

DISSOCIATION DU DIBROME

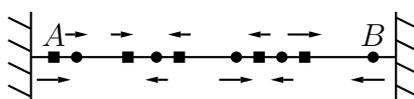
1. Quel est le volume occupé par 1,0 g de brome (molécule Br_2) à 600 °C sous la pression normale (1,0 bar) en supposant que c'est un gaz parfait ? On donne la masse molaire de l'élément Brome : $M = 80 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$. À cette température on peut négliger la dissociation des molécules.
2. Que deviendrait ce volume à 1600 °C, toujours sous la pression normale, en supposant que l'on puisse encore négliger la dissociation ?
3. L'expérience montre que ce volume est en fait 1,195 L.
Montrer que cela peut s'expliquer en considérant qu'une certaine proportion des molécules Br_2 s'est dissociée en atomes Br.
Calculer le coefficient de dissociation (proportion des molécules dissociées).

VITESSE DE LIBÉRATION

1. Calculer numériquement à la surface de la Terre et de la Lune, pour une température $T = 300 \text{ K}$, la vitesse de libération v_ℓ et la vitesse quadratique moyenne v^* pour du dihydrogène et du diazote. Commenter.
Données : constante de gravitation universelle : $G = 6,64 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$; rayon de la Terre : $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$; rayon de la Lune : $R_L = 1,8 \cdot 10^6 \text{ m}$; masse de la Terre : $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; masse de la Lune : $M_L = 7,4 \cdot 10^{22} \text{ kg}$; masses molaires : $M_{\text{H}_2} = 2,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $M_{\text{N}_2} = 28 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$; constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.
2. Donner une valeur approchée de la valeur que devrait avoir la température pour que le diazote, constituant majoritaire de l'atmosphère terrestre, s'échappe quantitativement de l'atmosphère terrestre.

ENSEMBLE DE PARTICULES

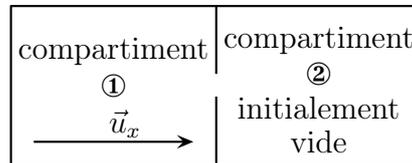
1. Deux particules A et B , de masses m_A et m_B subissent un choc frontal élastique, c'est-à-dire un choc lors duquel l'énergie cinétique totale est conservée. L'ensemble du mouvement (avant et après le choc) se fait sur le même axe horizontal sans frottement.
 - (a) Montrer que la quantité de mouvement du système $\mathcal{S} = \{ A + B \}$ est conservée lors du choc.
 - (b) Déterminer la variation d'énergie cinétique ΔE_c de A au cours du choc en fonction des vitesses initiales.
2. Un très grand nombre de particules de masses m_A et m_B sont placées alternativement le long d'un axe horizontal sur lequel elles se déplacent sans frottement. Les deux particules extrêmes rebondissent sur les extrémités en conservant leur énergie cinétique.



En admettant qu'au bout d'un temps suffisamment long la moyenne du produit $v_A v_B$ est nul (*i.e.* $\langle v_A v_B \rangle = 0$), montrer que, quelles que soient les conditions initiales, l'énergie cinétique moyenne est identique pour les deux types de particules.

EFFUSION GAZEUSE

Le récipient de la figure ci-dessous est constitué de deux compartiments de même volume V maintenus à la température T .



À l'instant $t = 0$, une mole (c'est-à-dire \mathcal{N}_A molécules) d'un gaz parfait remplit le compartiment ①, le compartiment ② est vide et on perce un petit trou de section s entre les deux compartiments. On étudie le passage du gaz entre le compartiment ① et le compartiment ②, phénomène que l'on appelle *effusion gazeuse*.

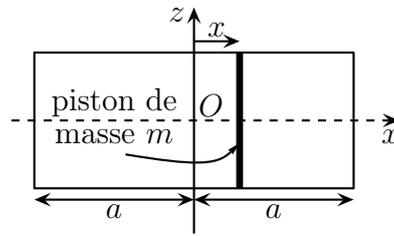
On note $N_1(t)$ et $N_2(t)$ les nombres de molécules dans les compartiments ① et ②. Soit $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ un trièdre cartésien dont \vec{u}_x est la normale au trou de section s . On adopte pour le gaz parfait le modèle *simplifié* suivant :

- La norme $\|\vec{v}\|$ de toutes les molécules est identique, égale à la vitesse quadratique moyenne v^* ;
- dans tout élément de volume $d\tau$, les vecteurs vitesses des molécules sont parallèles à l'une des directions de vecteurs directeurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, -\vec{u}_x, -\vec{u}_y, -\vec{u}_z$, avec un sixième des molécules dans chacune de ces six directions.

1. Établir l'expression du nombre $dN_{1 \rightarrow 2}$ de molécules contenues dans le compartiment ① à l'instant t et traversant la surface s vers le compartiment ② entre les instants t et $t + dt$. Même question pour le nombre $dN_{2 \rightarrow 1}$ de molécules contenues dans le compartiment ② à l'instant t et traversant s vers le compartiment ① entre les instants t et $t + dt$.
2. En déduire les expressions de $\frac{dN_1(t)}{dt}$ et $\frac{dN_2(t)}{dt}$ en fonction de N_1, N_2, s, v^* et V .
3. Établir les expressions de $N_1(t)$ et $N_2(t)$. Commenter les valeurs limites de N_1 et N_2 . Faire apparaître une constante de temps τ caractéristique du phénomène observé et proposer une application numérique. Comment pourrait-on accéder expérimentalement aux variations de $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en fonction du temps t ?
4. Comment varie τ avec la masse des molécules ? L'hydrogène H possède un isotope utilisé pour la fusion thermonucléaire, le deutérium D dont le noyau est constitué d'un proton et d'un neutron. Expliquer brièvement comment on peut enrichir en dideutérium D_2 un mélange de dihydrogène H_2 et de dideutérium D_2 par effusion gazeuse.

BIFURCATION DANS UN SYSTÈME THERMOMÉCANIQUE

Un tube cylindrique horizontale d'axe (Ox) , de section droite S et de longueur $2a$ est séparé en deux compartiments par un piston de masse m dont on repère la position par rapport au point O par son abscisse x (cf. figure ci-contre). Chaque compartiment contient une mole d'un gaz parfait maintenu en équilibre thermodynamique à la température T constante.

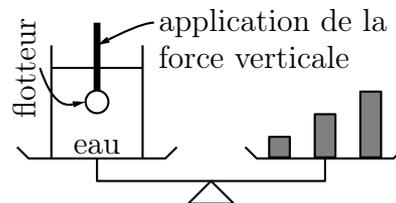


1. Le tube est fixe. Étudier les petits mouvements du piston au voisinage de la position d'équilibre $x = 0$.
2. On fait tourner le tube à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe vertical (Oz). Déterminer les positions d'équilibre du piston dans le référentiel tournant lié au tube et discuter leur stabilité suivant les valeurs de ω ; faire apparaître une vitesse angulaire critique ω_c .

BALANCE D'ARCHIMÈDE

Sur les plateaux d'une balance dont les fléaux ont même longueur sont posés d'un côté un bécber rempli d'eau de masse volumique ρ et de l'autre des masses marquées m assurant l'équilibre de la balance.

On plonge dans l'eau du bécber, un flotteur homogène de volume V et de masse volumique ρ^* puis on l'y maintient en exerçant sur une tige solidaire de masse négligeable une force \vec{F} . On modifie les masses marquées de Δm pour retrouver l'équilibre.



1. Indiquer, sans calcul, le signe de Δm .
2. Quel aurait été le signe de Δm avec, non pas un flotteur, mais une bille de plomb, elle aussi maintenue entre deux eaux?
3. Calculer Δm et la force \vec{F} en fonction des grandeurs caractéristiques du problème.
En déduire un mode opératoire pour mesurer le volume V .

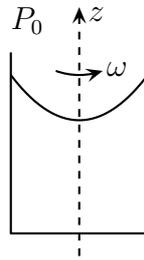
CYLINDRE FLOTTANT

Un demi-cylindre de rayon R et de longueur h flotte à la surface d'un liquide de masse volumique ρ (l'axe du cylindre étant parallèle à la surface de l'eau).

1. À l'équilibre, il est enfoncé de $\frac{R}{2}$ dans celui-ci. Quelle est sa masse m ?
2. Quelle est la période des petites oscillations verticales de l'objet?

VASE TOURNANT

Le récipient cylindrique de rayon R ci-dessous est rempli d'eau sur une hauteur h et plongé dans une atmosphère où la pression P_0 est uniforme. Il est mis en rotation à une vitesse angulaire constante ω autour de son axe vertical (Oz) et, au bout de quelques instants, on atteint un état d'équilibre dans le référentiel tournant.



Déterminer dans cet état l'équation de la surface libre de l'eau. On pourra penser à trouver le champ de pression à l'intérieur du fluide dans le référentiel non galiléen tournant autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω .

ÉTUDE D'UN BALLON ATMOSPHÉRIQUE

Le modèle de l'atmosphère à gradient thermique constant permet d'établir qu'entre 0 et 11 km d'altitude, la pression et la température atmosphériques varient en fonction de l'altitude z suivant les relations :

$$P(z) = P_0 (1 - Az)^\alpha \quad \text{et} \quad T(z) = T_0 (1 - Az) \quad \text{avec} \quad A = C^{\text{te}} \quad \text{et} \quad \alpha = C^{\text{te}}$$

Un ballon sonde gonflé à l'hydrogène est assimilé à une sphère *indéformable* de diamètre D . La masse totale de l'enveloppe (non gonflée), de la nacelle et des appareils est m et cet ensemble a un volume négligeable devant celui de la sphère.

Par ailleurs l'hydrogène est constamment en équilibre thermique avec l'air atmosphérique. À l'altitude $z = 0$, les masses volumiques de l'air et de l'hydrogène, assimilés tous deux à des gaz parfaits sont respectivement ρ_0 (sous la pression P_0) et ρ'_0 (sous une pression de gonflage P'_0).

1. Exprimer la masse volumique $\rho(z)$ de l'air en fonction de l'altitude z .
 2. Exprimer la résultante des actions qui s'exercent sur le ballon en fonction de l'altitude et en déduire :
 - (a) la masse maximale M_0 que le ballon peut élever du sol ;
 - (b) la masse maximale M_1 que le ballon peut élever à une altitude de 11 km.
- Données* : $P_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Pa ; $\rho_0 = 1,225$ kg.m⁻³ ; $P'_0 = 1,127 \cdot 10^5$ Pa ; $\rho'_0 = 0,094$ kg.m⁻³ ; $A = 2,26 \cdot 10^{-5}$ m⁻¹ ; $\alpha = 5,25$; $D = 4,0$ m ; $g = 9,81$ m.s⁻², indépendant de z .
3. Un ballon sonde identique au précédent est équipé d'une soupape différentielle qui maintient constante la différence $\Delta P = \Delta P_0$ entre la pression P' de l'hydrogène et la pression P de l'air atmosphérique, toutes les autres données sont inchangées.
 - (a) Exprimer la différence de pression qui s'exerce sur l'enveloppe du ballon en fonction de l'altitude.
 - (b) Exprimer la masse volumique ρ' de l'hydrogène en fonction de l'altitude z à partir de ρ'_0 , P_0 , ΔP et des constantes A et α .
 - (c) Résoudre pour ce nouveau ballon les questions posées en 2a et 2b.

- (d) Quelle masse d'hydrogène a du être dégazée pour élever la masse maximale à l'altitude de 11 km ?

MESURE DE LA CONSTANTE DE BOLTZMANN

Dans une expérience historique, Jean PERRIN a pu observer au microscope la répartition à l'équilibre de petites sphères de latex de rayon $a = 0,21 \mu\text{m}$ et de masse volumique $\rho = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Pour différentes altitudes équidistantes de $d = 30 \mu\text{m}$, il mesurait à une température $T = 293 \text{ K}$, des concentrations C proportionnelles aux nombres N indiqués dans le tableau ci-dessous :

z	$5 \mu\text{m}$	$35 \mu\text{m}$	$65 \mu\text{m}$	$95 \mu\text{m}$
N	100	47	23	12

Vérifier que ces mesures sont compatibles avec une loi statistique de BOLTZMANN de la forme $C(z) = C_0 \exp\left(-\frac{m g z}{k_B T}\right)$ et en déduire une mesure de la constante de BOLTZMANN k_B .

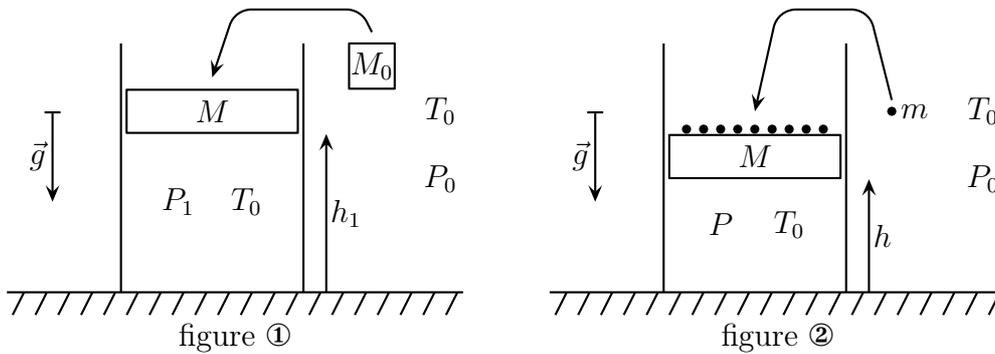
CALORIMÈTRE

1. Un calorimètre contient 95,0 g d'eau à 20,0 °C. On ajoute 71,0 g d'eau à 50,0 °C. Quelle serait la température d'équilibre si on pouvait négliger la capacité thermique du vase et de ses accessoires ?
2. La température d'équilibre observée est 31,3 °C. En déduire la « valeur en eau » du vase et des accessoires, c'est-à-dire la masse d'eau à laquelle le vase et les accessoires sont équivalents du point de vue thermique.
3. Le même calorimètre contient maintenant 100 g d'eau à 15,0 °C. On y plonge un échantillon métallique pesant 25,0 g sortant d'une étuve à 95,0 °C. La température d'équilibre étant 16,7 °C, calculer la capacité thermique massique du métal.

