

# Électromagnétisme

## Chapitre 1

**Matière  $\longrightarrow$  champ**

# Table des matières

<b>Biographies succinctes</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>I Source et structure</b>	<b>7</b>
I-1 Sources de champ . . . . .	7
I-1·i des champs vectoriels . . . . .	7
I-1·ii sources du champ électrostatique . . . . .	7
I-1·iii sources du champ magnétostatique . . . . .	8
I-1·iv couplage entre champ magnétique et champ électrique . . . . .	8
I-1·v principe de superposition . . . . .	8
I-2 Représenter les champs . . . . .	9
I-2·i champ de vecteurs . . . . .	9
I-2·ii lignes de champs . . . . .	10
I-3 Plans de symétrie . . . . .	13
I-3·i description . . . . .	13
plan de symétrie des sources . . . . .	13
plan d'antisymétrie des sources . . . . .	14
plan de symétrie des champs . . . . .	14
plan d'antisymétrie des champs . . . . .	15
I-3·ii exemples . . . . .	16
I-4 Invariance des sources . . . . .	16
I-4·i invariance . . . . .	16
I-4·ii invariance sphérique . . . . .	16
I-4·iii invariance par rotation et translation . . . . .	17
I-4·iv une invariance par rotation . . . . .	18
I-4·v deux invariances par translation . . . . .	18
I-4·vi une invariance par translation . . . . .	19
I-5 Lien entre les sources et le champ . . . . .	20
I-5·i principe de CURIE . . . . .	20
I-5·ii pour les plans de symétrie . . . . .	20
I-5·iii pour les invariances . . . . .	21
I-6 Analyser un problème d'électromagnétisme . . . . .	22
<b>II Le champ électrostatique</b>	<b>23</b>
II-1 Le théorème de GAUSS . . . . .	23
II-1·i énoncé . . . . .	23
II-1·ii notion de flux . . . . .	23
II-1·iii interprétation . . . . .	24
II-1·iv utilisation . . . . .	24
II-2 Champ créé par un fil . . . . .	24
II-2·i description volumique . . . . .	24
position du problème . . . . .	24
analyse physique . . . . .	25
théorème de GAUSS . . . . .	26
II-2·ii description linéique . . . . .	28
densité linéique de charge . . . . .	28
lien entre densité linéique et densité volumique . . . . .	29

	petite variation pour GAUSS . . . . .	29
	champ électrique et vision linéique . . . . .	29
II-3	Champ créé par un plan . . . . .	29
II-3.i	plan épais . . . . .	29
	position du problème . . . . .	29
	symétries et invariances . . . . .	30
	théorème de GAUSS . . . . .	31
II-3.ii	plan fin . . . . .	33
	densité surfacique de charges . . . . .	33
	lien entre densité surfacique et densité volumique . . . . .	33
	petite variation pour GAUSS . . . . .	34
	champ électrique et vision surfacique . . . . .	34
	un résultat général . . . . .	34
II-4	Champ créé par une boule . . . . .	35
II-4.i	boule chargée en volume . . . . .	35
	position du problème . . . . .	35
	analyse physique . . . . .	35
	théorème de GAUSS . . . . .	35
II-4.ii	charge ponctuelle . . . . .	37
	limite de la charge ponctuelle . . . . .	37
	champ créé par une charge ponctuelle . . . . .	37
	champ électrique et charges ponctuelles . . . . .	37
	au niveau atomique . . . . .	38
II-5	Le potentiel électrostatique . . . . .	38
II-5.i	Transformer un champ vectoriel en champ scalaire . . . . .	38
	le problème... . . . .	38
	... a déjà été résolu en mécanique . . . . .	38
	définition du potentiel électrostatique . . . . .	39
II-5.ii	Représentation du potentiel électrostatique . . . . .	39
	les isopotentielles . . . . .	39
	intersection locales des lignes de champ . . . . .	40
	sens du champ électrique . . . . .	40
	valeur du champ électrique . . . . .	41
II-5.iii	Déterminer directement un potentiel . . . . .	41
	pour une charge . . . . .	41
	pour une distribution de charges . . . . .	42
	propriétés . . . . .	43
	utilisation, lien avec les analyses . . . . .	43
II-5.iv	Tout vient en fait d'une nouvelle loi fondamentale . . . . .	44
	notion de circulation . . . . .	44
	la circulation du champ électrostatique . . . . .	44
	lien entre circulation et potentiel électrostatique . . . . .	44
II-6	Le condensateur plan . . . . .	45
II-6.i	présentation . . . . .	45
II-6.ii	représentation du champ . . . . .	45
II-6.iii	tracé de lignes isopotentielles . . . . .	46
II-6.iv	relation constitutive . . . . .	46
II-7	Approche énergétique . . . . .	47
II-7.i	à partir du condensateur plan idéal . . . . .	47
	rappels électrocinétiques . . . . .	47

énergie contenue dans le champ . . . . .	48
généralisation . . . . .	48
II-7-ii une boule chargée . . . . .	48
approche en ordre de grandeur . . . . .	49
application numérique au niveau atomique . . . . .	49
<b>III Le champ magnétostatique</b>	<b>51</b>
III-1 Approche microscopique du courant . . . . .	51
III-1-i kesako? . . . . .	51
III-1-ii vecteur densité de courant électrique . . . . .	51
III-1-iii lien avec l'intensité . . . . .	51
cas particulier très fréquent . . . . .	51
généralisation . . . . .	52
III-1-iv vers un courant filiforme . . . . .	53
III-2 Le théorème d'AMPÈRE . . . . .	53
III-2-i énoncé . . . . .	53
intensité enlacée . . . . .	53
III-2-ii interprétation . . . . .	54
III-2-iii utilisation . . . . .	54
III-3 Champ magnétostatique créé par un câble . . . . .	55
III-3-i fil simple . . . . .	55
description . . . . .	55
analyse physique . . . . .	55
théorème d'AMPÈRE . . . . .	56
III-3-ii câble . . . . .	58
description . . . . .	58
symétries et invariances . . . . .	58
théorème d'AMPÈRE . . . . .	59
III-4 Le solénoïde infini . . . . .	60
III-4-i situation analyse . . . . .	60
III-4-ii champ créé . . . . .	60
la circulation . . . . .	61
l'intensité enlacée . . . . .	61
conclusion . . . . .	62
III-4-iii inductance d'une bobine . . . . .	62
flux propre . . . . .	62
inductance . . . . .	63
aspect énergétique . . . . .	64
III-5 La dernière des 4 lois . . . . .	65
III-5-i le champ magnétique est à flux conservatif . . . . .	65
bilan sur les lois . . . . .	65
il en manque une . . . . .	65
Il n'y a pas d'autres lois fondamentales mais... . . . .	65
III-5-ii il n'y a pas de monopôle magnétique . . . . .	66
III-6 Lire les lignes de champ . . . . .	66
<b>Compétences du chapitre</b>	<b>68</b>

## Biographies succinctes

### André Marie AMPERE

(1775 Polymieux (Lyon) – 1836 Marseille)



André Marie s'est en grande partie instruit tout seul en lisant l'*Encyclopédie*. Malgré cela, sa vie est jalonnée de malheurs : son père est guillotiné en 1793, sa première femme meurt au bout de 4 ans de mariage et son deuxième mariage finit par un divorce. André Marie est d'abord professeur de physique à Bourg-en-Bresse en 1801 puis à l'école polytechnique à partir de 1809. En 1820 il s'intéresse de près aux lois de l'électromagnétisme et obtient rapidement des résultats. En 1824 il devient professeur au collège de France mais n'y brille pas en tant que pédagogue. En 1827, nommé inspecteur d'université, il arrête ses travaux scientifiques.

### Carl Friedrich GAUSS

(1777 Brunswick – 1855 Göttingen)



Carl GAUSS est incontestablement considéré comme l'un des plus grands scientifiques de tous les temps. Tant en mathématiques qu'en physique, ses apports furent importants. Né dans une famille pauvre, Carl montre des dons pour les mathématiques : il su mener des calculs compliqués avant de savoir écrire. Encouragé par son père et aidé par une riche famille de Brunswick, Carl fait de brillantes études et c'est en tant que directeur de l'observatoire de Göttingen qu'il mènera tous ses travaux. En ce qui concerne la physique, citons seulement les conditions de GAUSS en optique, la gaussienne, le théorème de GAUSS et une vieille unité de champ magnétique : le gauss ( $10^{-4}$  tesla).

### James MAXWELL

(1831 Edimbourg – 1879 Cambridge)



Issu d'une grande famille écossaise, James se passionne très tôt pour les mathématiques et publie déjà à l'âge de 14 ans quelques résultats. Toutefois il se réoriente vers la physique, fait ses études à Edimbourg et devient professeur à 25 ans. Il travaille un peu sur la couleur (c'est lui qui réalise la première photographie couleur en 1861) mais ses travaux principaux portent sur la thermodynamique statistique et l'électromagnétisme : c'est en rajoutant un terme dans la loi d'Ampère qu'il obtient une vision cohérente de tous les phénomènes l'électromagnétiques.

### Pierre CURIE

(1859 Paris – 1906 Paris)



D'origine alsacienne et issu d'une famille de médecins, Pierre effectue des études de physique sans encombre. Il commence à travailler dans la piroélectricité et la piézoélectricité. Sa thèse en 1895 porte sur le magnétisme. Il est le premier à introduire les notions de symétrie en physique. Il se passionne pour l'enseignement qu'il dispense à l'ESPCI à partir de 1882. Plus tard il rejoint son épouse dans ses recherches sur la radioactivité. Il partagera avec elle et H. BECQUEREL le prix NOBEL de physique en 1903. C'est alors seulement que son travail est enfin reconnu et qu'il devient professeur à la Sorbonne. Il meurt renversé par un fiacre à l'entrée du Pont Neuf. Une citation tirée de ses lettres : « Il faut faire de la vie un rêve et faire d'un rêve une réalité. »

# Matière $\longrightarrow$ champ

L'interaction électromagnétique est une des quatre interactions fondamentales avec l'interaction gravitationnelle et les deux interactions nucléaires (forte et faible). En mettant de côté le poids, l'interaction électromagnétique explique l'écrasante majorité des phénomènes qui nous entoure. C'est ainsi que si la lumière, l'électricité, les ondes radio découlent « naturellement » de l'électromagnétisme, à l'échelle moléculaire, nous pouvons dire, aussi, que les interactions moléculaires sont d'origine électromagnétique. Autrement dit, tout ce qui est cohésion de la matière ou les interactions entre particules matérielles (et, par extension, toutes les forces de contact), relèvent, au fond, de l'électromagnétisme. En revanche, au « cœur » des molécules et des atomes, c'est bien la mécanique quantique qui explique la cohésion des atomes et des nucléons.

L'électromagnétisme a pour objet ce que nous appellerons un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ , composé d'un champ électrique  $\vec{E}$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}$ . Comme nous le verrons dans un chapitre ultérieur, les deux champs sont fondamentalement indissociables : *a priori* quand l'un est là, l'autre aussi. Et ce champ est, comme nous pouvons nous en douter, en interaction avec la matière. « Interaction » est à prendre au sens fort comme une action réciproque et mutuelle :

- la matière (chargée) crée un champ électromagnétique ;
- le champ électromagnétique exerce une force sur la matière.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au premier sens de l'interaction : la création d'un champ par de la matière. Nous nous contenterons toutefois du cas particulier où les champs créés sont statiques. Ainsi, nous verrons, dans une première partie, les sources de champ électromagnétique et la manière de les décrire de manière pertinente. Dans les deux parties suivantes, nous nous intéresserons plus particulièrement au champ électrique puis au champ magnétique.

# I – Sources et structure fondamentale du champ électromagnétique

## I.1 – Sources de champ

### I.1.i – des champs vectoriels



#### Définition

Un *champ* est une zone de l'espace dans laquelle une grandeur physique, scalaire ou vectorielle, est définie en chaque point.

✧ Par exemple, la température est un champ scalaire car il est possible de définir la température en chaque point d'une zone de l'espace.



#### Bon à retenir

⚡ Le champ électrique  $\vec{E}(M)$  et le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  sont des champs vectoriels.

✧ Autrement dit, il faudra calculer **trois composantes** de chaque champ :

$$\vec{E}(M) = E_x(x,y,z)\vec{u}_x + E_y(x,y,z)\vec{u}_y + E_z(x,y,z)\vec{u}_z \quad (\text{I.1})$$

$$\vec{B}(M) = B_x(x,y,z)\vec{u}_x + B_y(x,y,z)\vec{u}_y + B_z(x,y,z)\vec{u}_z \quad (\text{I.2})$$

### I.1.ii – sources du champ électrostatique



#### Loi

Les sources du champ électrostatique sont les charges, qu'elles soient immobiles ou en mouvement.

✧ La matière est globalement neutre, donc pour obtenir des charges au niveau macroscopique, il faut « travailler » la matière, par exemple par frottement (cf. électricité statique).

✧ Les charges (ions, électrons...) sont, en toute généralité, réparties dans un volume, ce qui nous invite à définir la densité volumique de charge.



#### Définition

La *densité volumique de charge* au point  $P$  notée  $\rho(M)$  est définie par :

$$\delta q = \rho(P)\delta\mathcal{V} \quad \text{où :}$$

→  $d\mathcal{V}$  est un volume infinitésimal autour de  $P$  ;

→  $dq$  est la charge contenue dans  $d\mathcal{V}$ .

$\rho$  s'exprime en  $\text{C.m}^{-3}$ .

👉 *Remarque.* Il n'y a aucune raison *a priori* pour que cette densité soit uniforme.

✧ Encore une remarque qui a son importance :



#### Bon à retenir

⚡ Le champ électrique est défini au sein d'une répartition volumique de charges.

✧ Cela va peut-être sans le dire, mais cela va mieux en le disant !

### I.1.iii – sources du champ magnétostatique



#### Loi

Les courants électriques et les aimants permanents sont des sources de champ magnétique.

- ✧ Les aimants permanents feront l'objet d'un chapitre ultérieur. Pour l'instant, nous allons nous concentrer sur les courants électriques.
- ✧ De manière un peu plus générale que les « courants électriques », **tout ensemble** de charges qui bouge, engendre un champ magnétique.
- 👉 *Remarque.* Les lois que nous verront sont valables dans l'ARQS, *i.e.* tant que les courants électriques sont « lentement » variables (jusqu'au Mhz, il n'y a pas de problème).
- ✧ Lorsque nous représentons le circuit source de champ magnétique, nous ne représentons pas le générateur nécessaire pour qu'un courant circule, car là ne sera pas le but de l'étude.
- ✧ Toutefois nous remarquerons que les circuits doivent toujours être fermés.



#### Bon à retenir

⚡ *Le champ magnétique n'est pas défini sur un fil parcouru par un courant.*

- ✧ Cette absence de définition vient d'une limite du modèle que nous expliciterons dans la suite.

### I.1.iv – couplage entre champ magnétique et champ électrique

- ✧ Dans le cadre de champ statique, nous admettrons le résultats suivant :



#### Loi

Les champs électrostatique et magnétostatique sont découplés au sens où ils n'ont aucune influence directe l'un sur l'autre.

- ✧ Ainsi :
  - ➔ un ensemble non globalement neutre de charges engendre uniquement un champ électrostatique ;
  - ➔ un ensemble globalement neutre de charges dont seule une partie bouge engendre uniquement un champ magnétostatique.
- ✧ Nous voyons donc qu'il est possible, avec un ensemble globalement non neutre qui bouge, de créer *simultanément* un champ électrostatique et un champ magnétostatique.
- 👉 *Remarque.* Dans un chapitre ultérieur, celui sur les équations de MAXWELL, nous verrons que les variations *temporelles* de  $\vec{E}$  engendrent un champ  $\vec{B}$  et réciproquement.

### I.1.v – principe de superposition



#### Définition

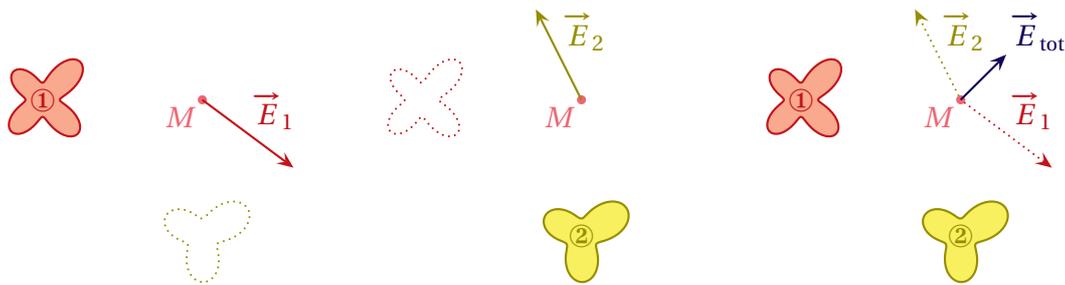
La disposition et la répartition des sources est appelée *distribution*.



#### Loi

Lorsqu'une distribution peut se voir comme la réunion de deux distributions ① et ②, le champ électrique ou magnétique, en un point  $M$  quelconque, est la superposition du champ créé par ① comme si ② n'existait pas et du champ créé par ② comme si ① n'existait pas :

$$\vec{E}(M_0) = \vec{E}_1(M_0) + \vec{E}_2(M_0) \quad \text{et} \quad \vec{B}(M_0) = \vec{B}_1(M_0) + \vec{B}_2(M_0)$$



✧ C'est un principe fondamental : c'est sur ce principe que seront fondées les méthodes permettant de déterminer les champs.



**Loi**

Dans le vide et les milieux linéaires, les champs électriques et magnétiques obéissent au principe de superposition.

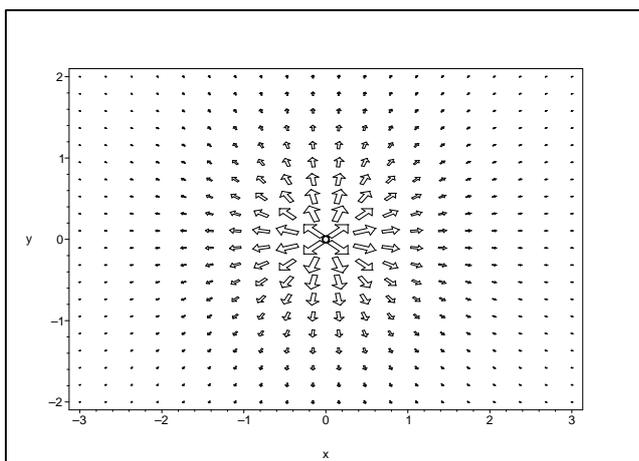
- ✧ Sauf indication contraire, tous les milieux sont *a priori* linéaires.
- ✧ Pour qu'un milieu soit non linéaire, il **faudrait** qu'il y ait des interactions entre le milieu et le champ **et** que ces interactions soient non linéaires.
- ✧ En dehors des milieux « spécialement prévus pour » ou des milieux utilisés dans des conditions extrêmes, le seul milieu furieusement non linéaire usuel est un milieu dit ferromagnétique : ce sont les aimants permanents, que nous n'étudierons que sous l'angle du champ magnétique produit et non sous l'angle de l'interaction champ  $\longleftrightarrow$  matière.

## I.2 – Représenter les champs

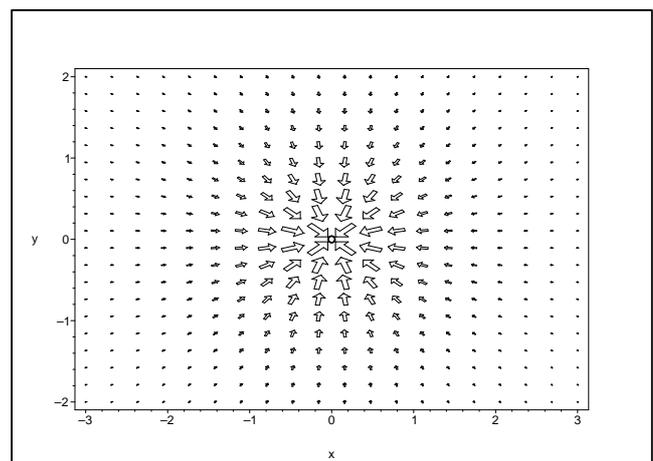
### I.2.i – champ de vecteurs

- ✧ Sur l'illustration précédente, nous avons représenté le champ  $\vec{E}$  qu'en un seul point de l'espace, ce qui peut prêter à confusion étant donné que le champ est *a priori* défini partout dans l'espace.
- ✧ Pour représenter l'ensemble du champ, nous pouvons représenter directement les vecteurs en plein de points différents.

Graphique 1



Graphique 2



✧ Légende :

- ➔ graphique 1 : champ électrostatique créé par une petite sphère positive ;
- ➔ graphique 2 : champ électrostatique créé par une petite sphère négative.



### Bon à retenir

Dans une zone vide de l'espace, le champ  $\vec{E}$  a tendance à pointer vers les zones de charge négative et à pointer dans le sens opposé des zones de charge positive.



### Bon à retenir

Dans une zone vide de l'espace, le champ  $\vec{E}$  en un point  $M$  est d'autant plus intense que le point  $M$  est proche d'une zone non vide de charge.



### Bon à retenir

Le champ électrique ne varie notablement entre un point et son voisin qu'à proximité immédiate des sources.

✧ Nous pouvons remarquer que cette représentation n'est pas très pratique, d'une part parce qu'elle est très lourde à réaliser et d'autre part parce que la grande variabilité de la norme des vecteur rend la représentation peu lisible.

