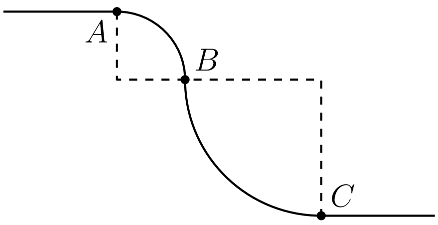
Description qualitative d'une accélération



On considère un mobile se déplaçant à la vitesse v constante sur une trajectoire formée de deux segments rectilignes parallèles, raccordés par deux quarts de cercle de rayon R et $2\,R$.

Préciser l'accélération subie par ce mobile avant A, entre A et B, entre B et C et après C.

Cinématique à partir des équations horaires

Les coordonnées d'un point matériel en fonction du temps sont : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \lambda\, t \\ y(t) = \mu\, t\,(t - t_0) \end{array}\right.$.

1. Quelles sont les dimensions de λ et μ ?
2. Déterminer l'équation de la trajectoire.
3. Calculer la vitesse $v(t)$ à l'instant t.
4. Montrer que le mouvement a une accélération constante et déterminer ses composantes sur chacun des deux axes.

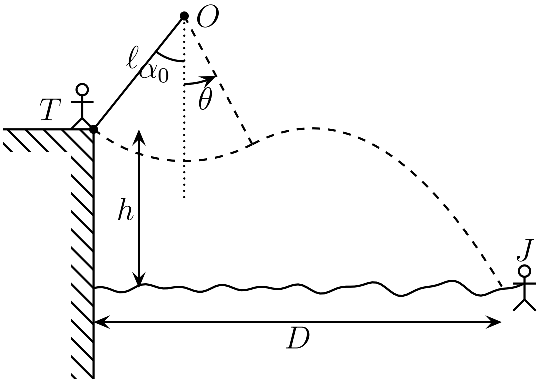
Cinématique d'une accélération en $-kv^2$

Un point matériel animé d'une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_x$ pénètre à $t = 0$ dans un milieu résistant dans lequel il est soumis à une accélération $\vec{a}(t) = -k\,v^2(t)\,\vec{u}_x$ où k est une constante.

1. Quelle est la dimension de k ?
2. En prenant pour origine de l'espace l'endroit où le point matériel rentre dans le milieu résistant, établir la loi donnant $v(t)$.
   Quelle est la limite de $v(t)$ en $t = +\infty$?
3. En déduire l'équation horaire $x(t)$ du mouvement.
   Quelle est la limite de $x(t)$ en $t = +\infty$?
4. Montrer qu'après un parcours de longueur ℓ dans le milieu, la vitesse est $v(\ell) = v_0 \mathrm{e}^{-k\ell}$.

Tarzan sauver Jane

Tarzan (représenté par un point matériel T) veut se jetter à l'eau pour sauver Jane (représentée par un point matériel J). Il cherche donc à faire en sorte de tomber le plus loin possible.



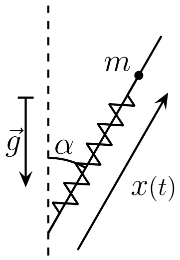
1. Déterminer, en fonction des paramètres du problème et de l'angle θ_0 où Tarzan lâche la liane, la distance D entre le point de chute et la falaise.

2. Quel est l'angle θ_0 optimal ?

3. Faire l'application numérique pour θ_0 et pour la distance D associée.

   On prendra $h = 3{,}0$ m, $\ell = 5{,}0$ m et $\alpha_0 = 30$ °

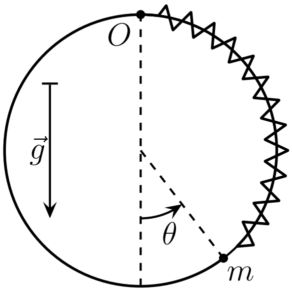
Oscillation d'une masse sur une tige inclinée



Une masse m peut se déplacer sur une tige immobile inclinée d'un angle α par rapport à la verticale. Cette masse subit des frottements de type $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

1. Déterminer la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$.
2. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

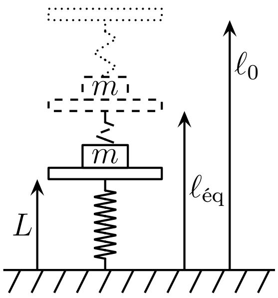
Oscillation d'une masse sur un cerceau



Une perle est astreinte à se déplacer sans frottement sur un cerceau de rayon R. Cette perle est reliée à un ressort idéal fixé au sommet O du cerceau.

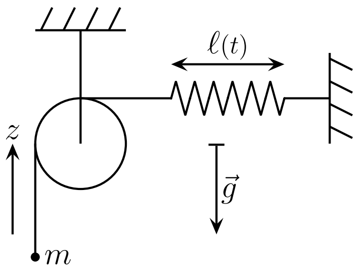
1. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
2. Déterminer l'expression de la force exercée par le cerceau sur la perle en fonction de $\theta(t)$ et de ses dérivées.

Éjection d'une bille



Un dispositif de masse négligeable est constitué d'un ressort attaché à un plateau. Une masse m est posée sur le plateau. On comprime le ressort et on lâche.
Déterminer la (les) condition(s) sur $\ell_{\text{éq}}$, k, ℓ_0, L et m pour que la masse décolle.

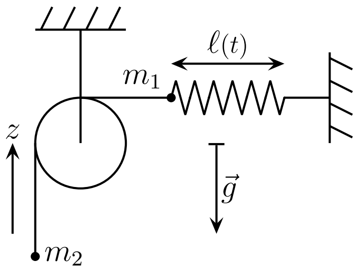
Oscillation ressort – fil – poulie – masse



Dans le dispositif représenté ci-contre, le fil et la poulie sont idéaux et le ressort est astreint à rester horizontal. On définit l'origine de telle sorte que $z = 0$ lorsque le ressort a sa longueur naturelle $\ell = \ell_0$. On néglige tout frottement.

1. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
2. En déduire la position d'équilibre $z_{\text{éq}}$.
3. Résoudre l'équation différentielle lorsqu'on lâche l'ensemble sans vitesse initiale lorsque m est en $z(0) = 0$.

