M_A sa masse, Δ la droite (AT) et M le point où l'on veut déterminer la direction du terme de marée. On se place dans le plan ATM. P est le projeté de M sur Δ, F le point tel que $\overrightarrow{TF} = 3\,\overrightarrow{TP}$. Dans ces conditions le terme de marée est proportionnel à $\overrightarrow{MF}$.



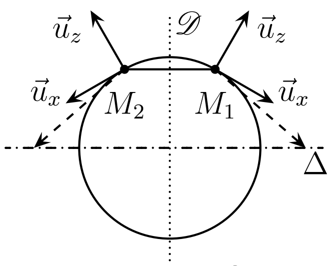
1. On se propose de démontrer la construction précédente.

(a) Rappeler l'expression vectorielle du terme de marée en M noté $\vec{\mathscr{M}}_A(M)$.

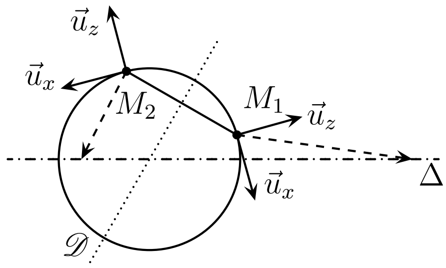
(b) En choisissant $\vec{u}_x = \dfrac{\overrightarrow{TA}}{\|\overrightarrow{TA}\|}$ et $\vec{u}_y = \dfrac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}$ et en notant $d = TA$, $R = TM$, $r = AM$ et λ l'angle $(\overrightarrow{TP},\overrightarrow{TM})$, montrer que $\vec{\mathscr{M}}_A(M) = \dfrac{G\,M_A\,R}{d^3}(2\,\cos\lambda\,\vec{u}_x - \sin\lambda\,\vec{u}_y)$. Comme l'astre responsable du terme de marrée est éloigné (!), on fera les calculs à l'ordre 1 en $\dfrac{R}{d}$ et θ.

(c) Montrer que $\overrightarrow{MF} = \kappa\,(2\,\cos\lambda\,\vec{u}_x - \sin\lambda\,\vec{u}_y)$ en précisant κ et justifer la construction de PROCTOR.

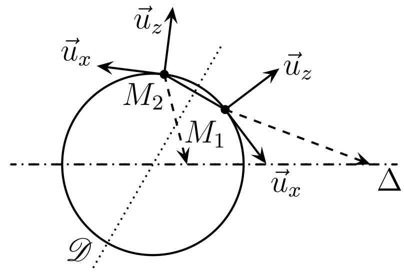
2. À partir des schémas suivants sur lesquels on a représenté en pointillés les directions des termes de marée, expliquer pourquoi les marées de la situation ① sont appelées « semi-diurnes », celles de la situation ② « semi-diurne à inégalité diurnes » et celles du type ③ « diurnes ». La droite $\mathscr{D}$ est l'axe de rotation de la Terre. Sur chacun des schémas, $\vec{u}_z$ représente la verticale locale et $\vec{u}_x$ le vecteur local qui pointe « du large vers la côte ».



situation ①



situation ②



situation ③

PÉRIODES SIDÉRALES

1. **Jour solaire et jour sidéral**

   La durée du jour solaire moyen est la durée $T_{\rm m}$ qui sépare, en moyenne, deux positions successives du Soleil au zénith dans son mouvement dans le référentiel terrestre. La durée du jour sidéral est la durée $T_{\rm s}$ que met la Terre pour faire un tour sur elle-même dans le référentiel géocentrique (référentiel dans lequel le centre de la Terre est immobile).

   Montrer que $T_{\rm m} - T_{\rm s} = \dfrac{{T_{\rm m}}^2}{T_{\rm a} + T_{\rm m}}$ où $T_{\rm a}$ est la période de révolution de la Terre autour du Soleil.
   Calculer $T_{\rm m} - T_{\rm s}$ sachant que $T_{\rm m} = 86\,400$ s et $T_{\rm a} = 365{,}25\,T_{\rm m}$.

2. **Lunaison synodique et lunaison sidérale**

   La lunaison synodique est la durée $T_{\rm n}$ qui sépare deux positions successives de la nouvelle lune. La lunaison sidérale est la durée $T_{\rm s}$ de révolution de la Lune autour de la Terre dans le référentiel géocentrique (référentiel dans lequel le centre de la Terre est fixe).

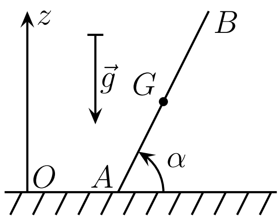
   Montrer que $T_{\rm n} - T_{\rm s} = \dfrac{{T_{\rm s}}^2}{T_{\rm a} - T_{\rm s}}$ où $T_{\rm a}$ est la période de révolution de la Terre autour du Soleil.
   Calculer $T_{\rm n} - T_{\rm s}$ en jour, sachant que $T_{\rm s} = 27{,}3$ j et $T_{\rm a} = 365{,}25$ j.

CHENILLE

La masse d'une chenille d'un bulldozer est m. L'engin avance avec la vitesse $\vec{v}$ par rapport au sol et sans déraper.

Déterminer l'énergie cinétique de la chenille en l'absence de glissement de la chenille sur le sol et des roues sur la chenille.

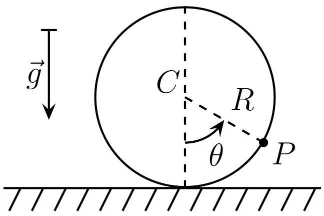
Tige tombant sur le sol



Une tige AB homogène de masse m, de longueur 2ℓ et de moment d'inertie J par rapport à un axe horizontal passant par G est abandonnée sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ quand $\alpha = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}$. Le point A glisse sans frottement sur le plan horizontal. On notera $\eta \overset{\text{not}}{=} \dfrac{J}{m\,\ell^2}$.

1. Expliquer qualitativement pourquoi $\eta < 1$.
2. Quelle est la trajectoire de G centre d'inertie de la tige ?
3. Exprimer la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ en fontion de α.

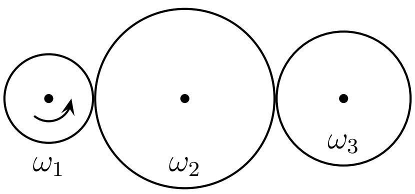
Balourd



Un point matériel P de masse m est solidaire, et à la périphérie, d'un disque homogène de centre C, de rayon R, de masse M et de moment d'inertie J par rapport à un axe horizontal passant par C. Le disque roule sans glisser sur un plan horizontal.

1. Donner une intégrale première du mouvement.
2. Quelle est la pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable ?
3. À quelle condition le disque avance-t-il toujours dans le même sens ?

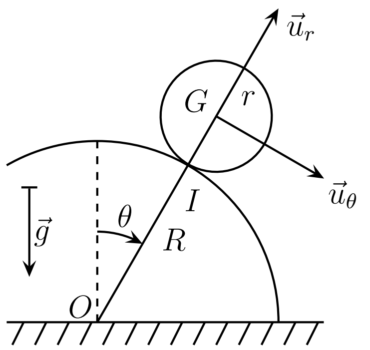
Engrenages



Trois disques numérotés 1, 2 et 3, de centres O_1, O_2 et O_3 alignés, de moment J_1, J_2 et J_3, de rayons r_1, r_2 et r_3, roulent sans glisser les uns sur les autres. On applique au disque 1 un couple moteur $\vec{\Gamma}_{\rm m} = \Gamma_{\rm m}\,\vec{u}_z$ ($\vec{u}_z$ étant un vecteur unitaire de l'axe du disque 1) et au disque 3 un couple résistant $\vec{\Gamma}_{\rm f} = \Gamma_{\rm f}\,\vec{u}_z$, $\Gamma_{\rm m}$ et $\Gamma_{\rm f}$ étant constants. Les liaisons d'axe sont parfaites.

Déterminer l'accélération angulaire du disque 3.

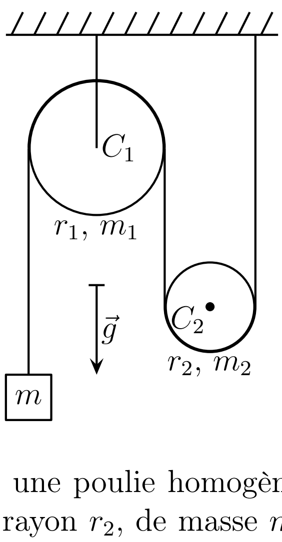
Boule roulant sur un cylindre



Une boule sphérique de rayon r, de masse m et de moment d'inertie J par rapport à un de ses diamètres est abandonnée dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ au sommet d'un demi cylindre d'axe horizontal de rayon R. Le coefficient de frottement est f.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ lors de la phase de roulement sans glissement.
2. Trouver l'équation vérifiée par l'angle $\theta_{\rm g}$ pour lequel s'arrête le roulement sans glissement.
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ lors de la phase de roulement avec glissement.
4. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $R_N(\theta)$ lors de la phase de glissement.

Masse et poulies

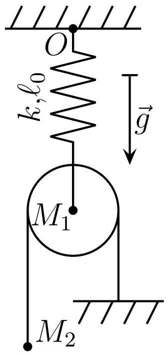


Une masse m mobile verticalement, une poulie homogène de centre fixe, de rayon r_1, de masse m_1 et une poulie mobile homogène, de rayon r_2, de masse m_2 sont assemblés comme sur le schéma ci-dessus. Les brins de fil entre les poulies sont verticaux. Les fils ne peuvent pas glisser sur les poulies et les liaisons d'axe sont parfaites. On donne le moment d'inertie par rapport à son axe d'une poulie homogène de masse m et de rayon r : $J = \dfrac{1}{2}\,m\,r^2$.

Déterminer l'expression de l'accélération du centre d'inertie C_2 de la poulie mobile.

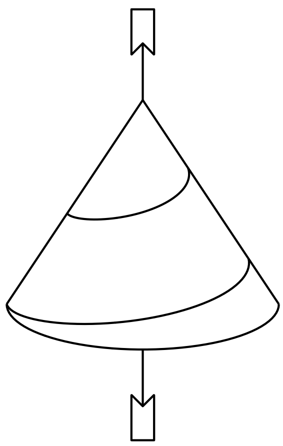
Oscillateur

Soit le dispositif représenté ci-dessous. Le ressort est idéal, de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0. Les points matériels M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2 peuvent se déplacer verticalement. La poulie accrochée en M_1 et le fil sont idéaux.



Montrer que la période des oscillations s'écrit : $T = 2\,\pi\,\sqrt{\dfrac{m_1 + 4\,m_2}{k}}$.

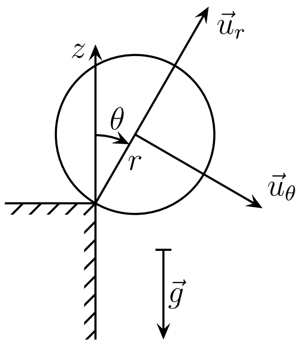
Bille sur un cône



Un cône homogène de hauteur h, à base circulaire de rayon R et de moment d'inertie J par rapport à son axe, peut tourner librement autour de son axe géométrique vertical. Un bille de masse m part du sommet du cône et glisse vers le bas, sans frottement, le long d'une rainure tracée sur la surface. Elle quitte le cône horizontalement, la rainure étant tangente au cercle de base.

Le cône et la bille étant initialement au repos, trouver la vitesse angulaire du cône après que la bille l'a quitté.

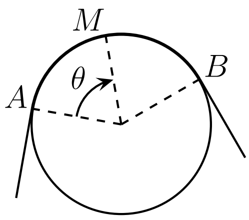
Cylindre sur le coin d'une table



Un cylindre de rayon r, initialement en équilibre au bord d'une table, tombe sans vitesse initiale. Le coefficient de frottement de l'arête sur le cylindre étant f. Le moment d'inertie du cylindre autour de son axe géométrique vaut $\dfrac{1}{2}\,m\,r^2$.

Déterminer l'angle dont a tourné le cylindre lorsque s'amorce le mouvement de glissement du cylindre sur l'arête de la table.

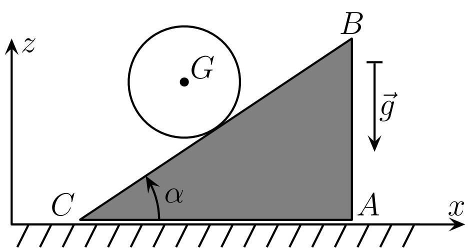
Fil enroulé autour d'un cylindre



Un fil inextensible inextensible $\mathscr{F}$ de poids négligeable est en contact le long d'un arc de cercle (AB) de centre C d'angle au centre $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \alpha$ avec un cylindre de révolution fixe $\mathscr{C}$. Le coefficient de frottement entre $\mathscr{F}$ et $\mathscr{C}$ est f. On note $T(0)$ et $T(\alpha)$ les tensions de $\mathscr{F}$ en A et B. On tire sur $\mathscr{F}$ du côté de B jusqu'à obtenir le glissement de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{C}$.

1. En raisonnant sur un élément de fil infinitésimal repéré par $\theta = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM})$, établir une équation différentielle vérifiée par $T(\theta)$ à l'équilibre limite.
2. Déduire de cette équation la relation qui existe entre $T(\alpha)$ et $T(0)$ à l'équilibre limite.
3. Calculer $\dfrac{T(\alpha)}{T(0)}$ pour $\alpha = 2\pi$, 4π, 6π sachant que pour une corde mouillée glissant sur du fer, $f = 0{,}3$.

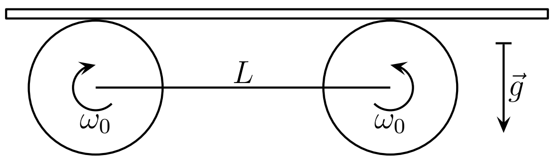
Cylindre roulant sur un prisme



Un prisme $\mathscr{P}$ de masse M de section verticale ABC avec $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \alpha$ repose sans frottement sur un plan (xOy) fixe dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Un cylindre homogène $\mathscr{C}$ de centre G, de rayon r, d'axe (Gy) et de masse m est en contact au point I avec la face BC de $\mathscr{P}$, le coefficient de frottement étant f et on suppose qu'à $t = 0^+$ le cylindre $\mathscr{C}$ roule sans glisser sur $\mathscr{P}$.

Étudier le mouvement de l'ensemble.

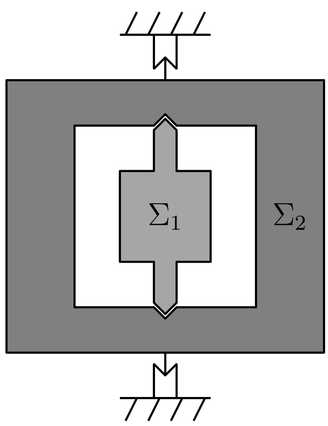
Planche en oscillation sur des cylindres



Deux cylindres identiques de rayon R tournent avec une vitesse angulaire constante ω_0 autour de leurs axes géométriques, les sens de rotation étant opposés. Les axes des deux cylindres sont fixes dans le référentiel $\mathscr{R}$ galiléen, parallèles, dans un même plan horizontal et leur distance est L. Une planche $\mathscr{P}$ d'épaisseur négligeable et de masse m est placée sur les cylindres. On note f le coefficient de frottement pour le contact entre la planche et chacun des cylindres et on suppose que ω_0 est suffisamment grand pour qu'il y a toujours glissement au niveau des contacts planche – cylindre.

Étudier le mouvement de la planche supposée immobile à l'instant initial.

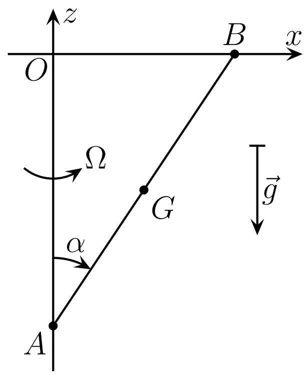
Solides liés en rotation



Soit un solide Σ_1 de moment d'inertie J_1 lié par des pivots non parfaits d'axe vertical à un solide Σ_2 de moment d'inertie J_2, lui-même lié à un support fixe par des pivots parfaits d'axe vertical. À l'instant $t = 0$, Σ_1 est au repos dans un référentiel galiléen et Σ_2 tourne avec la vitesse angulaire ω_0. Le frottement solide au niveau des pivots a pour effet d'entraîner Σ_1. On suppose que le frottement solide introduit un moment constant de valeur absolue Γ par rapport à l'axe.

1. Déterminer la vitesse angulaire finale ω_f du système et calculer la variation d'énergie cinétique ΔE_c de l'ensemble.
2. Déterminer les vitesses angulaires $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ en fonction du temps.
   Au bout de combien de temps la vitesse angulaire ω_f est-elle atteinte ?
3. Déterminer la puissance totale des forces de frottement.
   En déduire l'énergie transformée en chaleur et la comparer à ΔE_c.

Tige en rotation



Une tige AB, homogène, de longueur $2\,\ell$ et de masse m, est mise en rotation par le guide horizontal (Ox) qui tourne autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire constante Ω. L'extrémité A glisse sans frottement sur (Oz) et l'extrémité B sur (Ox) sans frottement. On pose $\alpha = (\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})$ et on note J son moment d'inertie par rapport à un axe horizontal passant par G.

1. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $E_{\mathrm{p}}(\alpha)$ de la tige dans le référentiel $\mathscr{R}'$ tournant avec l'axe (Ox) autour de l'axe (Oz).
2. En déduire les positions d'équilibre de la tige dans $\mathscr{R}'$ et discuter de leurs stabilités.
3. Montrer que la pulsation ω des petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable est donnée par $\omega(\alpha_{\text{éq}}) = \sqrt{\dfrac{1}{m\,\ell^2 + J} \times \dfrac{\mathrm{d}^2 E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\alpha^2}(\alpha_{\text{éq}})}$.

Balançoire

Pour amplifier l'amplitude de ses oscillations, un enfant sur une balançoire se déforme. De façon très sommaire, on suppose qu'il modifie son moment d'inertie J sans modifier la position de son centre d'inertie G à la distance a de l'axe de rotation.

1. On suppose que l'enfant, arrivant en $\theta = 0$ avec une énergie cinétique $E_{\mathrm{c}1}$, fait passer rapidement son moment d'inertie de la valeur J_1 à la valeur J_2.
   Justifier que son moment cinétique par rapport à l'axe se conserve.
   En déduire la variation relative d'énergie cinétique $\dfrac{E_{\mathrm{c}2} - E_{\mathrm{c}1}}{E_{\mathrm{c}1}}$ au cours de l'opération.
2. Lorsqu'ensuite l'enfant arrive en $\theta = \theta_{\max}$, il fait passer rapidement son moment d'inertie de la valeur J_2 à la valeur J_1.
   Montrer que le moment cinétique par rapport à l'axe de rotation du système {enfant + balançoire } est une fonction mathématiquement continue du temps.
   Que vaut $\sigma(\mathscr{S},\theta_{\max}^-)$? En déduire $\sigma(\mathscr{S},\theta_{\max}^+)$.
   Justifier alors que l'énergie cinétique de l'enfant ne varie pas.
   Conclure sur la manière d'amplifier le mouvement.
3. Pour justifier que la solution optimale correspond à une variation du moment d'inertie $J(t)$ de forme créneau de période $\dfrac{T_0}{2}$, on utilise la fonction approchée $J(t) = J_0 + \Delta J\,\cos(\omega\,t)$.