Donnée : pour l'eau $c_e = 4,18 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

CYLINDRE ET PISTON

De l'air, à la température T_0 , est contenu dans un cylindre aux parois diathermanes, fermé par un piston également diathermane, de section S et de masse M . L'ensemble est placé dans l'air à la pression P_0 . À l'équilibre, le piston se trouve à la distance h_1 du fond du récipient. L'air du cylindre subit une transformation monotherme, car il n'est en contact thermique qu'avec l'atmosphère dont la température T_0 est supposée constante. Dans l'état initial, l'air enfermé dans le cylindre est dans l'état (P_1, T_0, h_1) .

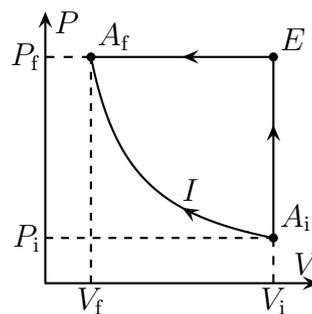


- On pose sur le piston la masse M_0 (cf. schéma ①). Après un certain temps, l'air du récipient se retrouve à la température T_0 et le piston se stabilise à la hauteur h_2 .
Calculer le travail W_T reçu par l'air intérieur ainsi que l'état final (P_2, T_0, h_2) . Faire l'application numérique.
- On pose successivement sur le piston des masses $m \ll M_0$ en attendant à chaque fois que la température de l'air intérieur se stabilise (à la valeur T_0) et que le piston s'immobilise; on répète l'opération jusqu'à ce que la surcharge totale soit égale à M_0 (cf. figure ②).
Calculer le travail W'_T reçu ainsi que l'état final (P_2, T_0, h'_2) . Faire l'application numérique.
Commentaire.

Données : $P_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa; $g = 9,81$ m.s⁻²; $S = 0,10$ m²; $M = M_0 = 100$ kg; $h_1 = 1,0$ m; $T_0 = 300$ K; $\gamma = 1,4$.

DIFFÉRENTS CHEMINS

On comprime une mole de dioxygène, assimilé à un gaz parfait diatomique d'une température initiale $T_i = 300$ K et d'une pression initiale $P_i = 1,00$ bar jusqu'à une température finale $T_f = T_i$ et une pression finale $P_f = 5,00$ bar. La compression peut se produire de deux façons différentes : la première $A_i I A_f$ est isotherme et la seconde suit le chemin $A_i E A_f$.



- Calculer le travail que le gaz reçoit au cours de l'évolution $A_i I A_f$.
En déduire le transfert thermique reçu.
- Mêmes questions pour l'évolution $A_i E A_f$.

CYCLE DE LENOIR

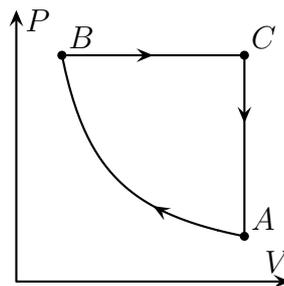
Un des premiers moteurs à deux temps à combustion interne fonctionne de la manière suivante :

- l'air et le carburant sont admis dans le cylindre; à la fin de l'admission, l'air se trouve dans l'état $A (P_1, V_1, T_1)$;
 - la combustion du carburant (phase d'explosion) provoque une augmentation brutale de la pression à volume constant et fournit un transfert thermique Q_1 ; à la fin de cette étape, les gaz résiduels sont dans l'état $B (P_2, V_1, T_2)$;
 - ils se détendent ensuite de manière adiabatique jusqu'à l'état $C (P_1, V_2, T_3)$, les paramètres étant en permanence connus (état d'équilibre thermodynamique interne);
 - enfin les gaz s'échappent du cylindre à pression constante P_1 et un nouveau cycle commence.
- En négligeant la quantité de matière de carburant liquide, on assimilera l'air et les gaz brûlés à un gaz parfait dont le coefficient $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ vaut $\gamma = 1,4$.

1. Représenter, dans le diagramme de WATT, le cycle de transformation $ABCA$ du gaz contenu dans le cylindre.
2. Calculer le travail W reçu par le piston au cours d'un cycle en fonction de R (constante des gaz parfaits), γ et des températures T_1 , T_2 et T_3 .
3. Le rendement r est défini par $r = -\frac{W}{Q}$ où Q est le transfert thermique reçu lors de la combustion. Exprimer r d'abord en fonction de γ , T_1 , T_2 et T_3 puis en fonction de γ et du rapport $a = \frac{V_2}{V_1}$.
4. Calculer r pour $a = 4$.

CYCLE D'UN GAZ RÉEL

Une mole de gaz réel monoatomique contenue dans un cylindre décrit de manière quasi-statique et mécaniquement réversible le cycle $ABCA$ représenté dans le diagramme de Watt par la figure ci-contre. L'évolution AB est isotherme à la température $T_A = 301$ K; au point A on donne $V_A = 5,00$ L et au point B , $V_B = 0,500$ L. L'évolution BC est isobare à la pression P_B ; l'évolution CA est isochore.



Ce gaz est décrit par son équation d'état et l'expression de son énergie interne :

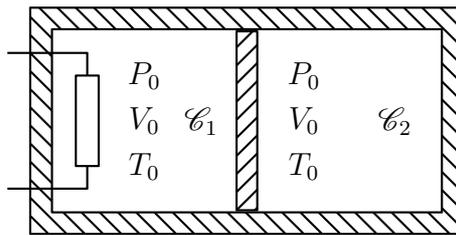
$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right) V = n R T \quad \text{et} \quad U = \frac{3 n R T}{2} - \frac{a n^2}{V} \quad \text{avec} \quad a = 0,135 \text{ m}^6 \cdot \text{Pa} \cdot \text{mol}^{-2}$$

1. Calculer P_A , P_B , P_C et T_C .
2. Calculer le travail et le transfert thermique reçus par le gaz au cours de chacune des évolutions AB , BC et CA . Calculer leurs sommes et commenter.

Donnée : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

BILANS ÉNERGÉTIQUES

Un cylindre horizontal, clos, de volume invariable, est divisé en deux compartiments par un piston mobile sans frottement. Les parois du cylindre et le piston sont imperméables aux transferts thermiques. À l'état initial, les deux compartiments \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 contiennent un même volume $V_0 = 2,0 \text{ L}$ d'un gaz parfait monoatomique à la pression $P_0 = 1,0 \text{ bar}$ et à la température $T_0 = 273 \text{ K}$. Le rapport des capacités thermiques vaut $\gamma = \frac{5}{3}$.

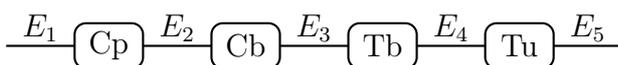


À l'intérieur du compartiment \mathcal{C}_1 , une résistance élève la température de T_0 à T_1 .

- Justifier que l'on puisse supposer que le gaz contenu dans le compartiment \mathcal{C}_2 évolue de manière quasi-statique.
- Déterminer les pressions, volumes et températures des compartiments \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 lorsque la pression du gaz contenu dans \mathcal{C}_1 vaut $P_1 = 3 P_0$.
- Calculer, pour chacun des deux compartiments, la variation d'énergie interne ainsi que le travail et le transfert thermique reçus.

TURBORÉACTEUR

Un turboréacteur destiné à la propulsion d'avion est schématisé sur la figure suivante : l'air est comprimé dans le compresseur calorifugé (Cp) où il évolue de l'état E_1 à l'état E_2 ; puis l'air traverse une chambre de combustion (Cb) où il subit un réchauffement isobare de l'état E_2 à l'état E_3 ; puis il se détend dans une turbine calorifugée (Tb) où il évolue de l'état E_3 à l'état E_4 ; enfin l'air traverse une tuyère (Ty), conduite de section variable où il acquiert une vitesse importante et évolue de l'état E_4 à l'état E_5 .



État	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
P (bar)	1,0	5,0	5,0	2,5	1,0
T (K)	288	$T_2 = ?$	1123	955	735

Les données concernant les différents états sont résumées dans le tableau ci-dessus.

L'installation fonctionne en régime stationnaire. On néglige l'énergie potentielle de pesanteur dans toute l'installation. On néglige l'énergie cinétique de l'air partout sauf dans l'état E_5 à la sortie de la tuyère, où la vitesse de l'air vaut c_5 . L'air est assimilé à un gaz parfait de capacité thermique massique à pression constante $c_P = 1,0 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$. On rappelle que $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

1. Soit \mathcal{S} le système ouvert constitué par le gaz contenu dans un étage quelconque du turboréacteur et \mathcal{S}^* le système fermé associé constitué à l'instant t par \mathcal{S} et par la masse dm_e d'air qui va rentrer dans l'étage entre les instants t et $t + dt$ et constitué à l'instant $t + dt$ par \mathcal{S} et par la masse dm_s qui est sortie de l'étage entre les instants t et $t + dt$.

En appliquant le premier principe à \mathcal{S}^* , montrer que l'on a $\Delta h + \frac{1}{2}\Delta(c^2) = q + w$ où h est l'enthalpie massique, c est la vitesse de l'air, q est le transfert thermique reçu par unité de masse et w est le travail (autre que pneumatique) reçu par une unité de masse.

2. Déterminer la vitesse c_5 à la sortie de la tuyère.
3. Exprimer les travaux w_{Cp} et w_{Tb} reçus par unité de masse lors du passage respectivement dans le compresseur et dans la turbine en fonction des températures T_1, T_2, T_3 et T_4 .
Sachant que le travail récupéré dans la turbine sert exactement à entraîner le compresseur, calculer T_2 .
4. Déterminer le transfert thermique q_{Cb} reçu par unité de masse d'air lors du passage dans la chambre de combustion.

5. En déduire le rendement thermodynamique du turboréacteur défini par $r = \frac{\frac{1}{2}c_5^2}{q_{Cb}}$.

CALCUL D'ENTROPIE

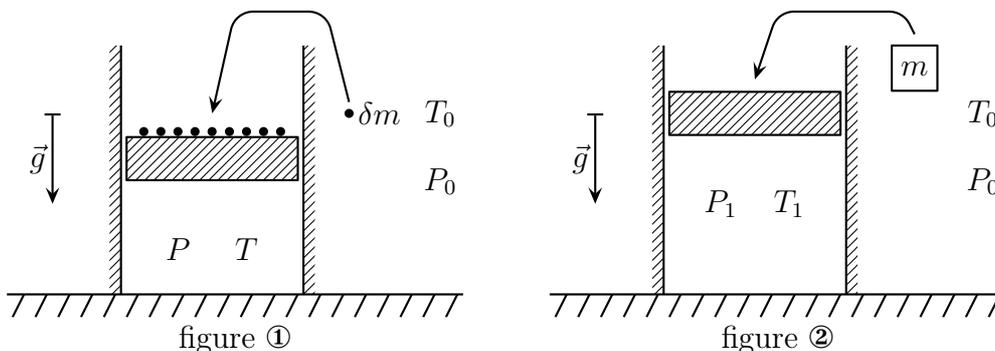
La capacité thermique molaire du brome sous la pression constante de 1 atm est donnée par la formule suivante : $C_m = \lambda_1 + \lambda_2 T + \frac{\lambda_3}{T^2}$ où :

$$\lambda_1 = 22,4 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1} ; \lambda_2 = 9,88.10^{-3} \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-2} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = -1,84.10^5 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}$$

Sachant que l'entropie molaire pour 1 atm et 298 K est $23,8 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, calculer l'entropie du chrome sous 1 atm à 900 K.

BILANS ENTROPIQUES

Un cylindre, de section $s = 10 \text{ cm}^2$, isolé thermiquement et fermé par un piston de masse négligeable, contient n moles d'air à la température $T_1 = 293 \text{ K}$. Initialement, son volume est $V_1 = 5,0 \text{ L}$ et la pression est $P_1 = 1,0 \text{ bar}$. L'air est assimilé à un gaz diatomique de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$.



1. Calculer n , la capacité thermique molaire à volume constant de l'air supposé parfait ainsi que sa capacité thermique massique.

2. On procède, de façon infiniment lente, en déposant progressivement des masses δm très faibles de telle sorte que l'on atteigne une valeur totale des masses déposées égale à $m = 10$ kg, en passant par une suite d'états d'équilibre thermodynamique (cf. figure ①.)
 - (a) Déterminer les valeurs de P_2/P_1 et de T_2/T_1 où P_2 et T_2 sont respectivement la pression et la température de l'air une fois la totalité des masses déposées.
 - (b) Effectuer le bilan entropique et calculer les différents termes de ce bilan.
3. À partir du même état d'équilibre initial que précédemment, on dépose brusquement sur le piston une masse $m = 10$ kg. L'air est comprimé sous l'action du piston. Comme le gaz est en fait réel, le piston se stabilise finalement à une certaine hauteur, lorsque sa pression atteint une valeur P_3 et sa température une valeur T_3 (cf. figure ②.)
 - (a) Écrire le bilan énergétique et en déduire les valeurs de P_3/P_1 et de T_3/T_1 en admettant que son équation d'état soit celle d'un gaz parfait.
 - (b) Établir le bilan entropique et calculer les différents termes de ce bilan.