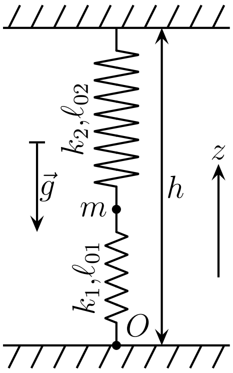
Oscillation ressort – fil – poulie – deux masses



Dans le dispositif représenté ci-contre, le fil et la poulie sont idéaux et m_1 est astreinte à osciller horizontalement. On définit l'origine de telle sorte que $z_2 = 0$ lorsque le ressort a sa longueur naturelle $\ell = \ell_0$. On néglige tout frottement.

1. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $z_2(t)$.
2. En déduire la position d'équilibre $z_{\text{éq}2}$.
3. Résoudre l'équation différentielle lorsqu'on lâche l'ensemble sans vitesse initiale lorsque m_2 est en $z_2(0) = 0$.

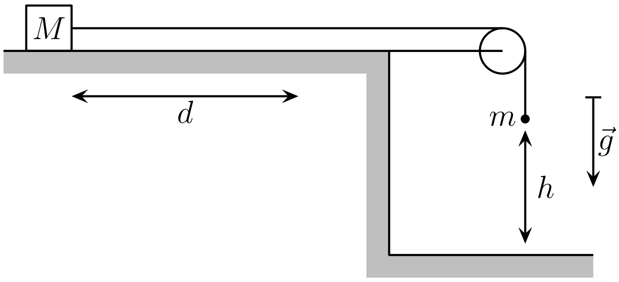
Oscillations verticales d'une masse entre deux ressorts



1. On suppose que m est astreinte à se déplacer verticalement.
   Trouver l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ et en déduire la position d'équilibre.
2. m n'est plus astreinte à se déplacer verticalement.
   Discuter des conditions que doivent vérifier les grandeurs caractéristiques du dispositif pour que le mouvement reste vertical.

Masse tractée

Une masse M sur un plan est lié à une masse m située à une hauteur h du sol, par un fil inexistensible et sans masse qui passe par une poulie idéale. M s'arrête après une distance $d > h$.



1. Déterminer la vitesse M lorsque m touche le sol.
2. En déduire la valeur du coefficient de frottement entre M et le support.

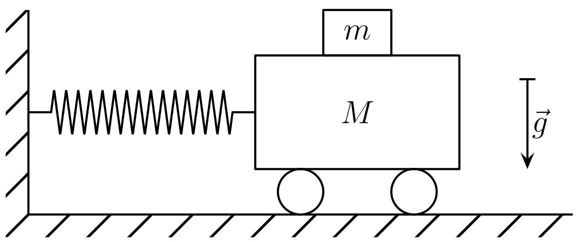
Manège

Sur un manège qui tourne à ω constant autour de l'axe Oz, un homme s'éloigne radialement du centre à la vitesse constante.

1. Que voit un observateur immobile sur l'axe ?
2. Faire l'analyse physique des forces en présence dans les référentiels liés au sol et au manège.
3. Faire le bilan énergétique dans les référentiels liés au sol et au manège.

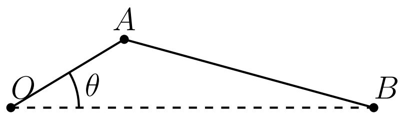
Wagon oscillant

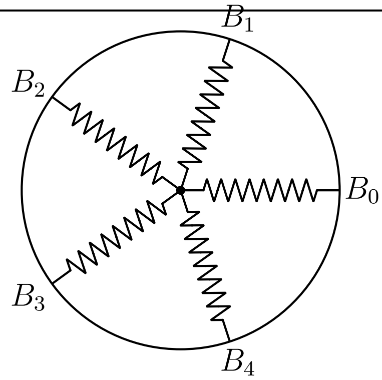
On note f le coefficient de frottement entre les deux solides.



1. Trouver l'amplitude maximale des oscillations de M pour que m reste solidaire du wagon.
2. Étudiez qualitativement et quantitativement le mouvement en cas de glissement.

Masse et ressorts





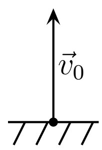
1. Montrer que si $OA \ll OB$ alors $AB \simeq OB - OA\cos\theta$.
2. On considère le dispositif représenté ci-dessus. Il est constitué de N ressorts identiques (raideur k, longueur à vide R) accroché au point matériel A (de masse m) et à N points répartis régulièrement sur un cercle de rayon R de centre O. Le point A est repéré par ses coordonnées polaires (r,θ) d'origine O.
   (a) Exprimer l'énergie potentielle due aux ressorts.
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{N-1} \cos^2\left(\theta - \frac{2\,\pi\,p}{N}\right)$ et en déduire E_{p}.
   (c) Montrer que le mouvement satisfait à la loi des aires $r^2\,\dot{\theta} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$.
   (d) On déplace A de $r = r_0$ et on lâche sans vitesse initiale.
   Étudier le mouvement.
   (e) On déplace A de $r = r_0$ et on le lance avec la vitesse $\vec{v}_0$.
   Déterminer $\vec{v}_0$ tel que le mouvement soit circulaire.

Traction d'un oscillateur

On considère un point matériel M de masse m lié à un ressort de raideur k et mobile dans le plan (xOy). Un opérateur déplace le point A qui est à l'autre extrémité du ressort à la vitesse constante $\vec{v} = v_0\,\vec{u}_x$. On note μ le coefficient de frottement solide entre M et le plan (xOy).

1. Montrer que pour $t < t_1$, le solide reste immobile.
   Déterminer t_1 en fonction de μ, g, v_0 et ${\omega_0}^2 = \dfrac{k}{m}$.
2. On note $t' = t - t_1$.
   Déterminer $x(t')$ pour $t' > 0$.
3. Montrer qu'à partir d'un certain instant le mouvement devient périodique.
4. Déterminer la puissance des forces de frottement. Commenter.

Objet lancé vers le haut



Un objet de masse m est lancé verticalement vers le haut à la vitesse v_0.