En supposant $|\Delta J| \ll J_0$ et en faisant un développement limité pour les petits angles (correspondant au démarrage des balancements de l'enfant), montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 \left(1 - \frac{\Delta J}{J_0} \cos(\omega\, t)\right) \theta(t) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{m\, g\, a}{J_0}}$$

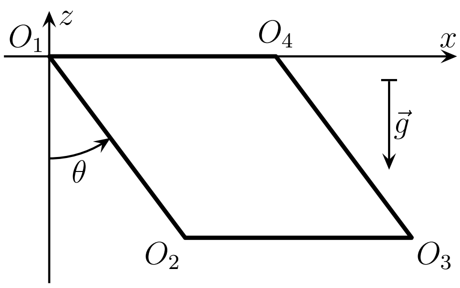
Montrer alors que $\dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}(t)}{\mathrm{d}t} = \omega_0 \dfrac{\Delta J}{J_0} \cos(\omega\, t)\, \theta(t)\, \dot{\theta}(t)$ où $E_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{2}\, \dot{\theta}^2(t) + \dfrac{{\omega_0}^2}{2}\, \theta^2(t)$.

En supposant que $\theta(t) = A(t)\, \sin(\omega_0\, t + \varphi)$ avec $A(t)$ lentement variable à préciser, montrer que

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = \omega_0 \frac{\Delta J}{J_0} \cos(\omega\, t)\, A^2(t)\, \sin(2\, \omega_0\, t + 2\, \varphi)$$

En déduire la présence de résonance pour $\omega = 2\, \omega_0$.

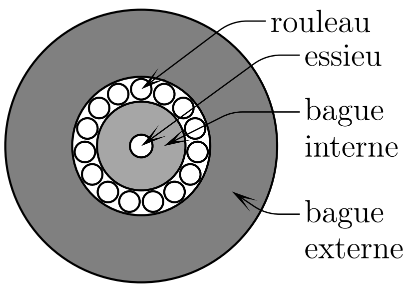
Losange articulé



Un losange articulé est constitué de quatre barres homogènes de masse m et de longueur L articulées par des liaisons pivots parfaites en O_1, O_2, O_3 et O_4. La barre O_1O_4 reste horizontale et fixe, le losange pouvant alors penduler avec un angle θ dans son plan vertical. On note J le moment d'inertie d'une barre autour d'un axe qui lui est orthogonal et qui passe par une de ses extrémités.

Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ et déterminer la période des petites oscillations.

Roulement à rouleaux



La liaison entre un essieu de centre de masse C, d'axe horizontal, animé d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{v} = v\, \vec{u}_x$, et une roue de rayon r, est assurée par un roulement à rouleaux constitué :

- ➜ d'une bague interne de rayon extérieur r_1 solidaire de l'essieu
- ➜ d'une bague externe de rayon intérieur r_2 tournant à la vitesse angulaire ω de la roue

➜ de n cylindres homogènes situés entre les deux bagues et roulant dessus sans glisser à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$.

On repère le centre d'inertie A d'un rouleau par l'angle $\theta = (\vec{u}_x,\overrightarrow{CA})$.

1. Exprimer la vitesse angulaire ω de la roue en fonction de la vitesse v.
2. Trouver la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.
3. Trouver la relation entre $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ et ω.
4. Exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de v, r, r_1 et r_2 puis $\dot{\varphi}$ en fonction de v, r, r_1 et r_2.
   Comparer $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.

Réflexion d'une déformation

Une corde de masse linéique μ est tendue avec une tension T_0. On néglige les effets de la pesanteur.

La corde a une longueur L et s'étend de $x = 0$ à $x = L$. Elle est fixée en $x = L$. On impose à l'extrémité $x = 0$ le mouvement :

$$\left\{\begin{array}{lcll} y(0,t) & = & 0 & \text{pour} \quad t \leqslant 0 \\ y(0,t) & = & a\,\dfrac{t}{\tau} & \text{pour} \quad 0 < t \leqslant \tau \\ y(0,t) & = & a & \text{pour} \quad \tau < t \leqslant 3\,\tau \\ y(0,t) & = & a\dfrac{1}{2\,\tau}\,(5\,\tau - t) & \text{pour} \quad 3\,\tau < t \leqslant 5\,\tau \end{array}\right.$$

On prendra $L = 20\,c\,\tau$.

1. Dessiner la forme de la corde à $t = 7\,\tau$.
   Quel est le vecteur vitesse des points d'abscisse $3\,c\,\tau$, $5\,c\,\tau$ et $\dfrac{13}{2}\,c\,\tau$ à cet instant là ?
2. Dessiner de même la forme de la corde à $t = 21\,\tau$ et $t = 30\,\tau$.

Corde vibrante conductrice dans $\vec{B}$

On étudie les petits mouvements dans la direction (Oz) d'une corde métallique de longueur L fixée en ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = L$. On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité $I(t) = I_0\,\cos(\omega\,t)$ et plongée dans le champ magnétique $\vec{B} = B_0\,\sin\left(\dfrac{\pi\,x}{L}\right)\,\vec{u}_y$.

1. Établir l'équation du mouvement de la corde et en rechercher les solutions en régime forcé.
2. Discuter la résonance éventuelle.

Vibrations longitudinales d'une lame de céramique

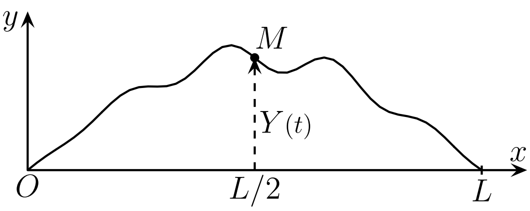
On étudie les petits mouvements de déformation le long de l'axe horizontal (Ox) d'une lame de céramique de section S (perpendiculairement à l'axe Ox) et de masse volumique μ_0. À l'équilibre la pression est uniforme dans la lame, égale à P_0. À l'instant t un plan d'abscisse x au repos se trouve à l'abscisse $x + y(x,t)$, sa vitesse vibratoire est $u(x,t)$. On néglige tout effet lié à la pesanteur.

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la force de traction T permettant à la lame de section S et de longueur L de s'allonger de ΔL est donnée par la loi de Hooke : $T = E\,S\,\dfrac{\Delta L}{L}$ où E est le module d'Young du matériau.

1. Montrer qu'à l'abscisse x, à l'instant t, la force de traction que la partie droite de la lame exerce sur la partie gauche est $T(x,t) = E\,S\,\dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t)$.
2. Écrire l'équation du mouvement d'une tranche de lame située au repos entre les plans d'abscisse x et $x + \mathrm{d}x$.
   En déduire que la déformation $y(x,t)$ vérifie une équation de d'Alembert à une dimension.
   Quelle est la célérité c des ondes ?
   A.N. : calculer c pour une lame de masse volumique $\mu_0 = 3{,}4.10^3$ kg.m^{-3} et de module d'Young $E = 8{,}0.10^{10}$ N.m^{-2}.
3. Donner sans démonstration la forme des solutions de cette équation.
   Interpréter chaque terme.

Corde plombée

La corde représentée ci-dessous est plombée en son milieu M par une masse m. On néglige la pesanteur et la corde est tendue avec la tension T_0 quand l'ensemble est au repos.



1. Dessiner sans démonstration l'allure qu'aurait la corde au repos si on négligeait la pesanteur pour cette dernière mais pas pour la masse m.
2. Étudier les petits mouvements transversaux de la masse m, repérés par la position $Y(t)$.
3. Déterminer les pulsations propres de la corde.
4. Étudier les cas limites $m \ll \mu\,L$ et $m \gg \mu\,L$.

Création et stabilisation d'une OPPH

On considère une corde métallique, de longueur L, de masse linéique μ, tendue avec la tension T_0. On s'intéresse à la propagation de petites déformations transversales. On note c leur célérité.

Une onde incidente imprime à l'extrémité $x = L$ une déformation de la forme :

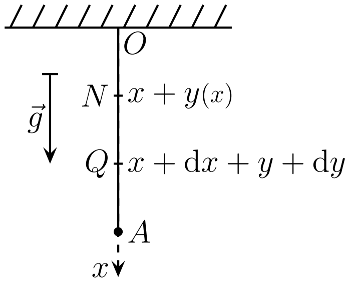
$$y(L,t) = y_0 \sin\left[\omega\left(t + \frac{L}{c}\right)\right]$$

L'extrémité en $x = 0$ est liée à un anneau de masse négligeable, mobile sur une tige verticale (d'équation $x = 0$) et soumis à la force de frottement : $\vec{F} = -f\,\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_y$ où $Y(t)$ représente la position de l'anneau sur la tige.

1. On écrit l'onde réfléchie en $x = 0$ sous la forme : $y_r(0,t) = r\, y_0 \cos(\omega\, t + \varphi)$.
   Déterminer r et φ en fonction de T_0, c et f.
2. Montrer que l'on peut choisir le coefficient de frottement f pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie. Commenter.
3. Dans cette question, on ne néglige plus la masse M de l'anneau.
   Montrer que si on ajoute un ressort exerçant sur l'anneau la force $\vec{F}_r = -K\, Y(t)\, \vec{u}_y$, il existe une unique pulsation (à déterminer) pour laquelle il n'y a pas d'onde réfléchie.

ONDES LONGITUDINALES DANS UNE CORDE VERTICALE

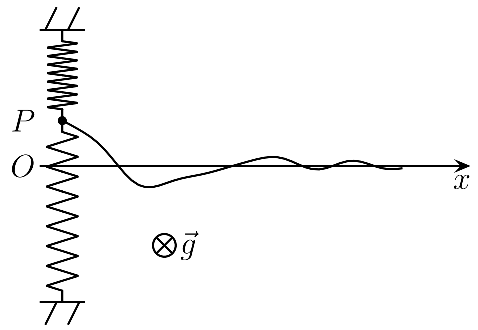
Une corde de longueur L, de section constante s, de masse linéique μ_0, de masse totale m, possède la raideur k. Le champ de pesanteur uniforme est $\vec{g} = g,\vec{u}_x$, l'axe (Ox) étant vertical descendant.



1. **Étude statique**
   La corde est suspendue au point O. À l'extrémité libre A est suspendue une masse ponctuelle M. L'élément de corde compris, en l'absence de toute traction, entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ devient l'élément NQ compris entre les abscisses $x+y(x,t)$ et $x+\mathrm{d}x+y(x+\mathrm{d}x,t) = x+\mathrm{d}x+y+\mathrm{d}y$. À l'équilibre de la corde, l'élément de corde de longueur initiale $\mathrm{d}x$ s'est donc déplacé et allongé de la longueur $\mathrm{d}y$ sous l'action de la portion QA.
   On admet que la tension de la corde, au niveau du point N (d'abscisse initiale x) est donnée par $k\, L \left(\dfrac{\partial s(x,t)}{\partial x}\right)$ où $s(x,t)$ est le déplacement, supposé petit, du point N.
   (a) En raisonnant sur la portion NA, établir, à l'équilibre, l'équation différentielle liant $y(x)$ et x.
   (b) En déduire l'allongement ΔL de la corde en fonctionde M, g, m et k.
   Quelle est la contribution due à la seule masse de la corde ?
2. **Étude dynamique**
   Lorsque la corde est en mouvement vertical, la distance ON devient $x + y(x) + z(x,t)$. Les déplacements sont toujours supposés petits.
   (a) Montrer que $z(x,t)$ satisfait à une équation de d'Alembert à une dimension.
   (b) On donne $k = 10$ N.m^{-1}. La corde a une longueur $L = 1{,}25$ m et un diamètre $d = 1{,}16$ mm. Elle est en acier de masse volumique $\rho = 7{,}8$ g.cm^{-3}.
   Calculer la célérité c des ondes étudiées.
   (c) Justifier que l'on cherche des solutions sous la forme : $z(x,t) = z_0 \cos(K\, x+\varphi) \cos(\omega\, t+\psi)$.
   Établir l'équation vérifiée par les pulsations propres du système.
   (d) Étudier le cas où $m \ll M$. Commenter.

Corde vibrante excitée par deux ressorts

On étudie le dispositif suivant.

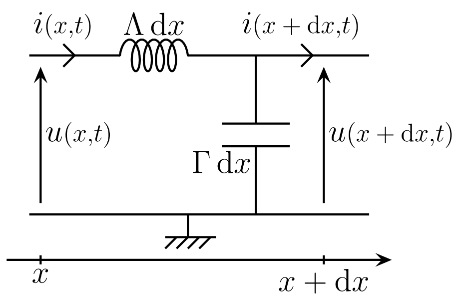


Le point P se déplace sans frottement sur l'axe vertical (Oy). Les deux ressorts sont identiques (raideur k, longueur naturelle ℓ_0). Quand le point matériel P, de masse m, se trouve en O, leurs actions se compensent exactement. À l'instant $t = 0$, la corde, de masse linéique μ et de longueur infinie, est horizontale, elle est tendue avec la tension T_0. Le point P se trouvant en O on lui communique la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_y$.

1. Étudier le mouvement du point P. On posera ${\omega_0}^2 = \dfrac{2\,k}{m}$ et $\lambda = \dfrac{T_0}{2\,m\,\omega_0\,c}$ où c est la célérité des ondes sur la corde. On suppose $\lambda < 1$.
2. Dessiner la corde à l'instant t.
3. Effectuer un bilan énergétique.

Câble coaxial, épisode 1

Un câble coaxial peut être modélisé par une succession de cellules élémentaires représentant la portion $\{\, x, x + \mathrm{d}x \,\}$ du câble où Λ est l'inductance par unité de longueur et Γ sa capacité par unité de longueur.



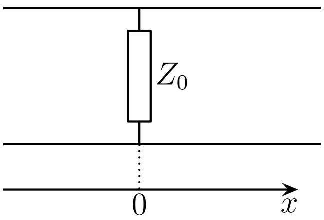
1. Établir les équations aux dérivées partielles vérifiées par $i(x,t)$ et par $u(x,t)$.
2. Montrer que $i(x,t)$ peut se mettre sous la forme $i(x,t) = i_+(x - c\,t) + i_-(x + c\,t)$.
   Quelle est l'expression de c ?
   En déduire l'expression de $u(x,t)$ en fonction de i_+, de i_- et de l'impédance caractéristique du câble $Z_c = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$.

3. Le câble s'étend de $x = 0$ à $x = L$. On branche en $x = 0$ un générateur de tension délivrant la f.é.m. $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.
   (a) L'extrémité $x = L$ est ouverte.
   Déterminer $i(x,t)$ et $u(x,t)$ en régime sinusoïdal forcé.
   Définir et calculer l'impédance d'entrée du câble.
   (b) Le câble est fermé sur une résistance R.
   Déterminer entièrement $i(x,t)$ et $u(x,t)$ en régime sinusoïdal forcé. Commenter.
   Montrer en particulier qu'on peut annuler l'onde réféchie en choisissant la bonne valeur de R.
   Exprimer dans ce cas la puissance moyenne transportée par l'onde à l'abscisse $x = L$. Commenter.

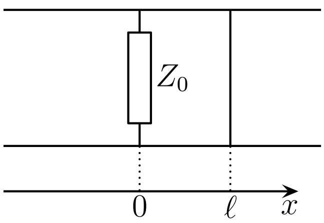
Câble coaxial, épisode 2

Cet exercice fait suite au précédent.

Le câble s'étend maitenant jusqu'à $x = +\infty$ et on branche l'impédance $Z_0 = Z_c$ en parallèle sur le câble à l'abscisse $x = 0$.



1. On s'intéresse à l'onde de courant dans la partie $x < 0$.
   Montrer que cette onde « voit » en $x = 0$ une impédance équivalente Z_1 qui s'exprime très simplement en fonction de Z_c.
2. Définir et calculer le coefficient r de réflexion (en tension ou en intensité) de l'onde en $x = 0$.
3. On place sur le câble précédent un court-circuit en parallèle à l'abscisse $x = \ell$.



   (a) Quelle est la forme de l'onde de courant entre les abscisses $x = 0$ et $x = \ell$?
   (b) Montrer qu'il existe une valeur minimale ℓ_0 de ℓ telle que le courant dans la partie $x > 0$ du câble s'annule en $x = 0$. On exprimera ℓ_0 en fonction de la longueur d'onde λ de l'onde de courant dans le câble.
   (c) En déduire alors le coefficient de réflexion en courant et la forme de l'onde dans la partie $x < 0$ du câble.

Instruments à cordes

La résolution de cet exercice ne nécessite pas de connaissance musicale particulière.

Compte tenu des conditions aux limites imposées à une corde de longueur L, toute solution en oscillations libres de l'équation de D'ALEMBERT s'écrit sous la forme d'une superposition de modes de vibration $y_n(x,t)$:

$$y(x,t) = \sum_n y_n(x,t) = \sum_n \left[a_n \cos\left(\frac{n\,\pi\,\nu\,t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\,\pi\,\nu\,t}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right)$$

1. **Interprétation**

   L'élaboration de la gamme musicale dite naturelle repose sur trois intervalles consonants (c'est-à-dire agréables à l'oreille) et qui constituent l'accord parfait complété par l'octave. Ainsi dans la suite do – mi – sol – do, les rapports de fréquence sont :
   ➜ pour la tierce do – mi : 5/4
   ➜ pour la quinte do – sol : 3/2
   ➜ pour l'octave do – do : 2.

   Il apparaît donc que si le fondamental est do, l'harmonique $n = 2$ est également do, mais à l'octave supérieure, et l'harmonique $n = 3 = \dfrac{3}{2} \times 2$ est le sol de l'octave supérieure.

   Trouver les notes correspondant aux harmoniques $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$.

   Montrer que l'harmonique $n = 7$ ne rentre pas dans le schéma tierce – quinte – octave (les musiciens disent, de ce fait, qu'il est dissonant.)

   Quelle est la note correspondant à l'harmonique $n = 8$? Est-elle consonante ou dissonante ?

2. **Intermède musical**

   Pour aller plus loin, quelques notions sur la gamme sont nécessaires. Parmi les qualités que l'on attribue aux sons (durée, hauteur, timbre et intensité), la hauteur et plus précisément les écarts de hauteur peuvent être évalués à partir des notions de gamme et d'octave. Le doublement de fréquence d'un son s'accompagne d'un changement d'octave. La gamme dite tempérée (la plus simple et la plus utilisée) divise l'octave en 12 intervalles égaux, appelés *demi-tons*. Les fréquences successives N_p des notes espacées par ces demi-tons forment une suite géométrique, vérifiant la loi générale $N_p = 2^{p/12}\,N$ où $0 \leqslant p \leqslant 12$ entier. Dans une octave, la succession des notes est la suivante :

   do, do$\sharp$ (ou ré$\flat$), ré, ré$\sharp$ (ou mi$\flat$), mi, fa, fa$\sharp$ (ou sol$\flat$), sol, sol$\sharp$ (ou la$\flat$), la, la$\sharp$ (ou si$\flat$), si, do

   Les symboles dièse ($\sharp$) et bémol ($\flat$) réhaussent ou rabaissent respectivement les sons considérés d'un demi-ton. La base de fréquence de la gamme dite tempérée est le la$_3$ (la de la troisième octave) dont la fréquence vaut 440 Hz. Pour exprimer l'écart entre deux sons, on introduit une unité associée au pouvoir séparateur de l'oreille, le savart : deux fréquences N_1 et N_2 sont séparées de $1\,000\,\log_{10} \dfrac{N_2}{N_1}$ savarts.