SENS DE PARCOURS D'UN CYCLE

On considère un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1,40$ constant décrivant le cycle $ABCA$ suivant : l'évolution AB est adiabatique et réversible ; l'évolution BC est isotherme et réversible ; l'évolution CA est isochore. Les évolutions BC et CA ont lieu au contact d'une source dont la température est T_B . On donne $P_A = 1,0$ bar ; $V_A = 2,0$ L ; $T_A = 290$ K ; $V_B = 1,0$ L ; $R = 8,314$ J.K⁻¹.mol⁻¹.

1. Tracer le cycle dans un diagramme (P, V).
2. Calculer T_B .
3. Calculer l'entropie créée pour un cycle $ABCA$.
4. Quel est alors le signe du travail reçu sur un cycle ?

MACHINE À VAPEUR

Dans une machine à vapeur, au cours de la phase motrice, une mole de vapeur d'eau se détend dans un cylindre calorifugé et fermé de l'état A ($P_A = 40$ bar, $T_A = 773$ K) jusqu'à l'état B ($P_B = 1,0$ bar, $T_B = 373$ K).

On extrait des tables thermodynamiques les valeurs ci-dessous pour le volume molaire V_m , l'énergie interne molaire U_m et l'entropie molaire S_m .

	V_m (m ³ .mol ⁻¹)	U_m (kJ.mol ⁻¹)	S_m (en kJ.K ⁻¹ .mol ⁻¹)
A	$1,556 \cdot 10^{-3}$	55,77	0,1275
B	$3,060 \cdot 10^{-2}$	45,08	0,1325

1. (a) Calculer le travail W reçu par la vapeur d'eau au cours de l'évolution AB .
L'évolution est-elle réversible ?
- (b) On suppose que seule la première colonne du tableau précédente est connue. On modélise alors l'évolution AB par une évolution polytropique d'indice k .
Déterminer k et en déduire une estimation W' du travail W ; commenter.
2. On réalise une détente réversible entre les mêmes états A et B , représentée par une évolution rectiligne dans un diagramme (T, S).

- (a) Représenter la transformation dans le diagramme (T,S) et montrer que l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses vaut Q^* , transfert thermique reçu sur cette transformation. Dans ce diagramme, T est en ordonnée et S en abscisse.
- (b) Déterminer le transfert thermique Q^* et le travail W^* au cours de cette détente. Comparer W^* avec l'estimation W' obtenue à la question précédente et commenter.

FONCTION CARACTÉRISTIQUE

Soit un système constitué de dioxyde de carbone. Ce gaz est caractérisé par la fonction $S(U,V)$ suivante :

$$S(U,V) = S_0 + n C_{V,m} \ln \left(\frac{U + n^2 a/V}{U_0 + n^2 a/V_0} \right) + n R \ln \left(\frac{V - n b}{V_0 - n b} \right)$$

où S_0 , U_0 et V_0 sont les valeurs respectives de l'entropie, de l'énergie et du volume dans un état de référence arbitraire donné.

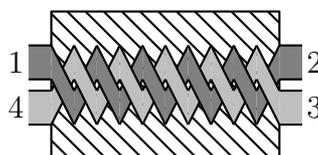
Données :

- $C_{V,m}$ est la capacité calorifique molaire à volume constant du dioxyde de carbone : $C_{V,m} = 28,50 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- a et b sont des constantes propres au dioxyde de carbone : $a = 0,37 \text{ J.m}^3.\text{mol}^{-2}$ et $b = 4,30.10^{-5} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$
- R est la constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

1. (a) On rappelle que la définition de la température thermodynamique est $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$.
Montrer que cette définition permet de déterminer l'expression de l'énergie interne du gaz.
- (b) On rappelle que la définition de la pression thermodynamique est $\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T}$.
Montrer que cette définition permet de déterminer l'équation d'état du gaz.
2. Deux moles de ce gaz subissent une détente de Joule – Gay-Lussac d'un volume initial $V_A = 5,00 \text{ dm}^3$ et d'une température initiale $T_A = 293,00 \text{ K}$ à un volume final $V_B = 2 V_A$.
 - (a) Calculer les variations de température et d'entropie correspondantes.
 - (b) Comparer les résultats obtenus à ceux de la détente de deux moles de gaz parfait de même capacité calorifique molaire à volume constant dans les mêmes conditions initiales.

ÉCHANGEUR THERMIQUE

On considère l'échangeur thermique (ET) représenté ci-dessous. Il est constitué de deux circulations parallèles d'air : dans l'une l'air évolue de l'état E_1 à l'état E_2 et dans l'autre, l'air évolue de l'état E_3 à l'état E_4 . Ces états sont caractérisés par la même pression $P = 1,0 \text{ bar}$ et des températures respectives T_1 , T_2 , T_3 et T_4 avec $T_3 \neq T_1$.



L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ et de coefficient $\gamma = 1,40$. On donne $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

L'échangeur thermique constitue un système ouvert (Σ^*) à deux entrées et deux sorties ; l'installation fonctionne en régime stationnaire avec un débit massique identique dans les deux circulations. On néglige les variations d'énergie mécanique. On suppose que l'échangeur thermique est parfaitement calorifugé et que son fonctionnement est réversible.

On associe au système ouvert (Σ^*) le système fermé (Σ) tel que : à l'instant t , (Σ) est constitué de (Σ^*) et des masses dm_1 et dm_3 qui vont entrer dans (Σ^*) par chacune des entrées pendant la durée dt ; à l'instant $t + dt$, (Σ) est constitué de (Σ^*) et des masses dm_2 et dm_4 qui sont sorties de (Σ^*) pendant la durée dt .

1. En appliquant le premier et le deuxième principe de la thermodynamique au système (Σ), établir deux relations entre les températures T_1 , T_2 , T_3 et T_4 .
2. En supposant les températures T_1 et T_3 connues, déterminer les températures T_2 et T_4 et commenter.
3. Dans un échangeur thermique réel, on a $T_1 = 350 \text{ K}$, $T_2 = 290 \text{ K}$, $T_3 = 280 \text{ K}$ et $T_4 = 340 \text{ K}$. Calculer l'entropie créée lors du transfert d'une masse $m = 1,0 \text{ kg}$ et commenter.
4. En réalité l'échangeur thermique n'est pas parfaitement calorifugé, de telle sorte qu'il cède de l'énergie par transfert thermique à l'atmosphère, considérée comme un thermostat dont la température est $T_0 = 293 \text{ K}$. On a alors $T_1 = 350 \text{ K}$, $T_2 = 290 \text{ K}$, $T_3 = 280 \text{ K}$ et $T_4 = 330 \text{ K}$. Calculer le transfert thermique Q algébriquement reçu par l'échangeur thermique et commenter. Calculer l'entropie créée et commenter.

PIÈCE HUMIDE

On appelle « humidité relative » ou « degré hygrométrique » d'une atmosphère le rapport de la pression partielle de la vapeur d'eau à la pression de vapeur saturante de l'eau à la même température.

Calculer la masse d'eau contenue dans l'air d'une pièce de $5,0 \text{ m} \times 4,0 \text{ m} \times 3,0 \text{ m}$ à $20 \text{ }^\circ\text{C}$ avec un degré hygrométrique de 80% .

À $20 \text{ }^\circ\text{C}$, $P_s(\text{H}_2\text{O}) = 1,75 \text{ cmHg} = 2,33 \text{ kPa}$.

SURFUSION

Soit un récipient calorifugé contenant une masse $m = 10,0 \text{ g}$ de phosphore liquide surfondu à la température $T = 34 \text{ }^\circ\text{C}$ sous la pression atmosphérique.

1. On fait cesser la surfusion (en introduisant un germe de cristal ou en remuant un peu le récipient) et on observe un nouvel état d'équilibre diphasé du phosphore. Déterminer la quantité de masse respective de chacune des phases.
2. Calculer la variation d'entropie correspondante.
3. Quel serait l'état final si on faisait cesser la surfusion d'une même masse de phosphore initialement à la température $T' = 17,5 \text{ }^\circ\text{C}$?

On donne pour le phosphore : $T_f = 317 \text{ K}$, $\ell_f(T_f) = 20,9 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1}$ sous la pression atmosphérique et $c_{P,\text{liq}} = 0,795 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$ (valeur supposée indépendante de T dans l'intervalle de température considéré) et $c_{P,\text{sol}} = 0,840 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

VAPORISATION D'EAU LIQUIDE

On vaporise une masse $m = 1,0$ g d'eau liquide de deux manières différentes :

→ la masse m est enfermée à $T_0 = 100$ °C sous la pression atmosphérique P_0 , dans un cylindre fermé par un piston.

Par déplacement lent du piston, on augmente le volume à température constante et l'on s'arrête dès que toute l'eau est vaporisée. Le volume est alors égal à $V_0 = 1,67$ L.

→ On introduit rapidement la masse m d'eau liquide initialement à $T_0 = 100$ °C dans un récipient fermé de même température, de volume V_0 , initialement vide et en contact avec un thermostat de température T_0 .

L'enthalpie massique de vaporisation de l'eau est $\ell_v = 2,25 \cdot 10^6$ J.kg⁻¹.

1. Pour chacune des deux transformations, calculer les variations d'énergie interne, d'enthalpie et d'entropie de l'eau.
2. Pour chacune des deux transformations, calculer le transfert thermique reçu, le travail reçu et l'entropie créée.

CALORIMÈTRE

L'exercice a pour but de décrire une méthode de détermination de l'enthalpie de fusion de l'eau.

1. Dans un calorimètre de valeur en eau $M = 20$ g, on dispose une quantité d'eau liquide de masse $m_1 = 200$ g à la température ambiante $\theta_1 = 25,0$ °C. Puis on ajoute une quantité d'eau solide de masse $m_2 = 10$ g à la température $\theta_2 = -5,0$ °C. Lorsque l'équilibre thermique est réalisé, on repère la valeur de la température finale, $\theta_f = 20,4$ °C.

(a) On néglige les pertes du calorimètre, calculer la valeur de l'enthalpie de fusion de la glace.

On donne la chaleur massique de l'eau liquide $c_\ell = 4,18$ J.g⁻¹.K⁻¹ et celle de l'eau solide $c_s = 2,1$ J.g⁻¹.K⁻¹. On suppose ces quantités constantes sur les intervalles de températures de l'expérience.

(b) En déduire les variations d'entropie de chaque masse d'eau au cours de la transformation. Commenter leurs signes.

2. On suppose maintenant que la puissance $\mathcal{P}_{\text{pertes}}$ des pertes thermiques du calorimètre est constante.

(a) Montrer que l'on peut, en réalisant deux manipulations, déterminer une nouvelle valeur de l'enthalpie de fusion de l'eau. On note Δt l'intervalle de temps nécessaire pour arriver à l'équilibre thermique.

(b) Les résultats des deux mesures sont rassemblées dans le tableau ci-contre, en déduire la nouvelle valeur de ℓ_f .

	θ_1 (°C)	θ_2 (°C)	θ_f (°C)	m_1 (g)	m_2 (g)	Δt (min)
Exp 1	25,0	-5,0	20,4	200	10	5
Exp 2	25,0	0,0	16,3	200	20	5

FORMATION DE LA NEIGE DE CULTURE

La neige de culture est obtenue en pulvérisant de fines gouttes d'eau liquide à $T_1 = 10$ °C dans l'air ambiant à $T_a = -15$ °C. On suppose que cette goutte reçoit, pendant la durée dt , de l'air extérieur un transfert thermique $\delta Q = h(T_a - T(t))s dt$ où s est sa surface. On rappelle que la masse volumique de l'eau est $\rho = 1,0 \cdot 10^3$ kg.m⁻³ et sa capacité thermique massique $c = 4,18$ J.g⁻¹.

- Dans un premier temps la goutte d'eau supposée sphérique (rayon $R = 0,20$ mm) se refroidit en restant liquide.
 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$.
 - En déduire la durée t_1 au bout de laquelle $T(t)$ est égale à $T_0 = -5,0$ °C. Faire l'application numérique avec $h = 65$ W.m⁻².K⁻¹.
- Lorsque la goutte atteint la température de $T_0 = -5,0$ °C, la surfusion cesse : la goutte est partiellement solidifiée et la température devient égale à $0,0$ °C.
 - Calculer la fraction x de liquide restant à solidifier en supposant la transformation très rapide et adiabatique. L'enthalpie massique de fusion de la glace est $\ell_f = 335$ kJ.kg⁻¹.
 - Au bout de combien de temps t_2 la goutte est-elle complètement solidifiée ?

☞ *Remarque.* on préfère parler de « neige de culture » plutôt que de « neige artificielle » pour insister sur le fait que *in fine* la neige obtenue est de la vraie neige, à savoir de l'eau gelée. La neige artificielle fait alors référence à de la neige en plastique utilisée pour les décors de film (par ex. le seigneur des anneaux, la communauté de l'anneau).

POMPE À CHALEUR

On désire maintenir dans un appartement une température constante $T_1 = 290$ K, grâce à une pompe à chaleur utilisant comme source froide un lac de température $T_0 = 280$ K. La température extérieure est uniformément égale à T_0 . Il faut évidemment pour cela dépenser la puissance juste nécessaire pour compenser les pertes par transfert thermique.

- Dans le but d'évaluer ces pertes, on arrête le chauffage, la température de l'appartement étant initialement T_1 . Au bout de 2 heures, la température n'est plus que 285 K. On admet que le transfert thermique perdu pendant la durée dt s'écrit $\delta Q = a C (T - T_0) dt$, C désignant la capacité thermique de l'appartement, T sa température à l'instant t et a une constante.

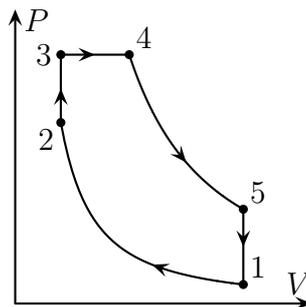
Quel est l'unité de a ?

Calculer a et interpréter.
- Sachant que le coefficient d'efficacité réel de la machine n'est que 40 % de l'efficacité maximale, quelle est la puissance à fournir pour maintenir une température T_1 constante dans l'appartement ?