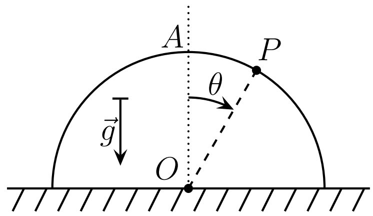
1. On néglige les frottements.
   Déterminer la hauteur h_0 à laquelle va monter l'objet.
2. On ne néglige plus les frottements. Ils sont tels que l'objet ne monte qu'à la hauteur $h = \dfrac{h_0}{2}$.

(a) Déterminer le travail fourni par les frottements à la masse.

(b) En faisant l'approximation que les frottements ont une intensité constante, déterminer la vitesse qu'aura l'objet lorsqu'il repercutera le sol.

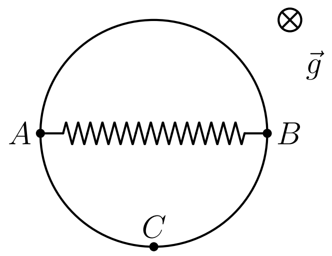
Palet glissant sur une demi-sphère

Un palet P assimilable à un point matériel de masse m est abandonné sans vitesse initiale au sommet A d'une demi-sphère de rayon R. Le contact se fait sans frottement.
Déterminer l'angle θ_{c} pour lequel P quitte la demi-sphère.



Masse sur un cerceau

Un ressort de longueur naturelle ℓ_0 est fixé en A et accroché à un cerceau horizontal de rayon ℓ_0. L'autre extrémité du ressort est reliée à une attache de masse m solidaire du cerceau et pouvant glisser sans frottement.



1. La masse est initialement positionnée en B et lâchée sans vitesse initiale.
   Déterminer la réaction du cerceau lorsque la masse passe en C.
2. Déterminer les positions d'équilibre et étudier leur stabilité.

Portrait de phase

Un point matériel de masse m a un mouvement unidirectionnel et est soumis à la force :

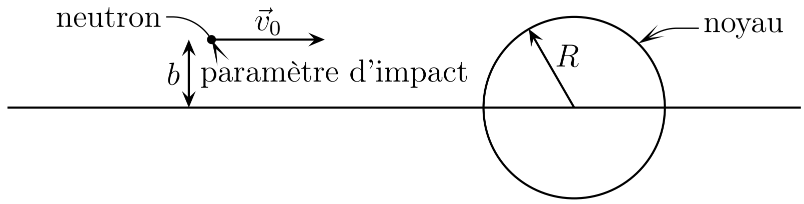
$$-\frac{V_0}{L}\left(\sin\frac{x}{L}+\frac{x}{L}\cos\frac{x}{L}\right)$$

Que dire de son portrait de phase ?

Diffusion de neutron

On envoie un neutron sur le noyau d'un atome. L'interaction est modélisée par une énergie potentielle :

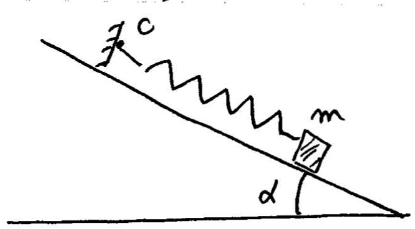
$$E_{\text{p}}(r)=0 \text{ si } r>R \qquad \text{et} \qquad E_{\text{p}}(r)=U_0 \text{ sinon}$$



1. Déterminer la trajectoire du neutron.
2. Calculer la déviation Φ.
3. On bombarde le noyau par un faisceau parallèle et homocinétique (même vitesse initiale) de neutrons : décrire qualitativement et quantitativement le phénomène observé.

Masse – ressort sur plan incliné

Un objet ponctuel de masse m, fixé à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, attaché en O se déplace le long d'1 plan incliné d'angle α. À l'instant initial, on lance la masse, initialement à sa position au repos, avec une vitesse v_0 vers O.



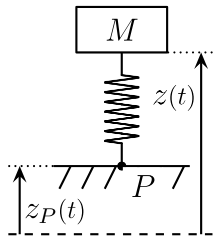
- À quelle condition sur v_0 la masse m frappe-t-elle le point O ?
- À quel instant le choc a-t-il lieu ?
- Quelle est, alors, la vitesse de m ?

Oscillations d'un électron

On modélise un électron d'un atome par une particule cahrgée astreinte à se déplacer sur un axe. L'électron est plongé dans le champ électrique crréé par le reste de l'atome et qui vaut $\vec{E} = E_0 \dfrac{r}{r_0} \vec{u}_r$ où $\vec{u}_r$ est le vecteur directeur de l'axe sur lequel se déplace l'électron. Une onde électromagnétique arrive sur l'atome et crée un champ électrique supplémentaire $\vec{E}\,' = E' \cos(\omega t) \vec{u}_r$.

Déterminer les caractéristiques du mouvement de l'électron.

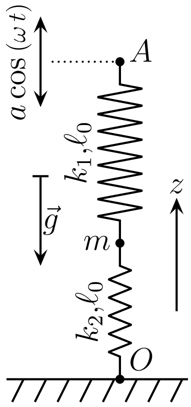
Tête de lecture vinyl



On modélise une tête de lecture d'une platine disque vinyl par un ressort de longueur naturelle ℓ_0 et de constante de raideur k attaché à une masse M. Le fond du sillon bouge par rapport à la tête de telle sorte que $z_P(t)$ soit proportionnelle à l'amplitude de la mélodie sonore.

1. On suppose que P reste tout le temps en contact avec le disque.
   Déterminer $z(t)$ lorsque $z_P(t) = Z_0 \cos(\omega t)$.
2. On suppose que P peut se soulever du disque.
   Trouver les conditions pour que tel ne soit pas le cas.

Oscillations verticales forcées d'une masse entre deux ressorts

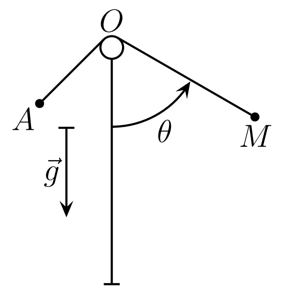


Une masse m est astreinte à se déplacer verticalement. Elle subit une force de frottement de type $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$.