   Les fréquences fondamentales des cordes d'une guitare sont :

   mi$_1$, la$_1$, ré$_2$, sol$_2$, si$_2$, mi$_3$

   l'indice étant le numéro de l'octave considérée.

   (a) Déterminer la fréquence fondamentale de chacune des six cordes.

   (b) À l'aide des données fournies dans le tableau ci-dessous :

Corde numéro	1	2	3	4	5	6
Note fondamentale	mi_1	la_1	ré_2	sol_2	si_2	mi_3
L	63 cm					
Diamètre (mm)	1,12	0,89	0,70	0,55	0,35	0,25
Masse volumique	boyau : 975 kg.m^{-3} nylon : 1180 kg.m^{-3} acier : 7800 kg.m^{-3}					

déterminer les tensions nécessaires pour que la guitare soit parfaitement accordée (mode fondamental) lorsqu'elle est équipée de cordes en acier (guitare électrique).

Comparer, pour une corde donnée (par exemple la corde n°4), l'influence de la nature du matériau constituant la corde sur la force de tension (en supposant le diamètre constant).

(c) Quelle est la variation relative qui peut être tolérée sur la tension de la corde n°4 pour que la fréquence fondamentale ne varie pas de plus de 5 savarts (limite de séparation de l'oreille moyenne) ?

Effectuer l'application numérique pour une corde en acier.

(d) Le guitariste, tout en grattant les cordes d'une main, déplace les doigts de son autre main sur une ou plusieurs cordes afin de faire varier la distance entre les extrémités fixes A et B.

De combien déplace-t-il le doigt, sur la corde n°4 par exemple, pour passer du sol_2 au la_2 ?

Effectuer l'application numérique pour une corde en acier.

Commenter le résultat obtenu.

(e) Au fur et à mesure qu'un orchestre joue dans la salle, la hauteur des instruments à cordes s'abaisse.

Expliquer ce phénomène.

3. **Spectre sonore d'une corde frappée (piano)**

À l'instant $t = 0$, la corde est dans la position d'équilibre $y(x,0) = 0$. On la frappe avec un petit marteau de largeur e (avec $e \ll L$) situé entre les abscisses $x = a$ et $x = a + e$. On admet dans ces conditions que la vitesse de chaque point de la corde à l'instant $t = 0$ est donné par la fonction $h(x) = \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0)$ telle que $h(x) = u$ pour $a \leqslant x \leqslant a + e$ et $h(x) = 0$ sinon, où u est une constante. On cherche une solution sous la forme donnée au début de l'exercice.

(a) Déterminer les coefficients a_n en utilisant une des conditions initiales.

(b) Déterminer les coefficients b_n en fonction de u, n, e, L, ν et a en utilisant l'autre condition initiale.

On donne la décomposition en série de FOURIER de la fonction $f(x)$ impaire et de période $2\,L$ coïncidant avec $h(x)$ sur $[0,L]$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,e\,u}{L} \sin\left(\frac{n\,\pi\,a}{L}\right) \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right)$$

(c) Trouver une application musicale du fait que les coefficients b_n dépendent de a.

Que faut-il faire pour supprimer le premier harmonique dissonant défini par $n = 7$? Commenter.

(d) Dans le cas $a = L/2$, quels sont les harmoniques présents dans le son émis par la corde frappée ?

Ce résultat était-il physiquement prévisible ?

Donner l'expression de $y(x,t)$.

Exprimer les rapports des amplitudes des harmoniques à l'amplitude du fondamental en fonction de n.

4. **Spectre sonore d'une corde pincée (clavecin ou guitare)**

La même corde de longueur L est maintenant pincée puis lâchée sans vitesse à l'instant $t = 0$. Pour simplifier les calculs et faire la comparaison sur les harmoniques impaires avec la corde de piano, nous nous limiterons au cas $a = L/2$. La position initiale de la corde est alors définie par la fonction triangle $y(x,0) = a(x)$:

$$\begin{cases} a(x) = \dfrac{2\,h}{L}\,x & \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{L}{2} \\ a(x) = \dfrac{2\,h}{L}(L-x) & \text{pour} \quad \dfrac{L}{2} \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

On cherche toujours des solutions sous la forme présentée au début de l'énoncé.

(a) Déterminer les coefficients a_n et b_n par les même méthodes que précédemment.

On donne la décomposition en série de Fourier de la fonction $g(x)$ impaire et de période $2\,L$ coïncidant avec $a(x)$ sur $[0,L]$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\,h}{\pi^2}(-1)^n \, \frac{\sin\left((2\,n+1)\dfrac{\pi\,x}{L}\right)}{(2\,n+1)^2}$$

(b) Quelles sont les fréquences des harmoniques obtenues ?

Suivant quel rapport décroissent leurs amplitudes ?

(c) Comparer les spectres d'une corde de piano et d'une corde de clavecin et apprécier objectivement la différence de timbre sonore dans le cadre des études ci-dessus.

5. **Aspect énergétique**

La corde est fixée en ses deux extrémités A et B.

(a) Exprimer, sous forme d'une intégrale, l'énergie cinétique E_{c} de la corde en mouvement.

(b) On étudie la portion de corde située au repos entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à ce système, entre t et $t + \mathrm{d}t$, montrer que l'expression de la densité linéique d'énergie potentielle de la corde est :

$$e_{\text{p}}(x,t) = \frac{1}{2}\,T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

où T est la tension de la corde et en prenant l'énergie potentielle nulle quand la corde est immobile.

(c) On étudie la corde dans le mode propre n. On écrit $y_n(x,t)$ sous la forme $y_n(x,t) = c_n\,\sin(\omega_n\,t + \varphi_n)\,\sin(k_n\,x)$.

Montrer que l'énergie totale de la corde dans ce mode n s'écrit :

$$E_n = n^2\,{c_n}^2\,\frac{\pi^2}{4\,L}T$$

(d) On écrit $y(x,t)$ sous la forme $y(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t)$.

Montrer que l'énergie E de la corde est $E = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} E_n$.

Commenter.

(e) On reprend l'exemple de la corde frappée avec $a = L/2$.
Déterminer l'énergie du mode n et étudier ses variations avec n.
Même question pour la corde pincée.
Préciser alors le commentaire de la question 4c

Vitesse de phase, vitesse de groupe

La relation de dispersion d'une onde à la surface d'une eau de profondeur h est donnée par :

$$\omega^2 = \left(g\,k + \frac{\gamma}{\mu}\,k^3\right)\tanh(k\,h)$$

où g est l'accélération de la pesanteur, μ la masse volumique de l'eau et γ la constante de tension superficielle à l'interface eau – air.

1. Déterminer la dimension de γ.
2. Déterminer la distance caractéristique ℓ_{c} qui permet de comparer les effets de la tension superficielle et ceux de la pesanteur.
3. Comment se simplifie la relation de dispersion si la longueur d'onde λ est très inférieure à ℓ_{c} ? très supérieure à ℓ_{c} ?
   Donner dans chaque cas la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_{g} dans un milieu de faible profondeur ($h \ll \lambda$) puis dans un milieu de grande profondeur ($h \gg \lambda$).
   Quand a-t-on dispersion ?
4. On donne $\gamma = 0{,}073$ S.I..
   Calculer ℓ_{c}.
   Calculer v_φ et v_{g} pour :
   ➜ une onde de marée dans l'océan (on prendra $\lambda \simeq 1000$ km et $h \simeq$ quelques km)
   ➜ une houle de longueur d'onde 5 m dans un océan profond
   ➜ une onde dans une cuve à onde ($\lambda = 3$ cm et $h = 1$ mm)

Influence de la raideur d'une corde

On désire étudier la propagation d'ondes transversales dans une orde de masse linéique μ tendue sous la tension T_0. La corde n'est pas infiniment souple et les effets de raideur sont caractérisés par le couple :

$$C(x_0,t) = J\,E\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_0,t)$$

exercé en x_0 par la partie de la corde $x > x_0$ sur la partie de la corde $x < x_0$, où J est un coefficient dépendant de la géométrie du problème et E le module d'Young de la corde. On se place dans l'hypothèse des petites déformations et on néglige les effets de la pesanteur.

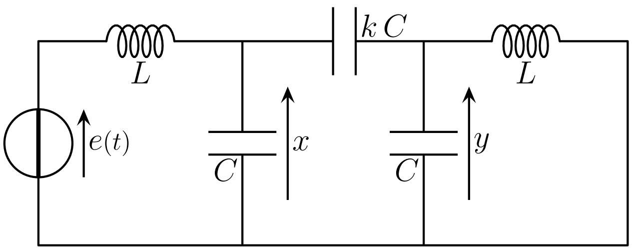
1. Montrer que ce couple s'accompagne de la force $N(x)$ perpendiculaire à la corde donnée par :

$$N(x,t) = -J\,E\,\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x,t)$$

2. Établir l'équation de propagation vérifiée par $y(x,t)$.
3. Établir la relation de dispersion entre ω et k.
   En supposant que les effets dus à la raideur restent faibles, déterminer, au premier ordre en $a = \dfrac{J\,E}{T_0}$, la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
4. La corde, de longueur L, est fixée à ses deux extrémités.
   Déterminer les pulsations propres de la corde.
   Comparer aux pulsations propres d'une corde sans raideur.

Circuits couplés par capacité partagée

Deux circuits (L,C) identiques son couplés par un condensateur de capacité $k\,C$ selon le schéma ci-dessous. Le générateur envoie un échelon de tension d'amplitude E_0 à l'entrée du montage et x et y sont les tensions aux bornes des deux capacités C.



1. Établir les équations différentielles qui régissent les évolutions de $x(t)$ et $y(t)$ pendant l'évolution libre, $e(t)$ étant en court-circuit. On prend $L = 10$ mH, $k = 2$, $C = 10$ nF.
2. Identifier les modes propres du système.
3. Montrer que l'on peut trouver des conditions initiales pour lesquelles le système évolue selon chacun de ses modes propres.
4. Déterminer le mode excité par l'envoi de l'échelon en entrée.

Corde vibrante

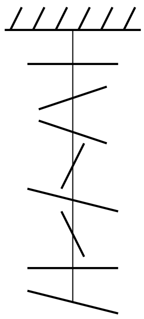
Une corde vibrante de masse linéique μ est soumise à une tension F. On admet que chaque point $M(x)$ possède un mouvement transversal $y(x,t)$ dans un plan vertical et que l'amplitude reste faible. On supposera aussi qu'à chaque instant la tangente à la corde en un point quelconque fait avec Ox un angle faible α. La corde est sans raideur ; son poids est négligé de sorte que sa position au repos coïncide avec l'axe Ox.

1. Montrer que si on néglige l'amortissement, l'équation de mouvement d'un petit morceau de corde conduit à l'équation aux dérivées partielles suivante : $F\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.
   Quelle est la solution générale de cette équation ?

2. Aspect énergétique
   (a) Donner l'expression de l'énergie cinétique par unité de longueur de la corde.
   (b) Donner l'expression de l'énergie potentielle par unité de longueur de la corde ;
   (c) Soit $E(x,t)$ l'énergie mécanique linéique de la corde.
   Montrer qu'il existe une fonction $P(x,t)$, que l'on exprimera en fonction de y et de ses dérivées, telle que $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial E}{\partial t} = 0$.
   Préciser la signification physique de P.
3. Une corde de mase linéique μ_1 est raccordée en $x = 0$ à une corde de masse linéique μ_2. La première occupe la demi-droite $]-\infty,0]$; la seconde occupe la demi-droite $]0,+\infty[$.
   (a) Écrire les conditions aux limites imposées à $y(x,t)$ en $x = 0$.
   (b) Y a-t-il d'autres conditions aux limites à exprimer en $x = 0$?
   (c) Sur la corde 1, on envoie une onde incidente $f(t - x/v_1)$.
   Définir et calculer les coefficients de réflexion et de transmission à la séparation des deux cordes.

Échelle de perroquet

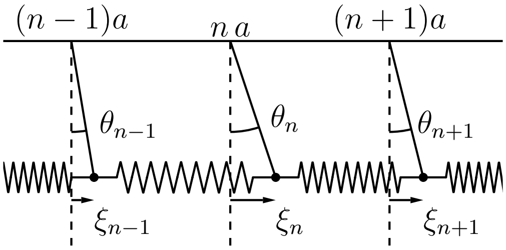
Une échelle de perroquet, suspendue au plafond, est constituée de barreaux identiques, de moment d'inertie J par rapport à leur axe vertical de rotation. Les barreaux sont liés deux à deux par des fils de torsion de longueur a, de constante de torsion C. Soit θ_n l'angle de rotation du $n$ième barreau par rapport à sa position d'équilibre.



1. Quelle est l'équation de propagation d'une onde de torsion le long de l'échelle de perroquet ?
2. Que devient-elle dans l'approximation des milieux continus ?

Équation de Klein-Gordon

On étudie la propagation d'onde le long d'une chaîne de pendules simples, identiques, de masse m et de longueur ℓ, couplés par des resorts de raideur k. On pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\Omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.



1. Quelle est l'équation de propagation liant les petits déplacements $\xi_n \simeq \ell\,\theta_n$, ξ_{n-1} et ξ_{n+1} des extrémités des pendules ?
2. Que devient-elle dans l'approximation des milieux continus ?
3. Quelle est la relation de dispersion caractérisant cette propagation ?
   Tracer la courbe de dispersion $k = f(\omega)$
4. Déteminer vitesses de phase et de groupe en fonction de la pulsation.

Lignes en parallèle

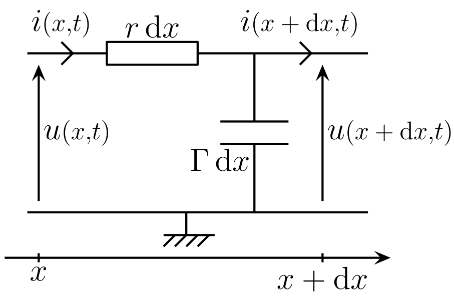
Une ligne électrique, sans pertes, d'impédance caractéristique Z_c, de longueur ℓ est alimentée par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω.

La ligne est fermée sur une impédance réelle Z_0 différente de Z_c. À une distance d de l'extrémité de la ligne, est placée en parallèle une seconde ligne identique fermée sur un court-circuit.

1. Écrire les conditions de continuité pour le potentiel $\underline{V}$ et le courant $\underline{I}$ à la jonction des deux lignes.
   En déduire la condition correspondante pour les impédances.
2. Déterminer les longueurs d et ℓ pour que, vue du générateur, la ligne principale semble fermée sur son impédance caractéristique.
3. Calculer les plus petites longueurs d et ℓ qui conviennent pour $Z_c = 50\ \Omega$, $Z_0 = 175\ \Omega$ et une longueur d'onde $\lambda = 10$ cm.

Lignes bifilaire dissipative

Une ligne bifilaire est modélisée par une résistance linéique r et une capacité linéique Γ.



1. Établir l'équation de propagation dont est solution la tension $u(x,t)$.
   Citer un phénomène solution d'une équation analogue.
2. Chercher les solutions stationnaires de la forme $u(x,t) = f(t)\,g(x)$.
   Montrer que si on court-circuite la ligne de longueur L en ses extrémités de telle sorte que $v(0,t) = v(L,t) = 0$, seuls des modes repérés par un entier n peuvent exister.
3. À l'instant $t = 0$, les condensateurs sont chargés avec une tension $v(x,0) = 4\,A\,\sin^3\left(\dfrac{\pi\,x}{L}\right)$ et on court-circuite les extrémités de la ligne.
   Déterminer $v(x,t)$, faire apparaître une durée caractéristique et commenter.

Écoulement stationnaire

On considère un écoulement bidimensionnel dont le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{v}(M,t) = -k\,x\,\vec{u}_x + k\,y\,\vec{u}_y$$

1. Déterminer les trajectoires des particules de fluide et les lignes de courant.
2. Calculer l'accélération d'une particule de fluide à partir d'une vision lagrangienne et à partir d'une vision eulérienne.
3. Dessiner l'évolution de la particule de fluide élémentaire entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.
   Montrer que, au premier ordre en $\mathrm{d}t$, sa surface ne change pas.
   Était-ce prévisible ?

Écoulement non stationnaire

On considère un écoulement bidimensionnel dont le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{v}(M,t) = (-k\,x + b\,t)\,\vec{u}_x + a\,\sin(\omega\,t)\,\vec{u}_y$$

1. Caractériser cet écoulement : est-il stationnaire ? compressible ? tourbillonaire ?
2. Déterminer les trajectoires des particules de fluide et les lignes de courant.
3. Calculer l'accélération d'une particule de fluide avec le point de vue eulérien et avec le point de vue lagrangien.

Géométrie cylindrique

On étudie l'écoulement d'un fluide caractérisé par le champ des vitesses en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}(M,t) = \left(\alpha\,r + \frac{\beta}{r}\right)\vec{u}_\theta \qquad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes}$$

1. Caractériser cet écoulement : est-il stationnaire ? compressible ? tourbillonaire ?
2. Calculer l'accélération d'une particule de fluide.

Conservation du débit

1. Quelle est la vitesse d'écoulement d'un gaz dans un tuyau cylindrique si 510 g de ce gaz s'écoulent par demi-heure à travers une section du tuyau ? Le diamètre du tuyau est de 2 cm et la masse volumique du gaz est 7,5 kg.m^{-3}.
2. Le tuyau subit un élargissement : la nouvelle section a un diamètre de 5 cm.
   Quelle est la vitesse du gaz dans la section élargie ? On supposera l'écoulement incompressible.

Écoulement radial

On s'intéresse dans cet exercice à l'écoulement radial d'un fluide associé aux variations du rayon $R(t)$ d'une bulle sphérique, le champ des vitesses étant de la forme $\vec{v}(M,t) = v(r,t)\,\vec{u}_r$. Le fluide est considéré comme parfait, incompressible de masse volumique μ.

1. En utilisant l'équation de conservation de la masse, donner l'expression de $v(r,t)$ en fonction de r, du rayon de la bulle $R(t)$ et de sa dérivée.
2. Déterminer le champ des accélérations.
   On rappelle que $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,v^2 + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v}$

Nombre de Reynolds

Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement du pétrole dans l'oléoduc de l'Alaska dont le diamètre est de 1,2 m. Le pétrole brut a une masse volumique de 8 500 kg.m^{-3} et une viscosité de 0,3 Pa.s. Il s'écoule avec un débit de 3 400 L.s^{-1}.