## I.2.ii – lignes de champs

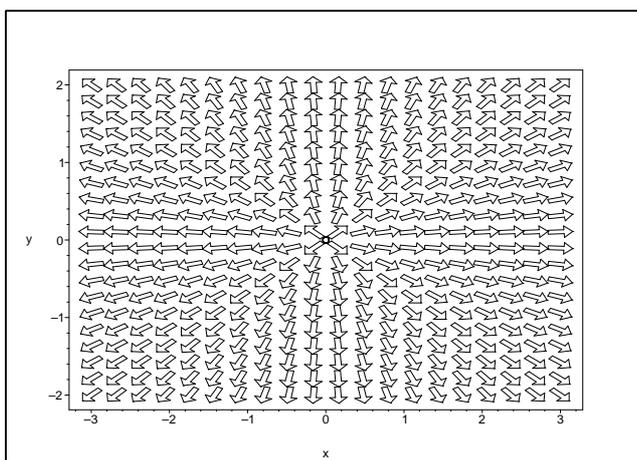


### Définition

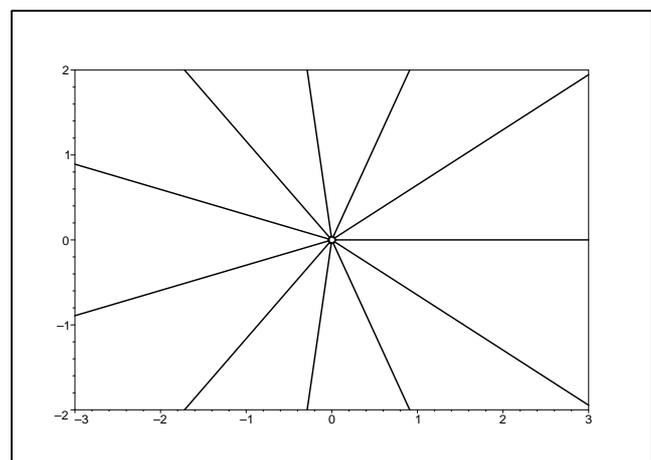
Une *ligne de champ* est une ligne orientée de l'espace tangente en chacun de ses points au champ vectoriel qu'elle représente.

✧ Nous verrons plus tard comment représenter, par des lignes, des champs scalaires.  
 ✧ Il ne semble, *a priori*, impossible de lire l'intensité d'un champ sur une ligne, pourtant nous verrons dans le paragraphe III-6 que, pour des lignes tracées dans une zone vide de charges, il est facile de retrouver les variations qualitatives de norme.

Graphique 3



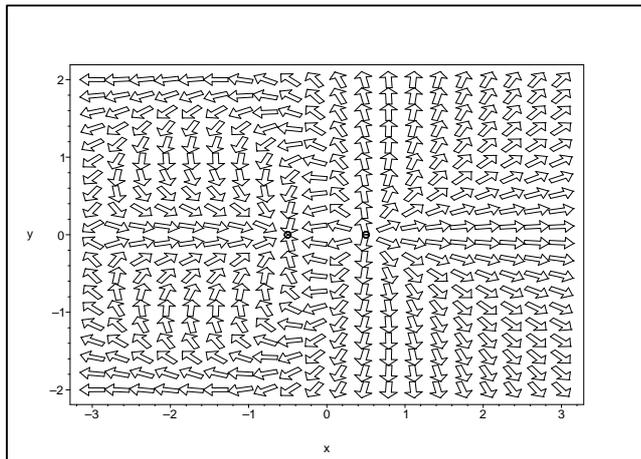
Graphique 4



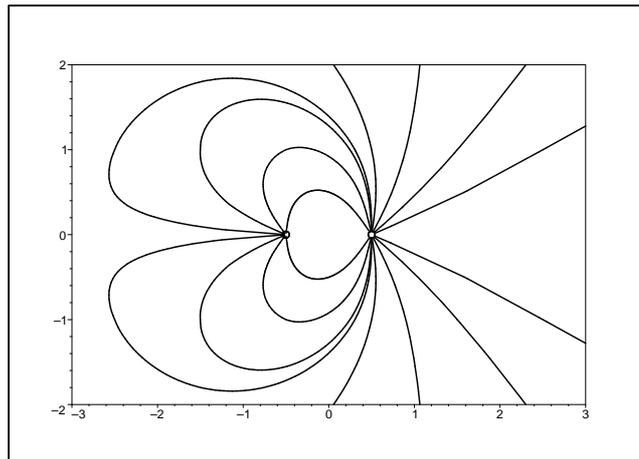
✧ Légende :

- graphique 3 : d'abord toutes les flèches représentant le champ sont mises à la même taille ;
- graphique 4 : ensuite les lignes sont tracées et il faut rajouter le sens des lignes.

Graphique 5



Graphique 6



⇨ Légende :

- graphique 5 : d'abord toutes les flèches représentant le champ sont mises à la même taille ;
- graphique 6 : ensuite les lignes sont tracées et il faut rajouter le sens des lignes.

**Bon à retenir**

*Dans une zone vide de l'espace, les lignes de champs électriques « sortent » des zones de charges positives et rentrent dans les zones de charges négatives.*

⇨ De plus, nous pouvons remarquer que, plus nous nous éloignons des sources, plus les lignes ont tendance à se séparer. Or, en s'éloignant, des sources, il est naturel que l'intensité du champ diminue<sup>1</sup>. Nous pouvons en déduire la loi suivante, que nous démontrerons à la fin du chapitre,

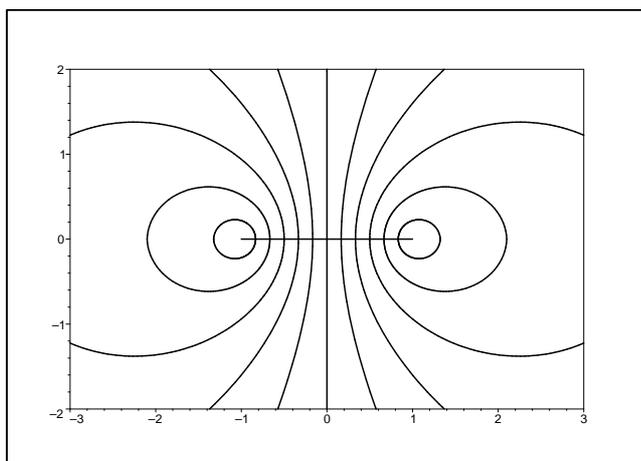
**Loi**

Dans une zone vide de charges, lorsque les lignes de champ électriques s'écartent, l'intensité du champ diminue.

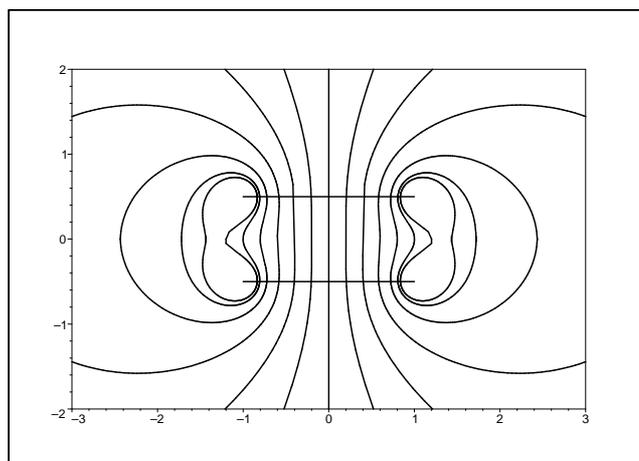
⇨ Représentons maintenant quelques lignes du champ magnétique créé par des boucles circulaire de courant.

⇨ Dans les schémas suivant les traits horizontaux représentent les petits circuits électriques circulaires vu de profil.

Graphique 7



Graphique 8



⇨ Légende :

- graphique 7 : champ créé par une boucle de courant ;

1. Du moins s'il n'y a pas une infinité de sources, comme dans le cas d'un plan infini chargé.

→ graphique 8 : champ créé par deux boucles de courant de même sens (dessiner quelques flèches et faire constater les symétries).

20

**Bon à retenir**  
 Le sens du champ magnétique créé par une boucle de courant à l'intérieur de celle-ci est donné par la règle de la main droite.

**Bon à retenir**  
 Le champ magnétique ne varie notablement entre un point et son voisin qu'à proximité immédiate des sources.

**Bon à retenir**  
 Les lignes de champs magnétiques forment des boucles autour des circuits électriques.

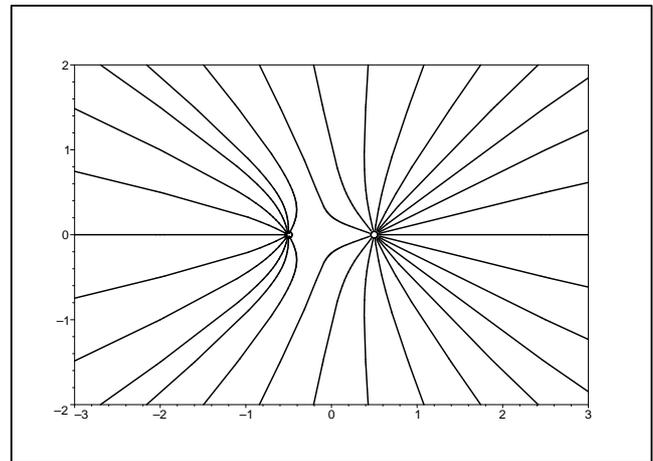
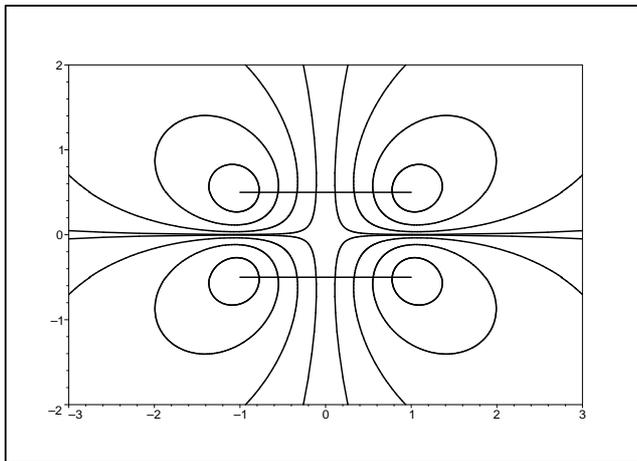
✧ Qualitativement, le dessin des lignes de champ magnétique est considérablement différent des lignes de champ électrique qui semblaient prendre leur source dans les charges.

7

20

Graphique 9

Graphique 10



✧ Légende :

- graphique 9 : champ créé par deux boucles de courant opposé ;
- graphique 10 : champ créé par deux zones chargées, celle de droite étant positive.

✧ Regardons les deux lignes de champ qui se touchent presque sur le graphique 9 et choisissons deux points  $M$  et  $M'$ , un sur chaque ligne, tels que  $M$  et  $M'$  soient très proches.

✧ Comme  $M$  et  $M'$  sont loin des sources, le champ créé par chacune des deux boucles est à peu près le même **donc** le champ résultant est lui aussi à peu près le même.

✧ En particulier les champs en  $M$  et  $M'$  sont de même sens.

**Bon à retenir**  
 Dans une zone vide de l'espace, deux lignes de champ proches l'une de l'autre ont le même sens.

✧ En ce qui concerne l'évasement des lignes de champ magnétique, nous pouvons faire la même remarque que pour le champ électrique.

21

**Loi**  
 Lorsque les lignes de champ magnétique s'écartent, l'intensité du champ diminue.

✧ Sur le graphique 9, nous avons l'impression que les lignes de champ se repoussent, ce qui est **faux** car le

champ créé sur une des lignes est la résultante des champs créés par les deux boucles de courant.

⇨ Même qualitativement, nous pouvons voir que la charge de droite est plus chargée que celle de gauche.



### Attention !

Les lignes de champ n'appartiennent à aucune source : chaque ligne est créée par l'ensemble de la distribution.



### Bon à retenir

Lorsque deux lignes de champ se coupent :

- soit le champ est nul ;
- soit le champ n'est pas défini.

## I.3 – Plans de symétrie

⇨ C'est une notion au sens large, car il existe deux types de plans de symétrie. D'ailleurs les invariances sont aussi appelées « symétries ».

### I.3.i – description

#### ★ plan de symétrie des sources



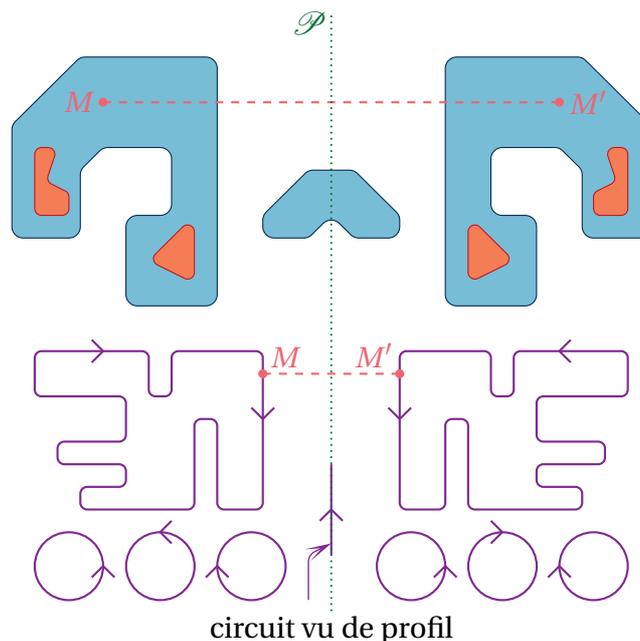
### Définition

Un plan – éventuellement fictif – est appelé *plan de symétrie des sources* lorsque, pour un couple quelconque de points symétriques l'un l'autre par rapport à ce plan, la distribution est la même pour les deux.

⇨ En notant  $M$  et  $M'$  deux points symétriques, cela signifie, pour les charges, que la condition est  $\rho(M) = \rho(M')$ .

⇨ Pour les courants, il faut prendre en compte le petit bout de fil, *i.e.* le sens du courant.

⇨ Sur l'exemple suivant le plan (vu en coupe)  $\mathcal{P}$  représenté en pointillé est plan de symétrie des sources.





### Bon à retenir

Un fil ne peut pas couper un plan de symétrie des source mais peut y être entièrement inclus.

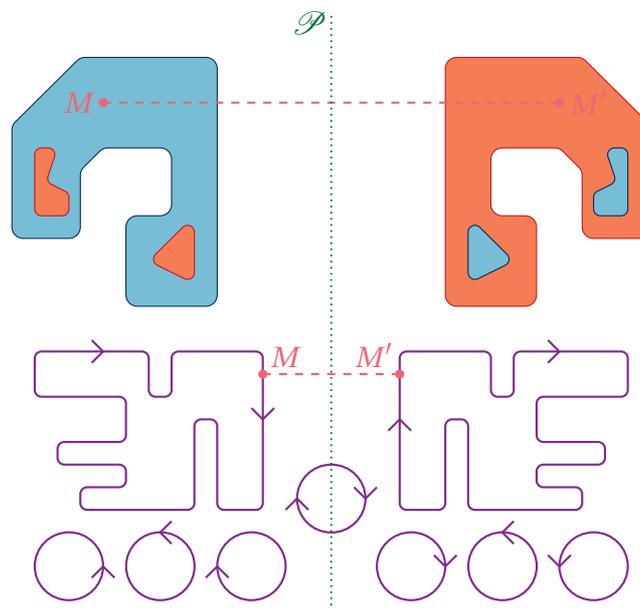
### ★ plan d'antisymétrie des sources



#### Définition

Un plan – éventuellement fictif – est appelé *plan d'antisymétrie des sources* lorsque, pour un couple quelconque de points symétriques l'un l'autre par rapport à ce plan, les distributions en ces deux points sont opposées l'une à l'autre.

- ✧ Si on note  $M$  et  $M'$  les deux points, cela signifie, pour les charges, que la condition est  $\rho(M) = -\rho(M')$ .
- ✧ Pour les courants, il faut prendre en compte le petit bout de fil  $i d\vec{\ell}$ .



### Bon à retenir

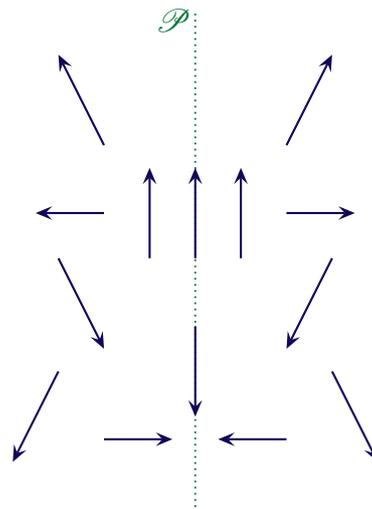
Il ne peut pas y avoir de charges sur un plan d'antisymétrie des sources.

### ★ plan de symétrie des champs



#### Définition

Un plan – éventuellement fictif – est appelé *plan de symétrie d'un champ* ( $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$ ) lorsque, pour un couple quelconque de points  $M$  et  $M'$  symétriques l'un l'autre par rapport les champs  $\vec{E}(M)$  et  $\vec{E}(M')$  sont symétriques.

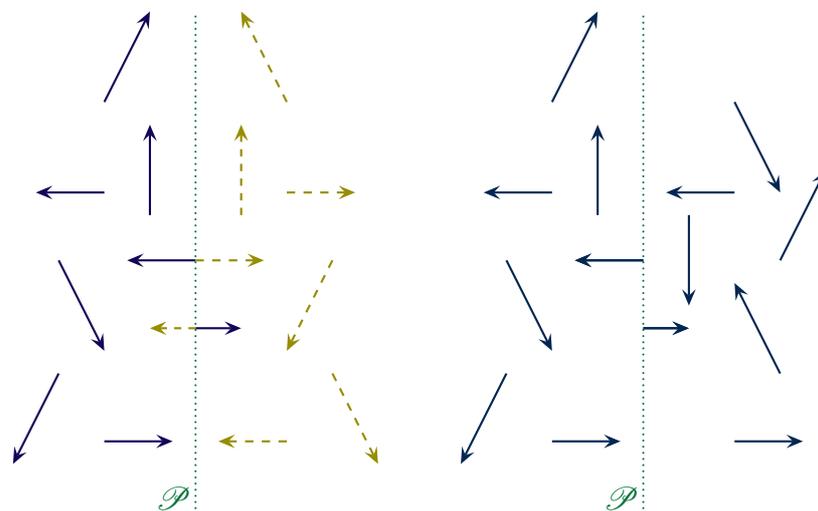


**Loi**  
 En un point d'un plan de symétrie du champ, le champ en ce point est contenu dans ce plan.

★ plan d'antisymétrie des champs

**Définition**  
 Un plan – éventuellement fictif – est appelé *plan d'antisymétrie d'un champ* ( $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$ ) lorsque, pour un couple  $M$  et  $M'$  quelconque de points symétriques l'un l'autre par rapport à ce plan les champs  $\vec{E}(M)$  et  $\vec{E}(M')$  sont les opposés des symétriques.

⇨ Autrement dit, il faut d'abord prendre le symétrique puis ensuite son opposé.



**Loi**  
 En un point d'un plan d'antisymétrie du champ, le champ en ce point est normal à ce plan.

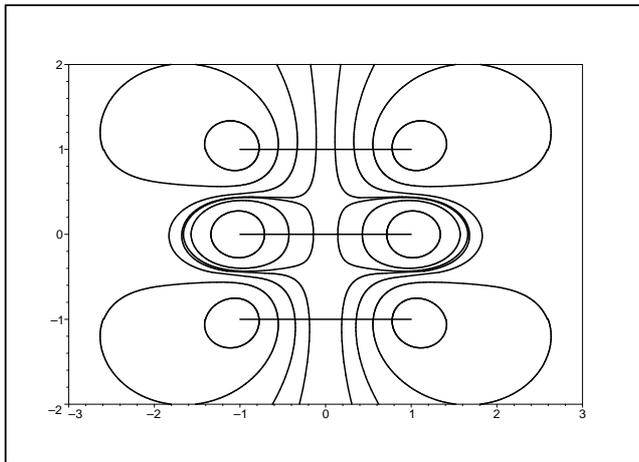
⇨ En représentation en terme de champ, il est clair qu'un champ qui admet un plan de symétrie se voit moins qu'un champ qui admet un plan d'antisymétrie. Mais en représentation en ligne de champs, les deux seront faciles à voir.

👉 *Remarque.* Par extension, lorsque nous rechercherons les plans de « symétrie », cela comprendra évidemment la recherche des plans d'**antisymétrie**.

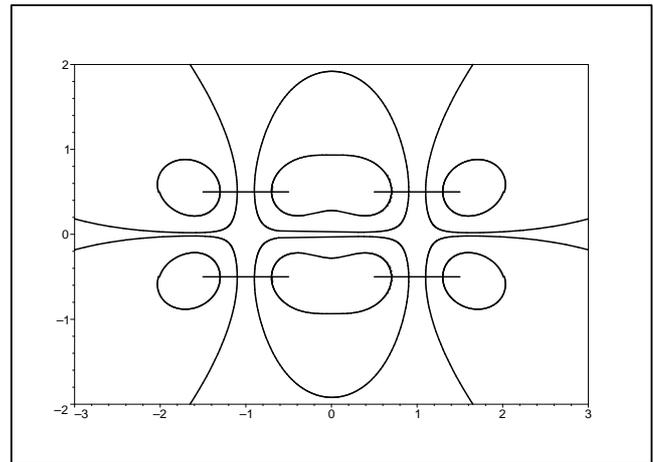
### I.3.ii – exemples

✧ Sur quelques exemples, cherchons les plans de symétries et d'antisymétrie des sources et des champs.

Graphique 11



Graphique 12



✧ Légende :

→ graphique 11 : champ créé par trois boucles de courant ;

→ graphique 12 : champ créé par 4 boucles de courant.

✧ Sur le graphique 11 la boucle du bas est parcourue par un courant « de gauche à droite ».

✧ Sur le graphique 12 la boucle du bas à gauche est parcourue par un courant « de gauche à droite ».



#### Bon à retenir

Les lignes de champ ne peuvent pas couper un plan de symétrie des champs mais peuvent couper (orthogonalement) un plan d'antisymétrie des champs.

## I.4 – Invariance des sources

### I.4.i – invariance



#### Définition

Une distribution est dite *invariante* lorsqu'elle peut être bougée sans que cela ne change globalement la position des différentes sources.

### I.4.ii – invariance sphérique



#### Définition

Une distribution admet une *invariance sphérique* lorsque, décrite par les coordonnées sphériques, elle ne dépend que de  $r$  ; distance à un point de référence.



✧ Penser à une sphère, à des boules concentriques, un oignon...

✧ L'invariance sphérique se trouve aussi en mécanique lorsque nous assimilons les différents astres (Terre, Soleil...) à des sphères uniformes. La conséquence de cette symétrie est que, du point de vue de la gravitation, l'astre se comporte, alors, comme un point unique situé en leur centre<sup>2</sup>.

👉 *Remarque.* Il est particulièrement difficile d'avoir une distribution de courant respectant la symétrie sphérique. Ce n'est pourtant pas impossible avec des courants qui sortent tous du centre.



### Définition

Nous appellerons *type sphère* une distribution qui admet une invariance sphérique.



Cette dénomination n'est pas répandue ! Ne la cherchez pas dans d'autres cours.

✧ Dans la mesure du possible (*i.e.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous noterons  $O$  le centre de la distribution.