1. L'extrémité A est immobile et est, initialement à une hauteur $h = 2\ell_0$.
   Trouver l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$, cote de m.
2. L'extrémité A est mise en mouvement et oscille sinusoïdalement autour de sa position au repos avec une amplitude a.
   (a) Trouver la nouvelle équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
   (b) Déterminer l'amplitude Z des oscillations de m autour de sa position d'équilibre.

Encensoir de St Jacques de Compostelle

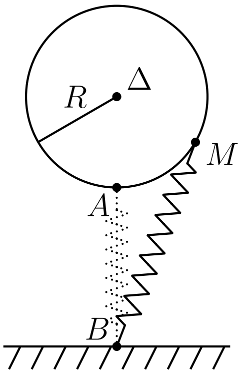
L'encensoir de Saint Jacques de Compostelle est représenté ci-dessous. il s'agit d'un pendule simple OM dont la longueur OM varie en tirant la corde au point A. Ainsi, en position basse $\theta = 0$, ℓ devient $\ell - \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll \ell$. En position haute $\theta = \theta_{\text{max}}$, on relâche la corde et $\ell - \varepsilon$ redevient ℓ. Pour $\theta = 0$, $\dot{\theta} > 0$ et M a une vitesse v_0 avant qu'on ne raccourcisse la corde.



1. Déterminer la vitesse v_1 après qu'on a raccourci la corde puis l'angle θ_1 de la position haute suivante.
2. Déterminer la vitesse v_2 en position basse avant qu'on ne racourcisse à nouveau la corde.
3. Étudier la variation d'énergie cinétique sur une demi-période.

Masse reliée à un cerceau

Une masse m est relée à un ressort de constante de raideur k et de longeur à vide $\ell_0 = AB$. Elle coulisse sans frottement le long d'un cerceau fixe de rayon R et d'axe horizontal Δ.



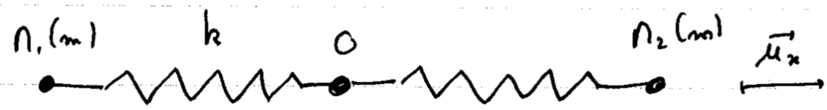
1. Déterminer la vitesse minimale à communiquer en A à la masse m pour qu'elle effectue un tour complet.

2. Déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre.

Oscillateurs couplés

Il n'y a pas de frottement en M_1 et M_2 ; la force de frottement en O est $\vec{f} = -h \dfrac{dx_0}{dt}(t)\,\vec{u}_x$

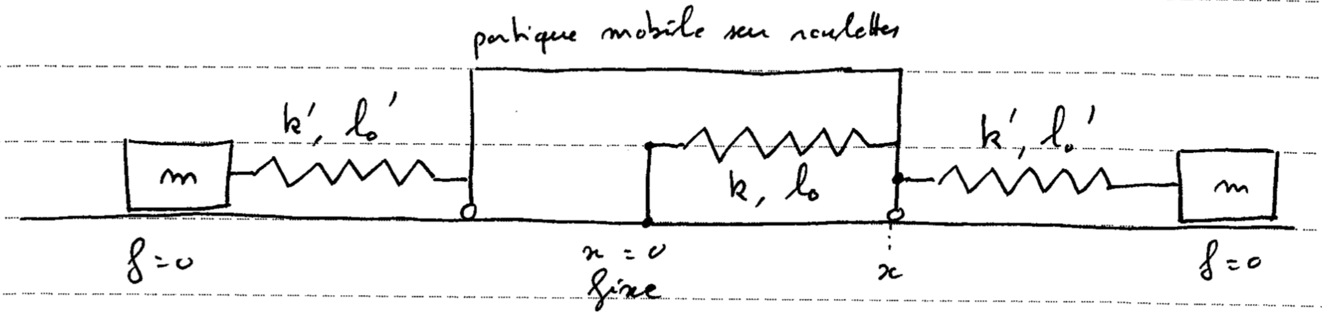
On pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\lambda = \dfrac{h}{k}$



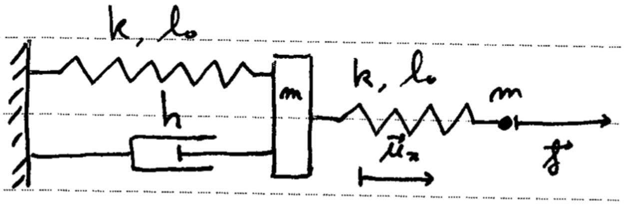
- Quel sera le régime permanent quelles que soient les conditions initiales ?
- Retrouver ce résultat en étudiant $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
- Et si O avait une masse ?

Oscillateurs couplés

Décrire l'évolution du dispositif mécanique ci-dessous en partant d'une position $x \neq \ell_0$



Oscillateurs couplés en régime forcé

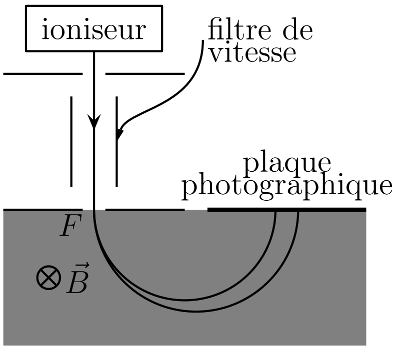


On impose $\vec{f} = f_0 \cos(\omega t)\,\vec{u}_x$
Les mouvement sont horizontaux.
• Déterminer les positions des deux masses en régime permanent

Stabilité d'une trajectoire circulaire dans un champ $\vec{B}$

1. Une particule de charge $q > 0$ et de masse m décrit dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ une trajectoire circulaire plane centrée en O de rayon r_0, à la vitesse v_0 dans le plan (Oxy).
   Quelle doit être la norme B_0 du champ magnétique pour une telle trajectoire ?
2. En fait, le champ magnétique, constant, n'est pas uniforme mais vaut, au voisinage de la trajectoire circulaire précédente $B(r) = B_0 \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$.
   (a) En utilisant les coordonnées polaires $r(t)$, $\theta(t)$, écrire les équations différentielles régissant le mouvement de la particule dans le plan (Oxy).
   (b) On suppose $r(t) = r_0 + \xi(t)$ (réglage non parfait) avec $|\xi(t)| \ll r_0$, la norme de la vitesse valant v_0, qui correspond toujours à la trajectoire de rayon r_0.
      i. Étudier le mouvement ultérieur de la particule.
      ii. À quelle condition portant sur α, la trajectoire circulaire est-elle stable ?