On donne $C = 1,0 \cdot 10^7$ J.K⁻¹.

CYCLE DIESEL

Alors qu'un cycle DIESEL classique est composé de 2 adiabatiques, d'une isobare (pour la combustion) et d'une isochore, dans les moteurs DIESEL actuels (dits à double combustion), le cycle de l'air est celui représenté sur la figure ci-dessous dans le diagramme de WATT. On a $P_1 = 1,0$ bar, $T_1 = 293$ K, $P_{\max} = 65$ bar et $T_{\max} = T_4 = 2173$ K.



On suppose que l'air est un gaz parfait diatomique, de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$. On donne le taux de compression : $\alpha = \frac{V_1}{V_2} = 19$. Toutes les transformations seront supposées mécaniquement réversibles.

1. Représenter le cycle DIESEL classique dans un diagramme de WATT.
2. Déterminer les types de transformations pour le cycle DIESEL à double combustion.
3. Exprimer, en fonction de γ et des températures T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 des points correspondants sur le diagramme, le rendement r du moteur DIESEL à double combustion.
4. Déterminer numériquement T_2, T_3 et T_5 .

En déduire la valeur de r et comparer avec le rendement de CARNOT.

5. Quelle est, en kJ, le transfert thermique reçue par 1,0 kg d'air au cours de l'évolution entre les points 2 et 4 ?

Quel est le transfert thermique reçue entre les points 5 et 1 ?

En déduire le travail fourni par 1 kg d'air au milieu extérieur au cours d'un cycle.

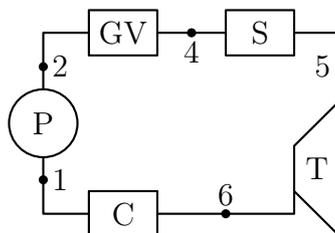
CYCLE D'ERICSSON

De l'air, supposé parfait, parcourt un cycle d'ERICSSON constitué de deux isothermes, de températures respectives T_1 et $T_3 > T_1$ et de deux isobares de pressions P_1 et $P_3 > P_1$. Ce cycle fut appliqué à des moteurs à air destinés à la propulsion navale. On supposera que le cycle est mécaniquement réversible.

1. Représenter le cycle dans un diagramme de WATT.
2. Exprimer les travaux et les transferts thermiques reçus par le fluide au cours des quatre évolutions du cycle, en fonction de T_1, T_3, P_1 et P_3 .
3. En déduire le rendement en fonction de T_1, T_3, P_1 et P_3 .

MACHINE À VAPEUR

La machine à vapeur de WATT présente l'inconvénient de fournir, après la détente, un mélange de vapeur et de liquide. Il s'en suit des pertes thermiques importantes. Pour pallier cet inconvénient et augmenter le rendement, on a recours à une surchauffe de la vapeur. L'installation se compose des éléments suivants :



- une pompe P qui réalise une compression supposée isentropique du fluide ;
- un générateur de vapeur (GV) qui réalise un échauffement et une évaporation. Le fluide est à l'état de liquide juste saturant en 3 et à l'état de vapeur juste saturante en 4 ;
- un surchauffeur (S), qui échauffe la vapeur à pression constante. Cet échauffement est réalisé par échange thermique avec les gaz issus de la combustion ;

- une turbine (T) où le fluide subit une détente adiabatique réversible, sans variation notable d'énergie cinétique, en fournissant un travail mécanique ;
- un condenseur (C) dans lequel le fluide se condense de façon isobare.

1. Déterminer la température T_5 (à la sortie du surchauffeur) telle que le fluide, en fin de détente, soit constitué de vapeur saturante, sans liquide.
2. La condition précédente étant vérifiée, tracer l'allure du cycle sur un diagramme (T,s) . Pourquoi, sur ce diagramme, les points 1 et 2 sont-ils confondus ?
3. Déterminer l'énergie échangée par kilogramme de fluide dans chaque partie de la machine. Calculer le rendement du moteur.

Les pressions de changement d'état sont 1,0 et 50 bar. Les autres données sont à déterminer sur les diagrammes entropique et de MOLLIER de l'eau.

UTILISATION DES DIAGRAMMES

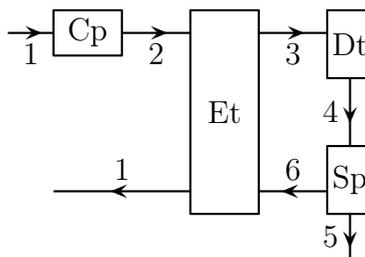
Un récipient fermé et indéformable, de volume $V = 1,00$ L, contient de la vapeur d'eau juste saturante dans l'état initial I ($T_I = 485$ K, $P_I = P_s(T_I) = 20$ bar, $x_{v,I} = 1$). On le met en contact avec un thermostat à la température $T_0 = 373$ K.

Déterminer l'état d'équilibre final F , le transfert thermique échangé par l'eau et l'entropie créée au cours de l'évolution $I \rightarrow F$; commenter.

On déterminera les valeurs utiles à l'aide des diagrammes entropiques et de MOLLIER de la vapeur d'eau.

MACHINE DE LINDE

La machine de LINDE, représentée ci-dessous, est utilisée pour obtenir du diazote liquide à partir de diazote initialement gazeux à la pression $P_1 = 1,0$ bar et la température $T_1 = 290$ K : elle fonctionne en régime stationnaire et les variations d'énergie mécanique sont négligeables.



Le diazote gazeux évolue de manière réversible et isotherme de l'état E_1 ($P_1 = 1,0$ bar ; $T_1 = 290$ K) jusqu'à l'état E_2 ($P_2 = 200$ bar ; $T_2 = 290$ K) dans le compresseur (Cp).

Puis, toujours sous forme vapeur, il traverse un échangeur thermique calorifugé (Et) où il évolue de manière isobare de l'état E_2 à l'état E_3 ($P_3 = 200$ bar ; T_3) en croisant une autre circulation de diazote gazeux évoluant de l'état E_6 à l'état E_1 .

Puis le diazote subit une détente isenthalpique dans le détendeur (Dt) où il évolue de l'état E_3 à l'état E_4 ($P_4 = 1,0$ bar ; $T_4 = 78$ K ; x_4) où il est diphasé avec un titre massique en vapeur x_4 .

À la traversée du séparateur (Sp), le liquide est séparé et recueilli quasi-pur dans l'état E_5 (où $P_5 = 1,0$ bar ; $T_5 = 78$ K ; $x_5 = 0$). La vapeur est récupérée quasi-pure dans l'état E_6 ($P_6 = 1,0$ bar ; $T_6 = 78$ K ; $x_6 = 1$), et traverse ensuite l'échangeur thermique (Et) où elle évolue de l'état E_6 à l'état E_1 en croisant l'autre circulation de diazote gazeux qui évolue de l'état E_2 à l'état E_3 .

Les données concernant les différents stades du diazote sont fournies par le tableau suivant. P est en bar, T en K, h en kJ.kg^{-1} et s en $\text{kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

État	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
P	1,0	200	200	1,0	1,0	1,0
T	290	290	160	78	78	78
h	451	421	$h_3 = h_4$		34	228
s	4,40	2,68	1,76	s_4	0,44	2,96

1. Donner l'expression de h_4 en fonction de h_5 , h_6 et x_4 .
2. On considère le système fermé (Σ) constitué du diazote contenu à l'instant t dans l'échangeur thermique et des masses dm_2 et dm_6 qui vont y entrer entre les instants t et $t + dt$. En faisant le bilan énergétique pour (Σ), établir une relation entre h_1 , h_2 , h_3 , h_6 et x_4 .
3. En déduire la valeur de x_4 , h_4 et s_4 .
4. Comparer s_3 et s_4 . Commenter.
5. En appliquant le premier et le deuxième principe de la thermodynamique à un système fermé bien choisi, calculer le transfert thermique Q et le travail W reçu par l'unité de masse du diazote traversant le compresseur.
6. En déduire la masse de diazote liquide recueillie par heure pour une machine dont la puissance est égale à $\mathcal{P} = 100 \text{ kW}$.

BILANS ÉNERGÉTIQUES ET ENTROPIQUES

La capacité thermique molaire d'un corps pur simple peut s'écrire à très basses températures ($T \ll \theta$) :

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\theta} \right)^3$$

où θ est la température de DEBYE du corps considéré.

On se propose de chauffer un cylindre d'aluminium, pesant $m = 36 \text{ g}$, de 30 K à 45 K. Pour cela, on utilise l'effet JOULE d'un courant d'intensité 0,60 A parcourant une résistance pratiquement constante $R = 2,72 \Omega$ et de capacité thermique négligeable.

1. En notant la capacité thermique massique $c = aT^3$, quelle est l'unité de a ?
Déterminer numériquement a .
2. En précisant clairement le système choisi, faire un bilan des échanges énergétiques.
3. Déterminer la durée de chauffage.
4. Déterminer la variation d'entropie pour le bloc d'aluminium lors de ce processus.

Données : pour l'aluminium $\theta = 428 \text{ K}$ et $M = 27,0 \text{ g.mol}^{-1}$.

ÉVOLUTION POLYTROPIQUE

Un gaz parfait de rapport $\gamma = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}}$ subit une transformation polytropique réversible $PV^k = C^{\text{te}}$.

1. Mettre l'expression du transfert thermique molaire élémentaire reçu sous la forme $\delta Q = C^{(k)}dT$.
2. Commenter les cas particuliers $k = 0, 1, \gamma, \infty$.

NOTION DE RÉVERSIBILITÉ

On considère un solide de masse m , de capacité thermique massique c constante et de température initiale T_i .

1. Le solide est mis en contact avec un thermostat de température T_0 .
 - (a) Calculer la variation d'entropie de l'ensemble { solide + thermostat } supposé thermiquement isolé.
 - (b) Quelle est la signification du signe de cette variation ?
 - (c) Envisager le cas où T_i et T_0 sont des températures très voisines.
2. Le solide précédent est maintenant porté de la température T_i à la température T_f par une transformation qui consiste à le mettre en contact avec un nombre élevé N de thermostats intermédiaires de températures $T_n = T_i + (T_f - T_i)\frac{n}{N}$ pour $n = 1, 2, \dots, N$.
 - (a) Exprimer au moyen d'une somme la variation d'entropie de l'univers correspondant à cette série de transformations.
 - (b) Montrer qu'en prenant N assez grand, on peut rendre cette variation d'entropie arbitrairement petite.

MOTEUR THERMIQUE

On fait fonctionner un moteur thermique réversible entre une source chaude constituée par une masse m_1 d'eau liquide à la température initiale T_1 , une source froide constituée par une masse m_2 d'eau liquide à la température initiale T_2 . Le moteur cesse de fonctionner quand les deux sources sont à la même température. Déterminer alors :

1. la température finale ;
2. le transfert thermique Q_1 fourni par la source chaude ;
3. le transfert thermique Q_2 reçu par la source froide ;
4. le travail W fourni par le moteur.

On supposera que la capacité thermique massique c de l'eau liquide est constante.

MOTEUR THERMIQUE

Un moteur réversible reçoit d'une source chaude Σ_1 le transfert thermique Q_1 et fournit le transfert thermique Q_3 à la source Σ_3 . Le travail W fourni par le moteur sert à faire fonctionner une pompe à chaleur réversible qui pompe le transfert thermique Q'_3 à la source Σ_3 et fournit le transfert thermique Q_2 à la source Σ_2 .

Les températures T_1, T_2 et T_3 des sources Σ_1, Σ_2 et Σ_3 sont constantes.

1. Déterminer l'expression de $\frac{Q_2}{Q_1}$.

2. Que représente physiquement le rapport précédent ?
3. **A.N.** : $T_1 = 600 \text{ K}$; $T_2 = 300 \text{ K}$; $T_3 = 270 \text{ K}$.

CLIMATISEUR

Un climatiseur permet de faire passer la température d'une pièce de capacité thermique totale C de $T_1 = 300 \text{ K}$ à $T_2 = 295 \text{ K}$ en une durée $\tau = 1,0 \cdot 10^3 \text{ s}$. L'air extérieur est à $T_0 = 305 \text{ K}$ et l'appareil décrit des cycles réversibles entraîné par un moteur de puissance $\mathcal{P} = 180 \text{ W}$.

1. Déterminer analytiquement et numériquement C .
2. Estimer la taille de la pièce.

COMPRESSEUR

Un compresseur est constitué d'un cylindre (\mathcal{C}) muni de soupapes (\mathcal{S}) et dans lequel se déplace un piston (\mathcal{P}). Ce système décrit de manière quasistatique et mécaniquement réversible le cycle suivant :

- (\mathcal{S}) étant ouverte et le volume V du cylindre évoluant de $V_A = 0$ à $V_B = 2,0 \text{ L}$, l'air est admis dans (\mathcal{C}), dans un état initial caractérisé par une pression $P_i = 1,0 \text{ bar}$ et une température $T_i = 300 \text{ K}$.
- (\mathcal{S}) se ferme et (\mathcal{P}) comprime l'air dans (\mathcal{C}), le volume V du cylindre évoluant de V_B à V_C , la pression évoluant de P_i à $P_f = 10 \text{ bar}$ et la température de T_i à T_f ; cette évolution est polytropique de la forme $P_i V_i^k = P_f V_f^k = C^{\text{te}}$ avec $k = 1,3$.
- (\mathcal{S}) s'ouvre et le volume du cylindre évoluant de V_C à $V_D = 0$ l'air est expulsé dans l'état final caractérisé par la pression P_f et la température T_f ; (\mathcal{C}) est alors ramené à son état initial.

L'air est assimilé à un gaz parfait diatomique.