L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ?

Mesure d'une viscosité

Dans un grand cylindre rempli de glycérol à 10 % d'eau, on étudie la chute d'une bille métallique, de diamètre 0,5 mm, de masse volumique $\mu_0 = 7800$ kg.m^{-3}. La vitesse limite de la chute de la bille est de 2,35 mm.s^{-1}. La masse volumique du glycérol à 10 % d'eau est $\mu_{\text{g}} = 1260$ kg.m^{-3}.

Déterminer la viscosité dynamique dynamique η et la viscosité cinématique $\dfrac{\eta}{\mu_0}$ du glycérol à 10 % d'eau.

Parachutisme

La masse d'un parachutiste avec son équipement est de 120 kg. Le coefficient de traînée du parachute ouvert est de 1,2 et son diamètre de 6 m.

1. Quelle est la vitesse limite de descente du parachutiste ?
2. Ce parachutiste doit se poser sur l'aéroport de La Paz en Bolivie, à 4 200 m d'altitude.
   Peut-il garder le même parachute ?

Écoulement laminaire, écoulement turbulent

1. Un écoulement laminaire peut-il être :
   ➜ compressible ou incompressible ?
   ➜ visqueux ou non visqueux ?
   ➜ tourbillonnaire ou non tourbillonnaire ?
   ➜ permanent ou non permanent ?

2. Un écoulement turbulent peut-il être :
   ➜ compressible ou incompressible ?
   ➜ visqueux ou non visqueux ?
   ➜ tourbillonnaire ou non tourbillonnaire ?
   ➜ permanent ou non permanent ?

   Pour chaque réponse affirmative, donner un exemple. Expliquer toute réponse négative.

Écoulement radial

On considère un fluide occupant une sphère de rayon r_0 de manière homogène, pour $t < 0$. À l'instant $t = 0$, on communique aux particules de fluide une vitesse initiale radiale v_{ini} proportionnelle à la distance initiale r_{ini} entre l'origine O et la particule de fluide :

$$v_{\text{ini}} = \frac{r_{\text{ini}}}{\tau}$$

où τ est une constante. On suppose que pour $t > 0$ les particules conservent leurs vitesses initiales.

1. Donner l'expression du champ eulérien $\vec{v}(r,t)$ des vitesses.
2. Donner l'accélération d'une particule de fluide en adoptant les deux points de vue eulérien et lagrangien.
3. On suppose la répartition de masse homogène à tout instant, en particulier à l'instant initial. Déterminer $\mu(t)$ en fonction de $\mu(0)$ de deux manières différentes.

Modèle de la houle

Un fluide au repos occupe tout le demi-espace z négatif (l'axe Oz est vertical ascendant). La propagation d'une onde de gravité (la houle) engendre un mouvement du fluide dont le champ des vitesses est, en coordonnées cartésiennes :

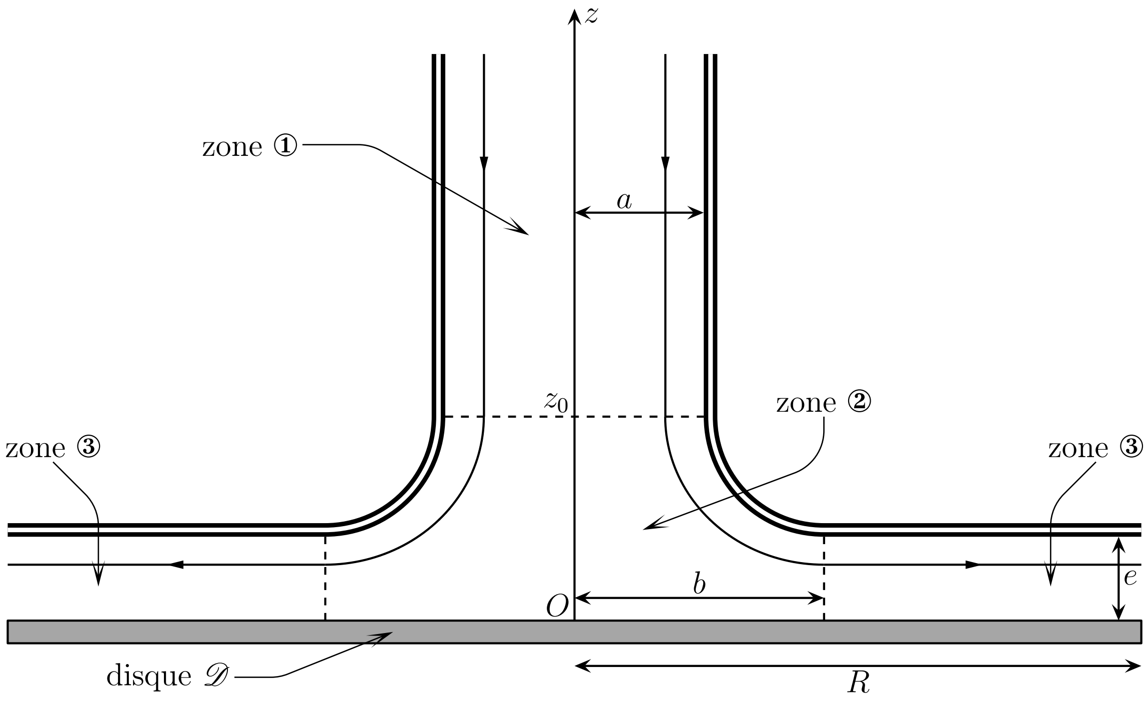
$$\vec{v}(M,t) = a\,\omega\,\mathrm{e}^{k\,z}\,\cos(\omega\,t - k\,x)\,\vec{u}_x - a\,\omega\,\mathrm{e}^{k\,z}\,\sin(\omega\,t - k\,x)\,\vec{u}_z$$

Le niveau de la surface libre est donné par $\xi(x,t) = a\,\cos(\omega\,t - k\,x)$.

1. Montrer que ce champ des vitesses correspond à un écoulement incompressible et irrotationnel. Déterminer le potentiel des vitesses.
2. Établir l'équation des lignes de courant. Dessiner leur allure à l'instant $t = 0$.
3. Déterminer les trajectoires des particules de fluide. On supposera que chaque particule s'éloigne peu de sa position moyenne (X_0,Z_0), ce qui permettra de négliger les variations spatiales du champ des vitesses devant ses variations temporelles.

Écoulement canalisé au dessus d'une plaque

On envisage l'écoulement permanent et incompressible d'un gaz considéré comme un fluide de masse volumique $\mu = 1{,}3\ \text{kg.m}^{-3}$. L'écoulement présente la symétrie de révolution autour de l'axe Oz, le gaz est canalisé par les parois :



On décrit le champ des vitesses de la façon suivante, en coordonnées cylindriques (v_θ est toujours nul ici) :

➜ zone ① (tuyau d'arrivée) pour $z > z_0$: $v_r = 0$ et $v_z = -v_0$ (constante)

➜ zone ② (zone intermédiaire) pour $z < z_0$ et $r < b$: $v_r = A\,r$ et $v_z = B\,z$

➜ zone ③ (écoulement radial) pour $b < r < R$: v_r indépendant de z et $v_z = 0$.

On donne la divergence en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\,v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

L'écoulement étant parfait, permanent et incompressible, on peut utiliser la relation de Bernoulli (cf. chapitre 5 et 6 de mécanique) qui stipule que, *le long du ligne de courant*, la grandeur $\dfrac{P}{\mu} + \dfrac{v^2}{2} + g\,z$ est constante (P est la pression).

1. Exprimer v_r dans la zone ③ en fonction de r, e, a et v_0.
2. Déterminer les constantes A et B.

   Expliciter A, B et b en fonction de v_0, z_0, a et e.

   Donner l'équation de la génératrice $z = f(r)$ qui, par rotation autour de l'axe Oz, engendre la ligne de courant qui épouse parfaitement la paroi qui canalise le gaz (pour $e < z < z_0$ et $a < r < b$).
3. Déterminer la pression $P(r)$ dans la zone ③ sachant que $P(R) = P_0$ (pression atmosphérique).
4. Déterminer la pression pour $r < b$ au niveau du plan $z = 0$.
5. Calculer la force de pression exercée par le fluide sur la face $z = 0$ du disque $\mathscr{D}$ ($0 < r < R$) en fonction de P_0, R, μ, v_0, a, e et e_0.

   En déduire la force totale subie par le disque en prenant en compte la pression atmosphérique sur l'autre face.
6. On donne $v_0 = 10\ \text{m.s}^{-1}$, $a = 5$ mm, $e = 1$ mm, $z_0 = 1$ cm et $R = 15$ cm.

   Calculer numériquement la force subie par le disque et préciser le sens de cette force.

   Commenter.

Dans le cas où l'axe Oz est vertical ascendant, peut-on envisager l'équilibre du disque sous l'action de son poids et des forces de pression ?

Quelle devrait être alors la masse surfacique du disque ? (On ne se préoccupera pas de la stabilité de cet équilibre).

Étude cinématique de deux écoulements particuliers

Dans tout le problème, l'air sera considéré comme un fluide incompressible de masse volumique ρ en écoulement stationnaire.

Les obstacles solides introduits dans cet écoulement seront à géométrie cylindrique (de base *a priori* quelconque), avec des génératrices parallèles à l'axe Oz. On se limitera à une étude bidimensionelle dans le plan xOy perpendiculaire à Oz, les phénomènes étant supposés invariants par translation selon Oz.

1. **Écoulement tourbillonaire**

   On considère un écoulement orthoradial d'axe polaire Oz appelé tourbillon tel que :
   - ➜ pour $r < a$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(M) = \gamma\,\vec{u}_z$ où γ est une constante algébrique ;
   - ➜ pour $r > a$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(M) = \vec{0}$

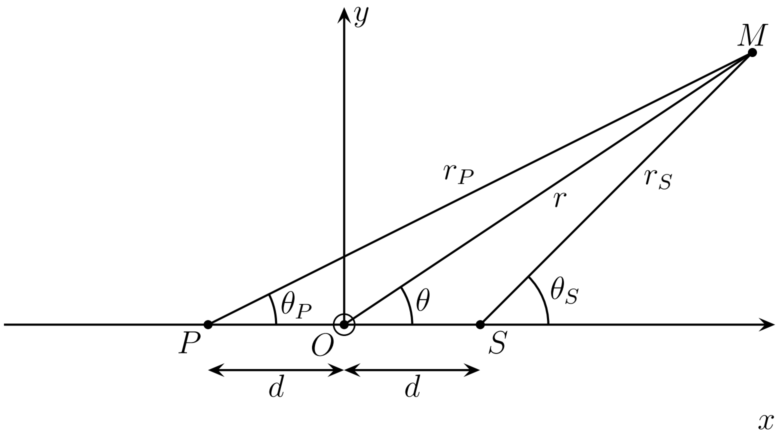
   Ce tourbillon est dit ponctuel dans le plan xOy si l'on considère que si $a \to 0$ et $\gamma \to \infty$, le produit $\gamma\,\pi\,a^2$ demeure égal à la valeur finie Γ que l'on nomme intensité du tourbillon.

   Établir l'expression de $\vec{v}(M)$ en coordonnées polaires, pour $r > a$, avec Γ comme paramètre.

   À quelle distribution électromagnétique peut-on éventuellement comparer cet élément ?

2. **Écoulement d'un doublet**

   On considère un écoulement engendré par un doublet résultat de l'association d'une source et d'un puits :



   (a) La source se situe le long de l'axe Sz, le point S ayant pour coordonnées dans le plan xOy $(d,0)$ avec $d > 0$. L'écoulement s'effectue radialement de façon homogène avec un débit volumique par unité de longueur D. L'exemple d'un tel écoulement pourrait être donné par un fin tuyau poreux dans lequel on fait circuler de l'eau sous pression.

   Établir l'expression de la vitesse $\vec{v}_S(M)$ du fluide en coordonnées cylindriques (r_S,θ_S,z_S) d'axe polaire Sz ainsi que le potentiel $\varphi_S(M)$ associé, défini par $\vec{v}_S(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi_S(M)$.

   (b) Le puits se situe le long de l'axe Pz, le point P ayant pour coordonnées dans le plan xOy $(-d,0)$. Dans ce puits, le fluide arrive avec une répartition radiale uniforme dont le débit volumique par unité de longueur est également D.

   Donner, sans démonstration (mais en justifiant), l'expression de la vitesse $\vec{v}(M)$ du fluide en coordonnées polaires (r_P,θ_P,z_P) d'axe polaire Pz ainsi que le potentiel φ_P associé.

(c) Soit $\varphi(M)$ le potentiel des vitesses dans le cas où on associe la source et le puits pour former un doublet pour lequel $d \to 0$ et $D \to \infty$ de sorte que le produit $2\,d\,D$ demeure égal à la valeur finie H que l'on nommera intensité du doublet.

En coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'axe polaire Oz, montrer que :

$$\varphi(M) = -\frac{H}{2\,\pi}\,\frac{\cos\theta}{r}$$

En déduire l'expression en coordonnées cylindrique de la vitesse $\vec{v}(M)$ créée par ce doublet avec H comme paramètre.

(d) À quelle distribution électromagnétique peut-on éventuellement comparer ce doublet ?

ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE EN ROTATION

Cet exercice est la suite du précédent.

Un cylindre à base circulaire de rayon R et en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de son axe Oz est placé dans l'air dont l'écoulement loin de cet obstacle se fait à la vitesse $\vec{U} = U\,\vec{u}_x$.

Pour étudier l'effet du cylindre sur le fluide, nous utiliserons une méthode de superposition qui consiste à introduire à l'extérieur de l'obstacle des singularités telles que son contour soit une ligne de courant de l'écoulement. Ces singularités sont les suivantes :

➜ un doublet d'axe Oz et d'intensité H qui engendre un champ de vitesse $\vec{v}_{\mathrm{d}}(M)$;

➜ un tourbillon également d'axe Oz et d'intensité Γ qui engendre un champ de vitesse $\vec{v}_{\mathrm{t}}(M)$.

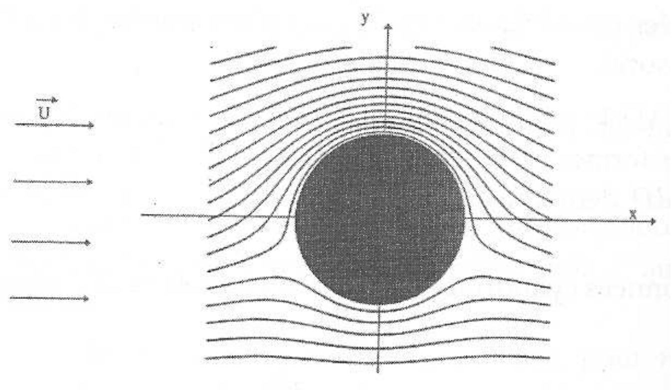
L'écoulement étant parfait, permanent et incompressible, on peut utiliser la relation de BERNOULLI (cf. chapitre 5 et 6 de mécanique) qui stipule que, *le long du ligne de courant*, la grandeur $\dfrac{P}{\mu} + \dfrac{v^2}{2} + g\,z$ est constante (P est la pression).

1. Les coordonnées polaires de la vitesse $\vec{v}$ de cet écoulement ont pour expression :

$$v_r = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta \qquad \text{et} \qquad v_\theta = -U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\,\pi\,r}$$

En s'appurant sur les résultats de l'exercice précédent, justifier ces expressions en explicitant le paramètre H en fonction de R et U.

2. On donne ci-dessous le tracé des lignes de courant pour des valeurs particulières de U, R et Γ :



(a) Comparer qualitativement le module v de la vitesse du fluide pour les points situés sur l'axe Oy selon que $y > R$ ou $y < R$.

(b) Indiquer le signe de Γ et préciser si le sens de rotation du cylindre est horaire ou anti-horaire.

(c) En exploitant le tracé ci-dessus, justifier l'existence de point d'arrêt du fluide à la surface du cylindre.

Donner $|\Gamma|$ en fonction de U, R et du sinus d'un angle géométrique θ_a dont on précisera la valeur numérique approchée en degrés (< 90 °).

3. Le cylindre est initialement immobile dans l'air. On le soumet alors à une accélération angulaire pour lui communiquer finalement la vitesse angulaire constante ω et arriver au régime d'écoulement décrit ci-dessus.

   Cela est-il compatible avec les hypothèses faites dans cet exercice ? Expliquer.

4. On note $\vec{F}$ la résultante de l'action de l'air sur le cylindre.

   Donner sans calcul, mais en les justifiant, les valeurs de la composante F_x et celle du moment par rapport à l'axe Oz de cette action. La réalité confirme-t-elle ce résultat ?

5. Exprimer la pression $P(\theta)$ à la surface du cylindre avec U, ρ, R, Γ et P_0 (pression au loin) comme paramètres.

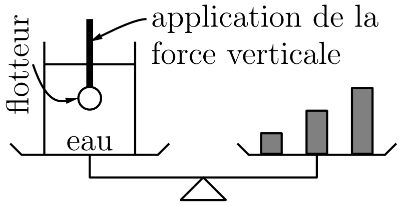
6. Le cylindre ayant une hauteur h, établir l'expression de la composante F_y pour les valeurs numériques suivantes : $U = 15$ m.s^{-1} ; $R = 1$ m ; $h = 3$ m ; $\rho = 1{,}3$ kg.

7. Comment les lignes de courant sont-elles modifiées si on prend en compte la viscosité η de l'air qui est de l'ordre de 10^{-5} Pl ? Quel paradoxe lève-t-on ?

Balance d'Archimède

Sur les plateaux d'une balance dont les fléaux ont même longueur sont posés d'un côté un bécher rempli d'eau de masse volume ρ et de l'autre des masses marquées m assurant l'équilibre de la balance.

On plonge dans l'eau du bécher, un flotteur homogène de volume V et de masse volumique $\rho^\star$ puis on l'y maintient en exerçant sur une tige solidaire de masse négligeable une force $\vec{F}$. On modifie les masses marquées de Δm pour retrouver l'équilibre.



1. Indiquer, sans calcul, le signe de Δm.
2. Quel aurait été le signe de Δm avec, non pas un flotteur, mais une bille de plomb, elle aussi maintenue entre deux eaux ?
3. Calculer Δm et la force $\vec{F}$ en fonction des grandeurs caractéristiques du problème.

   En déduire un mode opératoire pour mesurer le volume V.

Cylindre flottant

Un demi-cylindre de rayon R et de longueur h flotte à la surface d'un liquide de masse volumique ρ (l'axe du cylindre étant parallèle à la surface de l'eau).