Spectrographe de Bainbridge



On considère le spectrographe ci-contre. Les ions (supposés ici positifs) sortent d'un ioniseur où ils ont été préalablement accélérés sous une tension de valeur absolue U. Ils traversent d'abord un filtre de vitesse puis pénètrent dans un champ magnétique transversal uniforme $\vec{B}$, ils décrivent ensuite un demi-cercle et viennent impressionner une plaque photographique.
Données : $B = 0{,}10$ T ; $U = 10$ kV ; $m_{\text{p}} = 1{,}67.10^{-27}$ kg.

1. La fente F étant supposée très fine, déterminer l'expression de la distance FI où I est le point d'impact des ions.

2. Calculer numériquement la distance entre les points d'impact correspondant aux isotopes $^{39}K^+$ et $^{41}K^+$.

Mouvement d'une particule dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ croisés

Dans une portion de l'espace règnent deux champs uniformes orthogonaux : $\vec{E} = E\,\vec{u}_y$ et $\vec{B} = B\,\vec{u}_z$. À l'instant initial, un proton est abandonné sans vitesse initiale en O.

1. Trouver les équations différentielles vérifiées par $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

2. Résoudre les équations différentielles précédentes.

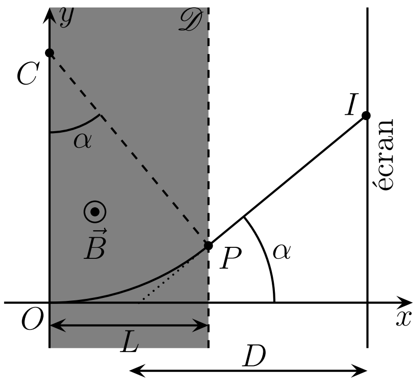
On notera $\omega \overset{\text{not}}{=} \dfrac{e\,B}{m}$; $v_{\text{D}} \overset{\text{not}}{=} \dfrac{E}{B}$ et $R_0 \overset{\text{not}}{=} \dfrac{m\,E}{e\,B^2} = \dfrac{v_{\text{D}}}{\omega}$.

Déflexion magnétique

Des électrons pénètrent en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_x$ dans un domaine $\mathscr{D}$ de largeur L où règne un champ magnétique $\vec{B} = B\,\vec{u}_z$ uniforme et constant. On suppose la largeur L telle que $L \ll \dfrac{m\,v_0}{e\,B}$.

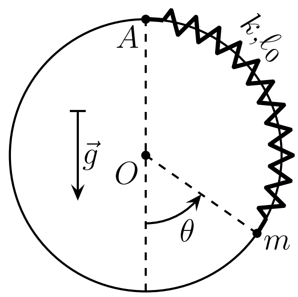
Un écran a été placé à la distance $D + \dfrac{L}{2}$ de O.

1. Déterminer l'ordonnée y_P du point P où l'électron quitte le domaine $\mathscr{D}$ ainsi que l'angle α que fait la vitesse de l'électron en ce point avec (Ox).
2. En déduire la position de point d'impact I sur l'écran.



Oscillations sur un cerceau

Un ressort de longueur naturelle ℓ_0 et de raideur k est fixé à une de ses extrémités en un point A d'un cerceau de rayon R. Attachée à son aure extrémité, une masse m se déplace sur le cerceau tout en subissant une force de frottement du type $\vec{f} = -\lambda\,\vec{v}$.



1. À l'aide d'un théorème du moment cinétique, trouver l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

On suppose que $\ell_0 = \dfrac{\pi R}{2}$.

2. À quelle condition portant sur m, g, k, R a-t-on $\theta_{\text{éq}} = \dfrac{\pi}{4}$?

3. Quelle est la période des oscillations autour de la position d'équilibre $\theta_{\text{éq}} = \dfrac{\pi}{4}$?

Particule dans un champ électromagnétique

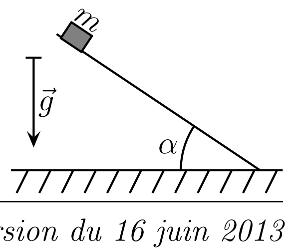
Une particule $(q>0, m)$ est placé dans un champ $(\vec{E}, \vec{B})$ tel que $\vec{E} = E\,\vec{u}_y$ et $\vec{B} = B\,\vec{u}_z$ uniformes. Elle pénètre dans le champ à $t=0$ en O avec la vitesse initiale $\vec{v}_0$.

- $\vec{v}_0 = \vec{0}$. Trouver le système d'équations différentielles vérifié par la particule. En déduire le mouvement. On note $\omega = \dfrac{qB}{m}$.
- $\vec{v}_0 = -2\,\vec{u}_x - 2\,\vec{u}_y$, $\omega = 1$, $\dfrac{\omega E}{B} = 1$. Tracer la trajectoire à l'aide du logiciel
- Mêmes questions si on rajoute un frottement $\vec{f} = -k\,\vec{v}$.

Lancer de bout de gomme

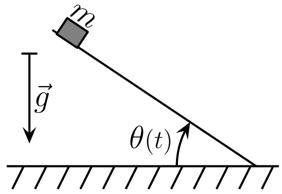
On rappelle que les forces de frottement entre solide sont telles que, en notant respectivement R_T et R_N les réaction tangentielle et normale au plan :
- ➜ si M est immobile sur la surface, alors $R_T \leqslant f_0 R_N$;
- ➜ si M glisse sur la surface, alors $R_T = f_0 R_N$.

