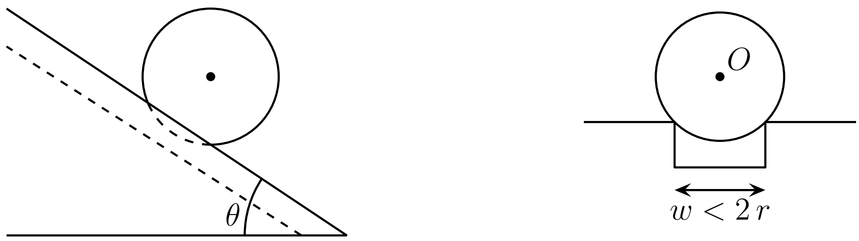
\MecaB·01

Bille qui roule



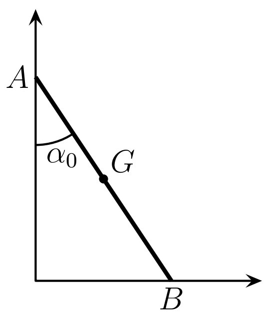
Une sphère de masse m, de rayon r, de moment d'inertie J par rapport à un axe passant par son centre O, roule sans glisser dans la gorge de largeur $w < 2\,r$ inclinée d'un angle θ.

Déterminer la valeur minimale du coefficient de frottement f pour que le mouvement puisse se faire sans glissement.

\MecaB·02

Échelle

Une échelle de longueur $2\,\ell$ est lâchée à $t = 0$ sans vitesse initiale à partir d'un angle α_0. On néglige tout frottement.

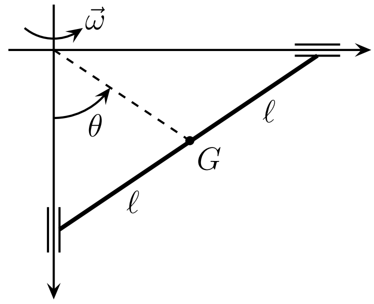


1. En supposant que le contact en A n'est pas rompu, à quelle trajectoire est astreint G ?
2. Déterminer l'énergie potentielle en fonction de α.
3. Déterminer l'énergie cinétique en fonction de $\alpha(t)$ et $\dot{\alpha}(t)$.
4. Montrer que le contact en A cesse pour un angle α_1.

\MecaB·03

Tige en rotation

Une tige homogène de longueur $2\,\ell$ est liée à deux axes orthogonaux en A et B. Les liaisons A et B peuvent coulisser sans frottement. L'ensemble est mis en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe vertical OA.

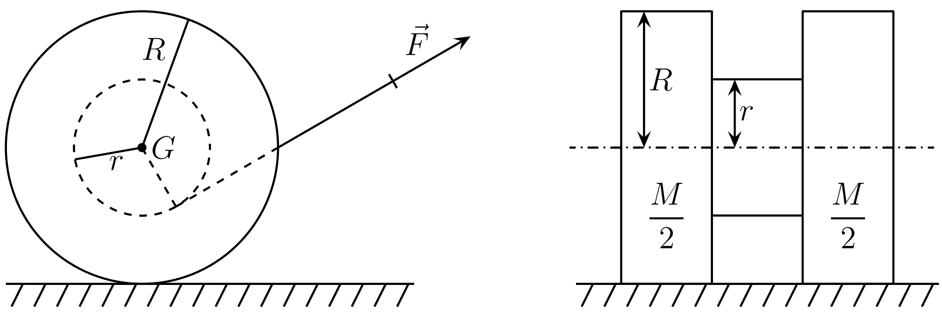


1. Déterminer l'énergie cinétique dans le référentiel tournant.
2. Déterminer l'énergie potentielle de pesanteur.
3. Déterminer l'énergie potentielle d'entraînement et montrer que $\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + u(\theta)$ est constant, $u(\theta)$ étant une fonction de θ.
4. Déterminer les positions les positions d'équilibre, discuter de leurs stabilités.
5. Étudier les petites oscillations.

Enrouler une bobine

\MecaB·04

Une bobine de fil est constituée de deux cylindres de masse $M/2$ et de rayon R reliés par un tambour sans masse de rayon r. Une ficelle est enroulée sur le tambour et on exerce une tension $\vec{F}$ constante faisant un angle α avec l'horizontale. Les cylindres roulent en glissant sur une surface de coefficient de frottement f.

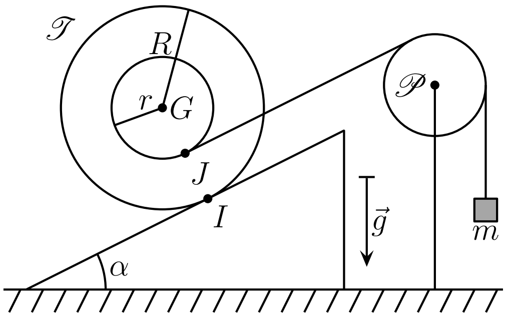


1. Déterminer $\theta(t)$ et $v_G(t)$.
2. Dans quel sens se déplace la bobine ?
3. Discuter suivant les valeurs de α et f.

Tambour et poulie

\MecaB·05

Le tambour $\mathscr{T}$ est constitué de deux cylindres de rayon $R = 50$ mm et de masse $\dfrac{M}{2} = 80$ g liés par un cylindre de rayon $r = 20$ mm de masse négligeable et de même axe. $\mathscr{T}$ admet G pour centre de masse et $I = \dfrac{1}{2}\,M\,R^2$ pour moment d'inertie par rapport à son axe de révolution. Le tambour ne glisse pas sur le plan incliné. $\mathscr{P}$ est une poulie de masse négligeable qui tourne sans frottement autour de son axe. Le fil est inextensible et de masse négligeable, ne glisse ni sur le tambour, ni sur la poulie et reste parallèle à la ligne de plus grande pente du plan incliné.

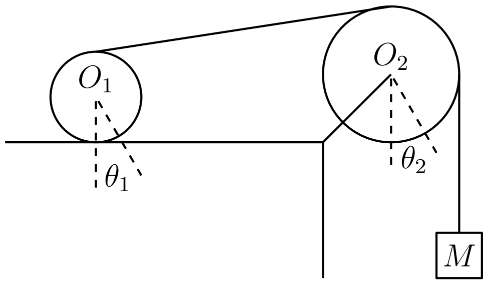


1. Déterminer l'accélération de G.
2. Faire l'application numérique pour $m = 140$ g ; $\alpha = 30$ ° ; $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.
3. Commenter le résultat précédent et son évolution si l'on fait varier certains paramètres, M ou m par exemple.

\MecaB·06

Poulies et fil

Une poulie O_2 de rayon R_2 est susceptible de tourner librement autour de l'axe fixe horizontal $(O_2,\vec{u}_x)$ et a pour moment d'inertie J_2 par rapport à son axe. Une poulie de centre mobile O_1, de masse m, de moment d'inertie J_1 par raport à l'axe $(O_1,\vec{u}_x)$ et de rayon R_1 roule sans glisser sur un support horizontal.