1. À l'équilibre, il est enfoncé de $\dfrac{R}{2}$ dans celui-ci. Quelle est sa masse m ?
2. Quelle est la période des petites oscillations verticales de l'objet

Étude d'un ballon atmosphérique

Le modèle de l'atmosphère à gradient thermique constant permet d'établir qu'entre 0 et 11 km d'altitude, la pression et la température atmosphériques varient en fonction de l'altitude z suivant les relations :

$$P(z) = P_0\,(1 - A\,z)^\alpha \quad \text{et} \quad T(z) = T_0\,(1 - A\,z) \qquad \text{avec} \qquad A = \mathrm{C^{te}} \quad \text{et} \quad \alpha = \mathrm{C^{te}}$$

Un ballon sonde gonflé à l'hydrogène est assimilé à une sphère *indéformable* de diamètre D. La masse totale de l'enveloppe (non gonflée), de la nacelle et des appareils est m et cet ensemble a un volume négligeable devant celui de la sphère.

Par ailleurs l'hydrogène est constamment en équilibre thermique avec l'air atmosphérique. À l'altitude $z = 0$, les masses volumiques de l'air et de l'hydrogène, assimilés tous deux à des gaz parfaits sont respectivement ρ_0 (sous la pression P_0) et ρ'_0 (sous une pression de gonflage P'_0).

1. Exprimer la masse volumique $\rho(z)$ de l'air en fonction de l'altitude z.
2. Exprimer la résultante des actions qui s'exercent sur le ballon en fonction de l'altitude et en déduire :
   (a) la masse maximale M_0 que le ballon peut élever du sol ;
   (b) la masse maximale M_1 que le ballon peut élever à une altitude de 11 km.
   Données : $P_0 = 1{,}013.10^5$ Pa ; $\rho_0 = 1{,}225$ kg.m^{-3} ; $P'_0 = 1{,}127.10^5$ Pa ; $\rho'_0 = 0{,}094$ kg.m^{-3} ; $A = 2{,}26.10^{-5}$ m^{-1} ; $\alpha = 5{,}25$; $D = 4{,}0$ m ; $g = 9{,}81$ m.s^{-2}, indépendant de z.
3. Un ballon sonde identique au précédent est équipé d'une soupape différentielle qui maintient constante la différence $\Delta P = \Delta P_0$ entre la pression P' de l'hydrogène et la pression P de l'air atmosphérique, toutes les autres données sont inchangées.
   (a) Exprimer la différence de pression qui s'exerce sur l'enveloppe du ballon en fonction de l'altitude.
   (b) Exprimer la masse volumique ρ' de l'hydrogène en fonction de l'altitude z à partir de ρ'_0, P_0, ΔP et des constantes A et α.
   (c) Résoudre pour ce nouveau ballon les questions posées en 2a et 2b.
   (d) Quelle masse d'hydrogène a du être dégazée pour élever la masse maximale à l'altitude de 11 km ?

Généralité sur les ondes sonores

On étudie des ondes sonores planes dans l'air, de masse volumique au repos ρ_0 dans les conditions de l'expérience.

Dans un plan d'abscisse x, la pression totale P_t peut se mettre sous la forme $P_\mathrm{t} = P_\mathrm{s} + p(x,t)$ où P_s est la pression statique et $p(x,t)$ la surpression acoustique, solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \text{avec} \qquad c = \sqrt{\gamma\,\frac{P_\mathrm{s}}{\rho_0}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{c_P}{c_V}$$

1. (a) Pourquoi dit-on que l'onde est plane ?
   (b) Quelles sont les conditions de validité de l'équation précédente ?
2. (a) Que représente la grandeur c ?
   (b) Pourquoi le coefficient γ intervient-il ?
   (c) Déterminer l'expression de c en fonction de la température absolue T pour un gaz parfait de masse molaire M.
   (d) Pour l'air assimilé à un gaz parfait, on prend $M = 29$ g.mol^{-1}.
   Calculer numériquement c pour une température $\theta = 18$ °C.
   Comparer cette vitesse à la vitesse du son dans un solide ou dans un liquide. On prendra $R = 8{,}32$ J.K^{-1}.mol^{-1} et $\gamma = \dfrac{7}{5}$.
3. On appelle $u(x,t)$ la vitesse particulaire. Les grandeurs $p(x,t)$ et $u(x,t)$ sont liées par la relation :
$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0\,\frac{\partial u}{\partial t}$$
   Quelle est l'origine de cette équation ?
4. On étudie des solutions en ondes planes progressives harmoniques :
$$\underline{p}(x,t) = \underline{p_1}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega\,t+k\,x)} + \underline{p_2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega\,t-k\,x)} \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{\omega}{c}$$
   (a) Quelle est la signification de chacun des deux termes de cette expression ?
   (b) Comment s'écrit alors $\underline{u}(x,t)$? On ne tiendra pas compte des termes constants qui apparaissent lors de l'intégration.

Ordres de grandeur

On considère une source sonore d'intensité 60 dB et de fréquence 1 000 Hz dans l'air à $T_0 = 20$ °C. Calculer numériquement :
- ➜ la pression acoustique efficace p_{eff} ;
- ➜ la vitesse particulaire efficace u_{eff} ;
- ➜ le déplacement particulaire efficace ξ_{eff} ;
- ➜ l'écart de température acoustique efficace $(\Delta T)_{\text{eff}} = T_{\text{eff}} - T_0$.

Commenter les applications numériques précédentes et en particulier conclure quant à la validité de l'approximation acoustique.

Intensité sonore

1. Deux ondes sonores, dont l'une a une fréquence égale au double de la fréquence de l'autre, ont des amplitudes de déplacement égales.
   Laquelle de ces ondes correspond à la surpression de plus grande amplitude ?
   Dans quel rapport ?
   Quel est le rapport de leur intensité ?
2. Si l'amplitude d'une onde sonore est triplée, de combien de décibels l'intensité sonore augmente-t-elle ?

3. Quelle est l'intensité sonore en décibels d'une onde sonore se propageant dans l'air pour laquelle l'amplitude de déplacement des particules de fluide est de 0,1 mm à 180 Hz ?
4. Si deux pétards, qui explosent en même temps produisent une intensité sonore de 90 dB, quelle serait l'intensité sonore si un seul des deux pétards explosait ?

Tuyau sonore

On fait vibrer un diapason au dessus d'un tube vertical ouvert rempli d'eau. On fait baisser lentement le niveau de l'eau. Pendant que cela se produit, l'air au dessus de l'eau entre en résonance avec le diapason lorsque la distance entre la surface de l'eau et l'ouverture du tuyau est de 12,5 cm puis de 37,5 cm.

Quelle est la fréquence du diapason ? On prendra $T = 20\ °\text{C}$.

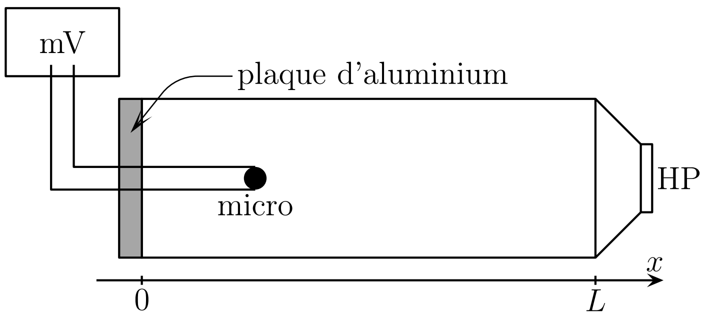
Tuyau d'orgue

Un tuyau d'orgue est assimilable à un cylindre de longueur $\ell = 1{,}0$ m fermé à une de ses extrémités, ouvert à l'autre. Dans le tuyau, les conditions de l'air au repos dont $P_0 = 1{,}013$ bar, $T_0 = 290$ K, $\mu_0 = 1{,}22\ \text{kg.m}^{-3}$. L'air est assimilé à un gaz parfait de constante $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V} = 1{,}4$.

1. Déterminer les fréquences du fondamental (N_0) et de la première harmonique (N_1).
2. À la fréquence N_1, l'amplitude maximale des déplacements de l'air vaut $a_0 = 1$ mm.
   En déduire les amplitudes maximales de la vitesse, de la surpression et des écarts de température. Commenter.

Mesure expérimentale de la célérité des ondes acoustiques

On considère un tuyau horizontal cylindrique d'axe Ox, de section S, rempli d'air assimilé à un gaz parfait de masse molaire M. Dans les conditions de l'expérience (à la température de 18 °C), sa masse volumique au repos est ρ_0. La longueur du tuyau est $L = 1{,}45$ m. À l'extrémité $x = L$, est placé un haut-parleur associé à un générateur basse fréquence, l'ensemble délivrant un signal sinusoïdal. À l'autre extrémité ($x = 0$), l'expérimentateur place une plaque métallique rigide en aluminium. Un microphone mobile, relié à un millivolmètre, peut se déplacer à l'intérieur du tuyau sans preturber les phénomènes étudiés. On suppose que les grandeurs vibratoires ne dépendent que de x et de t.



Le microphone délivre une tension proportionnelle à la racine carrée de la valeur moyenne du carré de la pression acoustique : $V = \kappa \sqrt{\left\langle p^2(x,t) \right\rangle}$

1. Déterminer l'expression de la pression $p(x,t)$ dans le tuyau en tenant compte des conditions aux limites.
2. L'expérimentateur relève la position du premier minimum de tension rencontré à partir de $x = 0$ et celui du i-ème pour trois fréquences différentes :

f (Hz)	x_1 (cm)	x_i (cm)	i
300	32,0	89,0	2
500	17,7	120,0	4
988	9,0	112,0	7

   Calculer, pour chacune de ces fréquences les valeurs de la longueur d'onde λ, de la célérité c des ondes acoustiques dans le tuyau et celle de $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V}$. Commenter.
3. Le micro étant placé en $x = 0$, l'expérimentateur observe que les indications du voltmètre passent par des valeurs très importantes pour certaines fréquences dont il relève quelques valeurs : 355 Hhz, 472 Hz, 590 Hz.
   Expliquer ces résultats.
   Y a-t-il contradiction avec le fait que c'est le déplacement de la membrane qui génère les ondes ?

Mesure expérimentale d'un coefficient d'absorption

On reprend le dispositif de l'exercice précédent mais la plaque d'aluminium est remplacée par une plaque de mousse.

Dans le tuyau, l'onde sonore est de la forme : $\underline{p}(x,t) = \underline{p_1}(x,t) + \underline{p_2}(x,t)$ avec

$$\underline{p_1}(x,t) = \underline{p_1}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega\, t + k\, x)} \qquad \text{et} \qquad \underline{p_2}(x,t) = \underline{p_2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega\, t - k\, x)}$$

On définit le coefficient de réflexion du matériau par $\underline{r} = \dfrac{\underline{p_2}(0,t)}{\underline{p_1}(0,t)} = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$.

1. Montrer que le microphone délivre une tension V de la forme :

$$V = K\,\sqrt{1 + r^2 + 2\,r\,\cos(2\,k\,x - \varphi)}$$

2. L'expérimentateur réalise plusieurs expériences dont les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous. Il note la position x_1 du premier minimum de tension rencontré à partir de $x = 0$ ainsi que cette du i-ème minimum x_i. Les valeurs lues sur le voltmètre V_{min} et V_{max} correspondent aux valeurs minimales et maximales de la tension.

f (Hz)	x_1 (cm)	x_i (cm)	i	V_{min} en mV	V_{max} en mV
460	26,6	101,5	3	1,50	6,80
750	13,2	58,8	3	1,10	5,40
845	10,6	51,1	3	1,25	6,30
1016	8,0	41,7	3	0,80	4,05
1042	7,3	40,1	3	1,60	8,35
1185	5,5	49,0	4	0,80	3,95
1400	3,7	28,1	3	1,00	5,05

   (a) On pose $\alpha = \dfrac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}$.
   Déterminer r en fonction de α.

(b) Déterminer l'expression de φ en fonction de x_1 et de la longueur d'onde λ.

(c) Calculer pour chaque fréquence les valeurs de r et de φ.
Commenter les résultats obtenus.

3. On définit l'impédance acoustique par $\underline{Z}(x) = \dfrac{\underline{p}(x,t)}{\underline{u}(x,t)}$.

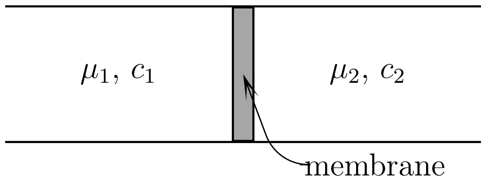
   (a) Donner l'expression de $\underline{Z}(0)$ en fonction de ρ_0, c et r.

   (b) On appelle impédance réduite $\underline{Z}'(0)$ le rapport $\dfrac{\underline{Z}(0)}{-\rho_0\, c}$.
   Justifier cette appellation.
   Déterminer les expressions des parties réelle et imaginaire de $\underline{Z}'(0)$ en fonction de r et φ.

   (c) Calculer les valeurs des parties réelle et imaginaire de $\underline{Z}'(0)$ pour chaque fréquence.

Réflexion – transmission sur une membrane

La membrane, de masse surfacique σ, située en $x = 0$, est infiniment mince. Elle peut coulisser sans frottement dans le tuyau horizontal et sépare deux fluides parfaits. On note μ_i et c_i la masse volumique et la célérité des ondes acoustiques dans chacun des deux demi-tuyau ($i = 1$ ou 2). Le tuyau est supposé illimité.

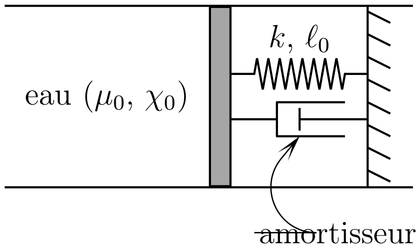


Une onde incidente plane progressive monochromatique de pulsation ω arrive sur la membrane.

1. Déterminer l'onde transmise et l'onde réfléchie.
2. Dans la suite de l'exercice, les deux milieux de part et d'autre de la membrane sont identiques.
   Déterminer le coefficient de transmission T en énergie, rapport des flux moyens d'énergie transmise et incidente.
3. Tracer l'allure de la courbe $G_{\text{dB}} = 10\,\log(T(\omega))$ en fonction de $\log\omega$.
   Quelle sont la nature du filtre, la fréquence de coupure f_{c} à -3 dB et la pente pour $f > f_{\text{c}}$?
4. On souhaite un affaiblissement de 40 dB pour une fréquence de 200 Hz.
   Dans quel domaine se situe la fréquence de coupure ?
   Conclure quant à l'atténuation entre deux pièces voisines, pour un son grave et un son aigu.
   En déduire la masse surfacique σ puis l'épaisseur a de la cloison sachant que sa masse volumique est $\rho = 1\,200$ kg.m^{-3}.
   L'hypothèse d'une membrane infiniment fine est-elle vérifiée ? Et les autres hypothèses ?

Adaptation d'impédance

On envoie une onde acoustique dans l'eau vers le piston de masse m, relié à un amortisseur de coefficient de frottement fluide λ. Le tuyau est un cylindre d'axe Oz, de section S.



1. On définit l'impédance acoustique de l'eau pour une onde plane progressive harmonique par $\underline{Z}_{\mathrm{a}} = \dfrac{\underline{p}(z,t)}{\underline{u}(z,t)}$.
   Calculer l'impédance acoustique pour l'onde incidente et pour l'onde réfléchie.
   Définir de manière analogue l'impédance mécanique $\underline{Z}_{\mathrm{m}}$ du piston en fonction de m, k, S, λ et ω.
   À quelle(s) condition(s) y a-t-il adaptation d'impédance ?
2. Exprimer dans le cas général le coefficient de réflexion en fonction de $\underline{Z}_{\mathrm{m}}$ et de $\underline{Z}_{\mathrm{a}}$.
   Retrouver le cas de la première question.
3. Établir le bilan énergétique.

Amortissement du son par conduction

Dans l'étude des ondes sonores, l'hypothèse d'une transformation adiabatique est une approximation car il existe toujours un léger transfert thermique entre tranches de gaz comprimés ($T > T_0$) et dilatées ($T < T_0$) par le passage de l'onde sonore.

Le fluide considéré est un gaz parfait de conductivité thermique λ et $T_1 = T - T_0$ représente l'écart de température par rapport à la situation au repos.

On suppose que l'onde est une OPPM que l'on écrit avec la notation complexe :

$$\underline{p_1} = \underline{p_{10}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,x)}\ ; \qquad \underline{\mu_1} = \underline{\mu_{10}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,x)}\ ; \quad \underline{T_1} = \underline{T} - T_0 = \underline{T_{10}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,x)}$$

k étant éventuellement complexe.

L'état de repos est caractérisé par p_0, μ_0 et T_0.

1. En écrivant, dans le cadre de l'approximation acoustique, le PFD pour une particule de fluide et l'équation locale de conservation de la masse, établir l'expression de $\dfrac{\underline{p_{10}}}{\underline{\mu_{10}}}$.
2. Donner deux expressions différentes du transfert thermique massique δQ_{mas} reçu par l'unité de masse d'un gaz parfait pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ l'une avec c_V, capacité thermique massique à volume constant, en variables T et μ, l'autre avec c_P, capacité thermique massique à pression constante, en variables T et p.
3. Montrer que le transfert thermique volumique δQ_{vol} fournie à l'unité de volume de fluide pendant $\mathrm{d}t$ est reliée à la température par l'équation $\delta Q_{\mathrm{vol}} = K\,\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}t$.
4. Établir la relation :

$$\frac{\underline{p_{10}}}{\underline{\mu_{10}}} = \frac{p_0}{\mu_0} \times \frac{c_P - \mathrm{i}\,k^2\,\dfrac{\lambda}{\mu_0\,\omega}}{c_V - \mathrm{i}\,k^2\,\dfrac{\lambda}{\mu_0\,\omega}}$$

5. Déduire de ce qui précède la relation entre k et ω en introduisant c_0, vitesse de propagation du son sans amortissement.

   Que traduisent physiquement les cas limites $\lambda \to 0$ et $\lambda \to \infty$?

   Que vaut la célérité du son dans chacun des deux cas ?

6. On pose $k = k_1 - \mathrm{i}\,\alpha$. On suppose que l'influence de la conduction thermique est faible, *i.e.* que :

$$\frac{\lambda\,|k|^2}{\mu_0\,\omega} \ll c_V \qquad \text{et} \qquad \frac{\lambda\,|k|^2}{\mu_0\,\omega} \ll c_P$$

   Déterminer k_1 et α en fonction de λ, γ, c_P, c_0 et ω.

   En déduire l'expression de la surpression $p(x,t)$.

   Interpréter la forme obtenue.

   Comment varie l'absorption quand la fréquence augmente ?

   A.N. : calculer α pour l'air à 20 °C aux fréquences $f = 1$ kHz puis $f = 40$ Hz et en déduire dans chaque cas la distance d sur laquelle l'onde est amortie d'un facteur exp(1). Commenter.

   Données : $\lambda = 2{,}5.10^{-2}$ W.m^{-1}.K^{-1}, $\mu_0 = 1{,}2$ kg.m^{-3}, $c_0 = 340$ m.s^{-1}, $c_P = 10^3$ J.K^{-1}.kg^{-1}, $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V} = 1{,}4$.

Bilans de quantité de mouvement

1. À $t < 0$, un wagon ouvert (comme une benne) de masse m_0 se déplace sans frottement sur une voie horizontale à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_x$. À l'instant $t = 0$, il se met à pleuvoir : à partir de cet instant, le wagon se déplace sous une pluie verticale recevant un débit massique d'eau D constant.