1. Calculer la quantité d'air n traitée par le compresseur à chaque cycle, le volume V_C et la température T_f .
2. Calculer les travaux W_{AB} , W_{BC} et W_{CD} au cours de ces trois étapes et le travail total W par cycle littéralement en fonction de k , n , R , T_i et T_f puis numériquement.
3. Tracer le diagramme de CLAPEYRON de l'air et le diagramme de WATT du cylindre.

BILAN GLOBAL OU ÉLÉMENTAIRE

Un récipient rigide, vide à l'instant initial, possède des parois adiabatiques. Il se trouve dans une atmosphère à P_0 , T_0 . L'air extérieur, assimilé à un gaz parfait diatomique, pénètre lentement dans le récipient par une valve adiabatique. À l'état final, le récipient contient de l'air à la pression P_0 et à la température T_f .

1. On raisonne sur le système fermé constitué par la quantité n d'air admise dans le récipient. Déterminer le travail reçu et en déduire la température finale T_f .
2. En raisonnant pendant la durée dt sur un système fermé à préciser, déterminer l'évolution de l'énergie interne de ce système et en déduire la température finale T_f .

CALORIMÈTRE

1. Un calorimètre contient 95,0 g d'eau à 20,0 °C. On ajoute 71,0 g d'eau à 50,0 °C. Quelle serait la température d'équilibre si on pouvait négliger la capacité thermique du vase et de ses accessoires ?
2. La température d'équilibre observée est 31,3 °C. En déduire la « valeur en eau » du vase et des accessoires, c'est-à-dire la masse d'eau à laquelle le vase et les accessoires sont équivalents du point de vue thermique.
3. Le même calorimètre contient maintenant 100 g d'eau à 15,0 °C. On y plonge un échantillon métallique pesant 25,0 g sortant d'une étuve à 95,0 °C. La température d'équilibre étant 16,7 °C, calculer la capacité thermique massique du métal.

Donnée : pour l'eau $c_e = 4,18 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

ÉQUATION D'ÉTAT D'UN GAZ DE PHOTONS

Dans une enceinte de volume V , on décrit la lumière par un gaz de photons, particules sans interactions possédant une énergie E , une quantité de mouvement $\vec{p} = \frac{E}{c}\vec{u}$ et une vitesse c où E est donnée. On envisage un élément de surface $\delta S \vec{u}_x$ de la paroi et on admet que dans tout élément de volume, $\frac{1}{6}$ des photons ont une vitesse $\pm\vec{u}_x, \pm\vec{u}_y, \pm\vec{u}_z$. On note n^* la densité volumique de photons, supposée uniforme.

1. Exprimer l'énergie interne du gaz en fonction de n^* , V et E .
2. Où sont les photons susceptibles de frapper $\delta S \vec{u}_x$ entre les instants t et $t + dt$? En déduire le nombre $\delta^2 N$ de chocs.
3. On suppose le choc photon-paroi élastique : le photon arrivant avec la quantité de mouvement \vec{p} repart avec la quantité de mouvement $-\vec{p}$.
En déduire la quantité de mouvement transférée à δS pendant la durée dt puis l'expression de la pression P en fonction de E et de n^* , puis en fonction de U et V .
4. Comparer avec un gaz parfait monoatomique.

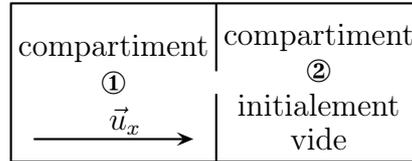
MÉCANIQUE ET ENTROPIE

Un opérateur exerçant une force $\vec{F} = F(t) \vec{u}_x$ sur un pavé de masse m posé sur une table horizontale lui fait faire un aller-retour entre les dates $t = 0$ et $t = T = \frac{2\pi}{\omega}$ de telle sorte que le mouvement soit rectiligne sinusoïdal décrit par $x(t) = a \cos(\omega t)$. On donne le coefficient de frottement f .

1. Déterminer $F(t)$ en fonction de ω , a , t , f , m et g .
2. Exprimer le travail fourni par l'opérateur en fonction de a , f , m et g .
3. L'ensemble table-pavé est au contact d'un thermostat qui maintient la température de l'ensemble égale à T_0 .
Exprimer l'entropie créée au cours de l'évolution.

EFFUSION GAZEUSE

Le récipient de la figure ci-dessous est constitué de deux compartiments de même volume V maintenus à la température T . À l'instant $t = 0$, une mole (c'est-à-dire \mathcal{N}_A molécules) d'un gaz parfait remplit le compartiment ①, le compartiment ② est vide et on perce un petit trou de section s entre les deux compartiments. On étudie le passage du gaz entre le compartiment ① et le compartiment ②, phénomène que l'on appelle *effusion gazeuse*.



On note $N_1(t)$ et $N_2(t)$ les nombres de molécules dans les compartiments ① et ②. Soit $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ un trièdre cartésien dont \vec{u}_x est la normale au trou de section s . On adopte pour le gaz parfait le modèle *simplifié* suivant :

- La norme $\|\vec{v}\|$ de toutes les molécules est identique, égale à la vitesse quadratique moyenne v^* ;
- dans tout élément de volume $d\tau$, les vecteurs vitesses des molécules sont parallèles à l'une des directions de vecteurs directeurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, -\vec{u}_x, -\vec{u}_y, -\vec{u}_z$, avec un sixième des molécules dans chacune de ces six directions.

1. Établir l'expression du nombre $dN_{1 \rightarrow 2}$ de molécules contenues dans le compartiment ① à l'instant t et traversant la surface s vers le compartiment ② entre les instants t et $t + dt$. Même question pour le nombre $dN_{2 \rightarrow 1}$ de molécules contenues dans le compartiment ② à l'instant t et traversant s vers le compartiment ① entre les instants t et $t + dt$.
2. En déduire les expressions de $\frac{dN_1(t)}{dt}$ et $\frac{dN_2(t)}{dt}$ en fonction de N_1, N_2, s, v^* et V .
3. Établir les expressions de $N_1(t)$ et $N_2(t)$. Commenter les valeurs limites de N_1 et N_2 . Faire apparaître une constante de temps τ caractéristique du phénomène observé et proposer une application numérique. Comment pourrait-on accéder expérimentalement aux variations de $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en fonction du temps t ?
4. Comment varie τ avec la masse des molécules ? L'hydrogène H possède un isotope utilisé pour la fusion thermonucléaire, le deutérium D dont le noyau est constitué d'un proton et d'un neutron. Expliquer brièvement comment on peut enrichir en dideutérium D_2 un mélange de dihydrogène H_2 et de dideutérium D_2 par effusion gazeuse.

ENTROPIE D'UN FIL ÉLASTIQUE

Un fil élastique est fixé à une de ses extrémités et on exerce sur l'autre extrémité une force f_e . L'état d'équilibre est décrit par la longueur L , sa température T , son entropie S et son énergie interne U . On donne son équation caractéristique :

$$S = S_0 + C \ln \left(1 + \frac{U - U_0}{CT_0} \right) - \frac{k(L - L_0)^2}{2}$$

où k, C, S_0, U_0 et T_0 sont des constantes positives.

1. On définit le paramètre f par l'identité thermodynamique $dU = T dS + f dL$.

Exprimer f en fonction de k, T, L , et L_0 . Montrer que pour une évolution infinitésimale réversible, on a $f_e = f$.

2. Montrer que $U(T,L) = U_0 + C(T - T_0)$ et $S(T,L) = S_0 + C \ln \frac{T}{T_0} - \frac{k(L - L_0)^2}{2}$.
3. Partant de l'état $E_0(L_0, T_0)$, on exerce f_e pour atteindre de manière réversible et adiabatique l'état $E_1(2L_0, T_1)$.
Calculer T_1 et le travail fourni.
4. Partant de l'état $E_1(2L_0, T_1)$ on supprime toute force et on constate que le fil reprend sa longueur naturelle et atteint un état $E_2(L_0, T_2)$ sans avoir le temps de réaliser des transferts thermiques avec l'extérieur.
Déterminer T_2 et l'entropie créée.
5. Finalement on abandonne le fil dans l'état $E_2(L_0, T_2)$ au contact de l'atmosphère assimilée à un thermostat de température T_0 et il évolue sans travail à la longueur L_0 constante.
Déterminer l'état final et l'entropie créée.
6. L'évolution $2 \rightarrow 0 \rightarrow 1$ constitue un moyen de revenir à l'état initial 1 après l'évolution irréversible $1 \rightarrow 2$.
Justifier qu'il n'y a là aucun paradoxe.

FONCTION CARACTÉRISTIQUE

Soit un système constitué de dioxyde de carbone. Ce gaz est caractérisé par la fonction $S(U, V)$ suivante :

$$S(U, V) = S_0 + n C_{V,m} \ln \left(\frac{U + n^2 a/V}{U_0 + n^2 a/V_0} \right) + n R \ln \left(\frac{V - nb}{V_0 - nb} \right)$$

où S_0 , U_0 et V_0 sont les valeurs respectives de l'entropie, de l'énergie et du volume dans un état de référence arbitraire donné.

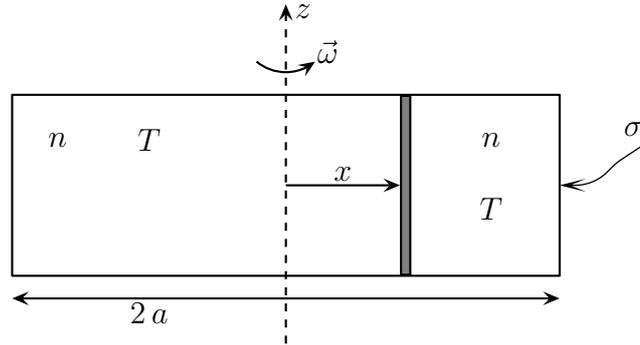
Données :

- $C_{V,m}$ est la capacité calorifique molaire à volume constant du dioxyde de carbone : $C_{V,m} = 28,50 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- a et b sont des constantes propres au dioxyde de carbone : $a = 0,37 \text{ J.m}^3.\text{mol}^{-2}$ et $b = 4,30.10^{-5} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$
- R est la constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

1. (a) On rappelle que la définition de la température thermodynamique est $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$.
Montrer que cette définition permet de déterminer l'expression de l'énergie interne du gaz.
- (b) On rappelle que la définition de la pression thermodynamique est $\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T}$.
Montrer que cette définition permet de déterminer l'équation d'état du gaz.
2. Deux moles de ce gaz subissent une détente de JOULE – GAY-LUSSAC d'un volume initial $V_A = 5,00 \text{ dm}^3$ et d'une température initiale $T_A = 293,00 \text{ K}$ à un volume final $V_B = 2V_A$.
 - (a) Calculer les variations de température et d'entropie correspondantes.
 - (b) Comparer les résultats obtenus à ceux de la détente de deux moles de gaz parfait de même capacité calorifique molaire à volume constant dans les mêmes conditions initiales.

ÉTUDE D'UNE BIFURCATION

Un tube cylindrique horizontal d'axe (Ox) de section droite σ et de longueur $2a$ est séparé en deux compartiments par un piston de masse m à l'abscisse x ($-a < x < a$). Ce tube tourne autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire ω constante.



L'ensemble est maintenu à température constante T et chaque compartiment, de volume V_i , contient une quantité $n = 1,0$ mol de gaz parfait dont l'énergie libre molaire s'écrit :

$$F_{i,m} = F_{0,m} - RT \ln \frac{V_i}{\sigma a}$$

On s'intéresse aux positions d'équilibre et à la stabilité dans le référentiel tournant lié au tube.

1. Montrer que les forces d'inertie dérivent d'une énergie potentielle $E_p = -\frac{m\omega^2 x^2}{2}$.

En déduire que la fonction $\Phi = F_1 + F_2 + E_p$ est un potentiel thermodynamique du problème.

2. Prévoir, sans calcul la stabilité ou l'instabilité de la position d'équilibre $x = 0$ à température nulle ou infinie.

Étudier la fonction $\Phi(x)$ et discuter l'existence et la stabilité d'états d'équilibre.

TRAVAIL RÉCUPÉRABLE

Un solide (S) de capacité thermique C , initialement à la température T_1 est plongé dans un thermostat liquide dont la température est T_0 de telle sorte qu'il ne peut recevoir aucun travail.

1. Justifier que la fonction $F^* = U - T_0 S$ est un potentiel thermodynamique.

Exprimer F^* en fonction de la température T du solide, de C et de T_0 en adoptant pour fixer les constantes, les valeurs $S(T_0) = 0$ et $U(T_0) = 0$.

2. Étudier la fonction $F^*(T)$ et en déduire la température finale T_2 du solide à l'équilibre.

Verifier que cet équilibre est stable.

3. Calculer l'entropie créée S_c au cours de l'évolution $1 \rightarrow 2$ et comparer $T_0 S_c$ à la diminution de F^* .

On suppose désormais que $T_1 > T_0$. Un fluide (Σ) évolue de manière cyclique, réversible et ditherme, au contact du solide (S) considéré comme la source chaude et d'une source froide dont la température constante est T_0 .

4. On envisage l'évolution du fluide entre deux instants t et $t + dt$ proches mais contenant un grand nombre de cycles de Carnot : la température du solide varie de T à $T + dT$, le fluide échange le transfert thermique δQ_1 avec la source chaude, un transfert thermique δQ_2 avec la source froide et un travail δW avec l'extérieur.

En exprimant les deux premiers principes de la thermodynamique, montrer que :

$$\delta W = C \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) dT$$

5. Justifier que la machine s'arrête lorsque $T = T_0$.

En déduire l'expression du travail total W échangé.

Comparer avec la diminution de F^* et conclure.

Comparer avec la situation précédente et commenter.