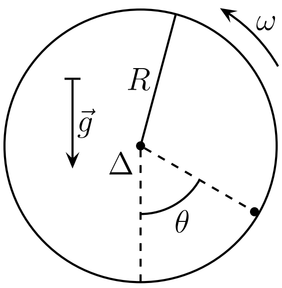
Une masse M est accrochée à un fil inextensible sans masse en contact sans glissement avec la poulie de centre O_2. Ce fil peut s'enrouler sans glisser sur la poulie de centre O_1. À l'instant initial le système est immobile.

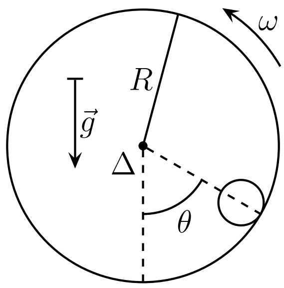
Établir le mouvement de la masse M.

\MecaB·07

Roulement de tambour

Un tambour creux est mis en rotation à la vitesse angulaire ω autour de son axe Δ horizontal. On étudie le mouvement d'un objet placé à l'intérieur.



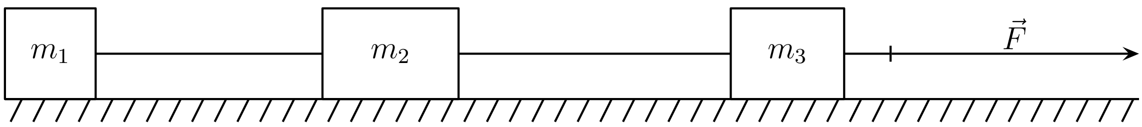


1. On considère tout d'abord un objet non susceptible de rouler et $\omega = \text{C}^{\text{te}}$.
   Déterminer la condition sur f, coefficient de frottement, pour que l'objet reste constamment solidaire du tambour.
2. On place maintenant dans le tambour un cylindre d'axe parallèle à Δ, de rayon r, de masse m et de moment d'inertie J par rapport à son axe.
   Déterminer la (les) condition(s) sur ω et f pour que le centre du cylindre reste constamment situé à l'angle θ_0 par rapport à la verticale.
3. Soucieux du développement durable, vous reliez la cage d'exercice de votre hamster préféré à un alternateur afin de pouvoir disposer d'une énergie naturelle.
   En modélisant la course du hamster par un cylindre de rayon r tournant à la vitesse $\omega = \text{C}^{\text{te}}$, discuter de la production d'électricité suivant les qualités naturelles de l'animal (force et endurance notamment).

\MecaB·08

Tirage à la chaîne

Trois solides sont liés par des fils inextensibles. On applique une force $\vec{F}$ au niveau de m_3.

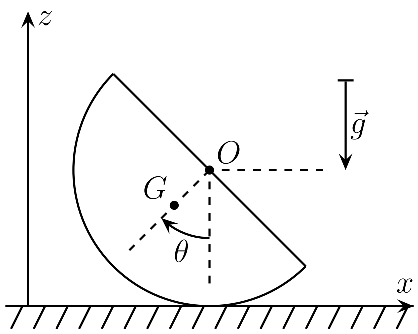


1. On suppose qu'il n'y a pas de frottement.
   Déterminer l'accélération de l'ensemble ainsi que les tensions que chacun des trois fil exerce sur les solides auxquels ils sont reliés.
2. Même question en considérant qu'il y a frottement.

\MecaB·09

Oscillation d'un demi-cylindre

Un demi-cylindre de rayon R, d'axe parallèle à $\vec{u}_y$, de centre de masse G tel que $OG = a < R$, de moment d'inertie J selon l'axe Gy roule sans glisser sur un plan horizontal.

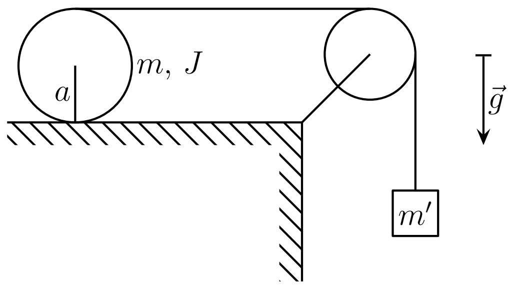


1. Établir l'équation différentielle de l'oscillation.
2. En déduire la période des petites oscillations.

\MecaB·10

Accélération d'un cylindre

Dans le dispositif schématisé ci-dessous, le fil est inextensible et la poulie sans masse. Le cylindre de rayon a, de masse m et de moment d'inertie J par rapport à son axe de révolution roule sans glisser sur la table.

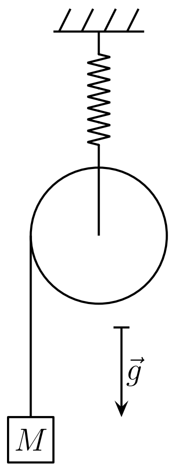


1. Déterminer l'accélération de m'.
2. Quelle(s) condition(s) doivent respecter les grandeurs caractéristiques du problème pour que le roulement de la poulie se fasse effectivement sans glisser ?

\MecaB·11

OSCILLATIONS AVEC UNE MASSE ET UNE POULIE

Une masse M est suspendue à un fil passant sur une poulie de masse m, de rayon R et moment d'inertie J sur laquelle il ne glisse pas. La poulie est suspendue par son centre à un ressort de raideur k. On néglige les puissance dissipées par frottement.

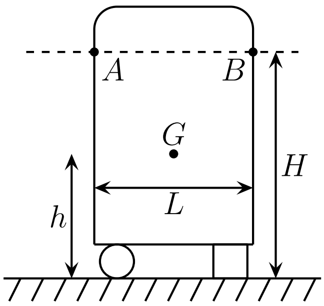


1. Combien y a-t-il de degré de liberté ?
2. Trouver et traduire autant de lois physique différentes qu'il y a de degrés de liberté.
3. En déduire une équation différentielle vérifiée par $z_2(t)$, cote du centre de la poulie.
4. Résoudre la question précédente en tenant compte du fait qu'à l'instant initial, le ressort a sa longueur naturelle.
5. Déterminer la tension que le fil exerce sur M à tout instant et commenter le résultat obtenu.

\MecaB·12

DÉMÉNAGER UN RÉFRIGÉRATEUR

On souhaite déplacer en le poussant un réfrigérateur de masse M muni de roulettes K de masse négligeable et roulant sans glisser ainsi que d'une cale C solidaire du réfrigérateur.

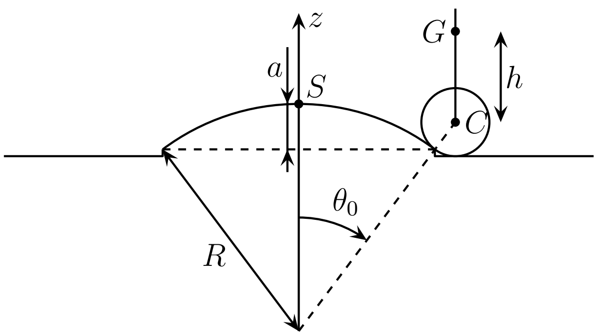


1. Montrer que les roulettes équivalent à une un glissement sans frottement.
2. On le pousse horizontalement à une hauteur H.
   Déterminer la force minimale à exercer pour déplacer le réfrigérateur suivant que l'on pousse en A (vers la droite) ou en B (vers la gauche).