### Bon à retenir

Une géométrie de type sphère possède :

→ deux invariances par rotation ;

→ deux infinités de plans remarquables, tous contenant le centre.

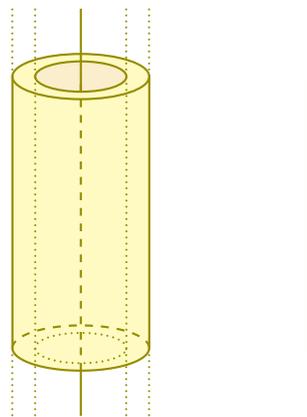
✧ Les plans ne peuvent qu'être plans de symétrie. Si un problème semble fournir des plans d'antisymétrie, c'est que la distribution n'est pas sphérique !

## I-4-iii – invariance par rotation et translation



### Définition

Une distribution admet une *invariance par rotation et par translation* lorsque, décrite par les coordonnées cylindriques, elle ne dépend que de  $r$  distance par rapport à un axe.



✧ C'est le cas, par exemple, de cylindres<sup>3</sup> infinis, pleins ou creux pour les charges ou, pour le champ magnétique, du fil infini.



### Définition

Nous appellerons *type fil* une distribution qui admet une invariance par rotation et une invariance par translation.



Cette dénomination n'est pas répandue et encore moins conventionnelle ! Ne la cherchez pas dans d'autres cours.

2. Nous montrerons ce résultat dans le chapitre 2.

3. « de révolution »

- ⇨ Dans la mesure du possible (*i.e.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous choisirons  $\vec{u}_z$  comme l'axe de symétrie.

**Bon à retenir**

Une géométrie de type fil possède :

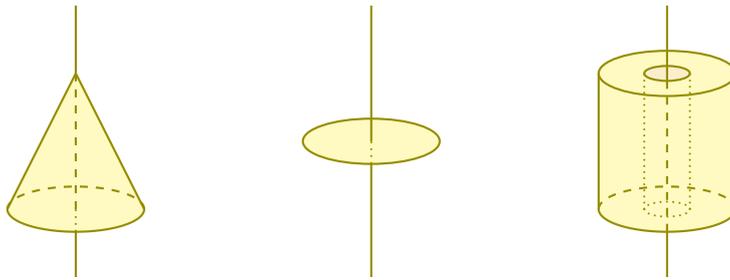
- deux invariances, une par translation, une par rotation ;
- deux infinités de plans remarquables, tous ceux orthogonaux à l'axe et tous ceux contenant l'axe

- ⇨ Les plans remarquables peuvent être plans de symétries ou d'antisymétrie, il faut s'adapter à chaque cas.

### I.4.iv – une invariance par rotation

**Définition**

Une distribution admet une *invariance par rotation* lorsque, décrite par les coordonnées cylindriques, elle ne dépend pas de  $\theta$ .



- ⇨ Nous pouvons penser, par exemple, à une distribution volumique uniforme de charges formant un cône ou un disque pour le champ électrique ou, pour le champ magnétique, à une simple boucle circulaire.

**Définition**

Nous appellerons *type disque* une distribution qui n'admet qu'une invariance par rotation.

- STOP** Cette dénomination, comme les précédentes n'est pas répandue! Ne la cherchez pas dans d'autres cours.

- ⇨ Dans la mesure du possible (*i.e.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous choisirons  $\vec{u}_z$  comme l'axe de symétrie.

**Bon à retenir**

Une géométrie de type disque possède :

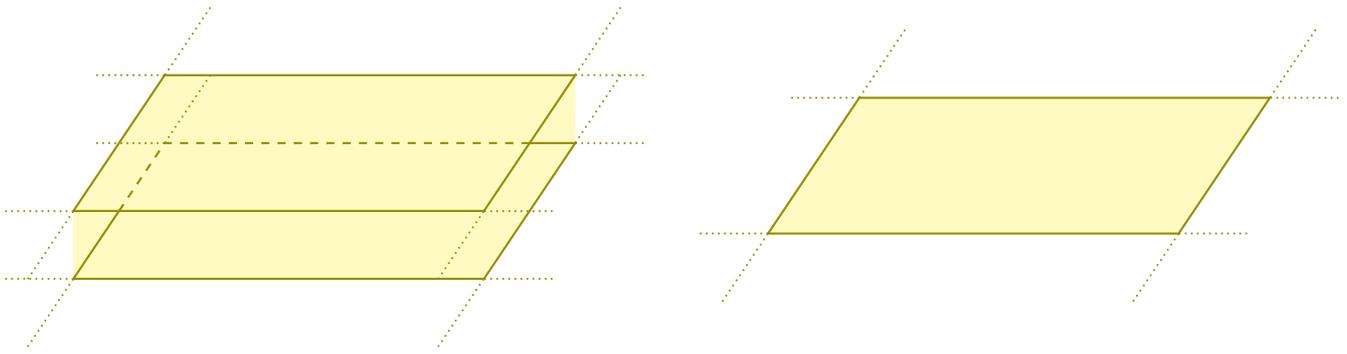
- une invariance par rotation ;
- une infinité de plans remarquables, tous ceux contenant l'axe.

- ⇨ Les plans remarquables peuvent être plans de symétries ou d'antisymétrie, il faut s'adapter à chaque cas.

### I.4.v – deux invariances par translation

**Définition**

Une distribution admet *deux invariances par translation* lorsque, décrite par les coordonnées cartésiennes, elle ne dépend que d'une seule coordonnée.



- ⇨ C'est par exemple le cas d'un espace délimité par deux plans infinis entre lesquels il y aurait une densité volumique  $\rho$  uniforme de charge.

### Définition



Nous appellerons *type plan* une distribution qui admet deux invariances par translation.



Cette dénomination non plus n'est pas répandue ! Ne la cherchez pas dans d'autres cours.

- ⇨ Dans la mesure du possible (*i.e.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous choisirons  $\vec{u}_z$  comme « pas comme les autres », *i.e.* l'axe normal aux deux axes de translations.
- ⇨ Pour le champ magnétique, nous pouvons penser à ce qu'on appelle une nappe de courant comme il en existe, dans les ordinateurs. Attention : la nappe doit être infinie dans les deux directions, *i.e.* être composée d'une infinité de fils infinis parallèles.



### Bon à retenir

Une géométrie de type plan possède :

- deux invariances par translation ;
- deux infinités de plans remarquables.

- ⇨ Les plans remarquables peuvent être plans de symétries ou d'antisymétrie, il faut s'adapter à chaque cas.



Ne pas oublier de regarder si, par hasard, il n'existe pas d'autres plans remarquables en plus de ceux obligatoires.

## I.4.vi – une invariance par translation



### Définition

Une distribution admet une *invariance par translation* lorsque, décrite par les coordonnées cartésiennes, elle ne dépend que de deux coordonnées.



- ⇨ C'est, par exemple, le cas du ruban à section rectangulaire qui serait rempli de charges avec une densité uniforme : nous pouvons « déplacer » le ruban suivant  $\vec{u}_x$  sans que, globalement, la distribution ne change.



La section du ruban n'est pas forcément rectangulaire, elle peut être absolument quelconque, sauf circulaire, car là nous retrouverions la symétrie type « fil ».

- ⇨ Pour le champ magnétique, nous pouvons penser simplement à deux fils infinis parallèles parcourus par des courants identiques ou non.

**Définition**

Nous appellerons *type ruban* une distribution qui admet une invariance par translation.

De manière parfaitement surprenante, cette dernière dénomination n'est pas répandue ! Ne la cherchez pas dans d'autres cours.

✧ Dans la mesure du possible (*i.e.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous choisirons  $\vec{u}_z$  comme « pas comme les autres », *i.e.* l'axe de translation.

**Bon à retenir**

Une géométrie de type ruban possède :

- une invariance par translation ;
- une infinité de plans remarquables, tous ceux orthogonaux à l'axe.

✧ Les plans remarquables sont soit plan de symétries (lorsque les sources sont des charges) soit plan d'antisymétrie (lorsque les sources sont des courants).

Ne pas oublier de regarder si, par hasard, il n'existe pas d'autres plans remarquables en plus de ceux obligatoires.

## I.5 – Lien entre les sources et le champ

### I.5.i – principe de CURIE

✧ Il s'agit là d'un principe très fort en physique, au sens où si une expérience semble désobéir à ce principe c'est qu'il y a un phénomène nouveau sous-jacent.

**Loi**

## PRINCIPE DE CURIE

L'ensemble des conséquences est au moins aussi invariante que les causes.

- ✧ Cette formulation un peu étrange permet de lever l'apparent paradoxe du crayon qui tombe.
- ✧ En effet, supposons un crayon initialement vertical. Nous savons que ce crayon va tomber mais nous savons aussi qu'il ne peut tomber que d'un côté.
- ✧ Nous pourrions voir là une « brisure de symétrie » au sens où la cause est verticale (le poids) et la conséquence (le crayon à plat sur la table) n'est pas symétrique par rapport à la verticale.
- ✧ Sauf que le principe de CURIE n'impose pas la symétrie à *une* conséquence mais à l'*ensemble* des conséquences. Et là, si nous regardons, en même temps, le crayon tombé à droite et le crayon tombé à gauche, nous voyons que la symétrie est bien respectée.
- ✧ Il s'agit là de cas de figures rares à notre niveau. En ce qui concerne l'électromagnétisme, le principe de CURIE se décline sous une forme bien plus simple.

### I.5.ii – pour les plans de symétrie

✧ C'est un peu particulier car  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  n'ont pas le même comportement.

**Loi**

Sources	champ $\vec{E}$	champ $\vec{B}$
Plan de symétrie	Plan de symétrie	Plan d'antisymétrie
Plan de d'antisymétrie	Plan de d'antisymétrie	Plan de symétrie



**Définition**

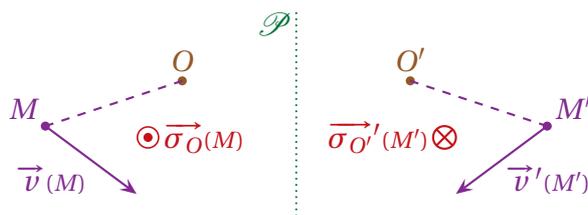
$\vec{E}$  est appelé *vrai vecteur* ou *vecteur polaire*.



**Définition**

$\vec{B}$  est appelé *pseudovecteur* ou *vecteur axial*.

- Il est possible de rencontrer la notation  $\vec{B}$  pour un pseudo vecteur.
- Nous avons déjà rencontré un vecteur axial : le moment cinétique.
- En effet, si nous prenons deux situations parfaitement symétriques par rapport à un plan (imaginons pour cela qu'une des deux situations soit « l'autre » mais vue dans un miroir) les deux moments cinétiques admettent le plan comme plan d'antisymétrie.



- Le rôle du produit vectoriel n'est pas anodin, comme nous le verrons dans le chapitre 4 d'électromagnétisme.

**I-5-iii – pour les invariances**



**Loi**

Lorsque les sources d'un champ possèdent une invariance dans un système de coordonnées, alors la norme du champ engendré possède la même invariance dans le même système de coordonnées.

- Techniquement, si  $\rho(x,y,z)$ , alors, en norme  $E(x,y,z)$ .

type	sphère	cylindre	disque	plan	ruban
distribution	$\rho(r)$ (ou $i(r)$ )	$\rho(r)$ ou $i(r)$	$\rho(r,z)$ ou $i(r,z)$	$\rho(z)$ ou $i(z)$	$\rho(x,y)$ ou $i(x,y)$
norme	$E(r)$	$E(r)$ ou $B(r)$	$E(r,z)$ ou $B(r,z)$	$E(z)$ ou $B(z)$	$E(x,y)$ ou $B(x,y)$



Pour les sphères et les cylindres, ce ne sont pas les mêmes  $r$  !

- Et ce principe est valable pour *n'importe quelle source*. C'est ainsi que nous rencontrerons parfois  $\vec{B}$  comme source de  $\vec{E}$ . Nous aurons alors

$$\text{si } B(r,\theta,z) \text{ alors } E(r,\theta,z) \tag{I.3}$$



**Loi**

Les invariances des sources permettent de connaître la dépendance fonctionnelle des champs.

## I.6 – Analyser un problème d'électromagnétisme

- ✧ Analyser un problème consiste, avant toute chose, à trouver :
  - la ou les sources du champ considéré ;
  - les invariances / quel repérage utiliser pour décrire ces sources ;
  - les plans de symétrie ou d'antisymétrie des sources ;
  - les grandeurs pertinentes : description des sources, géométrie et structure (cf. parties suivantes).
- ✧ Cette analyse doit conduire :
  - à la focalisation de l'attention sur les sources de champ (schéma **avec** repérage) ;
  - à la dépendance du champ considéré (grâce aux invariances) ;
  - à la direction du champ considéré (grâce aux plans de symétrie et d'antisymétrie).
- ✧ Dans les parties suivantes, nous allons nous intéresser à une méthode de détermination pour chaque champ.

## II – Le champ électrostatique

### II.1 – Le théorème de GAUSS

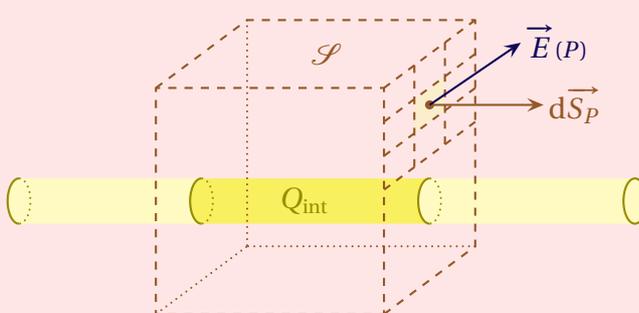
#### II.1.i – énoncé

**Loi**  
THÉORÈME DE GAUSS

Soit une distribution quelconque de charges et une surface **fermée**  $\mathcal{S}$  – éventuellement fictive – quelconque. Nous pouvons alors écrire :

$$\oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{où :}$$

- $\vec{E}(P)$  est le champ  $\vec{E}$  en un point quelconque de  $\mathcal{S}$  ;
- $d\vec{S}_P$  est le vecteur surface au point  $P$  considéré, toujours normal et vers l'extérieur ;
- $Q_{\text{int}}$  est la charge contenue dans le volume délimité par la surface de contrôle ;
- $\epsilon_0$  est la permittivité du vide (en  $\text{Fm}^{-1}$ ).



**Loi**

Un champ électrique se mesure en  $\text{V.m}^{-1}$ .

**Définition**

Une surface est dite *fermée* lorsqu'elle sépare l'espace en deux zones distinctes : l'intérieur (de taille finie) et l'extérieur (infini). Ces zones sont telles qu'il n'est pas possible d'aller d'un point *intérieur* à un point *extérieur* sans traverser la surface.

🔥 *Remarque.* Ne pas oublier le petit rond sur le symbole « somme » qui signifie, justement, que la surface est fermée.

- ✧ Le caractère « fermé » d'une surface est une notion très intuitive en physique, même si, en mathématique, elle peut être définie de manière plus rigoureuse.
- ✧ Le théorème de GAUSS donne une information *globale* sur le champ, *i.e.* ne donne pas le champ en *un* point mais sur toute une surface en même temps.
- ✧ La présence de  $Q_{\text{int}}$  ne doit pas faire croire que le champ n'est créé que par ce qui est à l'intérieur de la surface de contrôle : le champ est **toujours** créé par la totalité des charges. D'ailleurs il y a besoin de connaître toutes les charges... pour bien choisir sa surface de GAUSS.

#### II.1.ii – notion de flux

- ✧ C'est une notion vue en première année, lors de l'induction et de l'utilisation de la loi de FARADAY

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{II.1})$$

### Définition



La quantité  $\iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}$  est notée  $\Phi_E$  et est appelée *flux* de  $\vec{E}$  à travers  $\mathcal{S}$ .

- ✧ Le flux à travers une surface peut se représenter, ou s'imaginer, comme la « quantité de champ » qui passe à travers la surface, un peu à l'image d'un filet à papillons.
- ✧ Le flux ne se calcule pas forcément à travers une surface fermée, preuve en est la loi de FARADAY, mais **pour le théorème de GAUSS** c'est obligatoire.

### Loi



Le flux d'un champ de vecteur à travers une surface est positive si le champ est dirigé vers l'extérieur (*i.e.* « sort » de la surface) et négative s'il est dirigée vers l'intérieur (*i.e.* « rentre » dans la surface).

- ✧ Pour calculer un flux, nous allons procéder avec une méthode usuelle :
  - d'abord découper la surface en petits morceaux (importance d'un « bon choix » de surface et de repérage) ;
  - calculer le flux élémentaire  $d\Phi$  sur chaque petit morceau (importance des lois physiques) ;
  - additionner le tout (quelques « calculs » à faire).

### II.1.iii – interprétation

- ✧ Finalement ce théorème nous dit que :
  - une zone chargée fait, soit sortir des lignes de champ (si elle est positive), soit rentrer des lignes de champ (si elle est négative) ;
  - en dehors des zones chargées, les lignes rentrent autant quelque part qu'elles n'en sortent.

7

### II.1.iv – utilisation

- ✧ Ce théorème est toujours théoriquement applicable ! Ou presque : il ne faut pas de charges ponctuelles sur la surface, mais c'est un cas qui n'arrive pas en pratique car...
- ✧ En pratique, il est difficilement applicable car le calcul de  $\Phi$  est souvent malaisé.
- ✧ Pour que tout se passe bien (*i.e.* pour que le calcul soit faisable) il faut qu'il y ait beaucoup de symétries et d'invariances.



### Bon à retenir

Une « bonne » surface de GAUSS est une surface, qui respecte les symétries de la distribution, et qui contient, en plein milieu d'elle-même, le point où nous cherchons à déterminer le champ électrostatique.

- ✧ Le reste est une affaire de pratique.

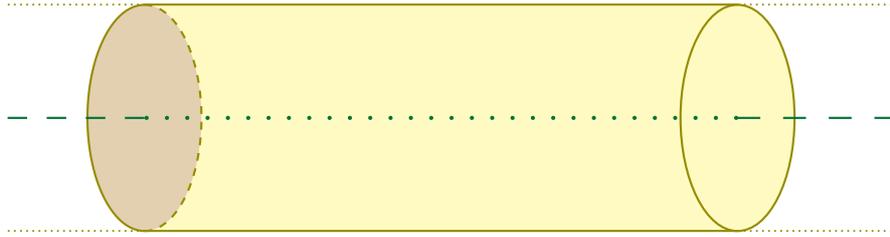
## II-2 – Champ créé par un fil

### II.2.i – description volumique

#### ★ position du problème

- ✧ Considérons un cylindre infini de rayon  $R$  et uniformément chargé de charge volumique  $\rho$ .

✧ Cherchons le champ  $\vec{E}(M)$  créé dans **tout l'espace**.



### ★ analyse physique

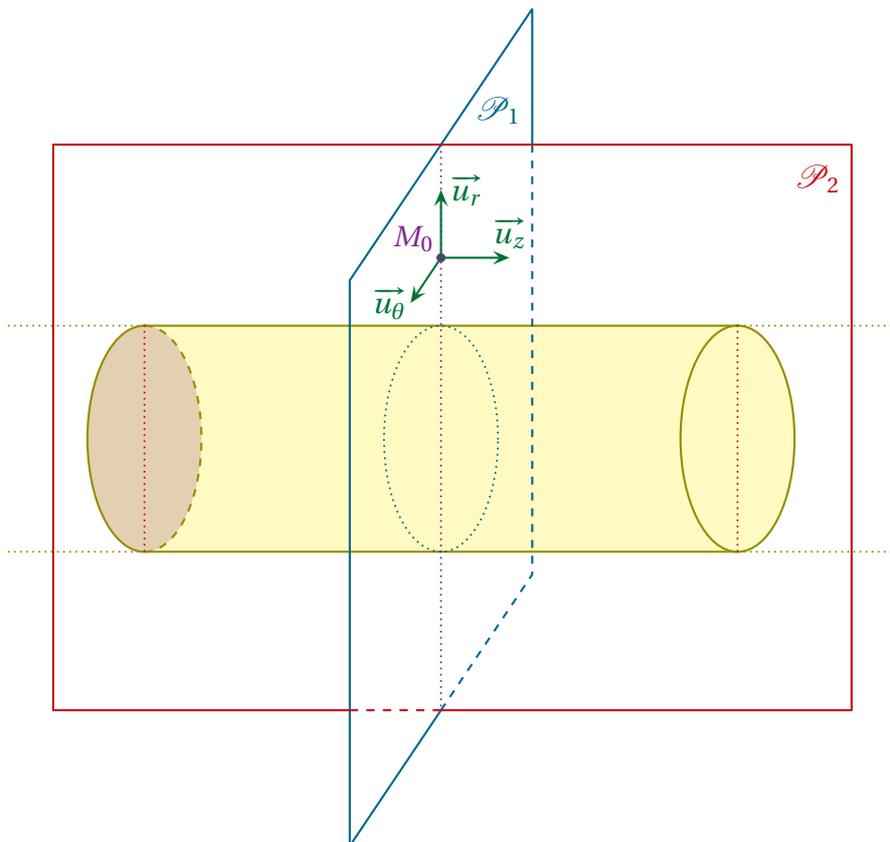
✧ Étant donné qu'il s'agit d'un cylindre, nous allons utiliser les coordonnées cylindro-polaire.

✧ La distribution est de type « cylindre » :

→ il y a invariance par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ), donc  $E(r, \theta, z) \rightarrow E(r, z)$  ;

→ il y a invariance par translation suivant l'axe ( $Oz$ ), donc  $E(r, z) \rightarrow E(r)$ .

✧ Pour les symétries, il faut y aller plus doucement.



✧ Soit un point  $M_0$  quelconque de l'espace :

→ le plan  $\mathcal{P}_1(M_0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est plan de symétrie des charges,  
donc  $\mathcal{P}_1(M_0, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est plan de symétrie des champs,  
donc  $\vec{E}(M_0 \in \mathcal{P}_1)$  tangent à ce plan,  
donc  $\vec{E}(M_0)$  est porté par  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  ;

→ le plan  $\mathcal{P}_2(M_0, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est plan de symétrie des charges,  
donc  $\mathcal{P}_2(M_0, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est plan de symétrie des champs,  
donc  $\vec{E}(M_0 \in \mathcal{P}_2)$  tangent à ce plan,  
donc  $\vec{E}(M_0)$  est porté par  $\vec{u}_r$  seulement.