   Déterminer sa vitesse $v(t)$.

2. Un wagon minéralier, de masse m_0 mobile sans frottement sur une voie horizontale, est au repos à l'instant $t = 0$. Il contient une masse m_1 de minerai. À partir de cet instant, il est tracté par une force horizontale constante de module F tandis qu'il perd un débit massique D_m de minerai avec une vitesse horizontale constante par rapport au chariot, de module u et de sens opposé à la force tractrice.

   Déterminer l'accélération $\vec{a}(t)$ et la vitesse $\vec{v}(t)$ du wagon à l'instant t.

Efforts sur un tuyau coudé

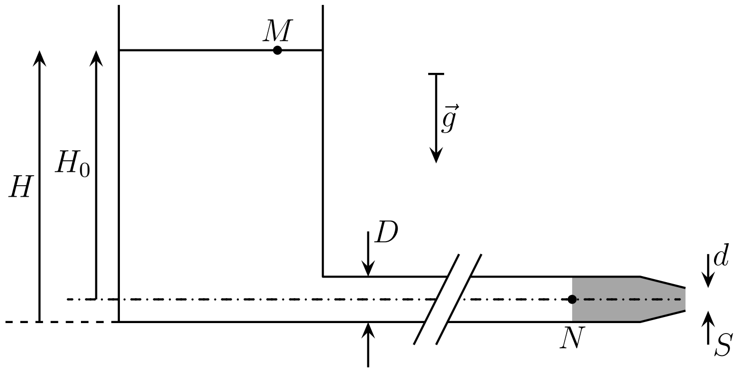
Un tuyau cylindrique de section circulaire de diamètre d est coudé à angle droit. Il est posé sur un plan horizontal et contient de l'eau, assimilé à un fluide parfait incompressible s'écoulant avec le débit volumique D_v. La pression de l'eau dans le tube est P_1. L'air extérieur est à la pression P_0.

Calculer la résultante des efforts s'exerçant sur le coude.

A.N. : $d = 0{,}20$ m ; $D_v = 0{,}16$ m^3.s^{-1} ; $P_1 = 6$ bar ; $P_0 = 1$ bar.

Force sur l'embout d'un tuyau

Un réservoir cylindrique de rayon R contient de l'eau sur une hauteur H, l'eau étant considérée comme un fluide parfait incompressible, de masse volumique μ constante. Ce récipient est situé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ supposé uniforme. Ce réservoir sert à alimenter une lance d'arrosage de section circulaire de diamètre D dont l'axe d'ajutage formant l'embout du tuyau se trouve à une distance constante $H_0 = H - \dfrac{D}{2}$ de la surface libre du réservoir (voir figure). L'ajutage de sortie est de section circulaire de diamètre d qu'il est possible de faire varier en vissant ou en dévissant l'embout. La hauteur H d'eau dans le réservoir est maintenue constante par une alimentation non représentée sur le schéma.



On appelle :

➜ V la vitesse dans le tuyau

➜ u la vitesse de l'eau dans la section de sortie

➜ λ le rapport $\dfrac{d}{D}$

et on admet que la répartition des vitesses est uniforme dans une section droite.

1. Par application, soigneusement justifiée, du théorème de BERNOULLI entre les points M et S, exprimer la vitesse V en fonction de g, H_0, et λ.
2. En appliquant le théorème de BERNOULLI entre les points N et S, établir l'expression de la pression P_N au point N en fonction de μ, H_0, g et λ et de la pression atmosphérique P_0.
3. Par un bilan de quantité de mouvement sur un système soigneusement défini, déterminer la résultante $\vec{F}$ des efforts exercés par le fluide sur le pas de vis de fixation de l'embout sur le tuyau. On négligera les efforts dus à la pesanteur.

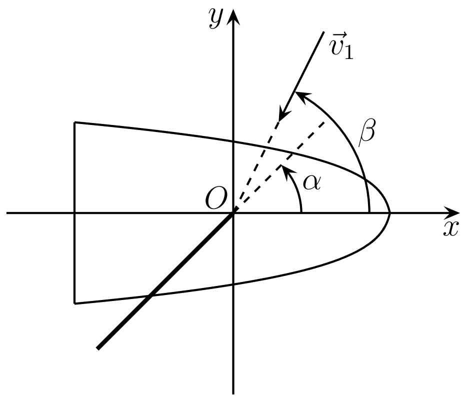
   Exprimer le module F de $\vec{F}$ en fonction de μ, g, H, D et λ. Préciser la direction et le sens de $\vec{F}$.
4. **A.N. :** calculer F pour $H_0 = 5$ m ; $d = 5$ mm ; $D = 3$ cm ; $g = 9{,}8$ m.s^{-2} et $P_0 = 1$ bar.

MODÈLE SOMMAIRE D'UN VOILIER

On considère un bateau se déplaçant à vitesse constante. On se place dans le référentiel (Oxy) lié au bateau. La surface totale de la voile sera notée S. Le plan de la voile est incliné d'un angle α par rapport à la direction du bateau. Le vent arrive sur la voile avec une vitesse $\vec{v}_1$ selon la direction définie par l'angle β (voir figure).

On support que le vent se réfléchit sur la voile selon les lois de DESCARTES en ne perdant pratiquement pas de vitesse en module.

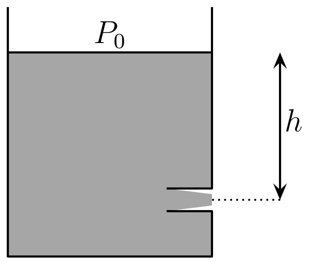
On supposera que la pression de l'air est uniforme et on notera μ sa masse volumique.

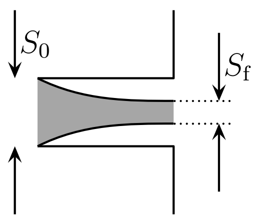


Calculer la force, projetée suivant $\vec{u}_x$ qui s'applique sur la voile.

Ajutage de Borda

On étudie la vidange d'un récipient par un petit orifice muni d'un ajutage rentrant dit *ajutage de* Borda.





La section S du récipient est grande devant la section S_0 de l'orifice de sortie.

L'expérience montre que la section S_f du jet de sortie est inférieure à la section S_0 de l'orifice de vidange. Le but de l'exercice est de calculer le rapport $\alpha = \dfrac{S_f}{S_0}$.

1. Retrouver rapidement l'expressiond e la vitesse de sortie du jet au niveau de la section contractée S_f en assimilant le liquide à un fluide parfait.
2. En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur un système soigneusement défini, montrer que $\alpha = 0{,}5$.

Perte de charge

Un fluide incompressible, de mass volumique μ, s'écoule en régime permanent dans une conduite horizontale, cylindrique, de section S_1. Dans cette conduite la vitesse du fluide est $\vec{v}_1$, la pression P_1. La conduite subit une brusque variation de rayon, l'aire de la section droite devenant $S_2 > S_1$ (cf. figure ①) figure ①

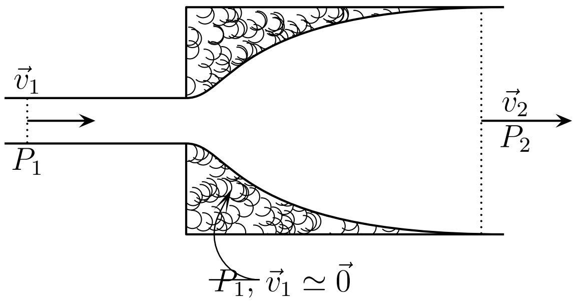
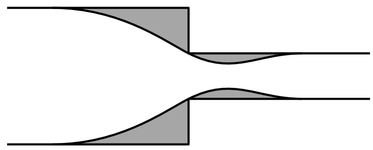


figure ②



Il se produit alors un décollement des lignes de courant et la création d'une zone d'eau morte dans laquelle l'écoulement est trubulent mais reste à la pression P_1. Loin de l'élargissement, la vitesse du fluide est $\vec{v}_2$, sa pression P_2. L'air extérieur est à la pression P_1.

1. En effectuant un bilan de quantité de mouvement pour un système à définir soigneusement, montrer que la différence de pression entre lamont et l'aval de l'élargissement est

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \mu\, v_2\,(v_1 - v_2)$$

2. Le théorème de Bernoulli est-il utilisable ici ? Justifier votre réponse.
   Montrer que l'élargissement à provoqué une « perte de charge » dont on précisera la signification :

$$\left(P_2 + \frac{1}{2}\,\mu\,{v_2}^2\right) - \left(P_1 + \frac{1}{2}\,\mu\,{v_1}^2\right)$$

   à exprimer en fonction de μ, v_1, S_1 et S_2.

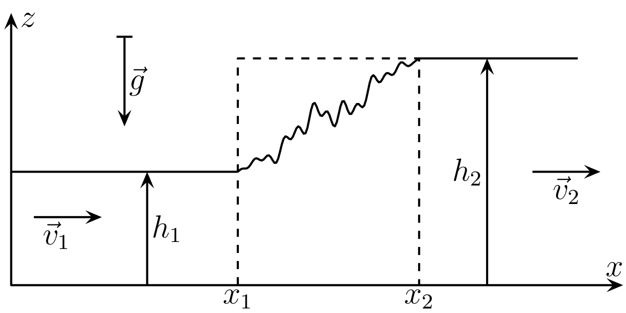
3. Dans le cas d'un rétrécissement brusque, les lignes de courant ont l'allure représenté figure ②. Expliquer pourquoi les résultats précédents ne sont pas applicables.

Ressaut hydraulique

On observe un bourrelet d'eau au fond d'un évier dans lequel coule l'eau d'un robinet. Ce bourrelet est appelé *ressaut*. Il sépare une zone centrale où l'épaisseur du fluide est faible d'une zone périphérique où la hauteur de l'eau est plus importante.

On modélise un ressaut hydraulique dans un écoulement unidimensionnel et permanent dans un canal rectiligne parallèle à l'axe Ox et lde largeur L selon Oy. En amont (resp. en aval) du ressaut, la vitesse du fluide vaut $v_1\,\vec{u}_x$ (resp. $v_2\,\vec{u}_x$) et la profondeur est h_1 (resp. h_2). Le liquide est considéré comme incompressible de masse volumique μ. La pression de l'atmosphère au dessus du liquide est P_0. L'axe Oz est vertical ascendant.

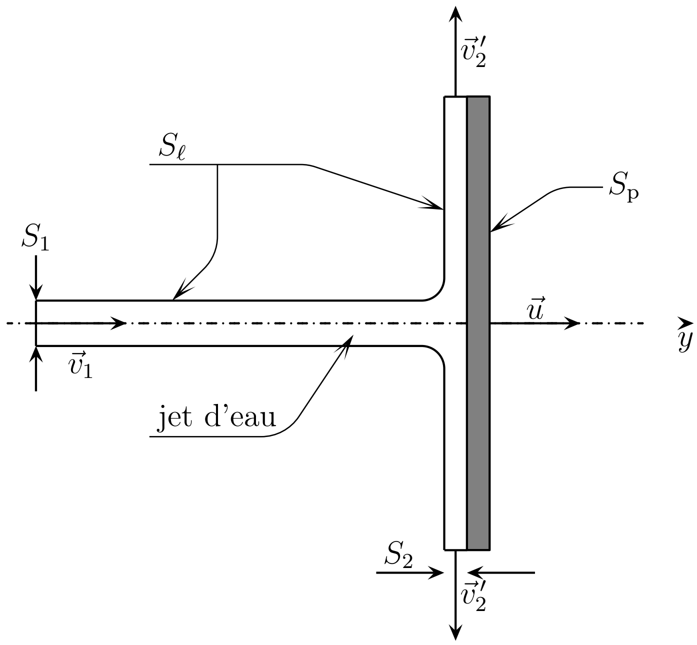
Pour étudier ce phénomène, on considère le fluide contenu dans le parallélépipède rectangle de section $S = L\,h_2$ limité par les sections d'abscisses x_1 et x_2 situées de part et d'autre du ressaut.



1. Peut-on déduire v_2 et h_2 du théorème de Bernoulli ? Pourquoi ?
2. Exprimer la pression au sein du liquide en fonction de z sur la face d'entrée (section $x = x_1$) et sur la face de sortie (section $x = x_2$). On choisira l'origine des cotes z au fond du canal.
3. Établir un bilan de quantité de mouvement pour le fluide contenu dans le volume considéré. En déduire une relation entre v_1, h_1, v_2 et h_2.
4. Calculer v_1 et v_2 en fonction de h_1, h_2 et g.
5. Exprimer, en fonction de h_1 et de h_2 la puissance dissipée dans le ressaut.

Jet d'eau sur une plaque en mouvement

Un jet d'eau cylindrique, de révolution, d'axe horizontal Oy, vient frapper une plaque schématisée par un disque d'axe (Oy), de centre C. Dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}_0$, la vitesse de l'eau dans le jet est $\vec{v}_1 = v_1\,\vec{u}_y$. Dna sce référentiel, la plaque est animée d'une vitesse uniforme $\vec{u} = u\,\vec{u}_y$ avec $0 < u < v_1$. L'eau est un fluide parfait incompressible de masse volumique μ.



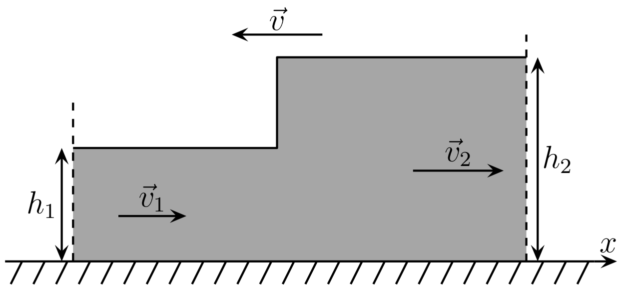
On note S_1 l'aire de la section droite du jet incident, S_2 l'aire de la surface de sortie du jet, S_ℓ l'air de la surface libre du jet et S_p l'aire de la plaque. La pression de l'air ambiant est P_0. On néglige les effets de la pesanteur.

1. Déterminer la vitesse $\vec{v}_2$ du fluide en un point de la surface de sortie dans le référentiel $\mathscr{R}$. On mettra cette vitesse sous la forme $\vec{v}_2 = u\,\vec{u}_y + v_2'\,\vec{u}_r$ et on exprimera v_2' en fonction de v_1 et u.
2. Déterminer la résultante des forces subies par la plaque de la part de l'eau et de l'air ambiant.
3. Calculer, en fonction de μ, S_1, v_1 et u dans $\mathscr{R}_0$:
   (a) la puissance mécanique $\mathscr{P}_\mathrm{m}$ reçue par la plaque ;
   (b) le débit d'énergie cinétique $\mathscr{P}_\mathrm{c1}$ de l'eau à travers S_1 ;
   (c) le débit d'énergie cinétique $\mathscr{P}_\mathrm{c2}$ de l'eau à travers S_2.
4. Expliquer pourquoi $\mathscr{P}_\mathrm{c1} \neq \mathscr{P}_\mathrm{c2} + \mathscr{P}_\mathrm{m}$.
   Établir l'expression du rendement $\eta = \dfrac{\mathscr{P}_\mathrm{m}}{\mathscr{P}_\mathrm{c1}}$.
   A.N. : calculer ces trois puissances et le rendement pour $v_1 = 120\ \mathrm{m.s^{-1}}$; $u = 40\ \mathrm{m.s^{-1}}$ et $S_1 = \pi\,r^2$ avec $r = 1$ cm.

5. Montrer que $\mathscr{P}_{\mathrm{m}}$ peut être calculée en effectuant un bilan énergétique dans le référentiel $\mathscr{R}_0$.

Mascaret

On appelle mascaret une vague solitaire remontant l'estuaire de certains fleuves au moment de la marée montante. On adopte un modèle à une dimension. Le fleuve, de largeur constante L s'écoule vers la mer dans la direction Ox dirigée de l'amont vers l'aval avec une vitesse constante v_1 et une hauteur d'eau h_1 en amont du mascaret. Le mascaret a un profil rectangulaire et remonte l'axe Ox avec une vitesse constante v. La vitesse du fleuve et la hauteur d'eau assez loin en aval du mascaret sont respectivement v_2 et h_2. L'eau est un fluide parfait incompressible de masse volumique μ. On peut mesurer v_1, h_1 et h_2. On se propose de calculer v et v_2.



1. On se place dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}_{\mathrm{m}}$ qui se déplace avec le front du mascaret.
   Effectuer un bilan de masse dans ce référentiel et en déduire une relation entre v et v_2.
   Retrouver cette relation en travaillant dans le référentiel fixe (lié au sol).
2. En effectuant un bilan de quantité de mouvement, dans le référentiel $\mathscr{R}_{\mathrm{m}}$, pour une masse d'eau « à cheval » sur le front du mascaret, établie une relation entre v, v_1, v_2, h_1 et h_2.
3. (a) Exprimer v en fonction de v_1, h_1 et h_2.
   La vitesse du mascaret est-elle la plus rapide au moment des basses eaux ou au moment des crues du fleuve ?
   (b) Exprimer v_2 en fontion de v_1, h_1 et h_2.
   Interpréter le changement de signe de v_2 quand h_2 augmente. Commenter.

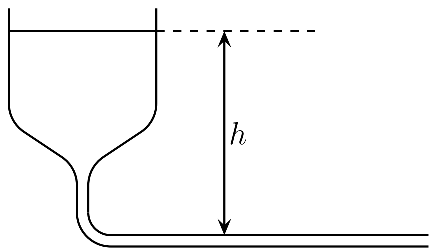
Densité volumique des forces de viscosité

On étudie un écoulement visqueux dont le champ des vitesses est $\vec{v} = a\,\omega\,\mathrm{e}^{-k\,z}\,\cos(\omega\,t - k\,z)\,\vec{u}_x$ l'axe $\vec{u}_x$ étant horizontal.

1. Calculer l'équivalent volumique des efforts de viscosité et l'accélération.
2. En déduire une relation entre ω, k et la viscosité cinématique ν en supposant qu'il n'y a pas de gradient de pression horizontal.

Viscosimètre

Un récipient cylindrique vertical, de diamètre $D = 5$ cm est terminé par un tube horizontal de diamètre $d = 1$ mm et de longueur $L = 40$ cm.



Un liquide visqueux et incompressible s'écoule lentement. Sa hauteur h passe de 5 cm à 2,5 cm en une heure et quart.

On admet que le débit dans le tube horizontal est donné par la loi de Poiseuille

$$D_v = \frac{\Delta P}{128\,\eta\,L}\,\pi\,d^4$$

où ΔP lest la différence de pression entre les deux extrémités du tube.

Déterminer la viscosité cinématique du liquide.

Écoulement du sang dans le système artériel

On peut représenter de manière très schématique l'écoulement dans le système artériel par un réseau de tubes qui se subdivisent de plus en plus à partir de l'aorte jusqu'aux plus fins capillaires. Si on classe les vaisseaux en cinq étages de ramifications, le nombre n de vaisseaux à chaque étage, le diamètre moyen d, la section totale $S = n\,\pi\,\dfrac{d^2}{4}$, le volume total $V = S\,L$ et la longueur moyenne de chaque vaisseau sont donnés dans le tableau ci-dessous.