\MecaB·13

Monocycle

On considère une roue de monocyle de centre C et de rayon a. On note J son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation (Cy). Un acrobate, assimilé à un élément vertical, est rigidement lié à cette roue.



L'ensemble matériel { roue ; acrobate } a une masse notée m et on considère que le centre de masse du système, noté G, est situé constamment à la verticale de C et à la distance h de celui-ci.

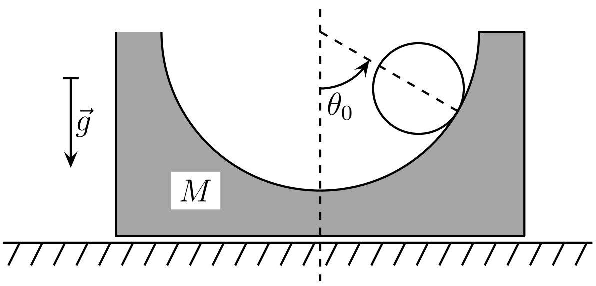
À l'instant initial, la roue est maintenue bloquée par le support. La droite (OC) forme avec l'axe (Oz) un angle θ_0. L'acrobate fournit un couple de pédalage Γ_0 constant afin d'atteindre le sommet S de l'arc de cercle de centre O et de rayon R.

1. Déterminer la relation entre θ_0, R et a.
2. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique et la mettre sous la forme $E_{\mathrm{c}} = \dfrac{1}{2}\,K\,\dot{\theta}^2$.
3. Montrer que l'acrobate peut atteindre le sommet S uniquement s'il fournit un couple moteur Γ_0 suffisant (on déterminera l'expression de cette valeur minimale de Γ_0).
4. Prouver enfin que le mouvement n'est possible que pour certaines valeurs du coefficient de frottement solide f (on déterminera la valeur limite du coefficient f).

\MecaB·14

Bille dans une goutière mobile

Un bloc de masse M glisse sans frottement sur un plan horizontal. Il est percé d'une goutière de rayon R. Une bille de masse m, de rayon a et de moment d'inertie $J = \dfrac{2}{5}\,m\,a^2$ roule sans glisser dans la goutière.



1. Analyser le problème.
2. Écrire la condition de roulement sans glissement.
3. Écrire deux intégrales premières du mouvement.
4. Montrer que l'équation du mouvement de la bille est :

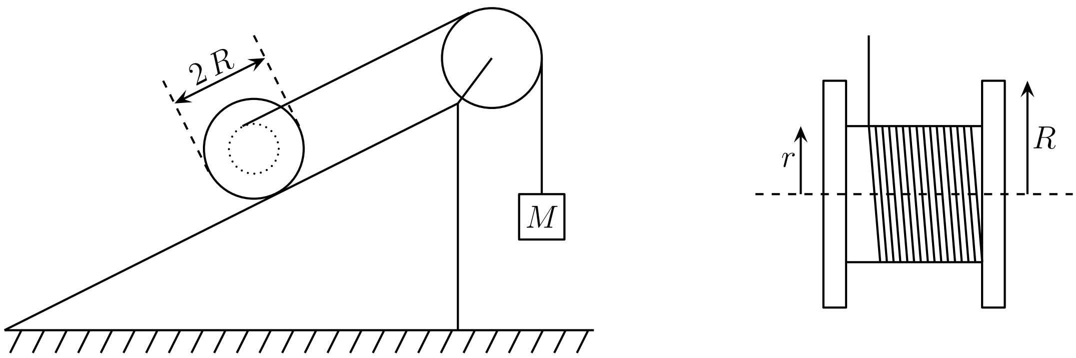
$$\left(\frac{r-a}{2}\right)\left(\frac{7}{5}-\frac{m}{m+M}\cos^2\theta\right)\ddot{\theta}(t)-g\,\cos\theta(t)=-g\,\cos\theta_0$$

5. Analyser le mouvement de la bille.
6. Calculez l'amplitude de déplacement du bloc.

Remonter la pente

\MecaB·15

On considère le dispositif ci-dessous.



Le fil, inextensible et de masse négligeable, se déroule sans glisser mais avec frottement sur le tambour. Le solide m roule sans glisser sur le plan incliné. Le solide M est en translation verticale. La poulie est de masse négligeable.

Déterminer l'accélération de M.

Yoyo

\MecaB·16

On réunit deux disques identiques de masse M et de rayon R de centres respectifs G et G' à l'aide d'un cylindre de rayon $a < R$ et d'axe GG'. On enroule un fil autour du cylindre. L'extrémité du fil est attachée et le yoyo est lâché sans vitesse initiale.

1. Faire un dessin de la situation à t quelconque.
2. Trouver l'expression de l'énergie cinétique.
3. Montrer que le travail de la tension du fil est nulle.

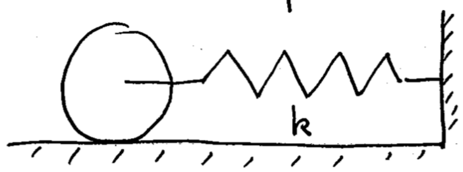
4. Trouver l'accélération.

5. Déterminer T la tension du fil.

\MecaB·17

CYLINDRE ET RESSORT

L'axe de rotation d'une roue, posée sur un plan, est attaché à un mur par un ressort.

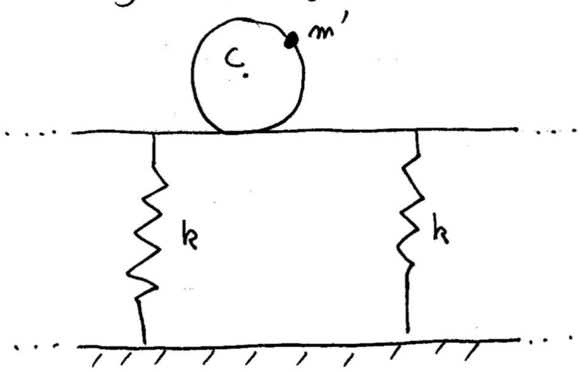


• Déterminer les conditions d'oscillation, de glissement, de non-glissement…

\MecaB·18

CYLINDRE SUR PLANCHE À RESSORTS

La roue, représentée ci-dessous, de masse M, de rayon R et de moment d'inertie J, portant sur sa circonférence une masse ponctuelle m', roule sans glisser sur une planche toujours horizontale de masse m.



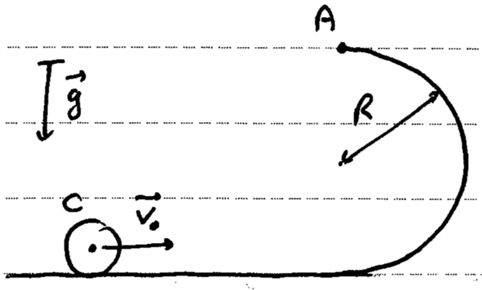
• Décrire le mouvement dans les deux cas suivants :

⇝ le centre C avance à la vitesse $\vec{v} = v_0\,\vec{u}_x + v_y\,\vec{u}_y$ avec $v_0 = \text{cst}$.

⇝ la masse m' étant à la verticale en dessous de C, la vitesse de C est $\vec{v}(0) = v_0\,\vec{u}_x$ à l'instant initial.