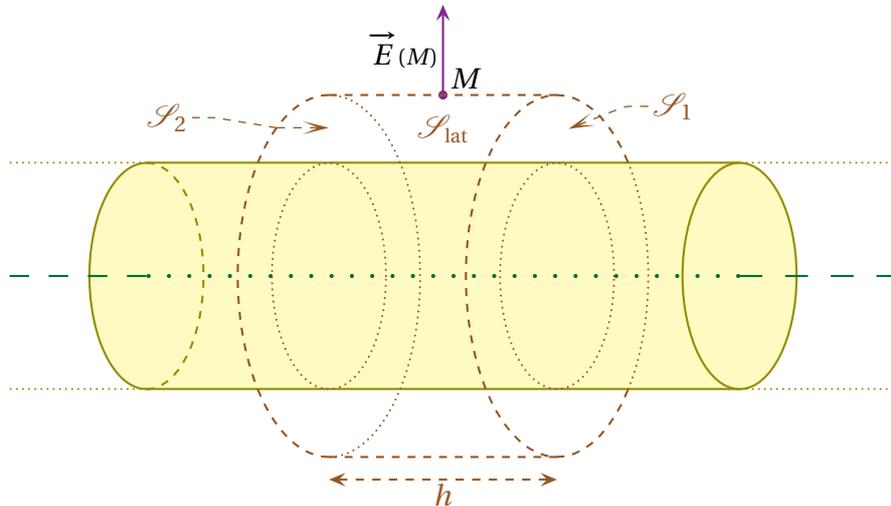
✧ Finalement, le champ  $\vec{E}$  est tel que :  $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$ .

✧ Les grandeurs pertinentes sont  $\rho$  (distribution),  $R$  (géométrie) et  $\epsilon_0$  (structure du champ).

★ **théorème de GAUSS**

- ✧ Considérons un point  $M$  quelconque et choisissons une surface de GAUSS fictive :
- qui contient le point  $M$ ;
  - qui respecte les symétries du problème.
- ✧ Comme nous ne pouvons pas choisir une surface infinie, nous allons prendre un cylindre de hauteur  $h$ , centré sur l'axe, de rayon  $r$  et telle que le point  $M$  ne soit pas sur une arête.
- ✧ Cette surface a ni plus ni moins que la forme d'une boîte de conserve.

6

🌀 **calcul du flux**

- ✧ Séparons la surface en 3 : le dessus de surface  $\mathcal{S}_1$ , le dessous de surface  $\mathcal{S}_2$  et la surface latérale de surface  $\mathcal{S}_{\text{lat}}$ , de telle sorte que

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_{\text{lat}} \quad (\text{II.2})$$

- ✧ Le flux peut alors s'écrire par linéarité de la sommation

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{\text{lat}} \quad (\text{II.3})$$

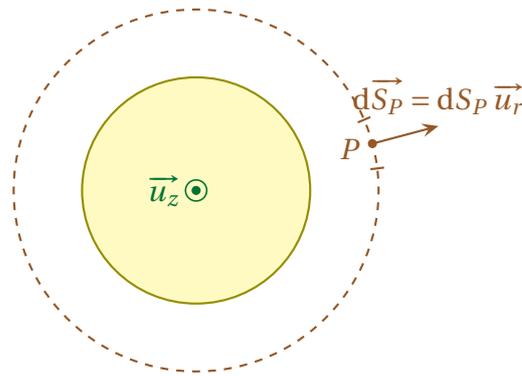
- ✧ Le flux sur la surface supérieure donne, puisque sur cette surface  $d\vec{S}_P = dS_P \vec{u}_z$

$$\Phi_1 = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} E(r_P) \underbrace{\vec{u}_r \cdot dS_P \vec{u}_z}_{=0} = 0 \quad (\text{II.4})$$

- ✧ De même, comme sur la surface inférieure  $d\vec{S}_P = -dS_P \vec{u}_z$ , nous obtenons

$$\Phi_2 = 0 \quad (\text{II.5})$$

- ✧ Pour mieux voir ce qui se passe sur la surface latérale, faisons un schéma dans un plan orthogonal à  $\vec{E}(P)$ .



⇨ Le flux sur la surface latérale s'écrit

$$\Phi_{\text{lat}} = \iint_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} E(r_P) \vec{u}_r \cdot dS_P \vec{u}_r \tag{II.6}$$

⇨ Et comme la surface de GAUSS a été judicieusement choisie (!), nous avons  $r_P = C^{\text{te}} = r_M \stackrel{\text{not}}{=} r$ , d'où :

$$\Phi_{\text{lat}} = \iint_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} E(r_M) dS_P \tag{II.7}$$

$$= E(r) \times \iint dS_P \tag{II.8}$$

$$= E(r) \times S_{\text{lat}} = E(r) \times 2\pi r h \tag{II.9}$$

**🔗 calcul de  $Q_{\text{int}}$**

⇨ Il y a deux cas à distinguer :

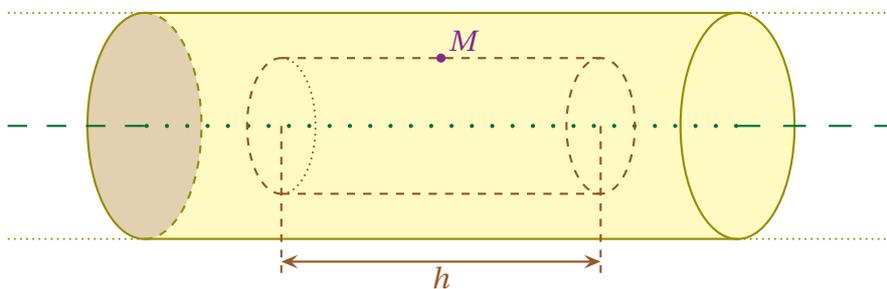
- $M$  se situe dans la distribution :  $r \leq R$ ;
- $M$  n'est pas dans la distribution  $r > R$ .

⇨ Si  $M$  n'est pas dans la distribution, alors, puisque la distribution est uniforme :

$$Q_{\text{int}} = \rho \times V_{\text{morceau,fil}} = \rho \times \pi R^2 h \tag{II.10}$$

⇨ Si  $M$  est dans la distribution, alors :

$$Q_{\text{int}} = \rho \times V_{\text{GAUSS}} = \rho \times \pi r^2 h \tag{II.11}$$



**🔗 rassemblement**

⇨ Puisque le théorème de GAUSS nous dit que  $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} E(r) \times 2\pi r h = \frac{\rho \times \pi r^2 h}{\epsilon_0} & \text{pour } r \leq R \\ E(r) \times 2\pi r h = \frac{\rho \times \pi R^2 h}{\epsilon_0} & \text{pour } r > R \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

✧ Ce qui nous donne, en simplifiant,

$$\begin{cases} E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} & \text{pour } r \leq R \\ E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} & \text{pour } r > R \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

✧ Vérifions que c'est bien homogène :

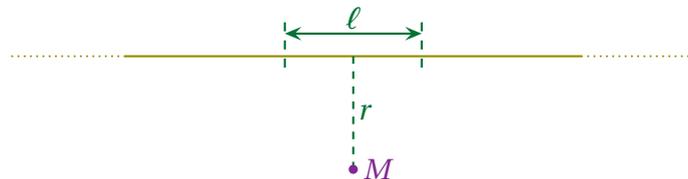
$$\text{champ } E \times \text{surface} = \frac{\text{charge}}{\epsilon_0} \quad (\text{II.14})$$

✧ Le champ décroît en  $1/r$ , ce qui est considéré comme une décroissance plutôt lente : c'est dû à la présence de charges à l'infini.

## II-2-ii – description linéique

### ★ densité linéique de charge

✧ Plaçons-nous à grande distance du fil. Ainsi, la charge  $q$  contenue dans un bout de fil de longueur  $\ell$  reste constante mais tout se passe comme si  $R \rightarrow 0$ .



✧ Le fil devient infiniment fin et il n'est plus pertinent de parler du volume du fil, c'est pourquoi nous allons parler de la densité linéique de charge.

### Définition

La *densité linéique* de charges au point  $P$  est définie par :

$$dq_P = \lambda(P) d\ell_P \quad \text{où :} \quad (\text{II.15})$$

- $d\ell_P$  est une longueur infinitésimale autour de  $P$  ;
- $dq_P$  est la charge contenue dans  $d\ell_P$  autour de  $P$ .

$\lambda$  s'exprime en  $\text{C.m}^{-1}$ .

✧ Il n'y a aucune raison *a priori* pour que  $\lambda(P)$  soit uniforme.

### ★ lien entre densité linéique et densité volumique

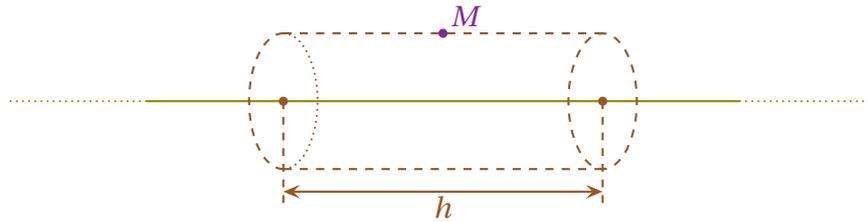
- ✧ Calculons la charge contenue dans un petit cylindre de longueur  $d\ell$ .
- ✧ Nous avons alors, en notant  $dS$  la section du fil et avec les deux approches, volumique et linéique :

$$dq = \rho \times d\mathcal{V} = \rho \times dS d\ell \quad \text{et} \quad dq \triangleq \lambda \times d\ell \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = \rho dS \quad (\text{II.16})$$

- ☞ *Remarque.* Il vaut mieux noter  $dS$  que  $S$ , car la section est nécessairement infinitésimale dans la vision linéique.

### ★ petite variation pour GAUSS

- ✧ Lors du calcul de la charge à l'intérieur de la surface de contrôle, il n'y a qu'un seul cas.



- ✧ Puisque la distribution est uniforme :  $Q_{\text{int}} = \lambda h$ , ce qui donne, avec  $\Phi = E(r) \times 2\pi r h$  :

$$\vec{E}_{(M)} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r \quad (\text{II.17})$$

### ★ champ électrique et vision linéique

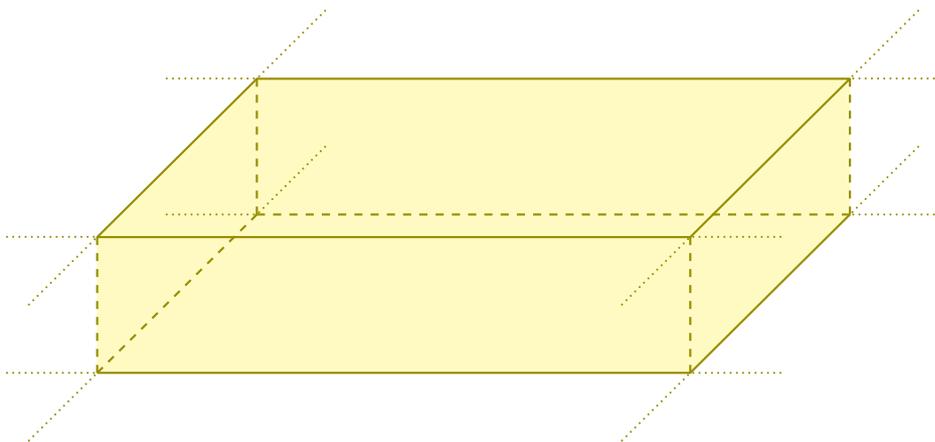
- ✧ Comme nous pouvons le voir, le champ diverge près d'une distribution linéique de fil.
- ✧ Cet effet est dû à la modélisation du fil car, en « réalité », il n'est pas possible de faire tendre  $r$  vers 0 car, à un moment,  $r$  deviendrait inférieur au rayon du fil et nous nous retrouverions dans le cas précédent.
- ✧ Autre aspect technique : une surface de GAUSS peut très bien « couper » un fil, mais une surface de GAUSS ne peut pas inclure de fil.

## II.3 – Champ créé par un plan

### II.3.i – plan épais

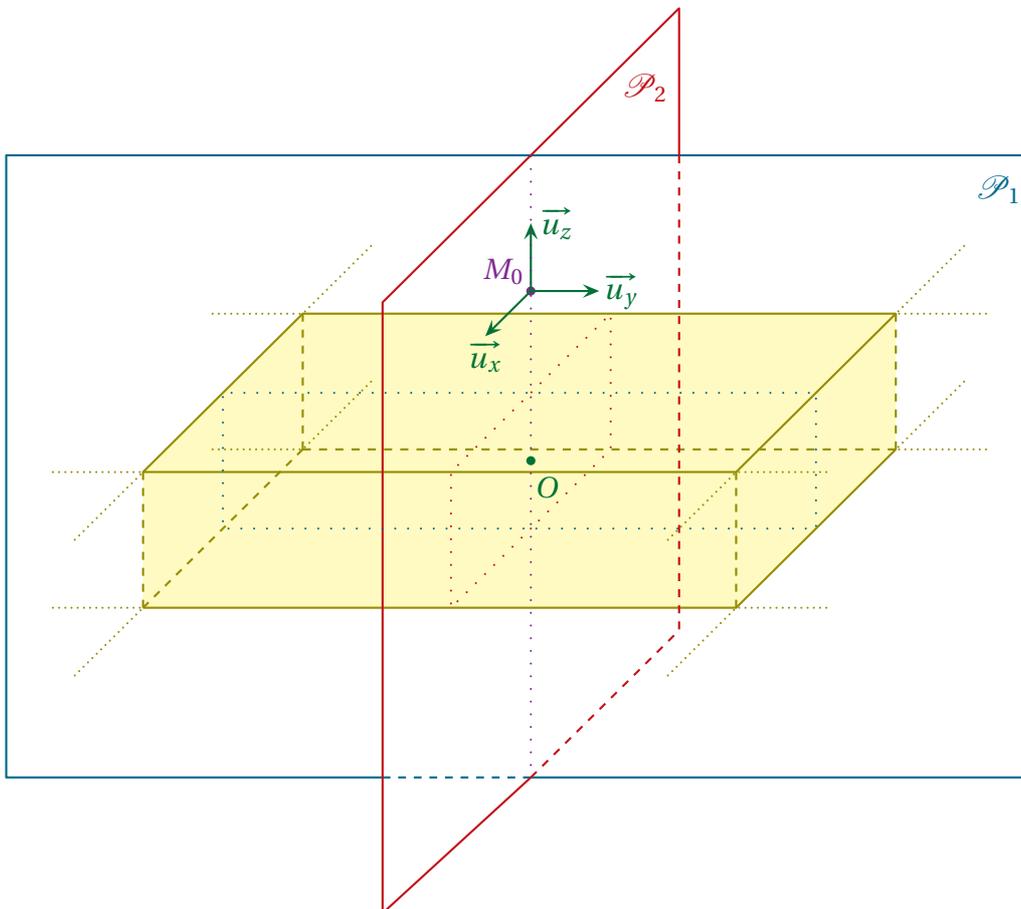
#### ★ position du problème

- ✧ Considérons deux plans infinis distants de  $e$  et entre lesquels il y a une charge volumique uniforme  $\rho$ .
- ✧ Cherchons le champ  $\vec{E}_{(M)}$  créé par cette distribution dans tout l'espace.



### ★ symétries et invariances

- ✧ Il s'agit ici d'une distribution type « plan » (non ? si !), les coordonnées naturelles sont les coordonnées cartésiennes.
- ✧ La distribution est de type « plan » :
  - il y a invariance par translation suivant l'axe  $(Ox)$ , donc  $E(x,y,z) \rightarrow E(y,z)$  ;
  - il y a invariance par translation suivant l'axe  $(Oy)$ , donc  $E(x,y,z) \rightarrow E(z)$ .
- ✧ Pour les symétries, il faut y aller plus doucement.
- ✧ Soit un point  $M_0$  quelconque :
  - le plan contenant  $\mathcal{P}_1(M_0, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est plan de symétrie des charges, donc  $\mathcal{P}_1(M_0, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie du champ électrostatique, donc  $\vec{E}(M_0 \in \mathcal{P}_1)$  est tangent à ce plan, donc  $\vec{E}(M_0 \in \mathcal{P}_1)$  est porté par  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  ;
  - le plan contenant  $\mathcal{P}_2(M_0, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  est plan de symétrie des charges, donc  $\mathcal{P}_2(M_0, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie du champ électrostatique, donc  $\vec{E}(M_0 \in \mathcal{P}_2)$  est tangent à ce plan, donc  $\vec{E}(M_0 \in \mathcal{P}_2)$  est porté uniquement par  $\vec{u}_z$ .



- ✧ Nous pouvons constater qu'il y a un autre plan de symétrie !
- ✧ Notons  $O$  le point sur l'axe  $(M_0, \vec{u}_z)$  et au milieu de la distribution.
- ✧ Le plan  $(Oxy)$  est plan de symétrie des charges donc du champ électrostatique, ce qui implique

$$E(-z) = -E(z) \quad (\text{II.18})$$

- ✧ Finissons avec les grandeurs pertinentes :  $\rho$  (distribution),  $e$  (géométrie) et  $\varepsilon_0$  (structure du champ).

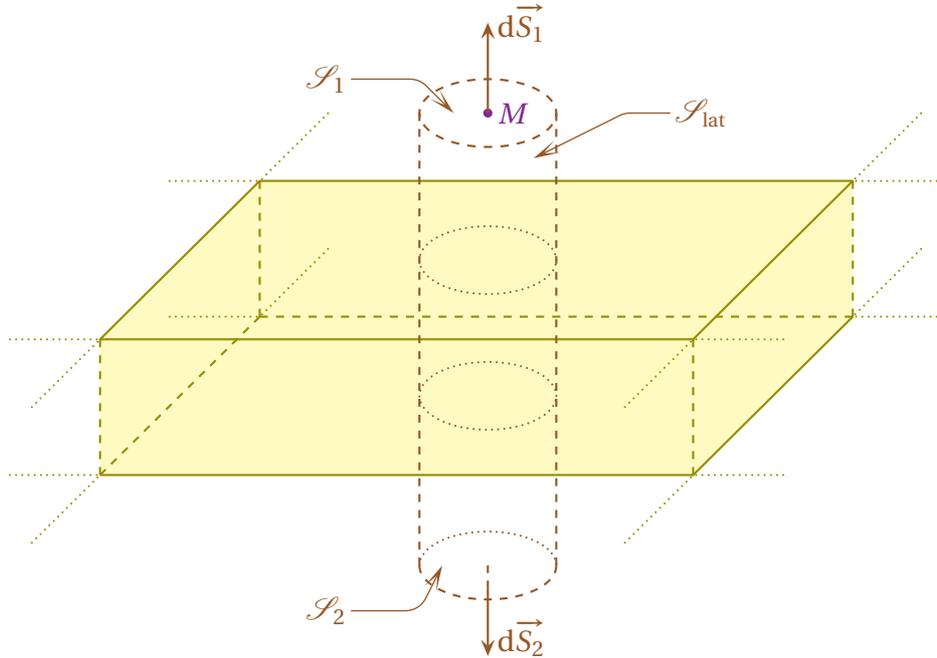
★ **théorème de GAUSS**

✧ Considérons un point  $M$  quelconque et choisissons une surface de GAUSS fictive :

6

- qui contient le point  $M$ ;
- qui respecte les symétries du problème.

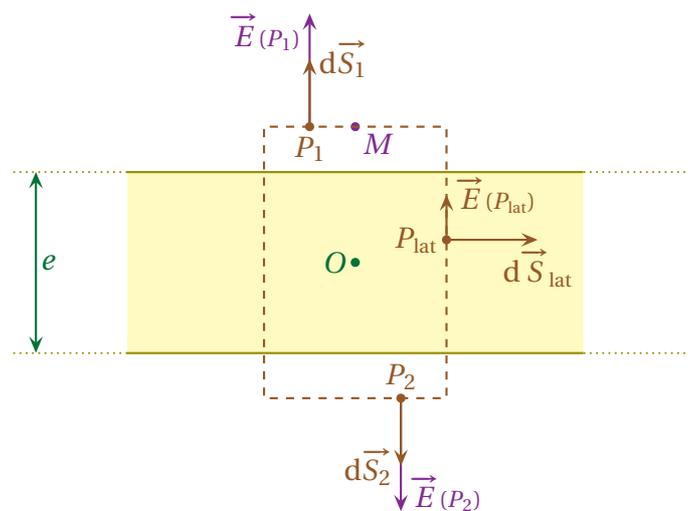
✧ Comme nous ne pouvons pas choisir une surface infinie, nous allons prendre un cylindre de section  $S$  symétrique par rapport au plan  $(Oxy)$  tel que le point  $M$  soit sur la face supérieure.



🌀 **calcul du flux**

✧ Séparons la surface en 3 : le dessus de surface  $S_1$ , le dessous de surface  $S_2$  et la surface latérale de surface  $S_{lat}$  de telle sorte que

$$S = S_1 + S_2 + S_{lat} \tag{II.19}$$



✧ Par linéarité de la sommation, le flux peut s'écrire

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{lat} \tag{II.20}$$

✧ Le flux sur la surface supérieure donne, avec  $d\vec{S}_p = dS_p \vec{u}_z$ ,

$$\Phi_1 = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} E(z_P) \vec{u}_z \cdot dS_P \vec{u}_z = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} E(z_P) dS_P \quad (\text{II.21})$$

✧ Or la surface de GAUSS a été choisie de telle sorte que pour les points  $P$  sur  $\mathcal{S}_1$ ,  $z_P = C^{te} = z_M \stackrel{\text{not}}{=} z$

$$\Phi_1 = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} E(z) \times dS_P = E(z) \times \iint_{P \in \mathcal{S}_1} dS_P = E(z) \times S \quad (\text{II.22})$$

✧ De même, sur la surface inférieure, cela donne d'abord, avec  $d\vec{S}_P = -dS_P \vec{u}_z$ ,

$$\Phi_2 = \iint_{P \in \mathcal{S}_2} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}_2} E(z_P) \vec{u}_z \cdot (-dS_P \vec{u}_z) = - \iint_{P \in \mathcal{S}_2} E(z_P) dS_P \quad (\text{II.23})$$

✧ Et, parce que la surface de GAUSS est ainsi faite, sur la surface  $\mathcal{S}_2$ , nous avons  $z_P = C^{te} = -z_M = -z$

$$\Phi_2 = - \iint_{P \in \mathcal{S}_2} E(-z) \times dS_P = -E(-z) \times \iint_{P \in \mathcal{S}_2} dS_P = -E(-z) \times S \stackrel{\text{sym}}{=} E(z) \times S \quad (\text{II.24})$$

✧ Pour le flux sur la surface latérale, nous avons successivement

$$\Phi_{\text{lat}} = \iint_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} E(z) \underbrace{\vec{u}_z \cdot d\vec{S}_P}_{=0} = 0 \quad (\text{II.25})$$

### 🔗 calcul de $Q_{\text{int}}$

✧ Il y a deux cas à distinguer :

➔  $M$  est dans la distribution :  $|z| \leq \frac{e}{2}$  ;

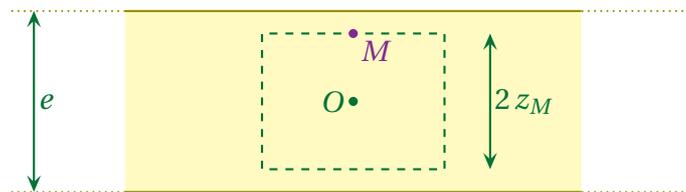
➔  $M$  n'est pas dans la distribution  $|z| > \frac{e}{2}$ .