MÉLANGE AIR – VAPEUR D'EAU

Un mélange d'air et de vapeur d'eau occupe un volume $V_1 = 2,0$ L à la température $T = 50$ °C ; la pression partielle de l'air est $P_{a1} = 987$ mbar, celle de l'eau est $P_{e1} = 79$ mbar. On lui fait subir une compression réversible isotherme pour amener le volume à $V_2 = 1,0$ L.

1. Comment faire en pratique ?

2. Déterminer la pression finale P_2 ainsi que le travail fourni au mélange.

Données : à 50 °C la pression de vapeur saturante de l'eau est 118,5 mbar. On considérera que la vapeur d'eau comme un gaz parfait.

CHANGEMENT D'ÉTAT SOLIDE → LIQUIDE

Les courbes de fusion de l'eau et du phosphore sont pratiquement rectilignes jusqu'à 150 bar.

Calculer, pour ces deux corps, l'augmentation de pression à exercer à partir de la pression ordinaire pour faire varier leur température de fusion de 1 celcius.

	T_{fusion} (°C)	v_ℓ (m ³ .kg ⁻¹)	v_s (m ³ .kg ⁻¹)	ℓ_{fusion} (J.g ⁻¹)
phosphore	44	$0,570 \cdot 10^{-3}$	$0,551 \cdot 10^{-3}$	20,5
eau	0,0	$1,000 \cdot 10^{-3}$	$1,089 \cdot 10^{-3}$	333

DÉTENTE ISENTROPIQUE DE VAPEUR D'EAU

On détend isentropiquement de la vapeur d'eau saturante, de la température initiale T_1 à la température T_2 .

La chaleur latente de vaporisation de l'eau suit la formule de REGNAULT entre 100 °C et 200 °C :

$$\ell = a - bT \quad \text{avec} \quad a = 3,34 \text{ kJ.g}^{-1} \quad \text{et} \quad b = 2,93 \text{ J.g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

En faisant l'approximation que la capacité thermique c de l'eau liquide en équilibre avec sa vapeur est indépendante de T , calculer la fraction d'eau condensée.

Données : $T_1 = 523$ K ; $T_2 = 473$ K ; $c = 4,18 \text{ J.g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

DÉTENTE D'UN LIQUIDE DANS LE VIDE

On place une ampoule contenant $m = 0,010$ kg d'eau liquide dans une enceinte indéformable de volume V maintenue au contact d'un thermostat à la température $T_0 = 373$ K. Initialement, l'enceinte est vide et l'eau dans l'ampoule est à la température T_0 et sous une pression initiale P_0 égale à la pression de vapeur saturante $P_s(T_0) = 1,0$ bar et on casse l'ampoule. On assimile la vapeur d'eau à un gaz parfait de masse molaire $M = 18$ g.mol⁻¹. On donne l'enthalpie de vaporisation de l'eau $\ell_v = 2,3.10^3$ kJ.kg⁻¹ à la température T_0 . On néglige le volume massique de l'eau liquide devant le volume massique de la vapeur d'eau.

1. Calculer la valeur particulière V_C du volume V pour que dans l'état d'équilibre final, l'eau soit à la température T_0 et à la pression de vapeur saturante $P_s(T_0) = 1,0$ bar avec un titre en vapeur $x_{xf} = 1$.

Calculer, pour l'évolution $I \rightarrow F$ correspondante, le transfert thermique Q reçu par l'eau, la variation d'entropie de l'eau, l'entropie échangée et l'entropie créée.

Commenter.

2. On suppose que le volume V est inférieur à V_C déterminé à la question 1.
Déterminer l'état d'équilibre final.
3. On suppose que le volume V est supérieur à V_C déterminé à la question 1.
Déterminer l'état d'équilibre final.

ÉVOLUTION DE MÉLANGES DIPHASÉS D'EAU

Un cylindre calorifugé est fermé par un piston calorifugé qui maintient une pression constante $P_0 = 1,0$ bar. Initialement le cylindre contient une masse $m(1-x)$ de vapeur d'eau à la température d'ébullition de l'eau sous la pression P_0 soit $T_e = 373$ K. On introduit dans le cylindre un glaçon de masse $m x$ dont la température initiale est la température de fusion de l'eau solide sous la pression P_0 soit $T_F = 273$ K.

1. Déterminer la composition du système dans l'état d'équilibre final lorsque la température finale est égale à la température de fusion T_F .
Montrer que ceci n'est possible que si x est supérieur à une valeur minimale x_{\min} à préciser.
2. Déterminer la composition du système dans l'état d'équilibre final lorsque la température finale est égale à la température d'ébullition T_E . Montrer que ceci n'est possible que si x est inférieur à une valeur maximale x_{\max} à préciser.
3. Déterminer la température finale T du système dans l'état d'équilibre final lorsque $x_{\min} < x < x_{\max}$.
A.N. : $x = 0,8$.

Données :

- enthalpie de vaporisation : $\ell_v = 2300$ kJ.kg⁻¹ ;
- enthalpie de fusion : $\ell_f = 330$ kJ.kg⁻¹ ;
- capacité thermique de l'eau liquide : $c_e = 4,18$ kJ.kg⁻¹.k⁻¹.

VAPORISATION SOUS CONTRAINTE

Un piston mobile sans frottement sépare un cylindre horizontal de longueur totale $L = 20$ cm et de section $\sigma = 0,050$ m² en deux compartiments. Le compartiment de gauche, de longueur x contient une quantité $n = 3,5$ mol d'eau. Le compartiment de droite contient une quantité n_a d'air. L'ensemble est au contact d'un thermostat dont on peut faire varier la température T .

Données :

- pressions de vapeur saturante de l'eau : $P_s(T_0 = 273 \text{ K}) = 2,4 \cdot 10^3 \text{ Pa}$; $P_s(T_1 = 373 \text{ K}) = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$;
 $P_s(T_F = 380 \text{ K}) = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$;
- chaleur latente de vaporisation de l'eau à T_1 : $\ell_v = 2400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- masse molaire de l'eau : $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- capacité thermique de l'eau liquide : $c_e = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- coefficient isentropique de l'air : $\gamma_a = 1,40$
- coefficient isentropique de l'eau vapeur : $\gamma_e = 1,30$.

L'air et la vapeur d'eau sont assimilés à des gaz parfaits de constante $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. On néglige le volume occupé par l'eau liquide.

1. Déterminer la valeur numérique de n_a sachant que dans un état intermédiaire I on a $x_1 = 13$ cm ; $T_1 = 373 \text{ K}$; $P_1 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ bar}$.
2. Initialement on a $x_0 = 0$ et $T_0 = 273 \text{ K}$. Calculer la pression P_0 et vérifier l'absence de vapeur d'eau.
3. On élève progressivement la température T .
 Décrire qualitativement l'évolution de $x(T)$, $P(T)$ et de la quantité de vapeur d'eau $n_e(T)$ en admettant que $\frac{P_{\text{sat}}(T)}{T}$ est une fonction croissante de T . On notera T_e la température telle que $\frac{n_a R}{\sigma L} = \frac{P_{\text{sat}}(T_e)}{T_e}$.
4. Dans l'état final, on a $T_F = 380 \text{ K}$.

Calculer P_F , x_F , n_e et le transfert thermique Q reçu par le système.

MACHINE DE LINDE

La machine de Linde, représentée ci-dessous, est utilisée pour obtenir du diazote liquide à partir de diazote initialement gazeux à la pression $P_1 = 1,0$ bar et la température $T_1 = 290 \text{ K}$: elle fonctionne en régime stationnaire et les variations d'énergie mécanique sont négligeables.

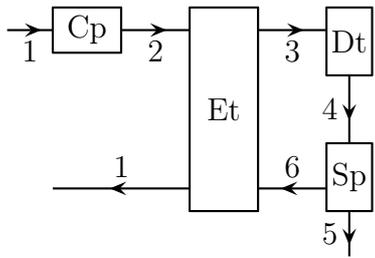
Le diazote évolue de manière réversible et isotherme de l'état E_1 ($P_1 = 1,0$ bar ; $T_1 = 290 \text{ K}$) jusqu'à l'état E_2 ($P_2 = 200$ bar ; $T_2 = 290 \text{ K}$) dans le compresseur (Cp).

Puis il traverse un échangeur thermique calorifugé (Et) où il évolue de manière isobare de l'état E_2 à l'état E_3 ($P_3 = 200$ bar ; T_3) en croisant une autre circulation de diazote évoluant de l'état E_6 à l'état E_1 .

Puis le diazote subit une détente isenthalpique dans le détendeur (Dt) où il évolue de l'état E_3 à l'état E_4 ($P_4 = 1,0$ bar ; $T_4 = 78 \text{ K}$; x_4) où il est diphasé avec un titre massique en vapeur x_4 .

À la traversée du séparateur (Sp), le liquide est séparé et recueilli quasi-pur dans l'état E_5 (où $P_5 = 1,0$ bar ; $T_5 = 78 \text{ K}$; $x_5 = 0$). La vapeur est récupérée quasi-pure dans l'état E_6 ($P_6 = 1,0$ bar ; $T_6 = 78 \text{ K}$; $x_6 = 1$), et traverse ensuite l'échangeur thermique (Et) où elle évolue de l'état E_6 à l'état E_1 en croisant l'autre circulation de diazote qui évolue de l'état E_2 à l'état E_3 .

Les données concernant les différents stades du diazote sont fournies par le tableau suivant. P est en bar, T en K, h en kJ.kg⁻¹ et s en kJ.K⁻¹.kg⁻¹.

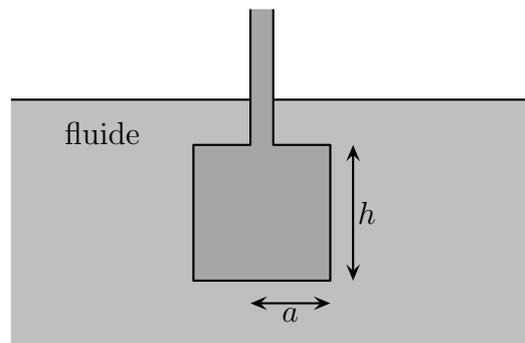


État	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
P	1,0	200	200	1,0	1,0	1,0
T	290	290	160	78	78	78
h	451	421	$h_3 = h_4$	34	228	
s	4,40	2,68	1,76	s_4	0,44	2,96

1. Donner l'expression de h_4 en fonction de h_5 , h_6 et x_4 .
2. On considère le système fermé (Σ) constitué du diazote contenu à l'instant t dans l'échangeur thermique et des masses dm_2 et dm_6 qui vont y entrer entre les instants t et $t + dt$. En faisant le bilan énergétique pour (Σ), établir une relation entre h_1 , h_2 , h_3 , h_6 et x_4 .
3. En déduire la valeur de x_4 , h_4 et s_4 .
4. Comparer s_3 et s_4 . Commenter.
5. En appliquant le premier et le deuxième principe de la thermodynamique à un système fermé bien choisi, calculer le transfert thermique Q et le travail W reçu par l'unité de masse du diazote traversant le compresseur.
6. En déduire la masse de diazote liquide recueillie par heure pour une machine dont la puissance est égale à $\mathcal{P} = 100$ kW.

TEMPS DE RÉPONSE D'UN THERMOMÈTRE AU MERCURE

On souhaite mesurer la température d'un liquide avec un thermomètre à mercure. La partie utile du thermomètre est un cylindre de rayon a et de hauteur H qui a une masse volumique moyenne ρ et une capacité thermique massique moyenne c . Le transfert thermique entre le thermomètre et le fluide suit la loi de NEWTON : $\varphi_{\text{fluide} \rightarrow \text{thermomètre}} = h(T_{\text{fluide}} - T)$ où T est la température du thermomètre et h une constante. On immerge le thermomètre à l'instant $t = 0$, sa température initiale étant T_0 .



On suppose que la température à l'intérieur du mercure est uniforme et que le tube qui sort du réservoir n'a aucune influence sur la température.

1. Préciser et justifier l'hypothèse « le tube qui sort du réservoir n'a aucune influence sur la température ».

D'autres hypothèses sont-elles sous-entendues ?
2. Écrire l'équation différentielle pour $T(t)$.

Au bout de combien de temps la différence $T(t) - T_{\text{fluide}}$ a-t-elle été divisée par 100 ?
3. **A.N.** : $H = 1,5$ cm ; $a = 3,0$ mm ; $\rho = 13,6 \cdot 10^3$ kg.m⁻³ ; $c = 140$ J.kg⁻¹.K⁻¹ ;
 $h = 28,4$ W.m⁻².K⁻¹.

MESURE D'UNE CAPACITÉ THERMIQUE

On considère un échantillon de capacité thermique C supposée indépendante de la température. Les échanges thermiques de cet échantillon sont d'une part l'apport par une source électrique d'une puissance $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}_0(1 + \cos(\omega t))$ et d'autre part d'une « fuite thermique » telle que le flux thermique perdu est $\Phi = K(T - T_0)$ où K est une constante, T_0 la température d'un bain thermostaté et T la température de l'échantillon supposée uniforme à tout instant dans son volume.

1. Expliquer comment réaliser expérimentalement la puissance alternative $\mathcal{P}(t)$.
2. Écrire l'équation différentielle régissant l'évolution de la température $T(t)$ de l'échantillon.
3. Résoudre cette équation différentielle en considérant qu'à l'instant $t = 0$, la température de l'échantillon est T_0 .
Exprimer la solution comme la somme de trois contributions que l'on interprétera physiquement. Donner l'allure de $T(t)$ graphiquement.
4. Quel est la durée caractéristique τ du passage du régime transitoire au régime permanent ?
5. Montrer que la mesure de l'amplitude de la composante alternative de la température de l'échantillon à différentes fréquences permet d'accéder à la valeur de la capacité thermique C .