\MecaB·19

CYLINDRE SUR DEMI-CERCLE



On suppose que le roulement se fait sans glissement.

- À quelle vitesse doit-on lancer C pour que le rouleau ne décolle qu'au point A ?
- Où retombe-t-il ?
- Quel est son mouvement ensuite ?

Rebond d'une balle de tennis

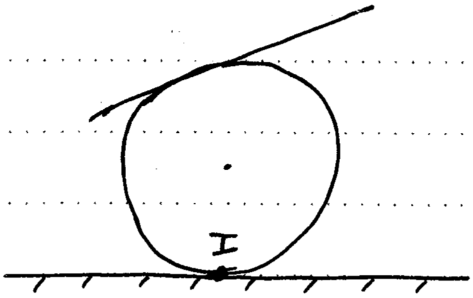
\MecaB·20

Le but de cet exercice est de déterminer si une balle de tennis provoque plus d'effet au rebond quand elle dure ou quand elle est molle.

- On considère une masse m au bout d'un ressort vertical, la masse étant au dessus. Le tout est à la vitesse $\vec{v_0}$ vers le bas au moment où le ressort touche le sol. À quel instant le ressort redécolle-t-il du sol ?
- Une balle de tennis est gonflée sous la pression $P_1 \sim 5$ bar. et de diamètre $d = 7$ cm. Estimer la raideur du ressort équivalent quand elle s'écrase à terre.
- On considère un cylindre <u>indéformable</u> posé sur le sol tel que la vitesse initiale de son centre de masse soit nul et qu'il ait une rotation propre ω_0. Quel est son mouvement au bout de la durée t_0 ?
- Avec tous les éléments précédents, comment trouver la réponse à la question initiale ?

\MecaB·21

Oscillation d'une tige sur un cylindre

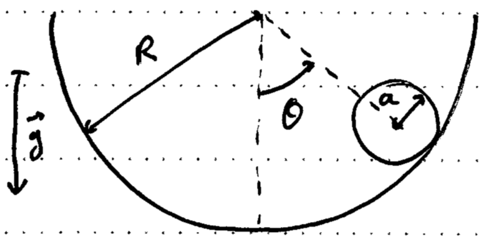


Une planche de longueur 2ℓ, de masse m, est posée sur un cylindre de rayon R et de masse M.

- Étudier le mouvement quand le cylindre est fixe en I.
- Étudier le mouvement quand le cylindre est libre en I.
- Et s'il y a une surmasse m_0 attachée au cylindre et initialement en I ?

\MecaB·22

Cylindre dans une goulotte circulaire



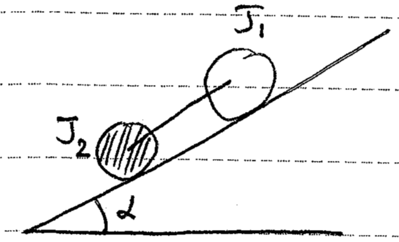
Un cylindre de rayon a roule sans glisser dans une goulotte de rayon R.

- Équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$?
- pulsation des petites oscillations

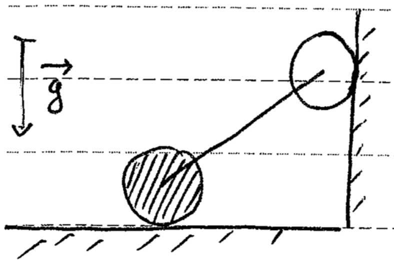
\MecaB·23

Modèle de chariot

Le chariot ci-dessous est constitué d'un cylindre creux de masse m et de moment d'inertie $J_1 = mR^2$ par rapport à son axe, et d'un cylindre plein, de même masse m, et de moment d'inertie $J_2 = \frac{1}{2} m R^2$, reliés par une tige de masse négligeable. Il roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal.

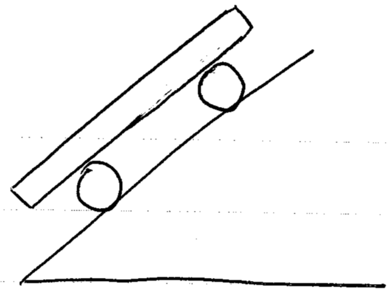


- Calculer l'accélération et la tension de la tige.



Si on place le chariot comme ci-contre, étudier le mouvement dans l'hypothèse d'un roulement sans glissement.

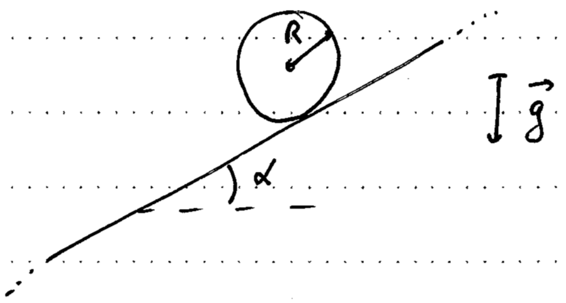
Un plateau et deux rouleaux sont posés sur un plan incliné sur lequel il y a roulement sans glissement. Il y a, de même, roulement sans glissement entre les rouleaux et le plateau. L'ensemble est sans vitesse initiale.



- Faire un schéma le plus complet possible (vitesse, force, …) à un instant t quelconque.
- Écrire les relations cinématiques dues au roulement sans glissement.
- Exprimer l'énergie cinétique du système en fonction de la vitesse de translation du plateau.
- En déduire l'accélération et les mouvements horaires du plateau.

Cylindre sur un tapis roulant incliné

On pose un cylindre homogène, de rayon R sur une pente inclinée avec un angle α. On néglige tout frottement avec l'air. Le coefficient de frottement entre le cylindre et la pente est noté f.



- Quel est le mouvement ultérieur du cylindre ? (*) On discutera en particulier du phénomène de glissement.

Dans la suite on se place dans une situation où il n'y a pas de glissement spontané.

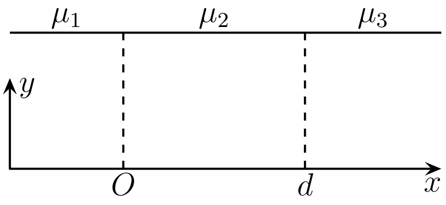
- La pente est désormais un tapis roulant ayant une vitesse uniforme $\vec{v}_0$ vers le bas. Répondre à (*)
- Est-il possible de faire remonter le cylindre en changeant le mouvement du tapis roulant ? Que doit-il alors être ?
- Le tapis roulant a, à présent, une vitesse sinusoïdale du type $v_0 \cos(\omega t)$. Répondre à (*).

Transmission d'onde entre cordes

\MecaC·01

Une corde vibrante partage l'espace en trois parties :

- ➜ $x < 0$, masse linéique μ_1 ;
- ➜ $0 \leqslant x \leqslant d$, masse linéique μ_2 ;
- ➜ $x > d$, masse linéique $\mu_3 \neq \mu_1$.



1. Donner (sans démonstration) l'équation de propagation d'onde pour la vitesse transversale $v_y(x,t) = \dfrac{\partial y}{\partial t}$ en définissant la célérité de propagation.
2. On définit l'impédance $Z(x,t)$ à l'abscisse x à l'instant t par $Z(x,t) = -T_0 \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)^{-1}$.