1. Dans un premier temps, on pose un bout de gomme sur un plan immobile. On note α_c l'angle limite au-dessus duquel l'équilibre n'est pas possible.
   Établir un lien entre α_c, f_0, m, g, …



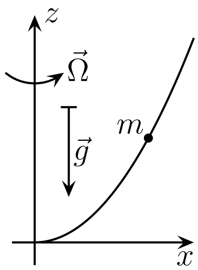
2. Le plan est maintenant mis en mouvement avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}(t) = \omega = \mathrm{C^{te}}$.

   Déterminer l'angle θ_c à partir duquel le bout de gomme se met à glisser.



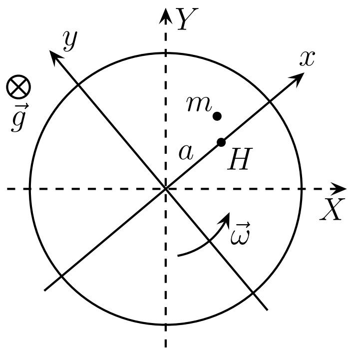
Équilibre sur une parabole

Un anneau de masse m est astreint à se déplacer sans frottement sur un arc de parabole $z = \alpha\, x^2$.
Déterminer les positions d'équilibre de M sur cet arc lorsque ce dernier tourne à la vitesse angulaire constante Ω autour de son axe.



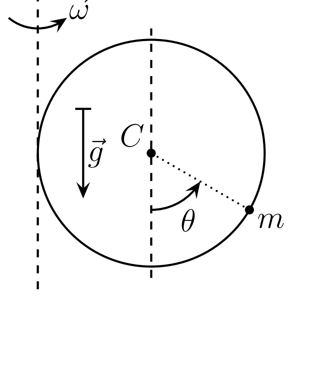
Chute libre sur un manège

Un homme se tient immobile sur un manège à la distance a du centre d'un manège horizontal. Il lâche, sans le lancer, un petit objet de masse m alors que le maège tourne à vitesse angulaire constante ω.
Déterminer les coordonnées du point de chute de l'objet dans le référentiel (Oxy) lié au manège.



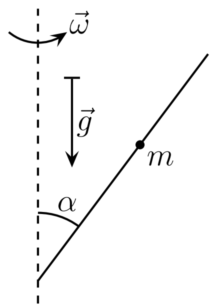
Cerceau tournant autour de sa tangente

Un anneau de masse m se déplace sans frottement sur un cerceau de rayon R.
Le cerceau tourne autour d'une de ses tangentes verticales à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ constante.
Discuter des positions d'équilibre de l'anneau dans le référentiel du cerceau.



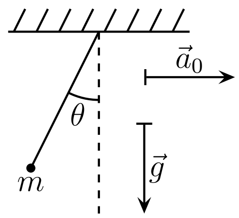
Équilibre sur une tige inclinée

Un anneau de masse m se déplace sans frottement sur une tige inclinée d'un angle α par rapport à la verticale. Cette tige tourne autour d'un axe vertical à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ constante.
Discuter des positions d'équilibre de l'anneau dans le référentiel lié à la tige.



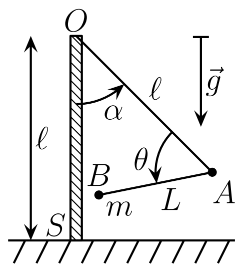
Pendule simple dans un train

Un pendule simple est accroché au plafond d'un wagon qui subit une accélération constante $\vec{a}_0$.
Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.



Trébuchet

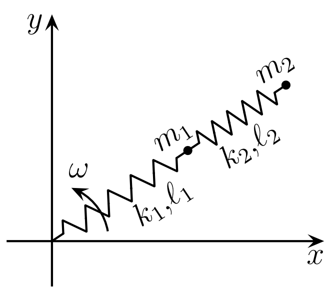
On modélise un trébuchet de la manière suivante. Un bras OA de longueur ℓ est mis en rotation autour de O par un dispositif non représenté. La tige AB tourne sans frottement autour de A. Le projectile de masse m est en B. Le bâti OS est fixe par rapport au réferntiel terrestre galiléen.
Sachant que $\dot{\alpha}(t) = \text{C}^{\text{te}} \overset{\text{not}}{=} \omega$ et qu'à $t = 0$ on a $\alpha(0) = 0$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
On négligera toutes les masses autre que celle du projectile.



Masses en rotation

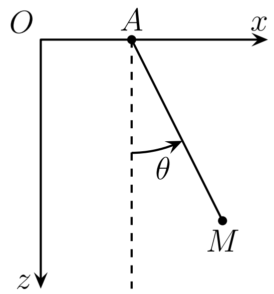
Un dispositif est constitué de deux masses m_1 et m_2 et de deux ressorts de longueurs naturelles respectives ℓ_1 et ℓ_2 et de raideurs respectives k_1 et k_2. L'ensemble est posé sur un plan horizontal et tourne (avec frottements) à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$.

Déterminer les longueurs $\ell_{1,\text{éq}}$ et $\ell_{2,\text{éq}}$ des deux ressorts lorsqu'ils sont à l'équilibre dans $\mathscr{R}'$, référentiel tournant à la vitesse angulaire ω.



Pendule paramétrique

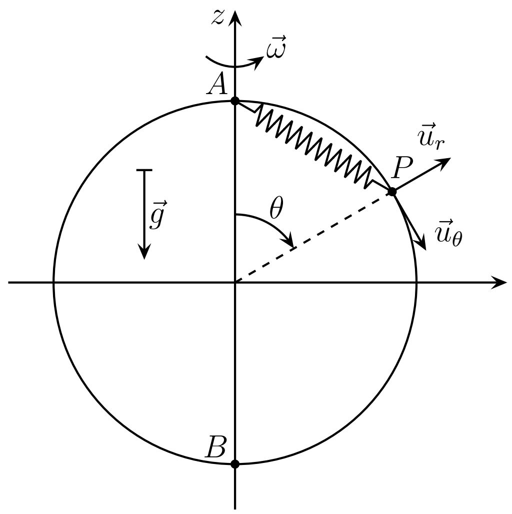
On considère un pendule rigide AM où toute la masse est concentrée en M. Un moteur entraîne le point A de telle sorte que $\overrightarrow{OA} = a \cos(\omega t)\,\vec{u}_x$ et les frottements sont négligés.