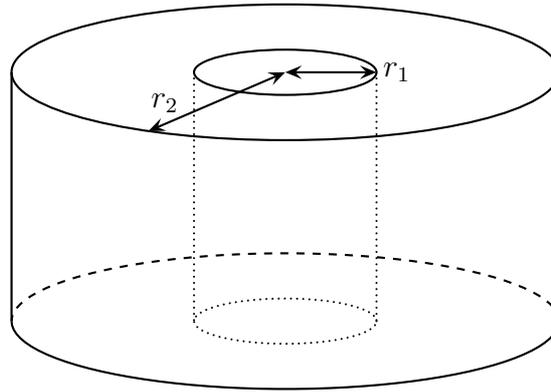
TEMPÉRATURE D'UN CONDUCTEUR OHMIQUE

Un fil de cuivre, de longueur L et de section circulaire de rayon $a = 0,5$ mm est parcouru par un courant électrique continu d'intensité I . Ce fil est plongé dans l'air qui est à la température $T_0 = 273$ K. Le flux surfacique échangé à travers la surface du fil est en valeur absolue $h|T - T_0|$ où $h = 14$ W.m⁻² et T est la température du fil supposée uniforme. La résistivité du cuivre dépend de cette température selon la loi $\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$ avec $\rho_0 = 1,8 \cdot 10^{-8}$ Ω.m et $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ K⁻¹, sa masse volumique est $\mu = 8,80 \cdot 10^3$ kg.m⁻³, sa capacité thermique massique est $c = 420$ J.K⁻¹.kg⁻¹.

1. Établir l'expression de la température T_p atteinte par le fil en régime permanent. On rappelle que la résistance électrique du fil est $R = \frac{\rho L}{\pi a^2}$.
Faire l'application numérique pour $I = 10$ A.
2. Le fil étant initialement à la température T_0 , on fait passer le courant d'intensité à partir de l'instant $t = 0$.
 - (a) Établir l'équation différentielle donnant l'évolution de la température du fil en fonction du temps.
 - (b) Montrer que, suivant les valeurs de I , il existe théoriquement trois types d'évolution pour la température.

BARRE DE COMBUSTIBLE NUCLÉAIRE

Le combustible d'un réacteur nucléaire se présente sous forme de barres solides de rayon r_1 , de très grande longueur et de conductivité thermique λ_1 , à l'intérieur desquelles les réactions nucléaires dégagent une puissance volumique \mathcal{P} . Chaque barre est entourée d'une couche protectrice, sans activité nucléaire, de rayon intérieur r_1 , de rayon extérieur r_2 et de conductivité thermique λ_2 , dont la surface extérieure est maintenue à la température T_2 par circulation du liquide.



Données : $r_1 = 6,0$ mm ; $r_2 = 9,0$ mm ; $\lambda_1 = 2,0$ W.m⁻¹.K⁻¹ ; $\lambda_2 = 25$ W.m⁻¹.K⁻¹ ;
 $\mathcal{P} = 2,0 \cdot 10^8$ W.M⁻³ ; $T_2 = 500$ K.

On s'intéresse à la température $T(r)$ à l'intérieur d'une barre et de son enveloppe en régime permanent à distance r de l'axe de symétrie d'une barre. On note $T_1 \stackrel{\text{not}}{=} T(r_1)$.

1. Montrer que la résistance thermique de la couche protectrice d'une barre de longueur L se met sous la forme $R_{\text{th}} = \frac{\alpha}{L}$.
Calculer numériquement α .
2. Exprimer T_1 en fonction de T_2 , \mathcal{P} , r_1 et α .
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(r)$ pour $r < r_1$.
Exprimer $T(0)$ en fonction de T_2 , \mathcal{P} , λ_1 , r_1 et α .
Calculer numériquement $T(0)$.

BILAN ENTROPIQUE À UNE DIMENSION

On considère un solide homogène, de masse volumique μ , de capacité thermique massique c , de conductivité thermique λ . On suppose qu'il n'y a pas de production d'énergie dans le matériau. La température locale ne dépend que de x et de t .

1. Établir rapidement l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(x,t)$.
2. Soit le cylindre situé entre les plans d'abscisses x et $x + dx$, de section Σ .
 - (a) Déterminer en fonction de λ , T , $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{d^2 T}{dx^2}$, Σ , dx et dt , l'entropie échangée par ce cylindre entre t et $t + dt$.
 - (b) Exprimer la variation d'entropie dS de ce même système entre t et $t + dt$. On pourra introduire l'entropie massique locale $s(x,t)$ que l'on exprimera en fonction de c et de $T(x,t)$.
 - (c) Effectuer le bilan entropique et exprimer l'entropie créée s_{cr} par unité de temps et de volume.
Conclure.

FUSIBLE

Un fusible est constitué d'un fil conducteur cylindrique homogène, de section droite d'aire S , de longueur utile L , de masse volumique μ et de capacité thermique massique c . Il possède une conductivité électrique γ et une conductivité thermique K . Il est traversé par un courant électrique

continu d'intensité I . Ce fil est enfermé dans une capsule remplie d'une substance assurant une isolation thermique et électrique parfaite. Les températures en $x = 0$ et $x = L$ sont imposées et égales à la température T_0 du milieu ambiant.

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes, données dans le système international d'unité (SI) : $K = 65$ SI, $\gamma = 1,2 \cdot 10^6$ SI, $c = 460$ SI, $\mu = 2,7 \cdot 10^3$ kg.m⁻³, $T_0 = 290$ K, $L = 2,5$ cm.

On rappelle que la résistance R d'un conducteur cylindrique de conductivité γ , de longueur h , de section S , parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti et parallèle à son axe est $R = \frac{h}{\gamma S}$.

On se place en régime permanent.

1. Établir l'équation différentielle liant la température T , x , S et les données.

Donners l'expression littérale de $T(x)$ et représenter graphiquement T en fonction de x .

2. Le matériau constituant le fil fond à $T_F = 390$ K. On veut fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale $I_{\max} = 16$ A.

Préciser l'endroit de la rupture en cas de dépassement de I_{\max} .

Déterminer l'expression littérale de l'aire S à prévoir.

Faire l'application numérique.

3. On fixe $I = 10$ A. Le fil a une section S trouvée à la question précédente.

Évaluer littéralement puis numériquement la puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{th}}(0)$ transférée par conduction en $x = 0$.

Préciser si cette puissance est reçue ou fournie par le fil.

Même question pour la puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{th}}(L)$ transférée en $x = L$.

Quelle relation a-t-on entre $\mathcal{P}_{\text{th}}(0)$, $\mathcal{P}_{\text{th}}(L)$ et la puissance électrique \mathcal{P}_e fournie à l'ensemble du fil ?

Commenter.

4. On désire faire un bilan entropique du fil sur une durée Δt . Évaluer :

→ la variation d'entropie ΔS du fil pendant cette durée ;

→ les expressions littérales des termes d'échange S_e et de création S_{cr} pendant cette durée.

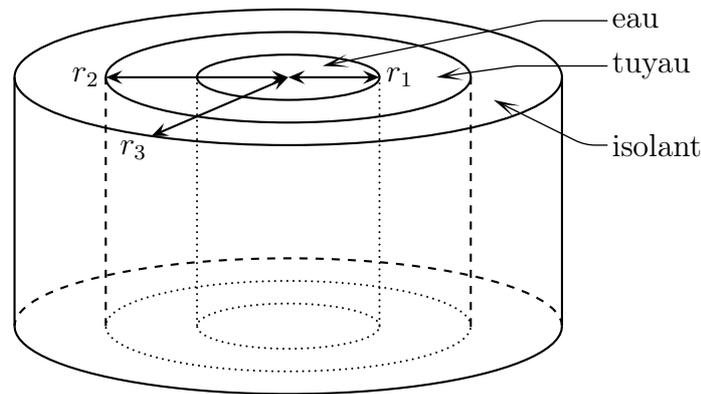
En déduire l'expression littérale puis numérique de l'entropie créée dans le fil par unité de temps.

Commenter.

ISOLATION D'UNE CANALISATION

On rappelle que, lorsqu'une surface solide S est portée à la température T_0 est en contact avec un fluide à la température T , la puissance thermique échangée entre la surface S et le fluide est $\mathcal{P}_{\text{fluide} \rightarrow \text{fluide}} = h_s S (T - T_0)$ (loi de NEWTON) où h est une constante.

Une canalisation cylindrique, rectiligne, infinie, contient de l'eau à la température T_e . Elle est entourée d'une gaine isolante, l'ensemble se trouve dans l'air à la température T_0 . La canalisation a un rayon intérieur r_1 , un rayon extérieur r_2 , une conductivité thermique λ_1 . La gaine isolante a un rayon extérieur r_3 , une conductivité thermique λ_2 . Les échanges thermiques aux interfaces satisfont la loi de Newton, avec des coefficients d'échange h_1 pour l'interface eau / tube, h_2 pour l'interface tube / isolant et h_3 pour l'interface isolant / air.



1. Établir l'expression de la résistance thermique par unité de longueur du tuyau R_{th1} et de celle de la gaine R_{th2} .

Montrer que l'on peut définir de la même façon une résistance thermique à chaque interface et les exprimer en fonction des rayons et des coefficients d'échange.

2. Montrer que la puissance thermique perdue par l'eau passe par un maximum pour une valeur particulière de r_3 . Commenter.
3. Une longueur L de la canalisation précédente contient de l'eau chaude au repos de température initiale $T_{e0} > T_0$. Cette eau refroidit en gardant une température uniforme $T_e(t)$. Elle a une masse volumique μ_e et une capacité thermique massique c_e . On appelle R_{th} la résistance thermique de la longueur L de canalisation.

Écrire l'équation différentielle vérifiée par $T_e(t)$.

Conclure.

AILETTE DE REFROIDISSEMENT

Une ailette de refroidissement est constituée par un cylindre d'axe Ox , de rayon r , de longueur L , fixé par sa base $x = 0$ à une paroi dont la température est T_1 et en contact sur le reste de sa surface avec l'air ambiant à la température T_e . Le flux surfacique passant de l'ailette à l'air ambiant est donné par la loi de NEWTON $\varphi_{ailette \rightarrow air} = h(T - T_e)$ où T est la température locale de l'ailette. On se place en régime permanent et on suppose que la température locale dans l'ailette ne dépend que de x .

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$.
2. Montrer que $T(x)$ peut se mettre sous la forme $T(x) = A e^{x/\delta} + B e^{-x/\delta} + T_e$ où δ est une constante à déterminer.

Quelles sont les conditions aux limites du problème ?

En déduire le système de deux équations à deux inconnues vérifiée par A et B .

Montrer que :

$$A = \frac{(T_1 - T_e) \alpha e^{-2L/\delta}}{1 + \alpha e^{-2L/\delta}} \quad \text{et} \quad B = \frac{T_1 - T_e}{1 + \alpha e^{-2L/\delta}} \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{\lambda - h \delta}{\lambda + h \delta}$$

3. Déterminer la puissance thermique $\mathcal{P}_{ailette \rightarrow air}$ passant de l'ailette à l'air puis la puissance $\mathcal{P}_{paroi \rightarrow ailette}$ en gardant A et B dans les calculs sans les remplacer par leurs expressions.

Conclure.

4. Calculer le rapport de la puissance $\mathcal{P}_{\text{paroi} \rightarrow \text{ailette}}$ à la puissance que la paroi évacuerait à travers la surface πr^2 en l'absence de l'ailette (on supposera que le coefficient h est le même pour la paroi et pour l'ailette.)
Quel est l'intérêt de l'ailette ?

ÂGE DE LA TERRE SELON LORD KELVIN

La Terre est assimilée à un milieu semi-infini occupant tout le demi-espace $z > 0$. On admet que la température ne dépend que de la profondeur z (comptée positivement) et du temps t . La planète a une conductivité λ , une masse volumique ρ et une capacité thermique massique c , toutes trois uniformes. On note $q(z,t)$ la densité de courant thermique.

1. Établir rapidement l'équation aux dérivées partielles vérifiées par $q(z,t)$ (équation ①). On notera

$$D \text{ la diffusivité thermique } D = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

Au milieu du XIX^e siècle, Lord KELVIN a imaginé que la Terre a été formée à une température élevée uniforme T_0 au moment $t = 0$. Instantanément sa surface a été soumise à la température T_S . Depuis ce temps là, la planète se refroidirait. Lord KELVIN a modélisé ce refroidissement pour en déduire l'âge de formation de la Terre.

2. Dans l'hypothèse de Lord KELVIN, quelle doit être la valeur de la densité de courant thermique en $z = 0$ lorsque t tend vers 0 et lorsqu'il tend vers l'infini ?

Quelle doit être la densité de courant thermique à une profondeur z non nulle lorsque t tend vers 0 et lorsqu'il tend vers l'infini ?

3. On **admet** que la fonction $f(z,t) = -\frac{1}{\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right)$ est solution de l'équation ①.

Vérifier que la solution proposée par Lord KELVIN $q(z,t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right)$ où t est le temps écoulé depuis la formation de la Terre est bien la bonne.

Dessinez schématiquement la valeur absolue de la densité de courant thermique en fonction de la profondeur pour deux époques différentes.

4. On suppose que $A = a(T_0 - T_S)^\alpha \lambda^\beta \rho^\gamma c^\delta$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des exposants éventuellement nuls et a une constante réelle.

Calculer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par analyse de l'homogénéité de la formule de Lord KELVIN.

5. On peut montrer que $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Exprimer la valeur du gradient thermique en surface de la Terre $\frac{\partial T}{\partial z}$.

Lord KELVIN a admis que $T_0 - T_S$ était de l'ordre de 1 000 à 2 000 K et que D est proche de $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. L'augmentation de la température avec la profondeur mesurée dans les mines indiquait un gradient thermique proche de $30 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$.

Quel âge de la Terre Lord KELVIN a-t-il déduit de son modèle ?

6. Que pensez-vous de l'estimation précédente de l'âge de la Terre ?

Quel est (ou quels sont) le (ou les) ingrédients physiques que Lord KELVIN n'aurait pas dû négliger ?