   Montrer que dans le cas d'une solution en onde plane progressive vers les x croissants l'impédance est constante et exprimer cette constante en fonction des grandeurs caractériques du problème. L'impédance est alors appelée *impédance caractéristique*.

   Faire de même pour une onde progressive vers les x décroissants et exprimer la constante en fonction de l'impédance caractéristique.
3. On considère une onde plane progressive harmonique de pulsation ω. On note Z_1, Z_2 et Z_3 les impédances caractéristiques des 3 cordes et on pose $\beta = \dfrac{Z_3 - Z_2}{Z_2 + Z_3}$ et $\alpha = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$.
   (a) Exprimer le coefficient de réflexion en amplitude r de l'onde de vitesse transversale en fonction de α, β et $\Phi = k_2\,d$ où $k_2 = \dfrac{\omega}{c_2}$.

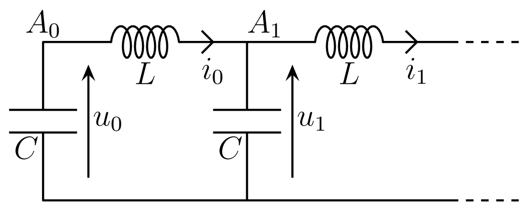
   Exprimer le coefficient de réflexion en énergie R.

   (b) Donner les conditions pour réaliser une couche anti-reflet.

PROPAGATION DANS UN CÂBLE

\MecaC·02

On considère le circuit ci-dessous pour lequel le régime est forcé à ω. On pose $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L\,C}}$.



1. Déterminer deux relations entre $u_{n+1}(t)$, $u_n(t)$, $i_{n+1}(t)$ et $i_n(t)$.
2. En déduire une équation différentielle reliant uniquement des tensions.
3. En faisant l'approximation des milieux continus, $u_n(t) = u(n\,a,t)$ avec a petit, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$.
4. Quelles sont les solutions de l'équation précédente ?
5. En fait, les bobines ne sont pas idéales et ont une résistance interne $r \ll L\,\omega$.

   Déterminer la nouvelle équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ avec la méthode de votre choix.

\MecaC·03

Réflexion – transmission sur un plombage

Une onde se propage dans une corde (dans le plan xOy) inextensible, parfaitement flexible, de masse linéique μ_ℓ et tel que $\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$.

1. Établir une équation aux dérivées partielles de $y(x,t)$.

   Quelle est l'expression de la vitesse c ?

2. On suppose, au repos, une tension uniforme T_0. $\vec{T}(x)$ est la tension exercée par la partie gauche sur la partie droite.

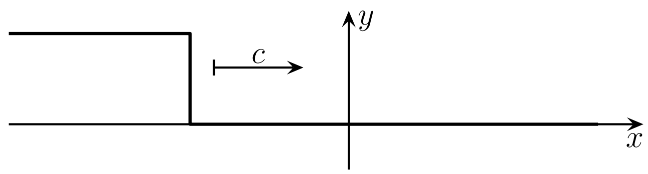
   Exprimer $\vec{T}_y(x)$ en fonction de $\vec{u}_y$ et d'une dérivée de y.

3. Application : on fixe en $x = 0$ une masse ponctuelle m. Le poids est négligé devant les autres forces. De $x = -\infty$ vient une onde harmonique. On note A l'amplitude de l'onde incidente, A_r celle de l'onde réfléchie et A_t celle de l'onde transmise.

   Quelles sont les expressions des coefficients de transmission t et de réflexion r de l'onde sur la masse ?

   Définir et exprimer une pulsation de coupure.

4. On donne ci-dessous la photo à un instant t_0 d'une déformation se propageant vers la masse.

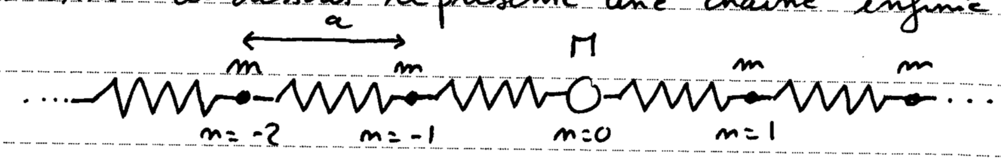


   Donner, sans calculs, les expressions des ondes réfléchies et transmises.

\MecaC·04

Défaut dans une chaîne d'oscillateurs

Le schéma ci-dessous représente une chaîne infinie d'oscillateurs.



On considère une onde plane progressive sinusoïdale

$$\vec{v}_n(t) = A\, e^{j(\omega t - qna)}\, \vec{u}_x$$

- Établir la relation de dispersion et en donner une interprétation.
- Déterminer la vitesse de phase, de groupe. Que représentent-elles physiquement ? Représenter $\omega = f(q)$

L'onde incidente donne naissance en M à :

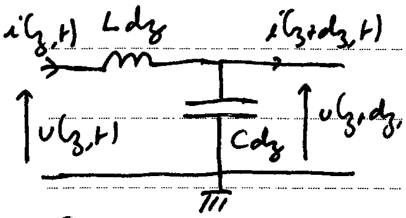
↳ une onde réfléchie $\underline{r}\, A\, e^{j(\omega t + qna)}\, \vec{u}_x$

↳ une onde transmise $\underline{t}\, A\, e^{j(\omega t - qna)}\, \vec{u}_x$

- Déterminer les coefficients $\underline{r}$ et $\underline{t}$.
- Interpréter pour $M \to 0$ et $M \to \infty$.

\MecaC·05

Câble coaxial



- Établir les équations aux dérivées partielles de $i(z,t)$ et $u(z,t)$
- Exprimer la vitesse de propagation.

On pose $\underline{u}(z,t) = \underline{v}_i\, e^{j(\omega t - kz)} + \underline{v}_r\, e^{j(\omega t + kz)}$. Le coefficient de réflexion $\rho(z)$ vaut $\rho(z) = \dfrac{\underline{v}_r\, e^{+jkz}}{\underline{v}_i\, e^{-jkz}}$. En $z = 0$, le câble est relié à un générateur et en $z = \ell$, le câble est relié à un résistor R_c.

- Exprimer $\rho(\ell)$ et $\rho(z)$ en fonction de R_c.

\MecaC·06

Corde vibrante

On considère une corde idéale vibrante dans le plan vertical $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

- Qu'est-ce qu'une corde idéale ?
- Trouver l'équation aux dérivées partielles vérifiée par l'ébranlement transversal vertical.

Une corde métallique de $L = 1{,}0$ m, de diamètre $d = 0{,}50$ mm est tendue.

- Quelle doit être la tension pour que la fréquence fondamentale soit $f_0 = 100$ Hz ?

\MecaC·07

Onde longitudinale

On considère un barreau métallique rectiligne et de section S constante. On note E le module d'Young et ρ la masse volumique.

- Déterminer l'équation des oscillations longitudinales.
- Estimer la vitesse de propagation dans du fer.

\MecaC·08

Onde dans un ressort vertical

On considère un ressort de masse m_0, de longueur naturelle l_0 et de constante de raideur k_0. On pose $\mu = \dfrac{m_0}{l_0}$.
On définit $\xi(x,t)$ tel qu'un point du ressort d'abscisse x au repos horizontal ($0 \leqslant x \leqslant l_0$) ait une abscisse $x + \xi(x,t)$ à l'instant t.