1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ et introduire une pulsation particulière ω_0.
2. On suppose $\omega \neq \omega_0$ et $\theta(t)$ petit.
   Déterminer $\theta(t)$ avec $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
3. Que se passe-t-il pour $\omega = \omega_0$?

Perle sur un cerceau

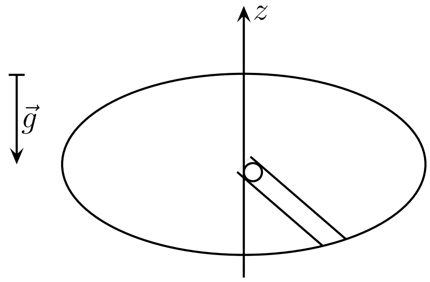
Un point matériel P de masse m glisse sans frottement sur un cercle de rayon a tournant autour de son diamètre vertical à la vitesse angulaire ω. Il subit l'action d'un ressort de raideur k et de longueur naturelle nulle tendu de A à P. On travaillera dans le référentiel lié au cercle.



1. À partir d'une loi énergétique, déterminer une relation entre $\dot{\theta}(t)$, $\theta(t)$ et les grandeurs caractéristiques du problème. On pourra introduire $\kappa = \left(\dfrac{k}{m} - \dfrac{g}{a}\right) \times \dfrac{1}{\omega^2}$.
2. Que pouvez-vous dire sur le mouvement de P ?
3. Discuter des éventuelles positions d'équilibre suivant κ.
4. Discuter de leurs stabilité.
5. Déterminer la pulsation des oscillations autour de la (ou des) position(s) d'équilibre(s) stable(s).
6. Déterminer l'expression de la réaction $\vec{R}$ du cerceau en fonction de θ.

Bille dans une goutière

Un disque horizontal de rayon R tourne à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Oz. Une bille coulisse sans frottement le long d'une goutière située sur ce disque. Cette bille est reliée au point O par un ressort de longueur naturelle ℓ_0 et de raideur k.



1. Donner l'équation du mouvement de la bille.
   Expliquer qualitativement son mouvement.
2. Définir et déterminer la position d'équilibre.
3. La bille n'est maintenant plus rattaché en O par le ressort.
   À $t = 0$, la bille est en O et ont et le disque en rotation : expliquer ce qui se passe et donner l'équation du mouvement.

Bille dans un tube

Une bille glisse sans frottement dans un tube cylindrique en rotation dans un plan vertical à la vitesse constante ω.

1. Équation du mouvement de la bille.
   Peut-on tendre vers un mouvement sinusoïdal .
2. Expression de R, la réaction de la bille sur le cylindre.
3. Portrait de phase
4. Bilan de puissance dans le référentiel lié au laboratoire et dans celui lié au tube.

Masse sur un disque

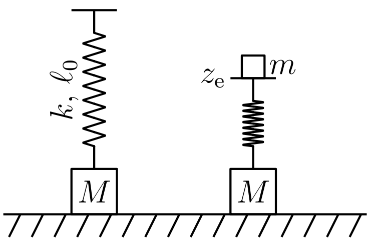
Un disque plan horizontal de rayon R tourne à la vitesse constante Ω autour d'un axe normal à son plan et passant par son centre O. Une masse ponctuelle M de masse m, initialement posée à $OM_0 = \dfrac{R}{2}$ est astreinte à se déplacer suivant un rayon.

1. Calculer le temps au bout duquel M arrive au bord du disque.
   Donner sa trajectoire lorsqu'elle quitte le disque.
2. On considère que la loi de Coulomb s'applique et que le coefficient de frottement est f.
   (a) Donner une condition sur Ω pour que M se mette en mouvement.
   (b) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ lorsque la masse glisse sur le disque ($\Omega > \Omega_{\text{lim}}$).

(c) Résoudre cette équation différentielle.

Masses – ressort

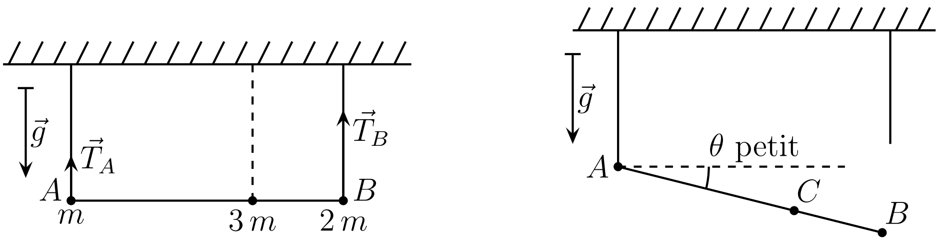
On considère un ressort idéal, de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0 est attaché à une masse M. L'ensemble est posé verticalement comme représenté ci-dessous. On pose, sans la fixer, une masse m sur le ressort.



1. Déterminer l'élongation du ressort à l'équilibre.
2. À partir de l'élongation précédente on comprime davantage le ressort.
   À quelle(s) condition(s) la masse m se soulève-t-elle du ressort ?
   À quelle(s) condition(s) la masse M se soulève-t-elle du support ?

Discontinuité de force

Trois masses A, B et C de masse m, $3\,m$ et $2\,m$ sont reliées par une tige sans masse. L'ensemble est suspendu horitontalement par deux fils attachés en A et en B. C est tel que $AC = \dfrac{2}{3}\,\ell$



1. Déterminer les tensions $\vec{T}_A$ et $\vec{T}_B$.
2. On coupe le fil relié à B à l'instant $t = 0$.
   Déterminer la tension $\vec{T}_A$ à l'instant $t = 0^+$.

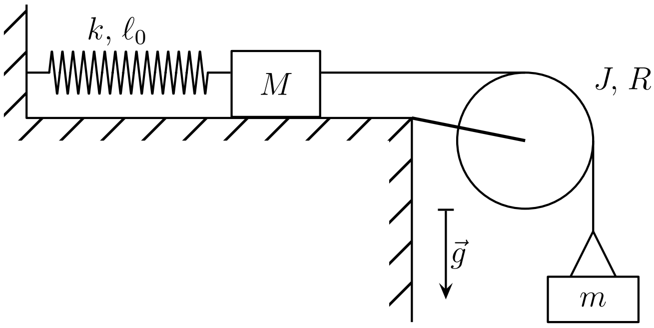
Oscillations avec un ressort pesant

On considère un ressort et une masse de masses respectives $\lambda\,M$ et M. La masse est accrochée au ressort, l'autre extrémité du ressort étant fixe. Le coefficient de frottement sol / masse est pris nul.