Pourquoi l'a-t-il (ou les a-t-il) négligé(s) ?

SENSATION DE FROID ET DE CHAUD

1. Deux cylindres, isolés thermiquement sur leurs surfaces latérales, de même section S , de même axe Oz , de conductivités thermiques K_1 et K_2 , de longueur L_1 et L_2 , sont en contact en $x = 0$. On maintient leurs extrémités $x = -L_1$ et $x = L_2$ aux températures respectives T_1 et T_2 . On se place en régime stationnaire.

Déterminer la température T_i à l'interface (en $x = 0$).

A.N. : $T_1 = 37^\circ$ (main), $T_2 = 20^\circ$ (bois ou acier), $L_1 = L_2$, $K_1 = 10 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ (main), $K_2 = 1 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ (bois), $K'_2 = 100 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ (acier).

Calculer T_i pour un contact main – bois puis pour un contact main – acier.

Conclure.

2. Les deux cylindres sont maintenant considérés comme illimités et en contact en $x = 0$. Le cylindre 1 s'étend de $x = -\infty$ à $x = 0$, le cylindre 2 de $x = 0$ à $x = +\infty$. Initialement le cylindre 1 a une température uniforme T_1 et le cylindre 2 a une température uniforme T_2 . On note μ_i la masse volumique, c_i la capacité thermique massique et K_i la conductivité thermique du cylindre i .

On **admet** que la fonction $f_D(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2\sqrt{Dt})} e^{-u^2} du$ avec $D = \frac{K}{\mu c}$ (diffusivité thermique) est solution de l'équation de la diffusion thermique et vérifie $f_D(0,t) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f_D(x,t) = \pm 1$.

En cherchant des solutions sous la forme $T_1(x,t) = A_1 + B_1 f_{D1}(x,t)$ dans le premier cylindre et $T_2(x,t) = A_2 + B_2 f_{D2}(x,t)$ dans le deuxième cylindre, déterminer la température T_i à la jonction des deux barres en fonction de T_1 et T_2 et des effusivités thermiques des deux cylindres définies par $E_1 = \sqrt{\mu_1 c_1 K_1}$ et $E_2 = \sqrt{\mu_2 c_2 K_2}$.

On donne $E(\text{main}) = 1,8 \cdot 10^3 \text{ SI}$, $E(\text{bois}) = 0,4 \cdot 10^3 \text{ SI}$, $E(\text{acier}) = 14 \cdot 10^3 \text{ SI}$.

Calculer cette température pour un contact main – bois puis pour un contact main – acier.

3. Comparer les deux modèles étudiés.

Justifier l'hypothèse selon laquelle il s'établit instantanément une température stationnaire à la jonction.

DIFFUSION À TRAVERS UN FIN TUYAU ENTRE DEUX RÉCIPIENTS
--

Deux récipients A et B de volume V_A et V_B contiennent initialement deux gaz parfaits différents, purs, respectivement G_1 dans A et G_2 dans B .

Les deux gaz sont à la même température et sous la même pression, leurs concentrations initiales sont donc identiques, égales à C_0 .

Les deux gaz ont même diffusivité D , si bien qu'ils se mélangent suivant les lois de l'auto-diffusion. Les deux récipients sont reliés par un tube de longueur ℓ et de section s par lequel se fait la diffusion. On admet que, le long du tube, les concentrations (nombre de moles par unité de volume) des deux gaz varient linéairement en fonction de la position et qu'elles sont uniformes dans chacun des deux récipients A et B .

- Exprimer le vecteur densité de courant particulaire dans le tube pour la diffusion de gauche à droite en fonction de la différence des concentrations pour G_1 entre les deux récipients : $\Delta C_1 = C_{1A} - C_{1B}$.
- En exprimant le nombre de particules traversant le tube, déduire l'équation différentielle vérifiée par ΔC_1 .

Exprimer ΔC_1 et $\Delta C_2 = C_{2B} - C_{2A}$ en fonction du temps. On posera $V_0 = \frac{V_A V_B}{V_A + V_B}$.

3. Application : les gaz sont CO et N₂, $V_1 = V_B = 1,0$ L, $\ell = 10$ cm, $s = 1,0$ cm², $D = 1,74 \cdot 10^{-5}$ m².s⁻¹.

Calculer la constante de temps τ du phénomène et le temps t_0 au bout duquel la concentration d'un gaz dans l'un des récipients est égale à la moitié de la concentration de ce gaz dans l'autre récipient.

SÉDIMENTATION

On disperse N molécules identiques, sphériques, de rayon R , de masse volumique μ dans un bécber de section S , rempli d'un liquide de masse volumique $\mu' < \mu$ et de viscosité η . Les particules sont soumises à leur poids et à une force de frottement, due à la viscosité de l'eau, dont l'expression est donnée par la formule de Stokes : $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v} = -h\vec{v}$.

On notera (Oz) l'axe vertical ascendant et g la norme du champ de pesanteur terrestre.

- Justifier que le mouvement des particules, observé expérimentalement, est rectiligne descendant. Déterminer la vitesse limite \vec{v}_ℓ des particules supposée atteinte très rapidement. Quelle est la durée caractéristique d'établissement du régime permanent? On fera apparaître la masse « apparente » des particules : $m^* = \left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right) m$.
- Exprimer le vecteur densité de courant de particules associé à ce mouvement, \vec{j}_{conv} en fonction de la densité $c(z)$ des particules et de la vitesse \vec{v}_ℓ .
- Justifier, par la loi de Fick, qu'il existe un courant de particules ascendant. On note D le coefficient de diffusion.
- Calculer la densité de particules $c(z)$ à l'altitude z en régime permanent. Commenter. On notera c_0 la densité de particules en $z = 0$.
- L'ensemble étant en équilibre thermique à la température T , $c(z)$ est donnée par la loi de Boltzmann $c(z) = c_0 \exp\left(-\frac{m^* g z}{k_B T}\right)$ où k_B est la constante de Boltzmann. Quelle relation simple a-t-on entre D et h ?
- Définir et calculer la distance caractéristique d'évolution de $c(z)$ pour deux molécules de même masse volumique $\mu = 1,3 \cdot 10^3$ kg.m⁻³ et de masse molaire différente : urée ($M_{\text{urée}} = 60$ g.mol⁻¹ et $D_{\text{urée}} = 10^{-9}$ m².s⁻¹) et hémoglobine ($M_{\text{hémoglobine}} = 68\,000$ g.mol⁻¹ et $D_{\text{hémoglobine}} = 5 \cdot 10^{-11}$ m².s⁻¹) dans l'eau à 20 °. Conclure. On donne $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹, $g = 9,81$ m.s⁻², $\mu' = 1,0 \cdot 10^3$ kg.m⁻³ et $\eta = 10^{-3}$ Pl.

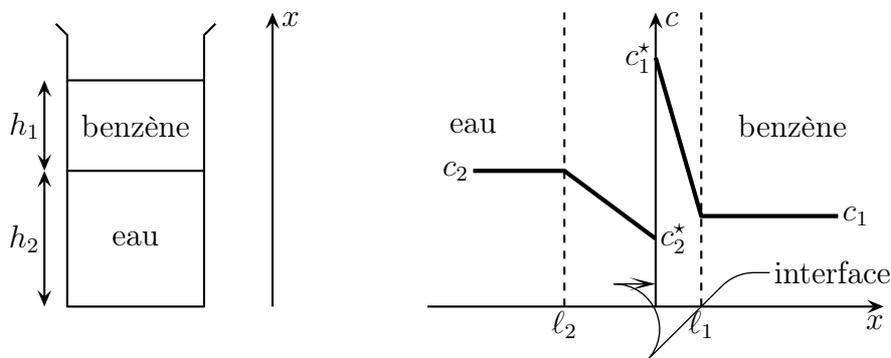
RÉACTEUR NUCLÉAIRE UNIDIMENSIONNEL

On étudie un réacteur nucléaire à une dimension : la densité volumique de neutrons est $n(x,t)$. En moyenne, $\frac{n}{\tau}$ neutrons sont absorbés par unité de temps et de volume, et, pour un neutron absorbé, K neutrons sont produits ($K > 1$). Enfin, leur diffusion dans le milieu satisfait à la loi de FICK, le coefficient de diffusion étant D . Le réacteur est situé entre les plans d'abscisses $x = -a$ et $x = a$. On impose $n(a,t) = n(-a,t) = 0$.

1. Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x,t)$ (équation ①).
2. Dans cette question, on se place en régime permanent. Déterminer $n(x)$ sachant que $n(0) = n_0$.
3. On se place en régime quelconque. On cherche une solution de l'équation ① sous la forme $n(x,t) = f(x)g(t)$.
Déterminer $n(x,t)$ et discuter de la stabilité de réacteur suivant les valeurs de la longueur $L = 2a$ du réacteur.

PARTAGE DE L'IODE ENTRE DEUX SOLVANTS

Un bécber de section S contient de l'eau sur une hauteur h_2 et du benzène sur une hauteur h_1 . On propose un modèle simplifié de l'étude cinétique du transfert vers le benzène du diiode contenu initialement dans l'eau.



À un instant t , on assimile la concentration à la courbe représentée ci-dessus. On suppose que la quantité d'iode dans les couches limites (d'épaisseur ℓ_1 et ℓ_2) est négligeable devant celle contenue dans le reste du récipient. On néglige le volume de ces couches limites devant les volumes V_2 de l'eau et V_1 du benzène. Les concentrations c_1 , c_1^* , c_2 et c_2^* dépendent du temps.

Les coefficients de diffusion de l'iode dans l'eau et dans le benzène sont notés respectivement D_2 et D_1 .

À $t = 0$, $c_1(0) = 0$ et $c_2(0) = c_0$.

1. Donner la relation liant $c_1(t)$ et $c_2(t)$ à chaque instant.
2. On suppose le régime quasi-permanent (la durée caractéristique de variation des concentrations est très grande devant la durée caractéristique de la diffusion).

Quelle est l'expression du vecteur densité de courant de matière \vec{j} dans l'eau ? dans le benzène ?

Donner deux expressions de la quantité d'iode $\frac{dn}{dt}$ qui passe par unité de temps de l'eau vers le benzène.

Justifier le profil des concentrations ci-dessus.

3. Dans toute la suite, afin d'alléger les notations, on prendra $h_2 = 10 h_1$, $D_1 = D_2$ et $\ell_2 = 10 \ell_1$. On exprimera toutes les grandeurs en fonction de D_2 , h_2 et ℓ_2 .

On suppose que seul le phénomène de diffusion limite la vitesse de transfert et que l'équilibre chimique est réalisé à chaque instant au niveau de l'interface. On a alors $c_1^* = K c_2^*$ où K est la constante de partage.

Déterminer c_1^* et c_2^* en fonction de $c_2(t)$.

4. Établir l'équation différentielle vérifiée par $c_2(t)$.

Montrer qu'il apparaît une constante de temps τ à exprimer en fonction des données.

5. Donner les expressions de $\frac{c_1}{c_0}$ et de $\frac{c_2}{c_0}$ en fonction du temps t .
6. **A.N.** : on donne $D_2 = 1.10^{-9} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $\ell_2 = 2,0 \text{ mm}$, $K = 500$ et $h_2 = 5,0 \text{ cm}$.
- Calculer τ .
 - Calculer $\frac{c_{1\infty}}{c_0}$ et $\frac{c_{2\infty}}{c_0}$. Commenter.
 - Calculer t_1 et t_2 tels que $c_2(t_1) = 0,5 c_0$ et $c_2(t_2) = 0,1 c_0$. Commenter.
 - Donner l'allure du profil des concentrations à $t = 0$, t_1 , t_2 et $t \rightarrow \infty$.
7. On agite le bécher de sorte que le benzène soit sous forme de gouttelettes de 2 mm de diamètre dispersées dans l'eau. En supposant valables toutes les autres hypothèses et données ci-dessus, calculer la nouvelle constante de temps τ' sachant que $S = 10 \text{ cm}^2$.
Calculer t'_2 tel que $c_2(t'_2) = 0,1 c_0$.
8. Quelles sont les principales critiques à formuler sur ce modèle de transfert de matière?

ÉVAPORATION DE L'ÉTHER

Un tube cylindrique de hauteur totale L est rempli sur une hauteur h d'éther liquide. À la surface de l'éther, la pression partielle d'éther est égale à la pression de vapeur saturante de l'éther à la température ambiante $T_0 = 293 \text{ K}$. À la sortie du tube, la pression partielle de l'éther est négligeable.

On donne les grandeurs suivantes :

- masse molaire de l'éther : $M = 74,1 \text{ g.mol}^{-1}$;
- masse volumique de l'éther : $\mu = 626 \text{ kg.m}^{-3}$;
- coefficient de diffusion de l'éther dans l'air : $D = 1,5.10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$;
- pression de vapeur saturante de l'éther à 293 K : $P_{\text{sat}} = 0,583 \text{ bar}$.

- On suppose que la durée caractéristique de variation de hauteur $h(t)$ est beaucoup plus lente que la durée caractéristique de diffusion de l'éther dans l'air, de telle sorte que l'on puisse considérer que la diffusion de l'éther dans l'air se fait en régime quasi-permanent.
En déduire la densité moléculaire $n(z,t)$ de la vapeur d'éther dans l'air en fonction de L , $h(t)$, z et de données. L'axe Oz sera pris dirigé vers le bas avec son origine en haut du tube.
- Exprimer le nombre de molécules d'éther qui s'évaporent entre t et $t + dt$.
- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la hauteur d'éther $h(t)$.
En déduire la durée nécessaire à l'évaporation de l'éther contenu sur une hauteur de 15 cm dans un tube de 20 cm.
- Vérifier l'hypothèse de régime quasi-stationnaire effectuée à la première question.