- Montrer que la raideur d'une tranche comprise entre x et $x+dx$ est un ressort de raideur $\dfrac{k_0 l_0}{dx}$. On pourra commencer par montrer que 2 ressorts en série de raideurs k_1 et k_2 sont équivalents à un ressorts de raideur $k_{éq}$ telle que $\dfrac{1}{k_{eq}} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$
- Montrer qu'en x, la force que la droite exerce sur la gauche s'écrit $\vec{f}_{d \to g} = l_0 k_0 \dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)\, \vec{u}_x$

Le ressort est attaché en O et pend verticalement.

- Trouver l'équation aux dérivées partielles vérifiées par $\xi_0(x)$ dans le cas du repos.
- Résoudre et en déduire l'allongement naturel.
- Trouver l'équation aux dérivées partielles vérifiées par $z(x,t)$ dans le cas général en posant $\xi(x,t) = \xi_0(x) + z(x,t)$.

Corde avec frottement

\MecaC·09

Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par l'ébranlement transversal d'une corde vibrante dont chaque portion dx subit la force $-h\,dx\,\vec{v}$.

- Quelle est l'origine de cette force de frottement ?
- Estimer numériquement h.

Chaîne bouclée d'oscillateurs

\MecaC·10

On considère une chaîne de N atomes identiques, de masse m et séparés au repos d'une distance a. Ces atomes interagissent entre eux doublement : d'une part avec leurs premiers voisins (ressort de raideur k_1) et d'autre part avec leurs seconds voisins (ressort de raideur k_2). On note $\xi_n(t)$ le déplacement du n-ième ressort au cours du mouvement.

On suppose la chaîne fermée sur elle-même (conditions aux limites périodiques), l'atome N+1 est l'atome 1. Autrement dit : $\xi_{N+1}(t) = \xi_1(t)$.

On note q le vecteur d'onde.

- Établir l'équation du mouvement de l'atome n.
- On cherche une solution de la forme $\underline{\xi_n}(t) = \xi_0 \, e^{i(qna - \omega t)}$. Montrer que q est quantifié.
- Définir la relation de dispersion et l'établir en fonction des grandeurs pertinentes. Le milieu est-il dispersif ?
- Existe-t-il q_c tel que la vitesse de groupe soit nulle ? Interprétation ?
- Étudier les cas particuliers intéressants suivants : (interpré
  - $\omega(q=0) = ?$ Interpréter
  - $\omega(q=\pi/a) = ?$ Interpréter
  - $k_1 \to 0$ Interprétation.
- En quoi ce modèle est-il physiquement intéressant ? Pourquoi une chaîne d'atomes ? Pourquoi une interaction de type ressort ? Pourquoi prendre en compte les seconds voisins ?

TORNADE

MecaD-01

Considérons une tornade sont le modèle est $\vec{\Omega} = \omega_0 \, \vec{u}_z$ pour $r < a$ et $\Omega = 0$ pour $r > a$. On suppose que $\vec{v} = v \, \vec{u}_\theta$.

1. Rappeler les équations de Maxwell relatives au champ magnétique en régime permanent.
2. En déduire une analogie entre le champ magnétique et la dynamique des fluides.
3. Déterminer v en tout l'espace.
4. Déterminer la pression p_R en tout l'espace.

\MecaE·01

Ondes sonores dans l'atmosphère

Un gaz parfait se trouve dans une atmosphère isotherme où l'on pose $c^2 = \dfrac{\partial P}{\partial \rho}\Big|_S = \dfrac{\gamma \, R \, T}{M}$. On note $P_0(z)$ et $\rho_0(z)$ la pression et la masse volumique.

1. Déterminer $P_0(z)$ et $\rho(z)$ en fonction de $P_0 = P_0(0)$ et $\rho_0 = \rho_0(0)$.
2. Une onde sonore se propage dans ce milieu et crée des variations de la forme $\left\{ \begin{array}{l} P_{\text{t}} = P_0(z) + P(z,t) \\ \rho_{\text{t}} = \rho_0(z) + \rho(z,t) \vec{v}_{\text{t}} = \vec{v}(z,t) \end{array} \right.$, P ρ et $\vec{v}$ sont des infiniments petits d'ordre 1.
   Déterminer les trois équations reliant $P(z,t)$, $\rho(z,t)$ et $\rho_0 \, v(z,t)$.

\MecaE·02

Champ de densité dans une étoile

On considère un astre sphérique fluide de rayon R et de masse totale m. Le fluide est à l'équilibre et la pression est donnée par $P(r) = C \, \rho(r)$ où $\rho(r)$ est la masse volumique à la distance r du centre.

1. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $\rho(r)$.
2. Résoudre l'équation précédente et tracer $\rho(r)$ et $P(r)$.
3. On considère que le fluide obéit à la loi des gaz parfaits.
   Trouver $T(r)$.

\MecaE·03

Onde sonore sphérique

1. Retrouver l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la surpression des ondes sonores acoustiques et l'écrire sous la forme :

$$\triangle \, p = \frac{1}{c^2}, \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

2. On rappelle qu'en coordonnées sphériques $\triangle \, p = \dfrac{1}{r^2} \, \dfrac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \, \dfrac{\partial p}{\partial r} \right)$.

   Montrer que le laplacien peut aussi s'écrire $\triangle \, p = \dfrac{1}{r} \, \dfrac{\partial}{\partial r} \left(\dfrac{\partial (r \, p)}{\partial r} \right)$.
3. En déduire une solution générale d'une équation de d'Alembert pour p et la commenter.

4. Maintenant on prend $p(r,t) = \dfrac{p_0}{e}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,(t-r/c)}$.
   Trouver le champ de vitesse et montrer qu'il est la somme de deux termes.
5. Expliquer la notion de champ lointain et champ proche.
6. Trouver l'apport de chacun des termes dans l'intensité sonore, commenter.
7. Ici la surpression est formée par une sphère de rayon R qui se dilate avec une dilatation radiale de $a\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t}$, a étant petit devant la longueur d'onde.
   Trouver a et faire l'application numérique pour $R = 5$ cm et $p_0 = 3$ Pa.m.

Bouteille et onde sonore

\MecaE·04

On s'intéresse aux phénomènes sonores qui apparaissent lorsqu'on souffle dans une bouteille de volume $V_0 = 75$ cL et de hauteur $h = 28$ cm. On considère des ondes sonores de célérité $c = 340$ m.s^{-1} et de fréquence $f \sim 100$ Hz

1. Y a-t-il propagation des ondes sonores à l'intérieur de la bouteille ?
2. On modélise cette expérience en considérant que l'air contenu dans le goulot est un piston de masse m.
   (a) Que devient le volume intérieur si le piston est déplacé de $\varepsilon(t)$?
   (b) En supposant la transformation adiabatique réversible, déterminer les forces de pression qui s'exercent sur le piston.
   (c) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la position du piston.
   (d) Avec des valeurs numériques compatibles avec la situation, calculez la fréquence de résonance.