✧ Si  $M$  n'est pas dans la distribution, alors, puisque la distribution est uniforme :

$$Q_{\text{int}} = \rho \times V_{\text{plan}} = \rho \times e S \quad (\text{II.26})$$

✧ Si  $M$  est dans la distribution, alors :

$$Q_{\text{int}} = \rho \times V_{\text{GAUSS}} = \rho \times 2 z S \quad (\text{II.27})$$



### 🔗 rassemblement

✧ Puisque le théorème de GAUSS nous dit que  $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ , nous avons :

$$\begin{cases} 2 E(z) \times S = \frac{\rho \times 2 z S}{\epsilon_0} & \text{pour } |z| \leq \frac{e}{2} \\ 2 E(z) \times S = \frac{\rho \times e S}{\epsilon_0} & \text{pour } |z| > \frac{e}{2} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

✧ Et, en simplifiant

$$\begin{cases} E(z) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} & \text{pour } z \leq \frac{e}{2} \\ E(z) = \frac{\rho e}{2\epsilon_0} & \text{pour } z > \frac{e}{2} \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

✧ N'oublions pas de vérifier que le résultat est homogène.

✧ Le champ est uniforme en dehors du plan. Il ne décroît pas à l'infini.

☞ *Remarque.* Pour des raisons énergétiques (le champ  $\vec{E}$  contient de l'énergie, voir II-7), cette situation n'est pas physiquement possible. Il faut bien voir qu'il ne s'agit là que d'une modélisation et qu'aucun plan n'est véritablement infini. En revanche, en étant suffisamment proche d'un plan fini, tout se passe comme s'il était infini.

## II-3-ii – plan fin

### ★ densité surfacique de charges

11

✧ Plaçons-nous à grande distance de la surface.

✧ Ainsi, la charge  $q$  contenue dans un bout de plan de surface  $S$  reste constante mais tout se passe comme si  $e \rightarrow 0$ .

✧ Le plan devient infiniment fin et, puisque nous ne pouvons plus parler du volume du plan, nous allons définir une densité surfacique de charges.

#### Définition

La *densité surfacique* de charges au point  $P$  est définie par :

$$dq_P = \sigma(P) dS_P \quad \text{où :}$$

→  $dS_P$  est une surface infinitésimale autour de  $P$  ;

→  $dq_P$  est la charge contenue dans  $dS_P$ .

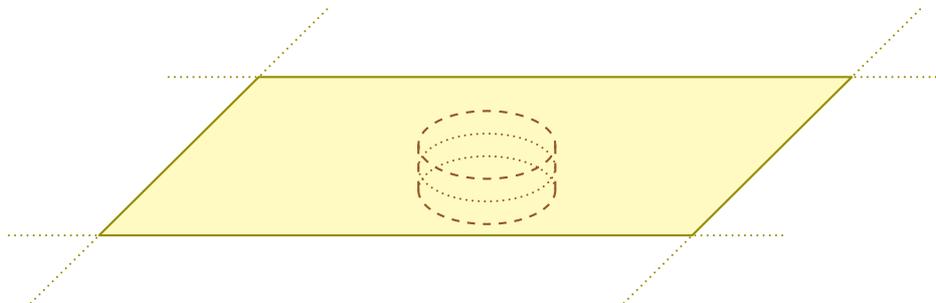
$\sigma$  s'exprime en  $\text{C.m}^{-2}$ .

✧ Il n'y a aucune raison *a priori* pour que  $\sigma(P)$  soit uniforme.

☞ *Remarque.* Si nous nous plaçons « suffisamment loin » pour pouvoir considérer le plan infiniment fin, nous devons quand même rester suffisamment proche pour pouvoir le considérer infini.

### ★ lien entre densité surfacique et densité volumique

✧ Calculons la charge contenue dans un petit cylindre de section  $dS$  de deux manières différentes.



✧ Nous avons alors, en notant de l'épaisseur infinitésimale du plan :

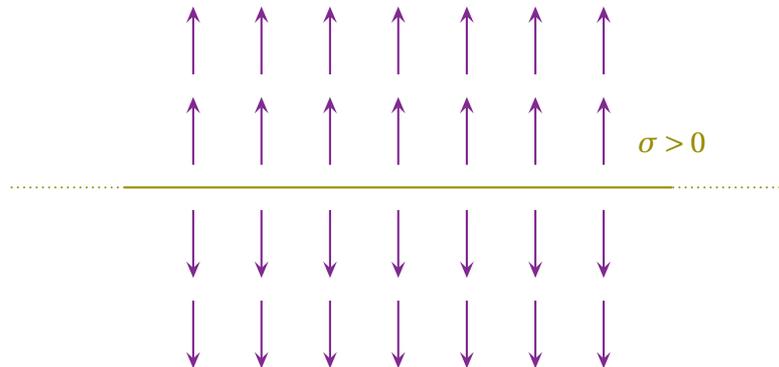
$$dq_P = \rho \times dV_P = \rho \times de dS_P \quad \text{et} \quad dq \triangleq \sigma \times dS_P \quad \rightsquigarrow \quad \sigma = \rho de \quad (\text{II.30})$$

✧ Ici il vaut mieux noter  $de$ , plutôt que  $e$ , l'épaisseur du plan fin car, à l'échelle de la densité surfacique de charges, le plan a effectivement une épaisseur infinitésimale.

### ★ petite variation pour GAUSS

- ✧ Lors du calcul de la charge à l'intérieur de la surface de GAUSS, il n'y a plus qu'un seul cas.
- ✧ Puisque la distribution est uniforme :  $Q_{\text{int}} = \sigma S$ , ce qui donne, avec  $\Phi = 2E(z) \times S$  :

$$\begin{cases} \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \times \vec{u}_z \text{ pour } z > 0 \\ \vec{E}(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \times \vec{u}_z \text{ pour } z < 0 \end{cases} \quad (\text{II.31})$$



- ✧ Bien que le résultat ne semble pas le montrer, le champ **dépend** de la coordonnée  $z$ .

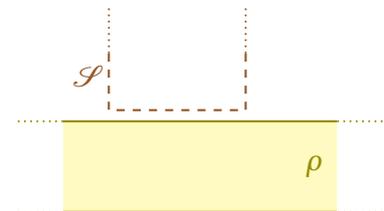
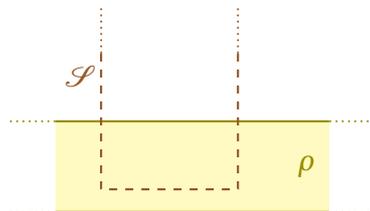
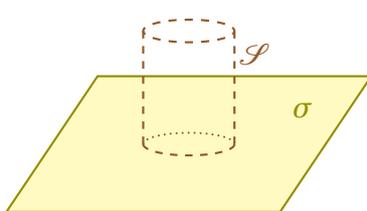


### Bon à retenir

Le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé de charge surfacique  $\sigma$  s'écrit  $\pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}$  où  $\vec{n}$  est le vecteur normal au plan. Le signe étant le même d'un côté du plan.

### ★ champ électrique et vision surfacique

- ✧ Les résultats précédents semblent signifier que le champ électrique n'est pas défini sur un plan uniformément chargé.
- ✧ Comme pour la vision linéique, cela est dû à un artefact de la modélisation.
- ✧ En fait, lorsque la distance au plan infini devient de plus en plus petite, l'approche en terme de charges surfaciques ne se justifie plus et il faut réutiliser les charges volumiques.
- ✧ De plus, techniquement, cette modélisation implique qu'une surface de GAUSS peut très bien « couper » une surface chargée, mais ne peut pas *contenir* de surface chargée, car il serait, alors, impossible de dire si les charges sont à l'intérieur, ou non, de la surface de GAUSS.



### ★ un résultat général

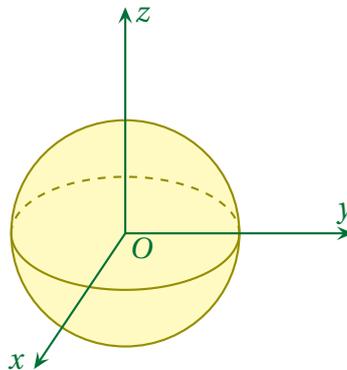
- ✧ Nous pouvons constater qu'il y a une discontinuité du champ  $\vec{E}$  à la traversée d'une surface chargée. Ce sera toujours le cas.
- ✧ Plus précisément, il y a *toujours* discontinuité de  $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$  de la composante normale du champ électrique de part et d'autre d'une surface chargée.

## II-4 – Champ créé par une boule

### II-4.i – boule chargée en volume

#### ★ position du problème

- ✧ Considérons une boule de rayon  $R$  uniformément chargée en volume et cherchons le champ  $\vec{E}$  créé par une telle distribution dans tout l'espace.



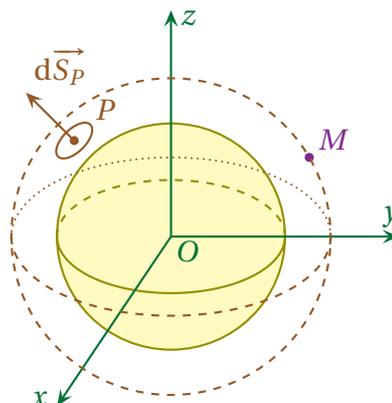
#### ★ analyse physique

- ✧ Ici nous sommes clairement face à une distribution de type « sphère » .
- ✧ Ainsi le champ ne dépend que de  $r$  :  $\vec{E}(r)$ .
- ✧ Considérons un point  $M$  quelconque de l'espace. Tout plan contenant  $(M, \vec{u}_r)$  est plan de symétrie des charges, donc est plan de symétrie du champ électrique, donc  $\vec{E}(M)$  est contenu dans l'intersection de tous ces plans, *i.e.* est porté par  $\vec{u}_r$ .
- ✧ Finalement, nous avons  $\vec{E}(M) = \vec{E}(r) \vec{u}_r$ .
- ✧ Pour les grandeurs pertinentes :  $\rho$  (distribution),  $R$  (géométrie) et  $\epsilon_0$  (structure).

#### ★ théorème de GAUSS

- ✧ Considérons un point  $M$  quelconque et choisissons une surface de GAUSS fictive :
- qui contient le point  $M$  ;
  - qui respecte les symétries du problème.
- ✧ Choisissons une sphère centrée sur  $O$  et de rayon  $r$ .

6



#### 🌀 calcul du flux

- ✧ Le flux à travers cette surface donne, puisque  $d\vec{S}_P = dS_P \vec{u}_r$

$$\Phi = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}} E(r_P) \vec{u}_r \cdot (dS_P \vec{u}_r) = \iint_{P \in \mathcal{S}} E(r_P) dS_P \quad (\text{II.32})$$

✧ De plus, la surface de GAUSS a été choisie telle que  $r_P = C^{\text{te}} = r_M \stackrel{\text{not}}{=} r$ , ce qui donne

$$\Phi = \iint_{P \in \mathcal{S}} E(r) \times dS_P = E(r) \iint_{P \in \mathcal{S}} dS_P = E(r) \times S = E(r) \times 4\pi r^2 \quad (\text{II.33})$$



### Loi

La surface d'une sphère de rayon  $r$  vaut  $S = 4\pi r^2$ .

### calcul de $Q_{\text{int}}$

✧ Il y a deux cas à distinguer :

- $M$  est dans la distribution :  $r \leq R$  ;
- $M$  n'est pas dans la distribution  $r > R$ .

✧ Si  $M$  est dans la distribution, alors :

$$Q_{\text{int}} = \rho \times V_{\text{GAUSS}} = \rho \times \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (\text{II.34})$$



### Loi

Le volume d'une boule de rayon  $r$  vaut  $S = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

✧ Si  $M$  n'est pas dans la distribution, alors :

$$Q_{\text{int}} = \rho \times V_{\text{boule}} = \rho \times \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (\text{II.35})$$

### rassemblement

✧ Puisque le théorème de GAUSS nous dit que  $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ , nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0} \quad \text{pour } r \leq R \\ E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4}{3} \pi R^3}{\epsilon_0} \quad \text{pour } r > R \end{array} \right. \quad (\text{II.36})$$

✧ Et, en introduisant la charge  $q = \rho \times \frac{4}{3} \pi R^3$  contenue dans la boule,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^3} r \vec{u}_r \quad \text{pour } r \leq R \\ \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{pour } r > R \end{array} \right. \quad (\text{II.37})$$

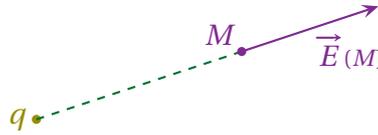
✧ N'oublions pas de vérifier que l'expression est bien homogène.

✧ Le champ décroît en  $1/r^2$ , ce qui est considéré comme rapide.

## II-4-ii – charge ponctuelle

### ★ limite de la charge ponctuelle

✧ Plaçons-nous à grande distance de la boule. Ainsi, la charge  $q$  contenue dans la totalité de la boule reste constante mais tout se passe comme si  $R \rightarrow 0$ .



✧ La boule devient infiniment petite et, puisqu'on ne peut plus parler de son volume, nous parlerons de charge ponctuelle.

### ★ champ créé par une charge ponctuelle

✧ Avec les résultats précédents, nous obtenons, puisque  $\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 = q$  :

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (\text{II.38})$$

✧ Notons  $P$  le centre de la sphère (donc la position de la charge ponctuelle). Nous avons  $r = PM$  et :

$$\vec{u}_r = \vec{u}_{PM} = \frac{\vec{PM}}{PM} \quad (\text{II.39})$$



#### Loi

Une charge ponctuelle  $q$  placée en  $P$  crée un champ électrique en  $M$  tel que :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

✧ Cela signifie que, dorénavant, il est possible de calculer le champ créé par une distribution d'une autre manière :

- découper la distribution en charge infinitésimales, ponctuelles à l'échelle de l'étude ;
- calculer le champ créé en un point  $M$  par chacune de ces charges ;
- sommer le tout.

✧ Nous aurons l'occasion d'utiliser cette méthode dans le chapitre sur les dipôles.

🔥 *Remarque.* Cette méthode, tout comme celle s'appuyant sur le théorème de GAUSS, ne permet de mener des calculs littéraux à leurs termes que dans quelques cas particuliers. Il ne faut pas voir là une méthode analytique miraculeuse.

### ★ champ électrique et charges ponctuelles

✧ Comme pour la distribution linéique et la distribution surfacique, le fait que le champ ne soit pas exprimable au niveau d'une charge ponctuelle (en  $r = 0$ ) tient au fait que la modélisation n'est plus pertinente à cette échelle.

✧ En effet, pour  $r \rightarrow 0$ , le rayon  $R$  de la charge « ponctuelle » ne vérifie plus  $R < r$ , ce qui implique qu'il n'est plus possible de représenter la boule comme une charge ponctuelle.

✧ Enfin, pour les mêmes raisons que pour la distribution surfacique, une surface de GAUSS **ne peut pas** « couper » une charge ponctuelle. Car, si tel est le cas, en « zoomant » au niveau de la surface de GAUSS, la charge, qui est en réalité un petit volume, peut très bien être totalement incluse, totalement exclue ou partiellement à l'intérieur de la surface de GAUSS.

### ★ au niveau atomique

3

- ✧ Regardons ce qu'il en est du champ électrique créé par un noyau sur un électron dans un atome.
- ✧ En faisant l'hypothèse qu'à ces échelles les lois précédentes sont encore valables, cela nous donne, pour l'atome d'hydrogène

$$E_{\text{noyau}} = \frac{q_{\text{noyau}}}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{noyau}}^2} \sim \frac{1,6 \times 10^{-19}}{4\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times (10^{-10})^2} \sim 10^{11} \text{ V.m}^{-1} \quad (\text{II.40})$$

- ✧ Cette valeur est à comparer, notamment, avec la valeur du champ disruptif de l'air

14

$$E_{\text{disruptif}} \sim 3 \text{ MV.m}^{-1} \quad (\text{II.41})$$

## II-5 – Le potentiel électrostatique

### II-5.i – Transformer un champ vectoriel en champ scalaire

#### ★ le problème...

- ✧ Trouver un champ électrostatique, *i.e.* un champ vectoriel, consiste, rappelons-le à déterminer ses trois composantes (donc trois fonctions) dépendant de l'espace, *i.e.* de 3 variables.
- ✧ Afin de simplifier le problème, nous pourrions envisager de trouver « autre chose », un « nombre » dépendant des 3 variables de l'espace et à partir duquel il serait (relativement) simple d'en déduire le champ électrique.
- ✧ L'idée, autrement dite, consiste à utiliser non pas une approche vectorielle mais une approche scalaire, de manière à trouver une solution plus facilement d'une part, mais aussi à *manipuler* les solutions plus facilement d'autre part (il est techniquement plus aisé d'additionner deux nombres que deux vecteurs).

#### ★ ... a déjà été résolu en mécanique

- ✧ En mécanique, nous connaissons deux types d'approches : l'approche en terme de force et l'approche en terme énergétique.
- ✧ Nous avons déjà constaté que, lorsque l'approche énergétique est adaptée à un problème, son utilisation est bien plus simple, rapide et efficace que l'approche en terme de forces.
- ✧ Il s'agit d'une situation analogue ici.
- ✧ En ce qui concerne les forces, nous pouvons en décrire quelques-unes, les forces conservatives, avec le « nombre » associé : l'énergie potentielle.
- ✧ L'énergie potentielle associée à  $\vec{f}$  était définie comme suit :

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} = -dE_p \quad \text{où :} \quad (\text{II.42})$$

→  $d\vec{r}$  est un déplacement élémentaire **quelconque** ;

→  $dE_p$  est la variation d'énergie potentielle entre les points initial et final.

- ✧ À partir des expressions des différentes forces nous avons donc pu trouver les différentes expressions des énergies potentielles associées.
- ✧ Mais ce n'est pas tout ! À partir des expressions des énergies potentielles, nous pouvons aussi retrouver l'expression des forces par la relation

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \quad (\text{II.43})$$

- ✧ Voilà l'objectif : trouver, pour le champ électrostatique, l'analogie de ce qu'est l'énergie potentielle pour les forces.

### ★ définition du potentiel électrostatique



#### Définition

Le *potentiel électrostatique* est un champ scalaire  $V(M)$  qui s'exprime en volt et à partir duquel il est possible de déterminer le champ vectoriel électrostatique  $\vec{E}$ .

- ✧ Ce potentiel n'est ni plus ni moins que le potentiel utilisé en électrocinétique ! Et les volts de ce potentiel sont bien les volts des piles, du secteur...
- ✧ Le fait qu'il y ait une similitude de vocable entre le *potentiel* électrostatique et l'énergie *potentielle* d'une force n'est pas une coïncidence : nous finirons d'établir ce lien dans le chapitre suivant.
- ✧ Le potentiel électrostatique étant scalaire, il est *signé*, *i.e.* il peut être positif ou négatif et le signe a une signification physique.



#### Loi

Le champ électrostatique en un point  $M$  est tel que :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V(M) \quad \text{où :}$$

$V(M)$  est le potentiel électrostatique en  $M$ .



#### Loi

Le potentiel électrostatique s'exprime en volt.

- ✧ Il s'agit (bien sûr ?) des mêmes volts que ceux des prises de courant ou des piles, car le potentiel électrostatique  $V$  n'est autre que celui utilisé en électrocinétique pour lequel la différence s'appelle *tension*.

## II-5-ii – Représentation du potentiel électrostatique

### ★ les isopotentiels

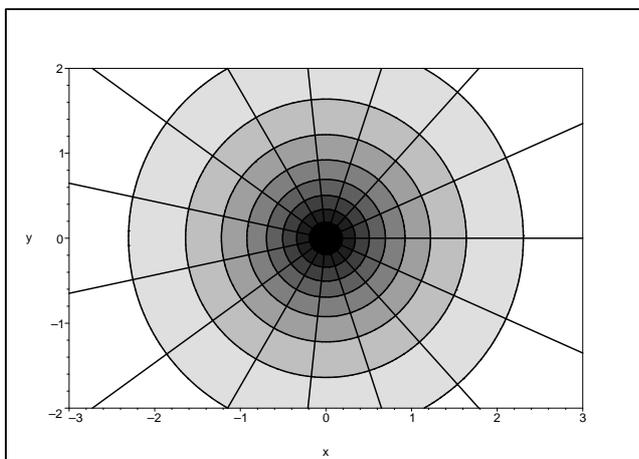
- ✧ Pour représenter le champ, nous utilisons les lignes de champ, pour représenter le potentiel, nous allons utiliser des isopotentiels qui sont analogues aux lignes de niveau en géographie.



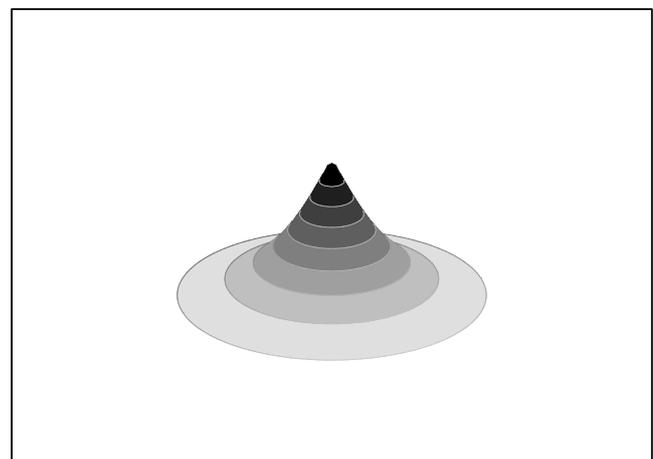
#### Définition

Une ligne, ou une surface, *isopotentielle* est une ligne, ou une surface, de l'espace sur laquelle le potentiel électrostatique est uniforme.