étage	N	d (cm)	S (cm^2)	V (cm^3)	L (cm)
aorte	1	2,6	5,3	180	34
grosses artères	40	0,8	20	250	12,5
branches artérielles	7100	0,06	20	250	12,5
artérioles	$1{,}6.10^8$	0,002	500	125	0,25
capillaires	$5{,}5.10^9$	0,0009	3500	300	0,086

L'écoulement du sang à la sortie du cœur est caractérisé par la fréquence f qui est la pulsation cardiaque que l'on supposera égale à 60 battements par minute. On assimilera le sang à un fluide newtonien, de viscosité cinématique égale à 3 mm^2.s^{-1}, de masse volumique égale à celle de l'eau.

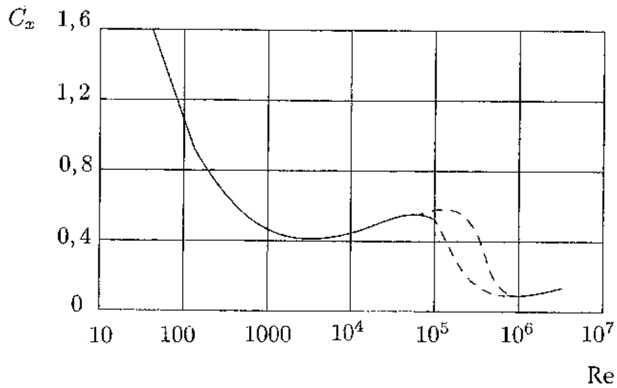
On appelle écoulement de Poiseuille cylindrique l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux dans un tuyau de rayon R et de longueur L, provoqué par une différence de pression ΔP entre l'entrée et la sortie, tel que les effets de la viscosité se fassent ressentir dans tout l'écoulement. Le débit volumique D_v est donné par la loi de Poiseuille : $D_v = \dfrac{\Delta P}{8\,\eta\,L}\,\pi\,R^4$.

1. Quelle est, en ordre de grandeur, la distance δ sur laquelle la quantité de mouvement diffuse pendant une durée égale à la période des battements cardiaques ?
2. Au cours du cycle cardiaque, le sang est brusquement éjecté dans l'aorte.
   À partir de quel étage peut-on considérer que l'écoulement est un écoulement de Poiseuille ?
3. En supposant que l'écoulement dans tout le système artériel est un écoulement de Poiseuille, calculer la différence de pression entre la partie terminale de l'aorte et l'extrémité des capillaires. Le débit sanguin moyen est de 5 litres par minute.
   Calculer le nombre de Reynolds dans chaque partie du système artériel et commenter.

Écoulement autour d'une sphère

On considère un fluide newtonien de viscosité η, incompressible, de masse volumique ρ.

1. (a) En considérant un écoulement unidimensionnel tel que $\vec{v} = v(y,t)\,\vec{u}_x$, exprimer la force qu'exerce la particule de fluide S_1 sur la particule de fluide S_2 en contact avec et endessous de S_1. La surface de contact entre les deux particules est notée S.
   (b) En déduire que l'on peut définir une force volumique de cicaillement dont on donnera l'expression dans le cas du champ étudié ici. On admettra par la suite que l'effet de la viscosité peut être traduit par une force volumique d'expression $\eta \triangle \vec{v}$.
   (c) En déduire l'expression que prend dans ce cas l'équation locale de la dynamique du fluide si celui-ci n'est soumis à aucune autre force volumique.
2. Par la suite, on s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une sphère de rayon R, en l'absence de toute autre force que celle de viscosité. On utilisera le repère de projection en coordonnées sphériques r, θ et φ d'axe Oz où O est le centre de la sphère. À grande distance de la sphère, l'écoulement du fluide est uniforme $\vec{v} = V_0\,\vec{u}_z$ et la pression dans le fluide est P_0. La masse volumique de l'air est $\rho = 1{,}29$ kg.m^{-3} et sa viscosité dynamique $\eta = 1{,}8.10^{-5}$ Pl.
   (a) Bâtir à partir des grandeurs caractéristiques du fluide ρ, η et V_0 une grandeur homogène à une distance.
   (b) Exprimer le nombre de Reynolds relatif à l'écoulement étudié à partir de $D = 2\,R$ (prise comme distance caractéristique de l'écoulement) et de D_0.
   (c) Le fluide est de l'air de vitesse $V_0 = 10$ m.s^{-1}.
   Calculer le nombre de Reynolds pour une sphère de rayon 0,5 cm puis pour une sphère de rayon 0,5 μm.
   Comment peut-on qualifier l'écoulement dans les deux cas ?
   Dessiner approximativement les lignes de courant correspondantes.
   (d) La force résultante, appelée traînée, correspondant aux actions du fluide sur la sphère est notée $\vec{F}$ avec $\vec{F} = Z\,\vec{u}_z$.
   Justifier que le coefficient de traînée $C_x = \dfrac{F}{0{,}5\,\rho\,{V_0}^2\,\pi\,R^2}$ ne dépend que du nombre de Reynolds pour un fluide fixé.
   (e) Interpréter la courbe donnant l'évolution du coefficient de traînée pour une sphère en fonction du nombre de Reynolds.



Placer les points particuliers correspondant à l'application précédente si cela est possible.
Dans le cas de la « chute libre » d'une sphère de rayon 0,5 cm, quelle est l'expression approximative de la force de frottement de l'air que l'on peut prendre ?

Formule de Stokes

On reprend les hypothèses et les notations de l'exercice précédent. On se place en régime permanent et on suppose que la vitesse est suffisamment faible pour négliger le terme quadratique d'accélération convective (approximation linéaire).

1. Quelles sont dans ce cas les conditions imposées sur le champ des vitesses par :
   (a) l'incompressibilité du fluide,
   (b) la présence de la sphère,
   (c) la compatibilité avec l'approximation linéaire de l'équation locale de la dynamique.
   On donne le champ des vitesses :

$$\left\{\begin{array}{l} v_r = V_0\,\cos\theta\,\left(1-\dfrac{3\,R}{2\,r}+\dfrac{R^3}{2\,r^3}\right) \\ v_\theta = -V_0\,\sin\theta\,\left(1-\dfrac{3\,R}{4\,r}-\dfrac{R^3}{4\,r^3}\right) \\ v_\varphi = 0 \end{array}\right.$$

   On rappelle que :

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial r^2\,a_r}{\partial r} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial \sin\theta\,a_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,\sin\varphi}\,\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$$

   et que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \vec{\Delta}\,\vec{a}$.
   Dans le cas du champ de vitesses étudié, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{3\,V_0\,R\,\cos\theta}{r^3} \\ -\dfrac{3\,V_0\,R\,\sin\theta}{2\,r^3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (d) Vérifier que le champ des vitesses proposé vérifie les conditions imposées au problème.
   Caractériser cet écoulement par un ou plusieurs des mots suivants : rotationnel, irrotationnel, laminaire, turbulent, potentiel, stationnaire.
2. (a) Déduire de l'équation locale de la dynamique des fluides linéarisée la valeur de la pression en tout point de la surface de la sphère.
   (b) Calculer la résultante des forces de pression sur la sphère.
   On donne : $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}$.
3. On admet que la force de cisaillement exercée par le fluide sur un élément de surface de la sphère est donnée par :

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{cis}} = -\frac{3\,\eta\,V_0\,R\,\sin^2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\theta$$

Justifier cette expression par analogie avec l'étude menée à l'exercice précédent.

Calculer la résultante des forces de cisaillement sur la sphère.

On donne : $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}$.

4. Vérifier que la force de traînée sur la sphère est donnée par la formule de Stokes

$$\vec{f} = 6\,\pi\,\eta\,R\,V_0\,\vec{u}_z$$

et que ce résultat est compatible avec la courbe donnant le coefficient de traînée vue dans l'exercice précédent.

Jet d'eau issu d'un robinet

Le jet d'eau provenant d'un robinet a une diamètre moins important au fur et à mesure qu'il tombe.

Expliquer pourquoi.

Exprimer ce diamètre en fonction de la distance d par rapport au robinet (celui-ci a un diamètre D et l'eau sort à la vitesse v_0).

Effectuer l'application numérique en donnant des valeurs raisonnables aux grandeurs qui interviennent.

Pourquoi le filet d'eau ne devient-il jamais extrêmement fin mais se rompt-il en goutelettes ?

Aération d'un terrier

Dans les prairies nord-américaines, les chiens de prairie construisent deux types d'entrée pour leurs terriers : l'une haute en forme de cratère, l'autre basse en forme de dôme.

Expliquer pourquoi ce système permet l'aération du terrier.

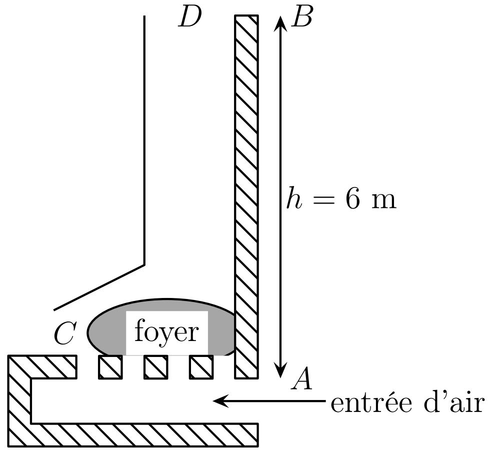
Collision de deux navires

Deux navires animés d'un même mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse v suivent des routes parallèles en restant à la même hauteur.

Expliquer pourquoi il y a risque de collision.

Étude d'une cheminée

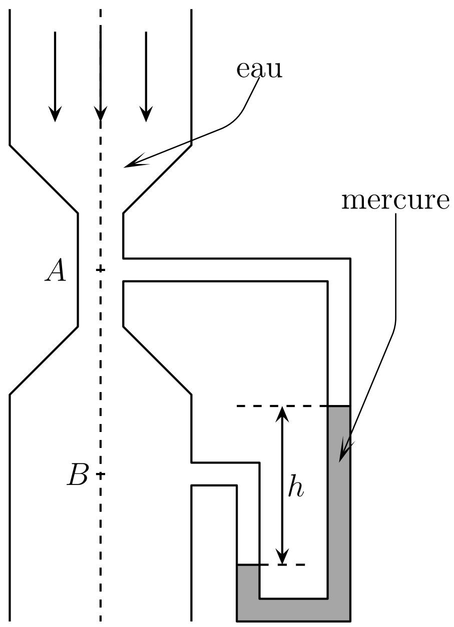
On étudie l'écoulement de l'air dans une cheminée. La température à l'intérieur du conduit est supposé constante, égale à 150 °C. La température extérieure est de 10 °C, la pression extérieure est de 1 bar. L'air est assimilé à une gaz parfait.



1. Calculer $p_A - p_B$ où A est un point dans l'entrée d'air et B un point en haut de la cheminée.
2. Exprimer puis calculer la vitesse v_D à la sortie D du conduit en supposant que la vitesse de l'air est nulle en C.
3. En réalité la vitesse est plus faible. Pourquoi ?

Effet Venturi

On considère le dispositif de la figure ci-dessous. L'écoulement est stationnaire, de débit massique D_m.



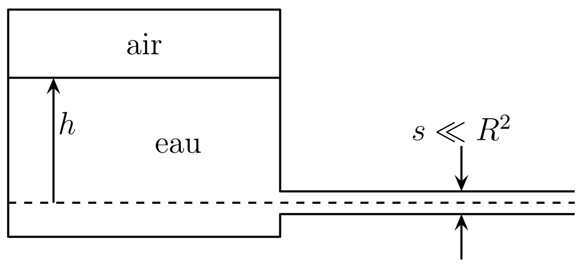
Exprimer D_m en fonction des diamètre Φ_A et Φ_B de la conduite en A et en B, de la dénivellation h, de la masse volumique μ_{Hg} du mercure et de la masse volumique μ_{eau} de l'eau.

Clepsydre

Quelle doit être la forme d'un réservoir d'eau (ouvert en haut) pour que l'eau qui s'en écoule à sa base le fasse à débit constant ?

Vidange d'une bouteille fermée

On perce une bouteille d'eau minérale d'un petit trou dans lequel on place une paille. La bouteille est assimilée à un cylindre de rayon R parfaitement diatherme. La paille est horizontale, sa section s est très petite devant celle de la bouteille.



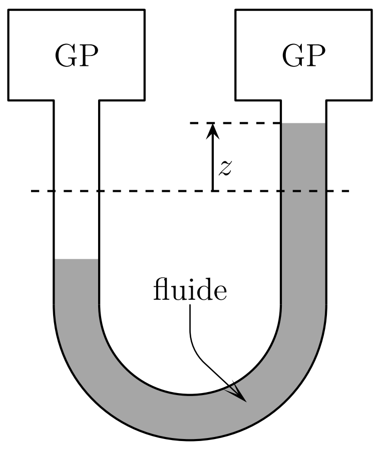
La pression extérieure P_0 est constante, la température extérieure T_0 aussi. La hauteur initiale d'eau est h_0. L'air de la bouteille est à chaque instant en équilibre thermique avec l'extérieur. ;

Calculer la vitesse d'éjection de l'eau.

Déterminer l'équation vérifiée par h_f, hauteur d'eau à la fin de la vidange.

Oscillation d'un liquide dans un tube en U

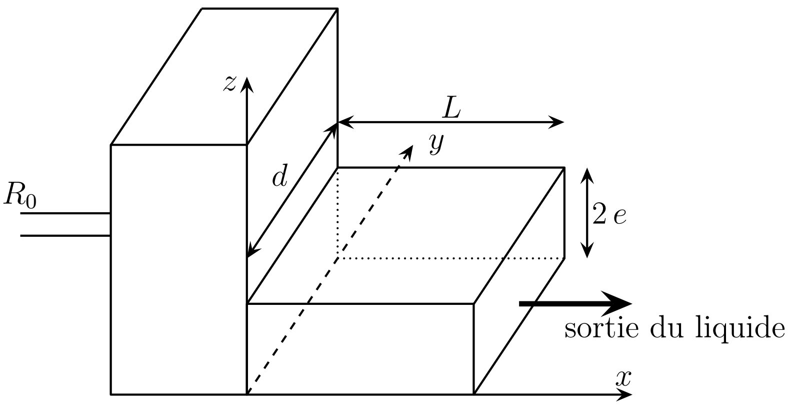
Le tube en U, vertical, de section constante S, est rempli d'un fluide parfait et incompressible sur une longueur L. Il est surmonté dans les deux récipients d'un gaz parfait ($\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$ constant). Quand le fluide est à l'équilibre, le volume de chaque compartiment est V_e, la pression du gaz est P_e. On suppose que, dans chaque compartiment, le gaz subit une transformation adiabatique réversible.



Déterminer la période des petites oscillations.

Système régulateur de débit

On considère la partie terminale d'un système régulateur de débit :



Un fluide visqueux newtonien (de viscosité dynamique η), incompressible (de masse volumique μ), alimente un récipient $\mathscr{R}$ muni d'un orifice de soutirage R_0 de telle sorte que $\mathscr{R}$ soit toujours rempli. Il s'écoule par l'intermédiaire d'une buse de sortie parallélépipédique, de hauteur $2\,e$, de longueur L et de largeur d (les longueurs L et d sont très supérieures à e). On étudie l'écoulement stationnaire dans la buse en faisant les hypothèses suivantes :

- ➜ les pression P_e dans la face d'entrée de la buse ($x = 0$) et P_s dans la face de sortie de la buse ($x = L$) sont uniformes et constantes ;
- ➜ l'écoulement est laminaire avec un champ de vitesse $\vec{v} = v(z)\,\vec{u}_x$
- ➜ on néglige les effets de la pesanteur.

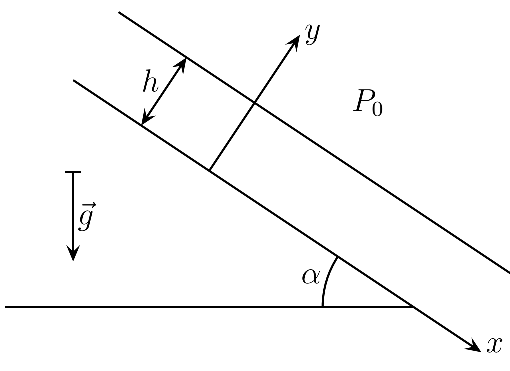
On donne $\mu = 880$ kg.m^{-3}, $e = 2$ mm, $L = 50$ cm, $d = 30$ cm et $\eta = 0{,}2$ Pl.

On rappelle que si le champ de vitesse est de la forme $\vec{v} = v(z)\,\vec{u}_x$, la force de frottement exercée par le fluide situé en $z' < z$ sur le fluide situé en $z' > z$ est, par unité de surface : $\vec{f} = -\eta\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\,\vec{u}_x$.

1. Déterminer la loi de vitesse $v(z)$ dans la buse.
2. Déterminer le débit volumique D_v sachant que la vitesse maximale du fluide dans la buse vaut $v_0 = 1{,}5$ m.s^{-1}.
3. Évaluer le nombre de Reynolds de cet écoulement. Commenter.
4. Déterminer la force totale exercée par le fluide sur les parois de la buse.

Écoulement d'un fluide visqueux

Un fluide de masse volumique ρ de viscosité η est en écoulement incompressible et permanent le long d'un plan incliné par rapport à l'horizontale d'un angle α. Le champ des vitesses s'écrit $\vec{v} = v(y)\,\vec{u}_x$.



1. Déterminer le champ de pression et celui des vitesses.

2. Calculer le débit à travers une largeur ℓ et la vitesse moyenne.

3. Comment peut-on définir le nombre de Reynolds de cet écoulement ?

   Pour l'eau on trouve Re = 1 000 et pour l'huile Re = 1.

   Pour quel fluide le modèle est-il adapté ?

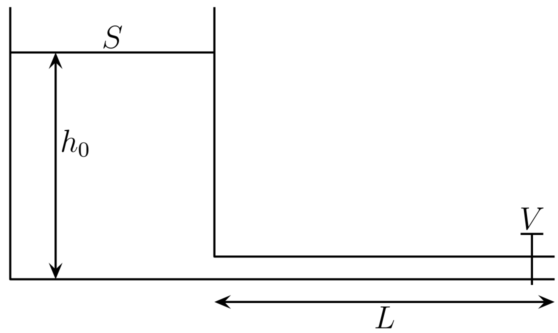
Vidange d'un réservoir

1. On considère un réservoir d'eau (fluide supposé parfait et incompressible), de section S dans lequel le niveau de l'eau est h_0. On ouvre une vanne de section $s \ll S$ située au bas du réservoir.

   En supposant l'évoulement quasi-permanent, donner l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$ la résoudre et en déduire le temps que mettra le réservoir pour se vider.

   Montrer *a posteriori* que les termes de dérivées temporelles étaient bien négligeables.