Déterminer et tracer l'allure de la période T des oscillations en fonction de λ.

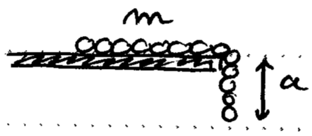
Oscillations masses – ressort – poulie

On considère le dispositif ci-dessous dans lequel le cube ne frotte pas sur le sol, le fil ne glisse pas sur la poulie.



Trouver, de deux manières différentes, la période des oscillations.

Chaîne sur le coin d'une table



Une chaîne de masse m répartie uniformément, de longueur l est posée sur une table. Un bout de longueur $a<l$ pend au bord de la table.

- Étudier le mouvement sans frottement
- Étudier le mouvement avec frottement solide avec la table.

Impact d'astéroïde

Un astéroïde de masse m percute la Terre de masse $M \gg m$ alors qu'elle est en orbite quasi-circulaire autour du Soleil. On considère que la trajectoire est elliptique après le choc. On note $\mathscr{S}$ le système { Terre + comète } .

1. Quelle est l'énergie mécanique totale de $\mathscr{S}$ juste avant le choc ?
2. Montrer que la quantité de mouvement de $\mathscr{S}$ se conserve au cours du choc.
3. En déduire l'énergie mécanique totale après le choc.
   Où est *précisément* passée l'énergie mécanique perdue ?
4. Quelle est l'excentricité de la nouvelle trajectoire ?
5. On dit qu'un astéroïde d'environ 10 km de diamètre s'est écrasé sur Terre il y a 65 millions d'années.
   En introduisant des valeurs numériques plausibles, déterminer l'influence qu'elle a pu avoir sur l'excentricité de la trajectoire terrestre.

Colonisation interplanétaire

L'étoile Soleillor de masse $M_{\rm S} = 2.10^{30}$ kg possède deux planètes habitées en orbite circulaire : Marsupili de masse $M_{\rm M} = 6.10^{23}$ kg, de rayon $R_{\rm M} = 4\,300$ km, de trajectoire de rayon $d_{\rm M} = 228$ Gm et Terrific, de masse $M_{\rm T} = 6.10^{24}$ kg, de rayon $R_{\rm T} = 6\,400$ km, de trajectoire de rayon $d_{\rm T} = 150$ Gm. On suppose le référentiel lié à Soleillor galiléen, ains que, à proximité d'un astre, le référentiel lié à cet astre.

1. Qu'entend-t-on précisément par « on suppose que le référentiel lié à un astre galiléen ***à proximité*** de cet astre » ?
2. Calculer la période de révolution et la vitesse moyenne de Marsupili et Terrific.
3. Les habitants de Marsupili, les Marsupilamis, veulent observer les belliqueux Terrifiques : ils décident d'envoyer un vaisseau spatial de 4 tonnes grâce à un ressort de longueur au repos 1 km qu'ils compriment à 100 m.
   (a) Calculer la vitesse de libération (on néglige tout frottement avec l'atmosphère).
   (b) Comparer l'énergie cinétique du vaisseau avec la variation d'énergie potentielle gravitationnelle lors de la poussée.
   (c) En déduire la raideur K minimale permettant la mise en orbite du vaisseau spatial.
4. À 100 000 km de Terrific, le vaisseau se déplace à une vitesse de 2 km.s^{-1} dans le référentiel lié à Terrific. Les ingénieurs Marsupilamis, toujours là pour donner des Conseils Pragmatiques pour les Grands Evènements, préviennent que le vaisseau passera à 10 000 km de Terrific.

   Quelle sera alors la vitesse du vaisseau ?
5. Une fois en orbite autour de Terrific, un module de reconnaissance est envoyé. Ce module se positionne en vol stationnaire à 7 m de la surface. Les Marsupilamis (noirs et jaunes) voient alors des êtres blancs et noirs broutant de l'herbe. Pour prendre contact avec ceux qu'ils estiment être des terrifiques, ils décident de sauter sur le sol et d'amortir leur choc avec leur queue ressort de longueur 1 m.

   Sachant qu'un guerrier entraîné peut se tenir sur sa queue à trois-quart de hauteur de celle-ci sur Marsupili, pensez-vous qu'il risque de se blesser en sautant du module de reconnaissance ?

CHAMP DE PESANTEUR

On modélise la Terre par une sphère de rayon R_0 homogène et de masse volumique μ_0.

1. On suppose que le champ de pesanteur terrestre est uniquement dû à la gravitation.

   Justifier soigneusement que le théorème de GAUSS de l'électrostatique s'applique au champ de pesanteur terrestre.

   Calculer g_0 à la surface de la Terre.
2. Quel terme faut-il rajouter si l'on considère le caractère non galiléen du référentiel terrestre ?

   Justifier le fait qu'on l'ait négligé.
3. Quel terme faudrait-il prendre en compte pour affiner davantage ?
4. On suppose un défaut d'homogénéité de la Terre : dans une sphère de rayon r centrée en C située à la profondeur $h > r$ la masse volumique est de $\mu_1 < \mu_0$.

   Quel est alors la variation $\dfrac{\delta g}{g_0}$ du champ de pesanteur en A situé à la surface de la Terre à la verticale de C ?

Comète

On considère l'orbite terrestre de rayon R_0. On note M_0 la masse de la Terre et M_S celle du Soleil.

- Calculer la vitesse v_0 de la Terre, son énergie cinétique, son énergie mécanique et son moment cinétique σ_0

Une comète de masse m_c coupe l'orbite terrestre en A et B. Son point le plus proche du Soleil est en $R_0/2$ et sa vitesse vaut alors $2\,v_0$

- Déterminer la nature de la trajectoire
- Montrer que AB est un diamètre de l'orbite terrestre.