Graphique 13



Graphique 14



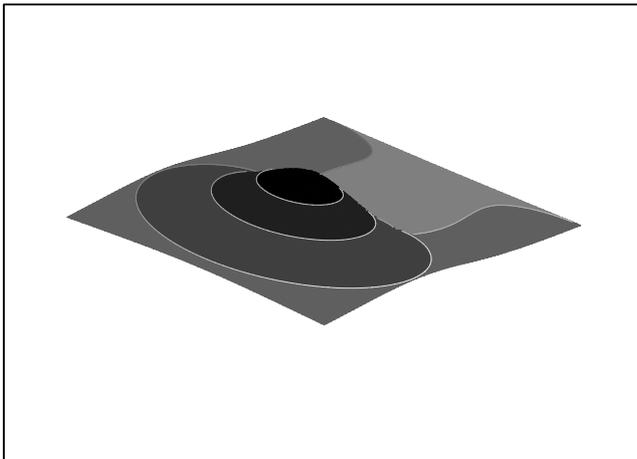
- ✧ Nous pouvons voir :

→ graphique 13 : carte des isopotentiels et lignes de champ créées par une charge ponctuelle positive. Il faut orienter les lignes de champ et nous voyons que le potentiel augmente en se rappro-

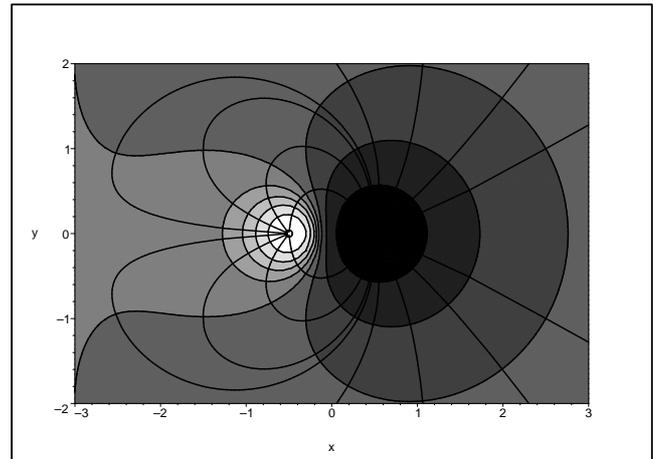
chant de la charge positive ;

→ graphique 14 : la même chose en 3D.

Graphique 15



Graphique 16



✧ Champ et isopotentiels créés par un doublet de charges :

→ graphique 15 : quelle est la charge positive ? quelle est la charge négative ? laquelle est la plus grande en valeur absolue ?

→ graphique 16 : orienter les lignes de champ avec les résultats précédents.

★ **intersection locales des lignes de champ**

4

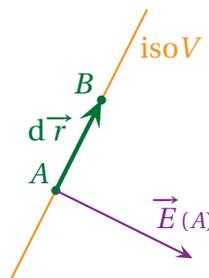


**Loi**

Les lignes de champ électrostatique et les isopotentiels se coupent à angle droit.

9

✧ Prenons deux points  $A$  et  $B$  sur une isopotentielle et faisons le déplacement infinitésimal  $d\vec{r} = \vec{AB}$ .



✧ Nous avons alors :  $dV = 0$  et comme  $dV = -\vec{E}(A) \cdot d\vec{r}$ , les lignes de champs sont orthogonales aux lignes isopotentiels.

★ **sens du champ électrique**

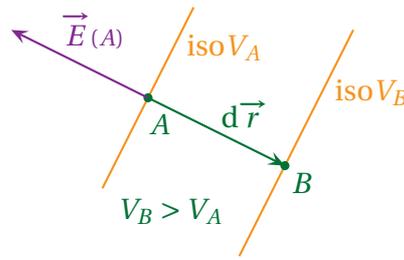
4



**Loi**

Le champ  $\vec{E}$  est dirigé vers les potentiels décroissants.

✧ Prenons deux isopotentiels très proches et considérons  $dV = -\vec{E}(A) \cdot d\vec{AB} = V_B - V_A$ .



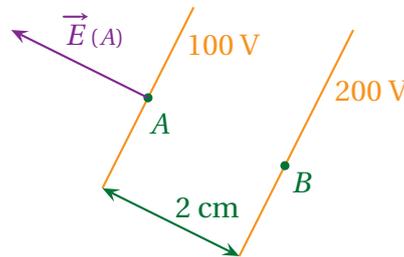
⇨ Supposons  $V_B > V_A$ . Alors  $dV > 0$  et ainsi  $-\vec{E}$  et  $\vec{AB}$  sont dans le même sens, ou, ce qui revient au même,  $\vec{E}$  pointe de B vers A.

★ valeur du champ électrique

⇨ Avec la définition du gradient, nous pouvons ainsi estimer rapidement la valeur d'un champ électrique dès lors que nous avons le réseau des isopotentiels.

⇨ Pour cela, il suffit de considérer deux points A et B sur deux isopotentiels « proches ».

10



⇨ Nous savons déjà que le champ électrique en A :

- est normal aux isopotentiels ;
- est dirigé vers les potentiels décroissants.

⇨ Cela nous donne la direction et le sens de  $\vec{E}(A)$ .

⇨ Pour la valeur, nous avons

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \quad \rightsquigarrow \quad \left\langle E \sim \frac{dV}{dx} \right\rangle \quad \rightsquigarrow \quad E \sim \frac{V_B - V_A}{e} = 5,0 \text{ kV.m}^{-1} \quad (\text{II.44})$$

II.5.iii – Déterminer directement un potentiel

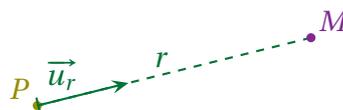
★ pour une charge

**Loi**

Le potentiel électrostatique créé en M par une charge q située au point P vaut :

$$V_{P(M)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{\|PM\|}$$

⇨ Partons de l'expression de  $\vec{E}$  et de la relation du potentiel.



⇨ Nous trouvons, en utilisant les coordonnées sphériques :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \quad (\text{II.45})$$

$$\diamond \text{ Ainsi } \frac{dV}{dr} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

$$\diamond \text{ Par intégration, nous obtenons alors } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C^{\text{te}}.$$

$\diamond$  La constante est choisie avec la convention habituelle :  $V = 0$  là où  $\vec{E} = \vec{0}$ , i.e. ici à l'infini, ce qui donne :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{II.46})$$

### ★ pour une distribution de charges

#### 🔗 superposer les potentiels

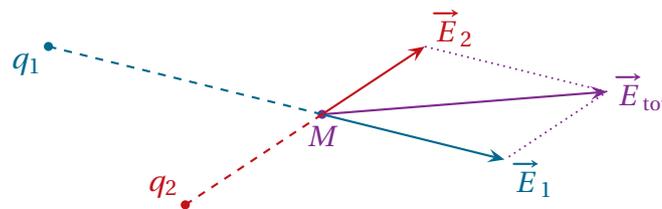


#### Loi

Le potentiel électrostatique créé par la réunion de deux distributions de charges est la somme du potentiel créé par chacune des deux distributions.

$\diamond$  En effet nous savons déjà, grâce au principe de superposition que le champ total créé par l'ensemble de deux distributions ① et ② vaut :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (\text{II.47})$$



$\diamond$  Comme il s'agit là de 3 champs électrostatiques, nous pouvons leur associer trois potentiels électrostatiques  $V_{\text{tot}}$ ,  $V_1$  et  $V_2$ . Dans ces conditions la relation précédente devient :

$$-\vec{\text{grad}} V_{\text{tot}} = -\vec{\text{grad}} V_1 - \vec{\text{grad}} V_2 \quad (\text{II.48})$$

$\diamond$  Et grâce au caractère linéaire du gradient nous obtenons :  $-\vec{\text{grad}} V_{\text{tot}} = -\vec{\text{grad}} (V_1 + V_2)$ .

$\diamond$  Dans ces conditions nous pouvons dire que les deux potentiels  $V_{\text{tot}}$  et  $V_1 + V_2$  diffèrent d'une constante.

$\diamond$  Lorsque nous regardons les conditions à l'infini, nous pouvons constater que :

$$V_{\text{tot}} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad V_1 + V_2 \longrightarrow 0 \quad (\text{II.49})$$

$\diamond$  La constante à rajouter est donc nulle.

$\diamond$  Finalement, nous avons bien  $V_{\text{tot}} = V_1 + V_2$  **pourvu qu'il n'y ait pas de charges à l'infini.**

#### 🔗 les lois



#### Loi

Le potentiel électrostatique créé en  $M$  par des charges  $q_i$  situées en  $P_i$  vaut :

$$V_{(M)} = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M}$$

**Bon à retenir**

Le potentiel électrostatique créé en  $M$  par une distribution volumique de charges de densité  $\rho(P)$  vaut :

$$V_{(M)} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\rho(P) d\tau_P}{4\pi \epsilon_0 PM}$$

**Bon à retenir**

Le potentiel électrostatique créé en  $M$  par une distribution surfacique de charges de densité  $\sigma(P)$  vaut :

$$V_{(M)} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \frac{\sigma(P) dS_P}{4\pi \epsilon_0 PM}$$

**Bon à retenir**

Le potentiel électrostatique créé en  $M$  par une distribution linéique de charges de densité  $\lambda(P)$  vaut :

$$V_{(M)} = \int_{P \in \mathcal{C}} \frac{\lambda(P) d\ell_P}{4\pi \epsilon_0 PM}$$

**conventions****Bon à retenir**

Par convention, le potentiel électrostatique est nul à l'infini s'il n'y a pas de charges à l'infini.

- ✧ Cette convention est automatiquement vérifiée avec les formules précédentes.
- ✧ Changer cette convention ne change rien à  $\vec{E}$ .
- ✧ En effet, considérons deux potentiels différents  $V'_{(M)} = V_{(M)} + C^{\text{te}}$ . Alors :

$$\vec{E}'_{(M)} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V'_{(M)}) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V_{(M)} + C^{\text{te}}) \quad (\text{II.50})$$

$$= -\overrightarrow{\text{grad}}(V_{(M)}) - \overrightarrow{\text{grad}}(C^{\text{te}}) = \vec{E}_{(M)} + \vec{0} \quad (\text{II.51})$$

**propriétés****Bon à retenir**

Le potentiel électrostatique est continu partout, sauf là où il n'est pas défini, à savoir sur un fil linéiquement chargé et en un point où se situe une charge ponctuelle.

- ✧ Rappelons que la charge ponctuelle et le fil linéiquement chargé sont des modèles « à grande distance » de répartitions volumiques de charges pour lesquelles champ et potentiel électrostatique sont parfaitement définis et calculables.
- ✧ La différence avec le champ c'est que le potentiel est calculable sur un plan chargé alors qu'un champ électrostatique, non.

**utilisation, lien avec les analyses**

- ✧ Rappelons que, comme l'approche énergétique, manipuler des potentiels sera plus facile *a priori* que manipuler des champs vectoriels.

- ✧ Ceci dit, il faut pouvoir réaliser les calculs ce qui se révèle moins aisé « en général » que GAUSS car l'intégrale se fait sur la distribution de charges et non sur une surface arbitraire choisie.
- ✧ Pour cela, nous privilégierons l'approche en potentiel :
  - soit dans le cas des charges ponctuelles ;
  - soit lorsque la géométrie de la distribution présente au moins quelques invariances.

## II-5-iv – Tout vient en fait d'une nouvelle loi fondamentale

### ★ notion de circulation



#### Définition

La quantité  $\int_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P$  est noté  $C_E$  et est appelée *circulation* de  $\vec{E}$  sur  $\mathcal{C}$ .

- ✧ La circulation sur une courbe peut s'imaginer comme la quantité de champ qui « avance » sur le contour  $\mathcal{C}$ . Cette quantité est positive lorsque, globalement, le champ est dans le même sens que le contour.
- ✧ Pour calculer une circulation, nous allons faire « comme d'habitude » :
  - découper la courbe en petits morceaux,
  - calculer la circulation élémentaire  $dC$
  - additionner le tout.
- ✧ Tout comme le flux apportait une information sur une surface toute entière, la connaissance d'une circulation « mélange » le champ sur toute un contour.
- ✧ La circulation et le flux sont des notions que nous verrons encore et encore, car il s'agit d'informations très importantes pour comprendre et se représenter la structure d'un champ vectoriel.

### ★ la circulation du champ électrostatique



#### Loi

Soient une distribution quelconque de charges et un contour **fermé**  $\mathcal{C}$  quelconque. En notant  $\vec{E}$  le champ électrostatique créé par cette distribution de charges, nous avons :

$$\oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = 0$$

Le champ électrostatique est dit à *circulation conservative*.

- 👉 *Remarque.* Bien que la circulation soit, *a priori*, définie pour un contour quelconque, ici, la loi parle d'un contour **fermé et quelconque**.
- ✧ C'est une loi *fondamentale*, à savoir qu'elle ne se démontre pas.
- ✧ Elle est fondamentale, mais elle est écrite dans le cas particulier du champ *électrostatique*. Si le champ électrique variait avec le temps, cette loi s'écrirait autrement, comme nous le verrons dans un chapitre ultérieur.

### ★ lien entre circulation et potentiel électrostatique



#### Bon à retenir

La circulation du champ électrostatique le long d'une ligne  $\mathcal{L}_{AB}$  vaut :

$$C_{AB} = -\Delta V = -(V_B - V_A) = V_A - V_B$$

- ✧ Cela se redémontre très vite à partir de la définition du potentiel électrostatique

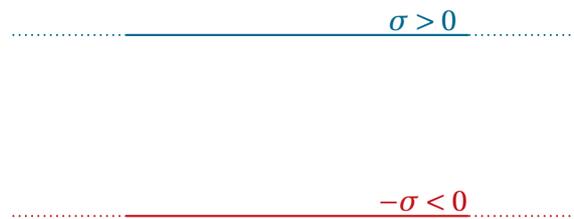
$$C_{AB} = \int_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = - \int_A^B \text{grad } V(P) \cdot d\vec{\ell}_P \tag{II.52}$$

$$= - \int_A^B dV = -(V_B - V_A) \tag{II.53}$$

## II-6 – Le condensateur plan

### II-6.i – présentation

✧ Modélisons un condensateur plan par deux plans infinis uniformément chargés surface  $+\sigma$  et  $-\sigma$  séparés par la distance  $e$ .



✧ Cherchons le champ  $\vec{E}$  dans tout l'espace.

### II-6.ii – représentation du champ

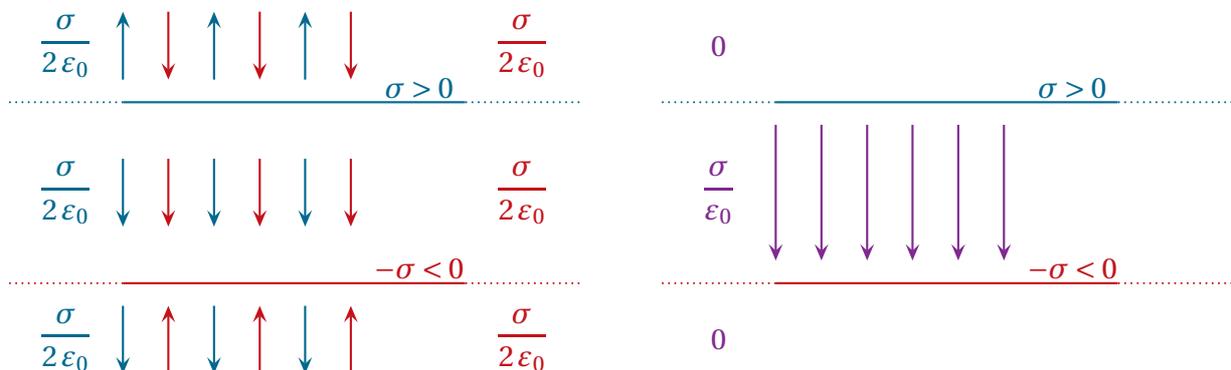
✧ Utilisons le principe de superposition.

✧ Le champ total  $\vec{E}$  n'est autre que  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{inf}} + \vec{E}_{\text{sup}}$ .

✧ Or, nous savons, d'après II.31, que le champ créé par un plan infini uniformément chargé  $\sigma_0$  s'écrit

$$\begin{cases} \vec{E}(z) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \times \vec{u}_z \text{ pour } z > 0 \\ \vec{E}(z) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \times \vec{u}_z \text{ pour } z < 0 \end{cases} \tag{II.54}$$

✧ Un schéma donne alors



12

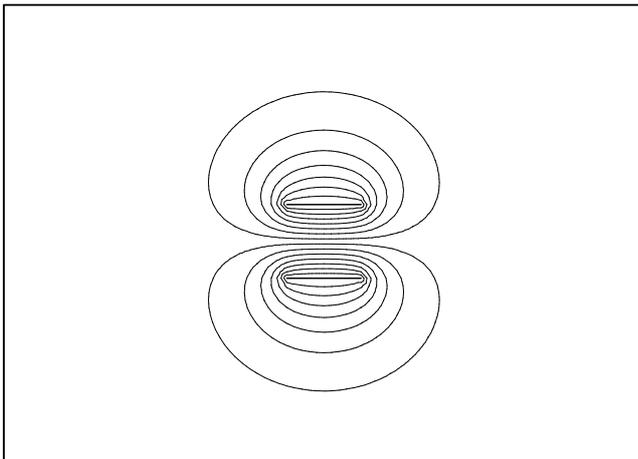
**Loi**

Le champ créé par un condensateur plan infini :

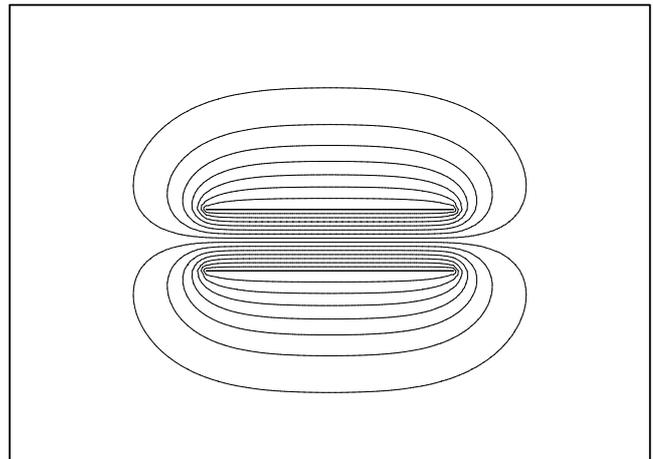
- vaut  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  à l'intérieur et va des charges positives vers les charges négatives ;
- est nul à l'extérieur.

### II-6·iii– tracé de lignes isopotentielles

Graphique 17



Graphique 18



✧ Faire tracer les lignes de champ :

- graphique 17 : avec un petit condensateur, entre les plaques, nous pouvons constater que le champ est à peu près droit même s'il se courbe sur les bord et qu'il existe un champ à l'extérieur du condensateur ;
- graphique 18 : avec un plus grand condensateur où la largeur est beaucoup plus importante que l'épaisseur, le champ est très uniforme à l'intérieur, il correspond à un champ d'un condensateur « infini » à l'intérieur du condensateur.

✧ Le champ est bien uniforme dans le condensateur, même s'il n'est pas infini.

### II-6·iv– relation constitutive

13

✧ Négligeons les effets de bord, c'est-à-dire faisons comme si le champ à l'intérieur du condensateur correspondait au champ d'un condensateur infini.



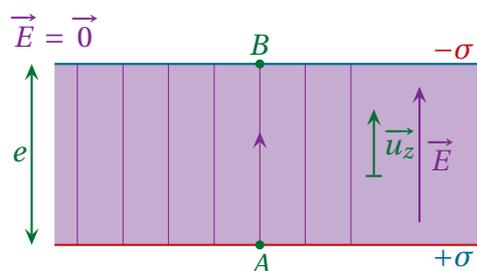
#### Loi

Négliger les effets de bord revient :

- techniquement, à admettre une invariance par rotation ou translation, là où il n'y en a pas ;
- physiquement, à négliger l'effet de la portion de l'espace située près des bords.

✧ La face  $A$  est chargée  $+\sigma$  et la face  $B$  est chargée  $-\sigma$ .

✧ Cela donne un champ  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$  à l'intérieur et  $\vec{E} = \vec{0}$  à l'extérieur.



✧ Calculons la circulation du champ d'un bord à l'autre :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad (\text{II.55})$$

$$= \int_A^B \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z \cdot (d\ell_P \vec{u}_z) \quad (\text{II.56})$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_A^B d\ell_P \quad (\text{II.57})$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \ell \quad (\text{II.58})$$

$$= \frac{Q}{S} \times \frac{e}{\epsilon_0} \quad (\text{II.59})$$

✧ Mais nous avons aussi :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (\text{II.60})$$

$$= \int_A^B -\vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{r} \quad (\text{II.61})$$

$$= - \int_A^B dV \quad (\text{II.62})$$

$$= -(V_B - V_A) = V_A - V_B = U_{AB} \quad (\text{II.63})$$

✧ En rassemblant, nous trouvons

$$Q = \frac{\epsilon_0 S}{e} \times U_{AB} \quad (\text{II.64})$$

✧ Il s'agit là de la relation constitutive du condensateur que nous utilisons « depuis longtemps » :  $q = +Cu$ , *i.e.* la charge portée par une armature est proportionnelle à la différence de potentiels entre les armatures.



### Loi

La relation constitutive d'un condensateur s'écrit :  $Q_A = C(V_A - V_B)$ .



### Loi

Pour un condensateur plan idéal, la capacité vaut :

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{e} \quad \text{où :}$$

- $S$  est la surface des armatures en regard ;
- $e$  est la distance séparant les armatures.

✧ Nous retrouvons bien le fait que  $[\epsilon_0] = \text{F.m}^{-1}$ .

## II.7 – Approche énergétique

### II.7.i – à partir du condensateur plan idéal

#### ★ rappels électrocinétiques

✧ Le condensateur que nous venons d'étudier est vraiment le même que celui que nous utilisons en électrocinétique.