Réflexion d'onde sonore

\MecaE·05

On considère un tuyau d'axe $(x'Ox)$ contenant un liquide dans lequel se situe une membrane de masse surfacique σ pouvant se déplacer sans frottement le long de l'axe du tuyau. Une onde se propage vers les x croissants et arrive sur la membrane. À gauche de la membrane, le fluide est de masse volumique ρ_1 et l'onde s'y déplace à la célérité c_1. De même à droite avec ρ_2 et c_2.

1. Définir et trouver les coefficients de réflexion et de transmission.
2. Que se passe-t-il lorsque $\sigma \to 0$? $\sigma \to \infty$?

Vidange d'un réservoir

\MecaE·06

Un récipient cylindrique de section S et de masse M contient une hauteur h d'eau et glisse sans frottement sur un plan horizontal. L'eau s'écoule par un petit trou de section $s \ll S$ percé à la base du récipient. On note ρ la masse volumique de l'eau.

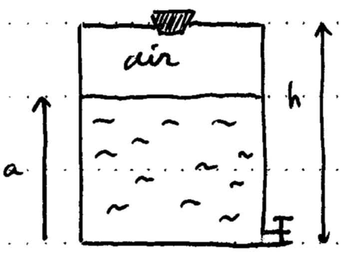
1. Le récipient est maintenu immobile.
   (a) Déterminer $h(t)$.
   (b) Trouver la force nécessaire pour le maintenir immobile.
2. Le récipient est libre de bouger.

(a) Décrire ce qui se passe.

(b) Vérifier les éventuelles hypothèses faite lors de la question précédente.

\MecaE·07

Vidange d'un réservoir bouché

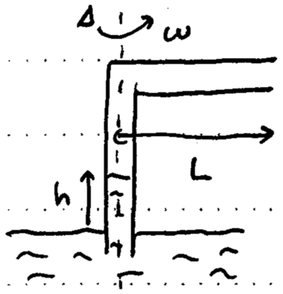


On considère une cuve cylindrique de base S et de section h. Initialement le bouchon est ouvert et on a une hauteur a de fluide et l'air est à P_0.

- On ouvre le robinet. Quel est le volume de fluide recueilli ?

\MecaE·08

Tube en rotation

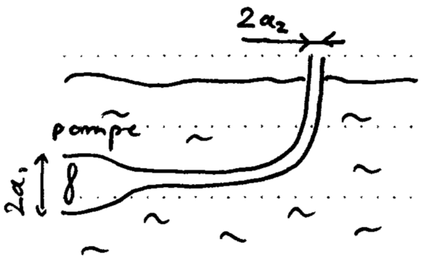


Un tube coudé tourne autour de l'axe vertical Δ à la vitesse constante ω.

- Déterminer la hauteur h dans le cas où l'air est considéré parfait.
- Même question si l'air est considéré incompressible.

\MecaE·09

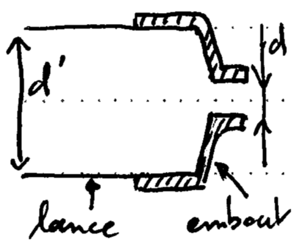
Pompe maritime



Le débit volumique de la pompe au fond du canal est D_v. a_1 et a_2 sont les rayons respectifs de la prise d'eau et de la sortie.

- Déterminer la vitesse v_0 du jet d'eau à la sortie.
- Quelle est la hauteur du jet ?
- Déterminer la pression en aval de la pompe.
- Toute la puissance P_0 de la pompe est transformée en énergie mécanique. Déterminer P_0.

Embout de lance incendie



Une lance incendie possède une section de sortie de diamètre d, une section d'entrée de diamètre d' et un débit volumique D_v.

- Quelle est la pression nécessaire pour obtenir un débit D_v ?
- Quelle force s'exerce sur le pas de vis de l'embout ?
- On ferme l'embout, quelle est la nouvelle force exercée ?

Réflexion d'ondes sonores

Deux fluides parfaits sont séparés par une membrane infiniment fine, de masse surfacique σ située en $x=0$. Elle peut coulisser sans frottement dans un tuyau horizontal infini. On note μ_i et c_i la masse volumique et la célérité des ondes acoustiques dans chacun des deux demi-tuyaux.

- Démontrer l'équation de propagation des ondes sonores.

On suppose qu'une OPPS incidente arrive sur la membrane.

- On définit $Z_i = \mu_i\,c_i$. Quelle est le nom de cette grandeur ?
- Définir et déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en surpression $\underline{r}_p$ et $\underline{t}_p$.

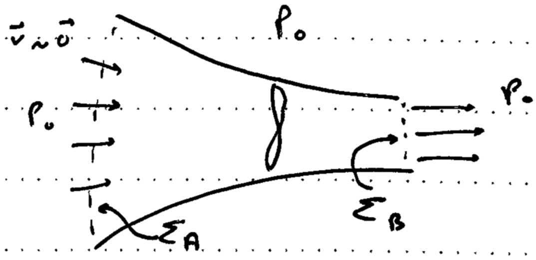
Dans la suite 1 et 2 sont supposés identiques. On note T le coefficient de transmission en puissance de la membrane, défini comme le rapport des flux moyens de puissance transmise et incidence.

- Montrer que $T = |\underline{t}_p|^2$ et le calculer.
- De quel type de filtre s'agit-il ? Donner les grandeurs caractéristiques et tracer l'allure de la courbe $G_{dB} = 10 \log T$ en fonction de $\log \omega$.
- Les sons graves sont-ils plus ou moins atténués que les sons aigus ?

On souhaite un affaiblissement de 40 dB à 200 Hz.

- Dans quel domaine se situe f ?
- En déduire σ puis l'épaisseur a sachant que la masse volumique vaut $\rho = 1{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.
- L'hypothèse "membrane infiniment fine" est-elle vérifiée ?

SOUFFLERIE



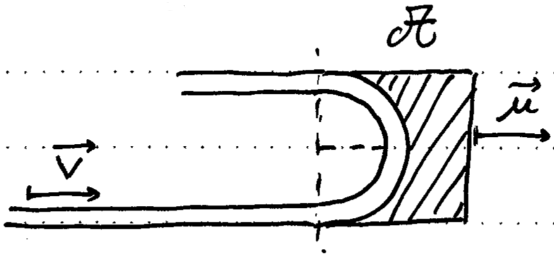
Une soufflerie (ou ventilateur) est schématisé ci-contre. L'écoulement est supposé incompressible, homogène et parfait.

La pesanteur est négligée. Le diamètre de sortie vaut $\Phi_B = 15\,\text{cm}$ et l'air sort à la vitesse $v_0 = 20\,\text{m.s}^{-1}$. Au niveau de l'hélice on a $\Phi = 40\,\text{cm}$. On prendra $\rho = 1{,}3\,\text{kg.m}^{-3}$

- Déterminer, en fonction de ρ et v_0, la différence de pression $P_2 - P_1$ existant de part et d'autre de l'hélice.
- Déterminer la puissance $\mathcal{P}_n$ à fournir à l'hélice.
- AN : calculer $(P_2 - P_1)$, $\mathcal{P}_n$ et la force que l'hélice exerce sur l'air.