2. On ajoute maintenant au réservoir un conduit horizontal, rectiligne, de longueur ℓ, de section s très petite par rapport à celle du réservoir, terminé par une vanne V (voir figure ci-dessous). Celui-ci est rempli sur une hauteur h_0 dont on négligera les variations au cours du temps. Le fluide est initialement au repos, à $t = 0$, on ouvre la vanne V.



   (a) Donner l'équation régissant l'évolution de la vitesse du fluide dans le tuyau.

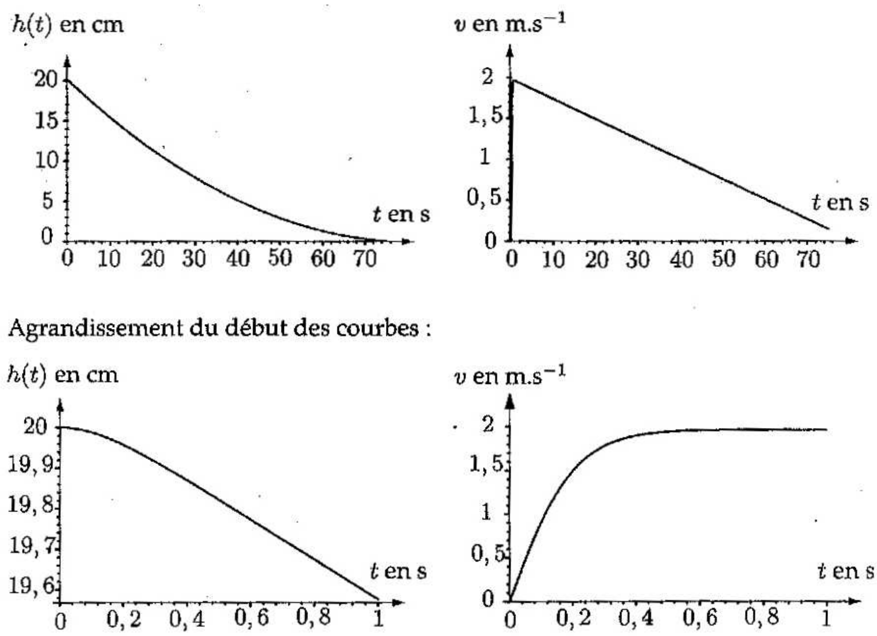
   Déterminer puis résoudre l'équation différentielle vérifiée par cette vitesse. On posera $v_\infty = \sqrt{2\,g\,h_0}$.

   (b) La distribution d'eau en ville se fait sous la pression de 6 bar. Si la longueur du tuyau de connexion au réseau principal du robinet de votre lavabo est de 10 m, quelle est la durée caractéristique du régime transitoire lorsque vous ouvrez le robinet ?

3. On se place dans le cas d'un récipient cylindrique, de rayon $R = 20$ cm, prolongé par un tuyau de rayon $r = 1$ cm, de longueur $\ell = 20$ cm, rempli initialement sur une hauteur $h_0 = 20$ cm.

   Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$ si on ne néglige plus ses variations au cours du temps ?

   La résolution numérique de cette équation donne les graphes représentés ci-dessous :



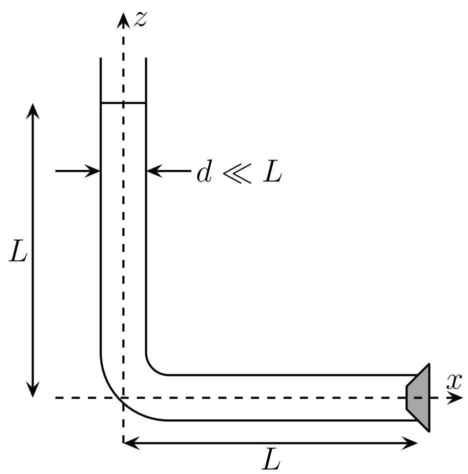
Commenter ces courbes.

Distinguer en particulier les deux régimes étudiés aux questions 1 et 2 et déterminer les valeurs numériques intéressantes (durées, longueurs, vitesses caractéristiques, …)

Vérifier la validité des hypothèses faites dans les questions 1 et 2.

Vidange d'un tube en L

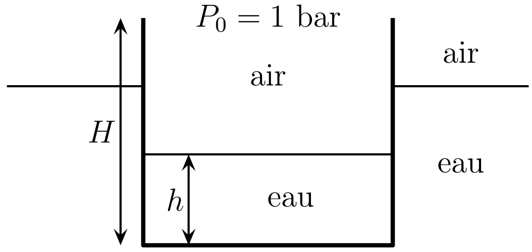
Un tube en « L » de faible section (constante) est rempli d'un fluide parfait homogène et incompressible. L'extrémité A est ouverte alors que l'extrémité B est fermée par un bouchon. À l'instant $t = 0$, on ôte le bouchon.



1. Déteminer, juste après la suppression du bouchon, la chute de pression en tout point du tube.
2. Exprimer le temps de vidage (sans chercher à calculer les intégrales qui apparaissent au cours du calcul).

Naufrage d'un bateau

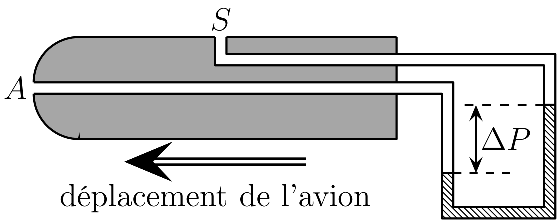
On étudie un bateau qui coule dans la mer considérée comme un fluide parfait incompressible, de masse volumique ρ. On note $H = 20$ m la hauteur du bateau, $M = 50\,000$ tonne sa masse et $S = 8\,500$ m^2 sa surface de base :



1. On considère que le bateau est rempli d'eau sur une hauteur h.
   Quelle est la hauteur h_{m} à partir de laquelle le bateau coule ?
2. On considère maintenant que le bateau est initialement vide et qu'il se remplit par un petit trou de surface $s = 1{,}0$ m$^2 \ll S$ situé dans la coque à une hauteur $\ell = 4$ m du fond.
   (a) Décrire les différentes étapes du remplissage.
   (b) Déterminer $h(t)$ pendant la première phase et calculer sa durée t_1.
   (c) Déterminer $h(t)$ pour $t > t_1$.
   (d) Quelle est la durée totale du naufrage ?

TUBE DE PITOT AVEC UN FLUIDE COMPRESSIBLE

Pour mesurer la vitesse v_0 d'un avion, on peut utiliser un tube de PITOT : il s'agit d'un tube profilé, lié à l'avion et aligné avec la vitesse d'écoulement.



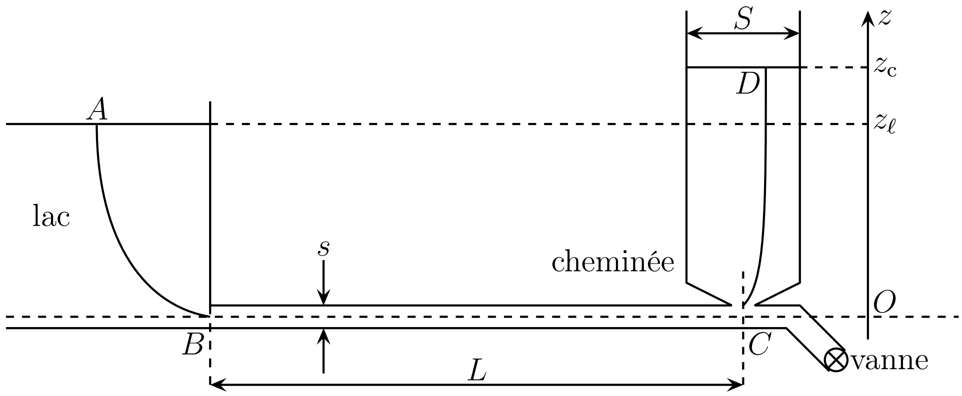
Très loin en amont de l'écoulement, le fluide au repos a une masse volumique μ_0 et sa pression est P_0. L'étude est effectuée dans le référentiel où le tube est immobile. Dans ce référentiel, le point A est un point d'arrêt. L'orifice S est suffisamment éloigné du point A pour que l'écoulement n'y soit pas perturbé. Un manomètre différentiel mesure la différentce de pression $\Delta P = P_A - P_S$. On négligera l'effet de la pesanteur à l'échelle du tube.

1. En supposant le fluide incompressible et parfait, exprimer la vitesse v_0 en fonction de ΔP et de μ_0.
2. Lorsque l'écoulement a lieu dans l'air (pour mesurer la vitesse d'un avion par exemple), on souhaite tenir compte du caractère compressible du fluide. On assimile l'air à un gaz parfait, de rapport $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$ constant. L'évolution d'une particule de fluide au sein du gaz est supposé adiabatique réversible. On pose $c = \sqrt{\gamma \dfrac{P_0}{\mu_0}}$, vitesse du son dans le fluide très en amont du tube.

(a) Exprimer la vitesse du fluide en fonction de γ, c et du rapport des pressions $\dfrac{P_A}{P_S}$. Pour ce faire, on intégrera l'équation d'Euler entre deux points d'une ligne de courant.
Vérifier que l'on retrouve le résultat de la question 1 si $\dfrac{\Delta P}{P_0} \ll 1$.

(b) Si, pour mesurer la vitesse du fluide, on néglige la compressibilité, montrer que l'erreur relative commise, $\dfrac{v - v_{\text{mesurée}}}{v_{\text{mesurée}}}$, est de l'ordre du carré du nombre de Mach mesuré : $M_{\text{mesuré}} = \dfrac{v_{\text{mesuré}}}{c}$.
Pour quel type d'avion sera-t-il nécessaire de tenir compte de la compressibilité de l'air ?

Cheminée de déversement



Un barrage hydraulique est constitué d'une galerie d'aménagement de longueur $L = 10$ km et de section $s = 10$ m^2 reliée à une retenue d'eau (un lac de superficie assez grande pour que l'on puisse y négliger les variations de niveau) et à une cheminée d'équilibre verticale de section $S = 100$ m^2. Une vanne immédiatement en aval de la cheminée alimente les turbines de la centrale électrique. L'eau sera considérée comme un fluide non visqueux, incompressible. La galerie considérée débit 30 m^3.s^{-1}. L'axe Oz est un axe vertical ascendant dont l'origine est au niveau de la vanne. On appelle z_ℓ la position de la surface du lac et z_c celle de l'eau dans la cheminée. On pose $h = z_c - z_\ell$ (h est une valeur algébrique).

1. La vanne est ouverte. Pour cet écoulement, l'eau est un fluide parfait incompressible en écoulement permanent.
   Déterminer la dénivellation h_0.
2. (a) On ferme brusquement la vanne à l'instant $t = 0$. On s'intéresse au mouvement du fluide une fois la vanne fermée. L'écoulement n'est plus supposé stationnaire.
   En utilisant des hypothèses simplificatrices liées aux valeurs numériques de l'énoncé, établir l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$.
   La résoudre en utilisant les conditions initiales.
   (b) À quelle hauteur maximale $h_{\max}$ s'élève l'eau dans la cheminée ?
3. En réalité la cheminée a une hauteur $h_1 = 20$ m au dessus du niveau du lac.
   (a) Déterminer le temps t_1 écoulé entre la fermeture de la vanne et le déversement.
   (b) Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse V de l'eau dans la galerie en fonction du temps quand l'eau déborde de la cheminée.
   La résoudre.

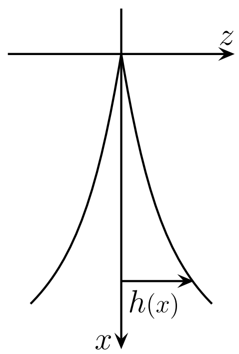
(c) Déterminer la durée de déversement $t_2 - t_1$ ainsi que la vitesse V_1 de l'eau dans la galerie à l'instant où la hauteur atteint 20 m.

(d) En déduire le volume déversé en fonction de s, L, g, h_1 et V_1.

4. Comment évolue $h(t)$ une fois le déversement ?
   En réalité, que se passe-t-il ? On justifiera la réponse par des arguments physiques.
5. Si on ne plaçait pas de cheminée, que se passerait-il ? Justifier.

Film de savon

On prépare un film de savon dans un cadre rectangulaire que l'on place verticalement. Le surfactant utilisé pour réaliser ce fil est tel qu'il bloque les mouvements du liquide à la surface du film. Le liquide est donc enfermé dans un « sac » qui se déforme.



On appelle $h^\star$ une longueur caractéristique suivant Oz et $L^\star$ une longueur caractéristique suivant Ox. On suppose que $h^\star \ll L^\star$, que $h^\star$ est de quelques micromètres et que la vitesse de l'écoulement est de l'ordre de un millimètre par seconde. On appelle ν la viscosité cinématique du fluide.

1. Calculer le nombre de Reynolds (à vous de donner la valeur de ν !)
2. Le champ des vitesses s'écrit :

$$\vec{v} = v_x(x,z,t)\,\vec{u}_x + v_z(x,z,t)\,\vec{u}_z.$$

   Montrer que $|v_z(x,z,t)| \ll |v_z(x,z,t)|$.
3. On rappelle l'équation de Navier – Stokes :

$$\tilde{\vec{a}}(M) = -\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \vec{g} + \nu\,\vec{\Delta}\,\vec{v}$$

   L'évolution du fluide est assez lente pour qu'on puisse se placer en régime quasi-permanent.

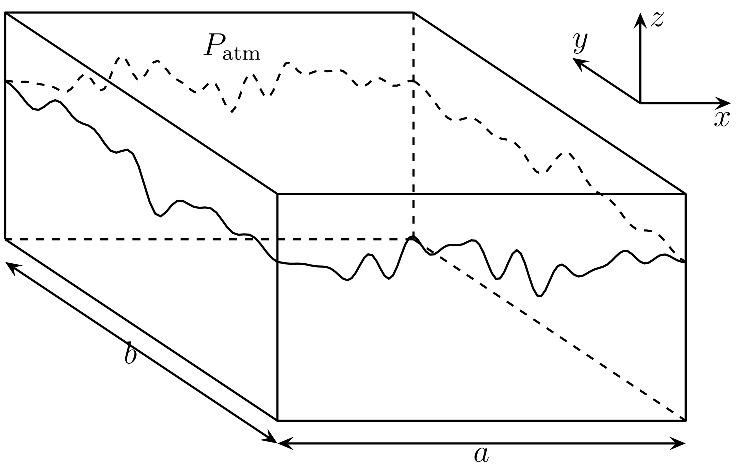
   (a) Simplifier l'équation de Navier – Stokes en tenant compte d'hypothèses simplificatrices que l'on demande d'expliciter.

   (b) Déterminer le champ des vitesses.

   (c) Calculer le débit volumique en un point d'épaisseur $2\,h(x,t)$.
4. En effectuant un bilan de masse pour un système judicieusement choisi, donner une équation différentielle vérifiée par $h(x,t)$ et la résoudre sans chercher à déterminer les constantes d'intégration. On cherchera des solutions de la forme $h(x,t) = f(x)\,g(t)$.

Ondes de gravité dans une cuve

On considère un bassin parallélépipédique rempli d'eau sur une hauteur moyenne h. L'eau est un fluide parfait et incompressible, de masse volumique μ. Une onde se propage dans le bassin, l'amplitude de la vibration étant très inférieure à h. La vitesse des particules d'eau se met sous la forme $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$ avec $\varphi(x,y,z,t) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t}$. Un point de la surface du fluide, situé en (x,y,h) au repos se trouve en $(x,y,h+\xi(x,y,t))$ quand le fluide est en mouvement.



1. Quelle est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\varphi(x,y,z,t)$ traduisant l'incompressibilité du fluide ?

   En déduire la forme des fonctions $X(x)$ et $Y(y)$ (on introduira deux entiers n_x et n_y) puis celle de $Z(z)$.

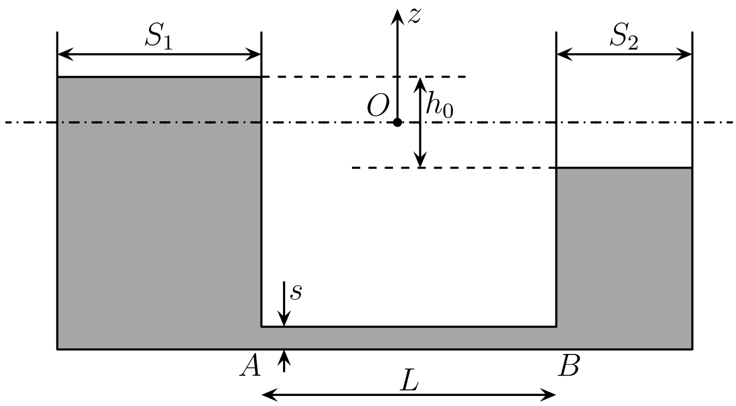
2. Montrer que, à la surface du fluide, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{P_{\text{atm}}}{\mu} + g\,\xi(x,y,t) = C(t)$ où $C(t)$ est une fonction du temps seul.

   Montrer que l'on peut choisir $C(t) = 0$ sans modifier l'expression du champ des vitesses.

3. Trouver la relation de dispersion et en déduire la plus petite pulsation pouvant se propager dans le bassin (on supposera $b < a$).

Oscillations d'un liquide entre deux récipients

Deux récipients cylindriques de section S_1 et S_2 sont reliés par un tube cylindrique de section s de longueur L. On suppose que $s \ll S_1$ et $s \ll S_2$ et que L est «suffisamment grande ». À l'instant initial, il existe une dénivellation h_0 entre les niveaux des deux récipients et le fluide est au repos. Le fluide est supposé incompressible, de masse volumique uniforme μ_0.



L'origine de l'axe Oz est prise au milieu des positions initiales des surfaces libres.

1. Dans cette question, on néglige les effets dus à la viscosité du fluide.
   (a) Montrer que la vitesse, à un instant donné, est uniforme dans le tube. On la note $v(t)$. Déterminer la différence de pression $P_B - P_A$ aux extrémités du tube.
   (b) Établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ par deux méthodes différentes. En déduire la dénivellation $z(t)$.
2. On tient maintenant compte des effets dus à la viscosité : on suppose qu'ils sont essentiellement sensibles dans le tube et qu'ils se traduisent par une perte de puissance dans tout le tube égale à $\mathscr{P} = 8\,\pi\,\eta\,L\,v_{\mathrm{m}}^2$ où v_{m} est la vitesse moyenne du fluide dans le tube. On rappelle la répartition des vitesses dans le tube, donnée par la relation établie dans le cours dans le cadre de l'écoulement de Poiseuille cylindrique :

$$v(r) = \frac{P_B - P_A}{4\,\eta\,L}\,(r^2 - a^2)$$

   où a est le rayon du tube et r la distance à l'axe du tube.
   Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ en effectuant un bilan énergétique.
   Pourquoi ne tient-on compte de la viscosité que dans le tube ?
3. En faisant $\eta \to 0$ pour l'équation trouvée en 2, retrouve-t-on l'équation trouvée en 1b ? Pourquoi ?