✧ Or, pour ce dernier, nous savons, aussi, qu'il possède, à chaque instant, l'énergie

$$\mathcal{E}_{\text{cond}} = \frac{1}{2} C U^2 \quad (\text{II.65})$$

### ★ énergie contenue dans le champ

✧ Admettons que cette énergie soit contenue entièrement dans le champ électrostatique, pouvons nous retrouver l'expression de la densité volumique d'énergie électrique? Autrement dit, pouvons nous trouver l'énergie volumique  $e_{\text{elec}}$  telle que l'énergie  $\delta \mathcal{E}$  contenue dans un volume  $\delta \tau$  s'écrive

$$\delta \mathcal{E} = e_{\text{elec}} \times \delta \tau \quad (\text{II.66})$$

✧ Commençons par réécrire l'énergie en terme de charges

$$\mathcal{E}_{\text{cond}} = \frac{Q^2}{2C} \quad (\text{II.67})$$

✧ Avec l'expression de  $C$  et celle de la charge  $Q = \sigma \times S$ , nous avons

$$\mathcal{E}_{\text{cond}} = \frac{S^2 \sigma^2 e}{2 \epsilon S} = \frac{S \sigma^2 e}{2 \epsilon} \quad (\text{II.68})$$

✧ Cette énergie est contenue dans le champ électrique. Or celui n'existe que dans le condensateur, *i.e.* uniquement dans le volume  $V = S e$  et est uniforme. Cela implique que l'énergie totale s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{cond}} = e_{\text{elec}} \times V \quad (\text{II.69})$$

✧ En rapprochant les deux expressions nous obtenons

$$e_{\text{elec}} = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} \quad (\text{II.70})$$

✧ Soit, en l'écrivant en terme de champ électrique

$$e_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (\text{II.71})$$

### ★ généralisation

✧ Comme nous le montrerons dans un chapitre ultérieur, ce résultat est, en fait, un résultat général.



#### Loi

Le champ électrique contient de l'énergie telle que l'énergie  $\delta \mathcal{E}(P)$  contenue dans un volume  $\delta \tau_P$  autour du point  $P$  s'écrit

$$\delta \mathcal{E}(P) = e_{\text{elec}}(P) \delta \tau_P \quad \text{avec} \quad e_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(P)$$

$e_{\text{elec}}(P)$  est appelée *densité locale d'énergie électrique*.

## II.7.ii – une boule chargée

✧ Quelle est l'énergie contenue dans une boule uniformément chargée?

★ **approche en ordre de grandeur**

15

- ✧ Nous pouvons tout d'abord évaluer l'ordre de grandeur l'énergie contenue dans une boule.
- ✧ Pour cela nous allons utiliser la densité volumique d'énergie électrique et écrire

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} \simeq \frac{1}{2} \epsilon_0 \times E_{\text{carac}}^2 \times V_{\text{carac}} \quad (\text{II.72})$$

- ✧ Reste à choisir une valeur caractéristique pour le champ électrique et pour le volume.
- ✧ Pour le volume, pas d'hésitation, ça sera le volume de la boule  $\frac{4}{3} \pi R^3$ .
- ✧ Pour le champ, nous allons prendre le champ au niveau de la surface de la boule, *i.e.* en  $r = R$ . Cela donne, avec les expressions de II.37,

$$E_{\text{carac}} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 R^2} \quad (\text{II.73})$$

- ✧ Et ainsi

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \times \left( \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 R^2} \right)^2 \times \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (\text{II.74})$$

$$= \frac{q^2}{24 \pi \epsilon_0 R} \quad (\text{II.75})$$

- ✧ Comme nous le montrerons dans le prochain chapitre, le calcul « exact » donne

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{3}{20} \times \frac{q^2}{\pi \epsilon_0 R} \quad (\text{II.76})$$

- ✧ L'expression est extrêmement proche de celle obtenue en ordre de grandeur.

★ **application numérique au niveau atomique**

16

- ✧ À l'échelle microscopique, les noyaux atomiques peuvent être considérés comme des boules uniformément chargées.
- ✧ Pour déterminer le rayon, nous pouvons utiliser la loi approximative

$$R = r_0 \times (A)^{1/3} \quad \text{où :} \quad (\text{II.77})$$

→  $r_0 = 1,4 \text{ fm}$  ;

→  $A$  est le nombre de nucléons.

- ✧ Cette loi vient du modèle dit « de goutte liquide » dans lequel tous les nucléons ont le même « volume<sup>4</sup> ».
- ✧ Cela nous donne, pour différents noyaux

noyau	hélium	carbone 12	krypton 93	baryum 140	uranium 235
charge	+2 $e$	+6 $e$	+36 $e$	+56 $e$	+92 $e$
énergie (MeV)	1,55	9,68	176	372	844

- ✧ Il s'agit là d'ordre de grandeur des énergies mises en jeu dans les réactions nucléaires. En effet, l'uranium 235 peut engendrer, par fission, du krypton 93 et du baryum 140.
- ✧ Énergétiquement, cela signifie que la réaction de fission « libère »

$$\mathcal{E}_{\text{uranium}} - \mathcal{E}_{\text{krypton}} - \mathcal{E}_{\text{baryum}} = 296 \text{ MeV} \quad (\text{II.78})$$

- ✧ En réalité, l'énergie disponible n'est « que » de 210 MeV. Cela est dû :

4. Rappelons qu'à ces échelles si petites, c'est la mécanique quantique qui règne en maître et que, dans ces conditions, il est difficile de parler de taille.

- en partie, par l'énergie cinétique emportée par les neutrons libérés ;
- en partie par l'énergie emportée par le rayonnement  $\gamma$  ;
- en grande partie par les approximations dans le modèle, notamment le rayon de l'atome.

## III – Le champ magnétostatique

### III.1 – Approche microscopique du courant

#### III.1.i – kesako ?



#### Définition

Un *courant électrique* est un déplacement de charges, quelles que soient ces charges : électrons, ions, protons...

✧ Exemples de courants électriques :

- dans les conducteurs électriques (notamment les métaux) ;
- dans les solutions électrolytiques ;
- les étincelles, la foudre... sont aussi des courants électriques.

#### III.1.ii – vecteur densité de courant électrique

✧ Pour décrire un courant, il faut donc préciser combien de charges vont où.



#### Définition

Le *vecteur densité surfacique de courant électrique en volume*  $\vec{j}$  est défini par :

$$\vec{j} \triangleq \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$

- $n_i$  est la densité volumique du porteur de charge  $i$  ;
- $q_i$  est la charge d'un porteur  $i$  ;
- $\vec{v}_i$  est la vitesse d'ensemble des porteurs  $i$ .

✧ Avec  $[n_i] = (\text{m})^{-3}$ ,  $[q_i] = (\text{C})$  et  $[\vec{v}_i] = (\text{m}).(\text{s})^{-1}$  nous trouvons :



#### Loi

$$[\vec{j}] = (\text{A}).(\text{m})^{-2}$$

✧ Si le nom de ce vecteur est un peu alambiqué, c'est pour insister sur le fait que son unité est en  $\text{m}^{-2}$ .

✧ Nous nous trouverons souvent dans le cas fréquent suivant



#### Loi

Quand un courant électrique n'est dû qu'à un seul type de charges mobiles, le vecteur densité surfacique de courant électrique en volume s'écrit

$$\vec{j} = n q \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{j} = \rho \vec{v}$$

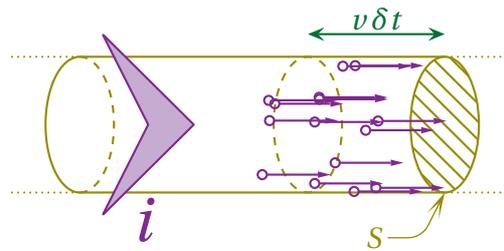
- $n$  est la densité volumique particulière des charges mobiles ;
- $q$  est la charge d'une particule mobile ;
- $\vec{v}$  est la vitesse d'ensemble des particules ;
- $\rho = n q$  est la densité volumique de charges mobiles.

#### III.1.iii – lien avec l'intensité

##### ★ cas particulier très fréquent

✧ Rappelons que l'intensité est, par définition, la quantité de charges qui traverse une section donnée de conducteur dans le sens de la flèche représentant  $i$ .

✧ En faisant un zoom sur une section de conducteur, nous allons regarder combien de charges passent pendant la durée  $\delta t$ .



- ✧ Pour cela supposons que tous les porteurs de charges aient la même vitesse  $\vec{v}$  (cette vitesse d'ensemble n'est ni plus ni moins que la vitesse moyenne des particules).
- ✧ Comme, pendant la durée  $\delta t$ , tous les porteurs parcourent la même distance  $v \delta t$ , nous voyons que seuls les porteurs contenus, au départ, dans le cylindre de section  $S$  et de hauteur  $v \delta t$  passeront la section de contrôle.
- ✧ En notant  $\delta N$  le nombre de porteurs traversant  $S$  pendant  $\delta t$ , nous avons donc, par définition de la densité volumique :

$$\delta N = n \delta \mathcal{V} = n S v \delta t \quad (\text{III.1})$$

- ✧ Cela donne une charge totale qui passe

$$\delta q = q \delta N = n q S v \delta t \quad (\text{III.2})$$

- ✧ Nous pouvons alors en déduire l'intensité

$$i = \frac{\delta q}{\delta t} = n q v S \quad (\text{III.3})$$



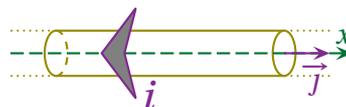
### Loi

Dans un conducteur de section droite  $S$ , l'intensité s'écrit

$$i = j \times S$$

- ✧ Pour  $i > 0$ , il faut donc  $j = n q v > 0$  ce qui correspond à :
  - $q < 0$  et  $v < 0$  : des électrons vont dans le sens *opposé* au courant ;
  - $q > 0$  et  $v > 0$  : des charges positives vont dans le sens du courant.

**STOP** Il faut faire attention aux conventions. Dans le cas représenté ci-dessous nous avons  $i = -j_x S$  car il faut  $j_x < 0$  pour avoir  $i > 0$ .



### ★ généralisation



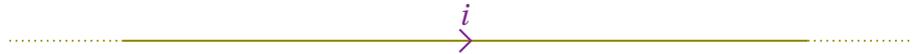
### Définition

L'intensité qui passe à travers une section  $\mathcal{S}$  est le flux du vecteur densité de courant électrique à travers cette surface :

$$i = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

### III.1.iv – vers un courant filiforme

- ✧ En nous éloignant d'un fil électrique, celui-ci devient infiniment fin et il devient maladroit de parler et de calculer un flux.
- ✧ C'est pourquoi, nous ne décrivons le courant qui parcourt le fil, que par l'intensité totale qui le traverse.
- ✧ C'est ce qui explique la notation bien connue en électrocinétique



## III.2 – Le théorème d'AMPÈRE

- ✧ C'est l'analogue pour le champ  $\vec{B}$  du théorème de GAUSS, *i.e.* il s'agit là d'un théorème donnant une information GLOBALE.

### III.2.i – énoncé

**Loi**

Soit une distribution quelconque de courants et un contour **orienté** et fermé  $\mathcal{C}$  – éventuellement fictif – quelconque. Nous avons alors

$$C_B = \mu_0 i_{\text{enlacé}} \quad \text{avec} \quad C_B = \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad \text{où :}$$

- $\vec{B}(P)$  est le champ  $\vec{B}$  en un point quelconque de  $\mathcal{C}$  ;
- $d\vec{\ell}_P$  est le vecteur déplacement élémentaire sur  $\mathcal{C}$  au niveau du point  $P$  considéré ;
- $i_{\text{enlacé}}$  est l'intensité enlacée par la courbe  $\mathcal{C}$  ;
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  est la perméabilité du vide.

**Loi**

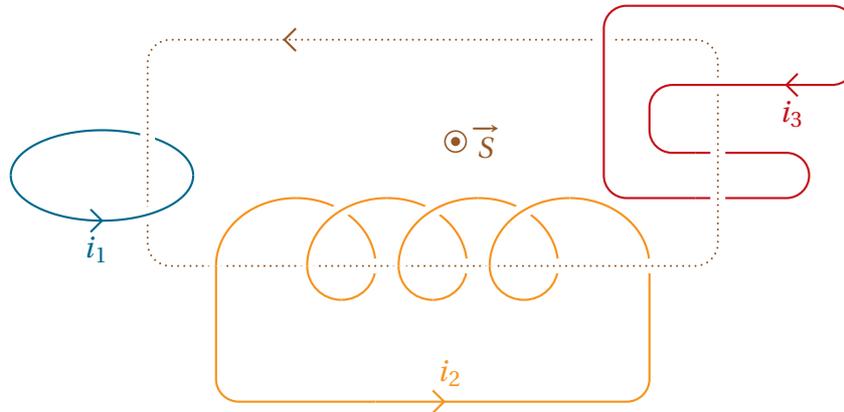
Le champ magnétique se mesure en tesla (T).

- 🔥 *Remarque.* Ne pas oublier le petit rond sur l'intégrale et l'orientation de la courbe.
- ✧ Le théorème d'AMPÈRE donne une information globale sur le champ, *i.e.* ne donne pas le champ en *un* point mais sur toute une courbe.

#### ★ intensité enlacée

- ✧ L'intensité enlacée est l'analogue de la charge à l'intérieur pour le théorème de GAUSS : c'est le courant « à l'intérieur de la ligne ». Mais comment le définir précisément ?
- ✧ En fait, c'est très visuel. Il suffit d'imaginer que  $\mathcal{C}$  est un lasso et, une fois celui-ci refermé, il n'y a plus qu'à compter le nombre de courants emprisonnés. Si un circuit passe plusieurs fois, il faut le compter plusieurs fois.
- ✧ Petite subtilité, pour l'algébrisation de l'intensité enlacée :

- d'abord imaginer une surface de savon délimitée par le contour d'AMPÈRE ;
- ensuite orienter la surface avec la règle de la main droite ;
- si la flèche de  $i$  « crève » la surface dans le sens de la surface, alors compter  $+i$ , sinon compter  $-i$  pour ce courant.



⇨ Dans l'exemple précédent, nous avons :

$$i_{\text{enlacé}} = -i_1 + 4i_2 - i_3 + i_3 = 4i_2 - i_1 \quad (\text{III.4})$$

- ⇨ La présence de  $i_{\text{enlacé}}$  ne doit pas faire croire que le champ n'est créé que par ce qui est enlacé par la courbe : le champ est **toujours** créé par la totalité des courants. D'ailleurs il y a besoin de connaître tous les courants... pour bien choisir le « bon » contour d'AMPÈRE.
- ⇨ Rappelons que, de manière générale, la circulation d'un champ vectoriel n'est pas forcément à calculer obligatoirement sur une courbe fermée (*i.e.* qui forme une boucle), mais, ici, pour le théorème d'AMPÈRE, c'est obligatoire.

### III.2.ii – interprétation

- ⇨ Ce théorème nous permet de dire :
  - que chaque fil de courant crée un champ qui tourne autour de lui ;
  - qu'en dehors de courants, les lignes de champ ne tournent pas autour de quelque chose.
- ⇨ Ici, la loi « fondamentale » donnant le champ magnétique concerne sa circulation, alors que le théorème de GAUSS donnait le flux.
- ⇨ Mais nous avons vu que le champ électrique était à *circulation* conservative. Eh bien nous verrons, bientôt, que le champ magnétique est à *flux* conservatif.

### III.2.iii – utilisation

- ⇨ Ce théorème est toujours théoriquement applicable ! Ou presque : il ne faut pas que le contour d'AMPÈRE  $\mathcal{C}$  coupe un circuit **isolé** : s'il y a de (très) nombreux circuits les uns à côté des autres, nous pourrions toujours faire comme si le contour passait entre les circuits.
- ⇨ En pratique, il est difficilement applicable car le calcul de  $C$  est souvent malaisé.
- ⇨ Pour que tout se passe bien (*i.e.* pour que le calcul soit faisable) il faut :
  - que les courants admettent beaucoup de symétries (au sens large) ;
  - que les contours d'AMPÈRE respectent ces symétries.
- ⇨ Comme en général, nous chercherons le champ  $\vec{B}$  en un point  $M$  particulier et que le théorème d'AMPÈRE donne une information sur le champ sur le contour choisi, il sera impératif que ce dernier contienne le point où nous cherchons à calculer le champ.
- ⇨ Le reste est une affaire de pratique.

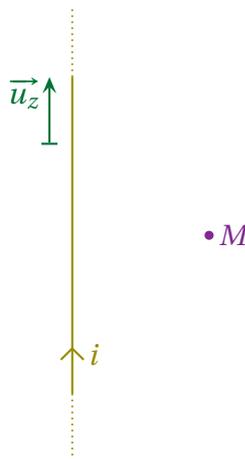
## III.3 – Champ magnétostatique créé par un câble

### III.3.i – fil simple

23

#### ★ description

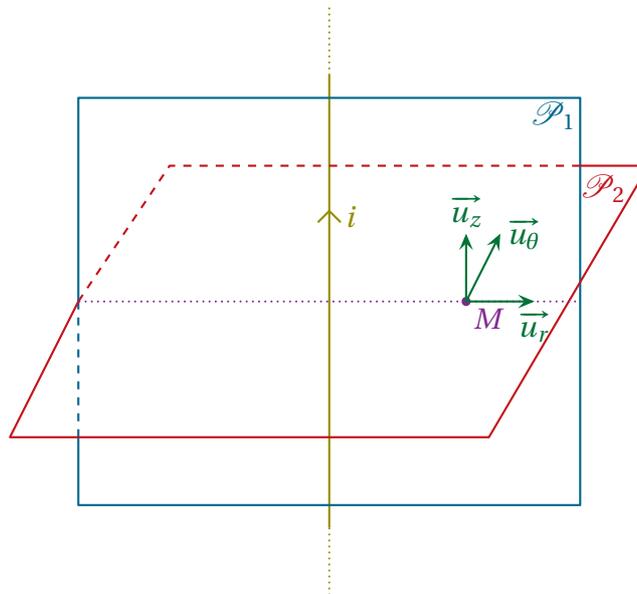
- ✧ Considérons un fil infini parcouru par un courant d'intensité  $I$ .
- ✧ Cherchons le champ  $\vec{B}$  créé dans tout l'espace.



- ✧ Nous pouvons tout de suite nous poser la question de l'intérêt de ce fil puisque d'une part aucun fil n'est infini et que d'autre un fil rectiligne infini ne peut pas constituer un circuit électrique fermé.
- ✧ En fait, le fil infini rectiligne modélise ce qu'il se passe très près d'un fil non infini, un peu comme « de près » la Terre peut sembler plate et infinie.

#### ★ analyse physique

- ✧ Il s'agit d'une situation de type « fil » ; les coordonnées naturelles sont les coordonnées cylindro-polaire.
- ✧ Il y a invariance par rotation autour de  $(Oz)$  :  $B(r, \theta, z) \rightarrow B(r, z)$ .
- ✧ Il y a invariance par translation suivant  $\vec{u}_z$  :  $B(r, z) \rightarrow B(r)$ .
- ✧ Considérons un point  $M$  quelconque en dehors du fil :
  - le plan  $\mathcal{P}(M, \vec{u}_z, \vec{u}_r)$  contenant le fil et  $M$  est plan de symétrie des courants ;
  - donc le plan  $\mathcal{P}(M, \vec{u}_z, \vec{u}_r)$  est plan d'antisymétrie pour  $\vec{B}$  ;
  - donc  $\vec{B}(M \in \mathcal{P})$  est normal à ce plan ;
  - donc  $\vec{B}(M \in \mathcal{P})$  est porté par  $\vec{u}_\theta$ .



✧ Finalement, le champ magnétique s'écrit

23

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta \tag{III.5}$$

👉 *Remarque.* Nous pouvons aussi voir que le plan orthogonal à l'axe et contenant  $M$  est plan d'antisymétrie des courants, donc plan de symétrie de  $\vec{B}$ . Nous en aurions alors déduit que  $\vec{B}$  était dans le plan horizontal, ce qui est une déduction moins forte que la précédente.

💡 **Les plans d'antisymétrie des champs donnent plus d'information sur la direction des champs que les plans de symétrie.**

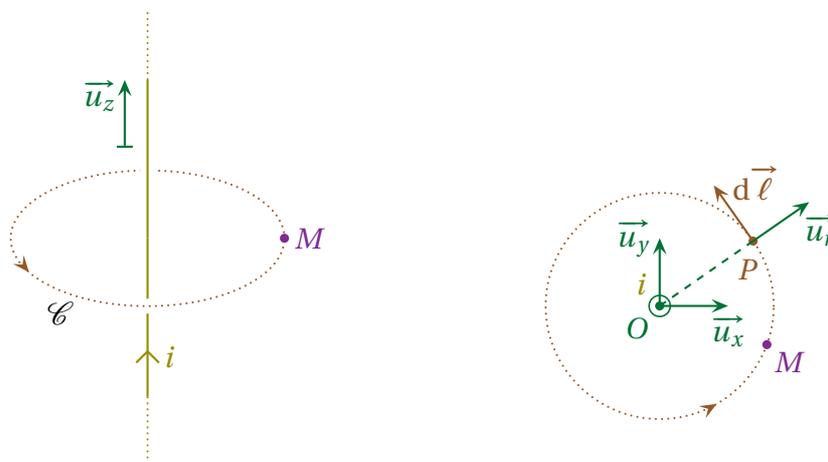
✧ Enfin les grandeurs pertinentes :  $i$  (distribution) et  $\mu_0$  (structure du champ).

★ **théorème d'AMPÈRE**

🌀 **version normale**

✧ Choisissons un contour respectant les symétries des courants et passant par  $M$  : un cercle centré sur l'axe et de rayon  $r$  et orientons-le dans le sens de  $\vec{u}_\theta$ .

17



✧ Pour mieux calculer la circulation, représentons la situation dans le plan  $(Oxy)$  où  $O$  est le centre du contour choisi.

✧ La circulation de  $\vec{B}$  vaut alors, avec  $d\vec{\ell}_P = d\ell_P \vec{u}_\theta$

$$C_B = \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad (\text{III.6})$$

$$= \oint_{P \in \mathcal{C}} B(r_P) \vec{u}_\theta \cdot (d\ell_P \vec{u}_\theta) \quad (\text{III.7})$$

$$= \oint_{P \in \mathcal{C}} B(r_P) d\ell_P \quad (\text{III.8})$$

✧ De plus, le contour, judicieusement choisi, impose  $r_P = C^{\text{te}} = r_M \stackrel{\text{not}}{=} r$  d'où

$$C_B = \oint_{P \in \mathcal{C}} B(r) d\ell_P \quad (\text{III.9})$$

$$= B(r) \times \oint_{\mathcal{C}} d\ell_P \quad (\text{III.10})$$

$$= B(r) \times \ell_{\text{tot}} \quad (\text{III.11})$$

$$= B(r) 2\pi r \quad (\text{III.12})$$

✧ L'intensité enlacée vaut, ici,

$$i_{\text{enlacé}} = +i \quad (\text{III.13})$$

✧ Comme le théorème d'AMPÈRE s'écrit  $C = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$ , nous arrivons d'abord à

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 i \quad (\text{III.14})$$

✧ Et ainsi :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad (\text{III.15})$$

✧ Le sens de  $\vec{B}$  est donné par la règle de la main droite.