\MecaE-13

Auget



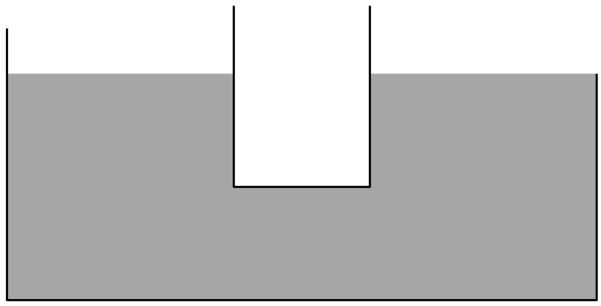
L'auget $\mathcal{A}$ se déplace dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ à la vitesse uniforme $\vec{u} = v\,\vec{e}_x$. Un jet d'eau de section s arrive sur l'auget avec une vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}_0$. L'eau est assimilé à un fluide parfait incompressible. La gravité est négligée.

- Calculer la force $\vec{F}$ exercée par l'eau sur l'auget :
  - ↳ par un bilan de quantité de mouvement
  - ↳ par un bilan d'énergie cinétique
- Définir et déterminer le rendement énergétique.

Un récipient qui coule

\MecaF-01

Un récipient de masse m_0 flotte initialement dans un réservoir contenant un volume fini de fluide incompressible. Un petit trou est créé dans le fond du récipient qui se met alors à se remplir.

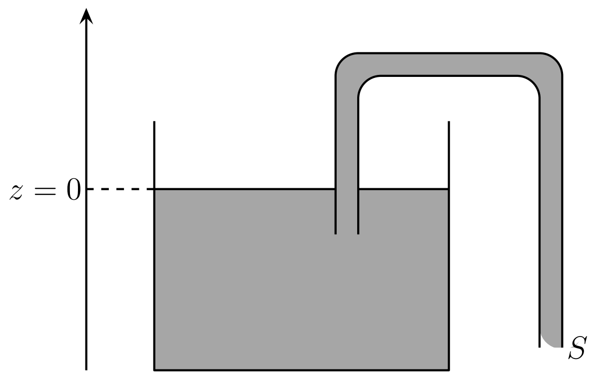


➜ Analyser la situation
➜ Mettre en équation la situation en précisant les hypothèses réalisées.

\MecaF·02

Siphon

On considère un réservoir contenant de l'eau dont la surface est maintenue à la cote z par un dispositif non représenté. Un tube coudé est plongé dedans de manière à le vider.

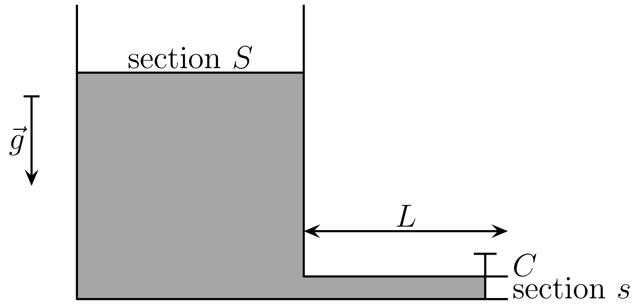


➜ Que faut-il faire en pratique pour que l'eau se mette effectivement à couler par l'orifice S ?
➜ À l'aide d'hypothèses que vous préciserez, trouver l'expression du débit D_v qui s'écoule à travers S.
➜ En fait, dès que la pression au point le plus haut de l'écoulement est nule, on observe un phénomène de cavitation.
  ➜ Qu'est-ce que le phénomène de cavitation ?
  ➜ La condition « la pression doit être nulle au point le plus haut » pour que le phénomène apparaisse est-elle une condition rigoureuse ou une provient-elle d'une approximation et laquelle ?
  ➜ Trouver la condition sur les différentes grandeurs géométriques pertinentes pour que le phénomène de cavitation n'apparaisse pas lors de la vidange.
➜ Comment est-il possible de maintenir constant le niveau de la surface du réservoir ?

\MecaF·03

Vidange d'un réservoir

On considère un réservoir ci-dessous.



1. Énoncer et démontrer le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant dans le cas stationnaire.

2. En déduire alors $H(t)$ et tracer sa courbe représentative.

3. Évaluer la durée τ_1 de vidange du réservoir avec $S = 1$ m^2, $s = 1$ cm^2, $\rho = 1.10^3$ kg.m^{-3}, $g = 10$ m.s^{-2} et $H_0 = 1$ m.

4. On prend désormais en compte le régime non permanent lors de l'ouverture du robinet.

   (a) Trouver $v(L,t)$.

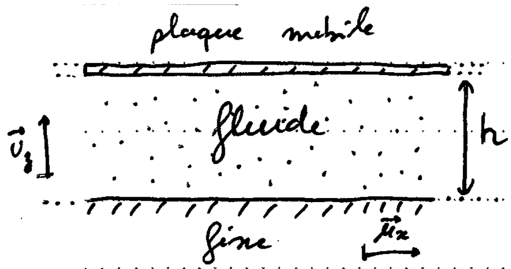
   On donne $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \mathrm{argth}(x) = \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$.

   (b) Tracer $v(L,t)$.

   (c) Évaluer la durée du régime transitoire avec $L = 1$ m.

Écoulement de Couette plan oscillant

\MecaF·04



Un fluide newtonien occupe l'espace délimité par deux plaques infinies dont l'une est fixe et l'autre mobile.
On rappelle l'équation de Navier - Stokes :

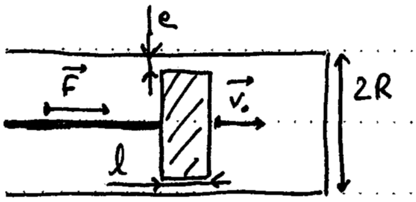
$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \rho \vec{g} + \eta\, \vec{\Delta} \vec{v}$$

- Justifier que le champ de vitesse puisse s'écrire $\vec{v}(M,t) = v(z,t)\,\vec{u}_x$.
  En déduire que l'écoulement est incompressible.
- Dans le cas où la vitesse de la plaque mobile est uniforme, $\vec{v}_{\text{plaque}} = v_0\, \vec{u}_x$, déterminer complètement le champ de vitesse.

On suppose désormais que la plaque oscille à la pulsation ω telle que $\vec{v}_{\text{plaque}} = V_0 \cos(\omega t)\, \vec{u}_x$.

- Établir l'équation vérifiée par v. Comment s'appelle-t-elle ?
- Justifier la recherche d'une solution sous la forme $\underline{v}(z,t) = \underline{f}(z)\, e^{j\omega t}$
- Trouver l'équation vérifiée par $\underline{f}(z)$ et la résoudre dans le cas où h est "suffisamment grand" (à préciser)

Amortisseur



Le schéma ci-contre représente un amortisseur pour lequel $e \ll R$. Le fluide est de l'huile considéré incompressible. Le piston est soumis à une force $\vec{F}$ et avance à $\vec{v_0}$.

- Exprimer la différence de pression ΔP de part et d'autre du piston en négligeant les forces de viscosité sur celui-ci.
- En déduire le gradient de pression dans la couronne cylindrique.
- En supposant l'écoulement laminaire dans la couronne cylindrique, déterminer le champ de vitesse.
- Calculer le débit et en déduire v_0.
- Vérifier que les forces de viscosité sont négligeables devant les forces de pression.