✧ Vérifions l'homogénéité et la cohérence :  $\text{cham } B \times \text{longueur} = \mu_0 \times \text{courant}$ .

✧ Le résultat précédent n'est pas à savoir par cœur *stricto sensu* mais à savoir retrouver très vite.

### 🌀 version « pas de chance »

✧ Si nous avons orienté le contour d'AMPÈRE dans l'autre sens...

✧ La circulation de  $\vec{B}$  aurait alors valu, avec  $d\vec{\ell} = -d\ell_P \vec{u}_\theta$  :

$$C_B = \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad (\text{III.16})$$

$$= \oint_{P \in \mathcal{C}} B(r_P) \vec{u}_\theta \cdot (-d\ell_P \vec{u}_\theta) \quad (\text{III.17})$$

$$= - \oint_{P \in \mathcal{C}} B(r_P) d\ell_P \quad (\text{III.18})$$

✧ Et comme la géométrie du contour ne change, pas nous aurions eu  $r_P = C^{\text{te}} = r_M \stackrel{\text{not}}{=} r$  et donc

$$C_B = - \oint_{P \in \mathcal{C}} B(r) d\ell_P \quad (\text{III.19})$$

$$= -B(r) \times \oint_{\mathcal{C}} d\ell_P \quad (\text{III.20})$$

$$= -B(r) \times \ell_{\text{tot}} \quad (\text{III.21})$$

$$= -B(r) 2\pi r \quad (\text{III.22})$$

✧ Le contour étant orienté dans l'autre sens, l'intensité enlacée aurait valu, ici,

$$i_{\text{enlacé}} = -i \quad (\text{III.23})$$

✧ Comme le théorème d'AMPÈRE s'écrit toujours  $C = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$ , nous aurions eu

$$-B(r) 2\pi r = -\mu_0 i \quad \rightsquigarrow \quad \vec{B}_{(M)} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad (\text{III.24})$$

✧ Ce qui est, bien sûr, le même résultat que précédemment.

### III.3.ii – câble

#### ★ description

✧ Nous rencontrons des câbles très régulièrement en TP.

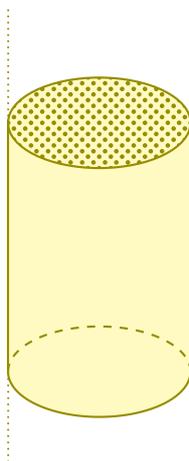


#### Définition

Un *câble* est un ensemble de plusieurs fils.

✧ Considérons un câble, *i.e.* un ensemble de  $N$  fils serrés les uns contre les autres chacun parcourus par un courant d'intensité  $i$ , en forme de cylindre de rayon  $R$ .

✧ Cherchons le champ  $\vec{B}$  créé dans tout l'espace.



✧ Comme les fils sont serrés les uns contre les autres, nous pouvons dire que le câble n'est, en fait, constitué que d'un seul fil, parcouru par l'intensité  $I = N \times i$ .

✧ Dans ces conditions, nous pouvons faire comme si ce câble (ou fil « épais ») était parcouru par une densité surfacique de courant électrique en volume

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi R^2} \quad (\text{III.25})$$

#### ★ symétries et invariances

✧ Comme ci-dessus la distribution est de type « fil ».

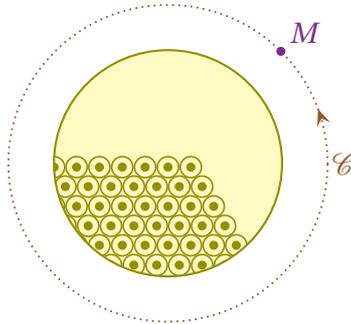
✧ Nous avons donc les mêmes invariances et les mêmes symétries ce qui conduit à :  $\vec{B}_{(M)} = B(r) \vec{u}_\theta$ .

✧ Les grandeurs pertinentes changent un peu :  $i$  et  $N$  (distribution),  $R$  (géométrie) et  $\mu_0$  (structure).

★ **théorème d'AMPÈRE**

🕒 **calcul de la circulation**

✧ En prenant comme contour d'AMPÈRE un cercle dans le plan orthogonal au câble et centré sur l'axe du câble, le calcul est identique au cas précédent et :  $C = B(r) 2 \pi r$ . 17



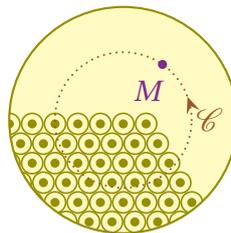
🕒 **intensité enlacée**

✧ Cette fois, il y a deux cas :

- le point  $M$  est dans le câble  $r \leq R$  ;
- le point  $M$  est à l'extérieur du câble  $r > R$ .

✧ Lorsque  $M$  est à l'extérieur, nous avons directement  $i_{\text{enlacé}} = +I$ .

✧ Si le point  $M$  est à l'intérieur du câble, nous devons compter uniquement l'intensité qui traverse la surface délimitée par le contour d'AMPÈRE.



✧ Nous avons alors, immédiatement

$$i_{\text{enlacé}} = j \times \pi r^2 \tag{III.26}$$

🕒 **rassemblement**

✧ Le théorème d'AMPÈRE nous indiquant que  $C = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} B(r) 2 \pi r = \mu_0 j \pi r^2 & \text{pour } r \leq R \\ B(r) 2 \pi r = \mu_0 I & \text{pour } r > R \end{cases} \tag{III.27}$$

✧ Soit, en simplifiant, et en remplaçant  $j$  par son expression

$$\begin{cases} \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I r}{2 \pi R^2} \vec{u}_\theta & \text{pour } r \leq R \\ \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \vec{u}_\theta & \text{pour } r > R \end{cases} \tag{III.28}$$

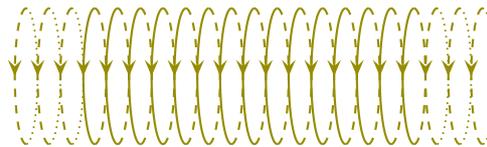
✧ Nous retrouvons bien, pour  $r > R$ , le résultat du fil simple :  $B(r) = \frac{\mu_0 i_{\text{total}}}{2 \pi r} \vec{u}_\theta$ .

- ✧ Si nous ne pouvons pas calculer le champ sur un fil infiniment fin, nous pouvons constater qu'il ne s'agit là que d'une limite du modèle.
- ✧ En effet, à très faible distance d'un fil, nous ne pouvons plus dire que le rayon du fil semble infiniment petit. Nous sommes alors obligé de reprendre le modèle complet, avec une densité de courant électrique en volume, modèle pour lequel le champ magnétique n'est jamais infini.

### III.4 – Le solénoïde infini

#### III.4.i – situation analyse

- ✧ Modélisons la spirale que constitue un solénoïde par un ensemble de spires circulaires côte-à-côte.



- ✧ Analyse physique :

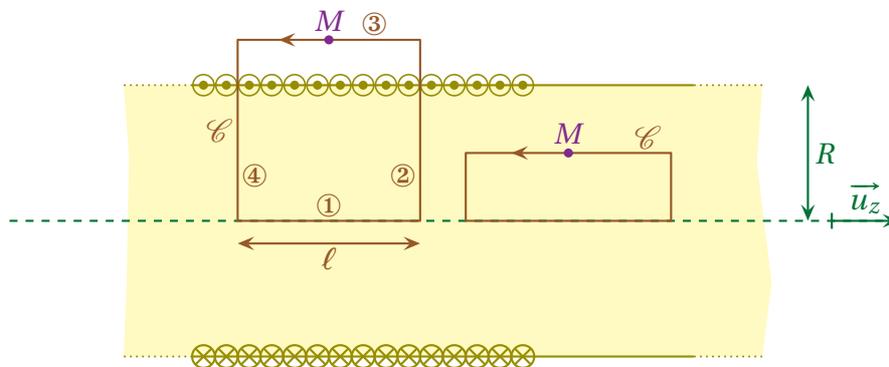
- la distribution est de type « fil » : il y a une invariance par translation et une invariance par rotation. Nous utiliserons le repérage cylindro-polaire.
- soit  $M$  quelconque de l'espace :
  - le plan  $\mathcal{P}(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est plan de symétrie des courants ;
  - donc le plan  $\mathcal{P}(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est plan d'antisymétrie de  $\vec{B}$  ;
  - donc  $\vec{B}(M \in \mathcal{P})$  est orthogonal au plan ;
  - donc  $\vec{B}(M \in \mathcal{P})$  est porté par  $\vec{u}_z$  ;
- finalement :  $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$  ;
- grandeurs pertinentes :  $i$ ,  $n$  (distribution),  $R$  (géométrie),  $\mu_0$  (structure).

- ✧ Analyse technique :

- il y a beaucoup de symétrie et d'invariance, AMPÈRE et son théorème nous seront utiles.

#### III.4.ii – champ créé

- ✧ Commençons par choisir un point quelconque et un contour d'AMPÈRE adapté. Ici il s'agit d'un rectangle dont un des côtés passe par  $M$  et un autre est confondu avec l'axe.



- ✧ Le théorème d'AMPÈRE s'écrit :

$$C_B = \mu_0 i_{\text{enlacé}} \quad \rightsquigarrow \quad \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \mu_0 i_{\text{enlacé}} \quad (\text{III.29})$$

### ★ la circulation

✧ En découpant le contour en 4 parties (chacun des 4 côtés du rectangle!), nous avons, par linéarité de la circulation :

$$C_B = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \quad (\text{III.30})$$

✧ La circulation sur le premier côté donne

$$C_1 = \int_{P \in \textcircled{1}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad (\text{III.31})$$

$$= \int_{P \in \textcircled{1}} B(0) \vec{u}_z \cdot d\vec{\ell}_P \vec{u}_z \quad (\text{III.32})$$

$$= B(0) \int \int_{P \in \textcircled{1}} d\ell_P \quad (\text{III.33})$$

$$= B(0) \ell \quad (\text{III.34})$$

✧ La circulation sur les côtés ② et ④ sont nuls car en chaque point de ② et ④, nous avons :

$$\vec{B}(P \text{ sur } \textcircled{2} \text{ ou } \textcircled{4}) // \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{\ell}(P \text{ sur } \textcircled{2} \text{ ou } \textcircled{4}) \perp \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad dC = \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = 0 \quad (\text{III.35})$$

✧ La circulation sur le côté ③ se détermine de la même manière que celle sur le côté ①

$$C_3 = \int_{P \in \textcircled{3}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad (\text{III.36})$$

$$= \int_{P \in \textcircled{3}} B(r_P) \vec{u}_z \cdot (-d\ell_P) \vec{u}_z \quad (\text{III.37})$$

$$= - \int \int_{P \in \textcircled{3}} B(r_P) d\ell_P \quad (\text{III.38})$$

✧ Et comme le contour a été judicieusement choisi pour avoir  $r_P = r_M = C^{\text{te}} \stackrel{\text{not}}{=} r$

$$C_3 = - \int \int_{P \in \textcircled{3}} B(r) \ell_P \quad (\text{III.39})$$

$$= -B(r) \int \int_{P \in \textcircled{3}} d\ell_P \quad (\text{III.40})$$

$$= -B(r) \ell \quad (\text{III.41})$$

✧ Finalement :

$$C = (B(0) - B(r)) \ell \quad (\text{III.42})$$

### ★ l'intensité enlacée

✧ Nous voyons qu'il y a deux cas :

→ si  $M$  est à l'intérieur du solénoïde, alors  $i_{\text{enlacé}} = 0$  ;

→ si  $M$  est à l'extérieur du solénoïde, alors  $i_{\text{enlacé}} = +n \ell i$  (attention au signe).

✧ Donc nous avons :

$$B(r) = B(0) \text{ pour } r < R \quad \text{et} \quad B(r) = B(0) - \mu_0 n i \text{ pour } r > R \quad (\text{III.43})$$

★ **conclusion**

- ✧ Il nous manque quelque chose pour conclure : l'expression du champ en un point, quelque part.
- ✧ Or, en s'éloignant à l'infini du solénoïde, celui-ci devient de rayon nul et tout se passe comme s'il n'y avait plus de courant.
- ✧ En effet, les charges en mouvement, celles qui constituent les courants électriques, rappelons-le, vont se mettre à avoir des trajectoires circulaires de rayon de plus en plus petit et ce, toujours avec la même vitesse.
- ✧ Cela signifie que, plus le point considéré est loin du solénoïde, plus, de son point de vue, les charges bougent peu.
- ✧ En d'autres termes, éloigné à l'infini, le champ magnétique doit être nul.
- ✧ Mais comme nous venons de voir que le champ magnétique est uniforme à l'extérieur du solénoïde, nous en déduisons

**Loi**

Le champ magnétique créé par un solénoïde infini est nul à l'extérieur.

**Loi**

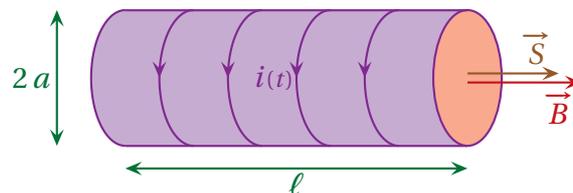
Le champ magnétique créé par un solénoïde infini est uniforme à l'intérieur de celui-ci et s'écrit  $\mu_0 n i$  où  $n$  est le nombre de spires par unité de longueur ; le sens du champ étant donné par la règle de la main droite.

- ✧ Remarquons que l'argument « en s'éloignant à l'infini, le champ doit devenir nul » ne fonctionne pas pour le champ électrique créé par un plan infini. En effet, même en s'éloignant à l'infini, un observateur verra toujours des charges sur un plan infini en dessous de lui.

**III.4.iii – inductance d'une bobine**★ **flux propre****Définition**

Le *flux propre* d'une bobine (ou d'un circuit) est le flux du champ magnétique créé par la bobine à travers elle-même (lui-même).

- ✧ Prenons l'exemple de la bobine idéale.



- ✧ Ici, comme la bobine est modélisée par une juxtaposition de  $N$  spires indépendantes, nous pouvons dire que

$$\Phi_{\text{propre}} = \Phi_{\text{tot}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_N \quad (\text{III.44})$$

- ✧ Comme le champ est uniforme dans toute la bobine, le flux traversant chaque spire est le même et s'écrit

$$\Phi_{\text{spire}} = B \times \pi a^2 \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_{\text{spire}} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \pi a^2 \quad (\text{III.45})$$

- ✧ Nous avons ainsi

$$\Phi_p = N \times \Phi_{\text{spire}} \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_p = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 i \quad (\text{III.46})$$

### ★ inductance

#### 🔑 définition

25

#### Définition

L'*inductance* d'une bobine (ou d'un circuit) est la grandeur notée  $L$ , mesurée en henry, telle que

$$\Phi_p = L \times i \quad \text{où}$$

$i$  est le courant traversant la bobine (ou le circuit).

#### Loi

L'inductance est toujours positive.

✧ L'inductance est forcément positive puisque le vecteur surface  $\vec{S}$  utilisé pour calculer le flux propre et le champ magnétique créé par  $i$  sont forcément dans le même sens, donné par la main droite.

#### Définition

Le flux magnétique s'exprime en *weber* ( $Wb$ ) avec

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T.m}^2$$

#### 🔑 exemple

✧ Pour la bobine idéale, nous avons tout de suite

$$\Phi_p = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 i \quad \rightsquigarrow \quad L_{\text{bob idéale}} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 \quad (\text{III.47})$$

#### 🔑 rappel

✧ Lors d'un calcul de flux à travers une surface qui s'appuie sur quelque chose :

- si le quelque chose est un contour fictif (théorème d'AMPÈRE), l'orientation du contour est arbitraire ;
- si le quelque chose est un circuit électrique (en induction), l'orientation se fait obligatoirement dans le sens de  $i$ .

#### 🔑 justification de la définition

✧ En fait, en reprenant les lois, nous pouvons voir que le flux propre est obligatoirement proportionnel à l'intensité du courant qui le crée.

✧ En effet, le théorème d'AMPÈRE, même s'il est techniquement incalculable, reste physiquement vrai et nous dit que

$$C_{\vec{B}_{\text{propre}}} = \mu_0 i_{\text{enlacé}} \quad (\text{III.48})$$

✧ L'ARQS impose que le courant  $i$  est le même dans toute la bobine ce qui fait que si ce courant est multiplié par un facteur  $\kappa$ , alors, en raisonnant bien évidemment à contour  $\mathcal{C}$  fixé :

- $i_{\text{enlacé}}$  sera aussi multiplié par un facteur  $\kappa$  ;
- $C_{\vec{B}_{\text{propre}}}$  sera également multiplié par un facteur  $\kappa$  ;
- ce qui signifie que  $\vec{B}_{\text{propre}}$  est multiplié par  $\kappa$ .

- ✧ Autrement dit, le champ magnétique est proportionnel à l'intensité  $i$ .
- ✧ Comme le flux (fût-il propre), est proportionnel au champ magnétique, nous voyons que, là aussi, le flux propre est proportionnel à l'intensité, d'où la définition.

### ☆ aspect énergétique

#### 🔧 lois

#### Loi

L'énergie contenue dans le champ magnétique d'une bobine d'inductance  $L$  parcourue par un courant d'intensité  $i(t)$  s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{mag}}(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

#### Loi

Le champ magnétique contient de l'énergie telle que l'énergie  $\delta \mathcal{E}(P)$  contenue dans un volume  $\delta \tau_P$  autour du point  $P$  s'écrit

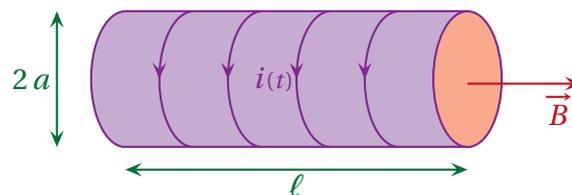
$$\delta \mathcal{E}(P) = e_{\text{mag}}(P) \delta \tau_P \quad \text{avec} \quad e_{\text{mag}} = \frac{1}{2 \mu_0} B^2(P)$$

$e_{\text{mag}}(P)$  est appelée *densité locale d'énergie magnétique*.

- ✧ La démonstration de l'énergie contenue dans une bobine a été faite en première année avec une approche électrocinétique.
- ✧ Nous allons maintenant montrer sur un exemple, et en admettant provisoirement la généralisation, l'expression de la densité locale d'énergie magnétique.
- ⚠ La démonstration générale des expressions des densités locales d'énergie électrique et magnétique est faite dans le chapitre 4 sur les équations de MAXWELLE lors de l'établissement de l'équation de POYN-TING.

#### 🔧 démonstration dans un cas particulier

- ✧ Considérons une bobine idéale.



- ✧ L'énergie contenue dans le champ magnétique s'écrit donc, en reprenant l'expression de son inductance,

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \times \left( \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 \right) \times i^2 \quad (\text{III.49})$$

- ✧ De plus, nous savons que la bobine crée un champ magnétique de norme  $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$  dans le volume  $\mathcal{V} = \pi a^2 \ell$  et que le champ magnétique est, ailleurs, partout nul. En terme de densité locale d'énergie magnétique, cela se traduit par

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = e_{\text{mag}} \times \mathcal{V} = e_{\text{mag}} \times \pi a^2 \ell \quad (\text{III.50})$$

✧ En égalant ces deux expressions, nous arrivons à

$$e_{\text{mag}} \times \pi a^2 \ell = \frac{1}{2} \times \left( \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 \right) \times i^2 \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \times \mu_0 \frac{N^2}{\ell^2} i^2 \quad (\text{III.51})$$

✧ Ce que nous pouvons réécrire

$$e_{\text{mag}} = \frac{1}{2 \mu_0} \times \left( \mu \frac{N}{\ell} i \right)^2 = \frac{1}{2 \mu_0} \times (\mu n i)^2 = \frac{1}{2 \mu_0} B_{\text{bob}}^2 \quad (\text{III.52})$$

✧ Ce qui est bien le résultat attendu et admis.

## III.5 – La dernière des 4 lois

### III.5.i – le champ magnétique est à flux conservatif

#### ★ bilan sur les lois

✧ Pour le champ  $\vec{E}$ , nous connaissons :

- son flux à travers une surface fermée, c'est le théorème de GAUSS ;
- sa circulation sur une courbe fermée, elle est nulle, et c'est lié à l'existence du potentiel électrostatique.

✧ Pour le champ  $\vec{B}$ , nous connaissons :

- sa circulation sur une courbe fermée, c'est le théorème d'AMPÈRE ;
- rien sur son flux.

#### ★ il en manque une

✧ C'est une nouvelle loi fondamentale, elle concerne le flux du champ magnétique.



### Loi

Soit une distribution quelconque de courants et une surface fermée  $\mathcal{S}$  – éventuellement fictive – quelconque, alors

$$\oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P = 0$$

- $\vec{B}(P)$  est le champ  $\vec{B}$  en un point quelconque de  $\mathcal{S}$  ;
- $d\vec{S}_P$  est le vecteur surface au point  $P$  considéré, toujours normal et vers l'extérieur.

#### ★ Il n'y a pas d'autres lois fondamentales mais...

✧ Les quatre lois de l'électromagnétisme sont désormais connues, mais en version « statique ».

✧ Dans le chapitre sur les équations de MAXWELL, nous verrons que :

- l'équation de MAXWELL – GAUSS parle du flux de  $\vec{E}$  ;
- l'équation de MAXWELL – FARADAY parle de la circulation de  $\vec{E}$  ;
- l'équation de MAXWELL – THOMSON<sup>5</sup> parle du flux de  $\vec{B}$  ;
- l'équation de MAXWELL – AMPÈRE parle de la circulation de  $\vec{B}$ .

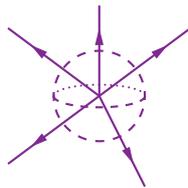
✧ Les équations de MAXWELL – AMPÈRE et MAXWELL – FARADAY varient légèrement en électromagnétisme (*i.e.* dans le cas non statique) ce qui implique que :

5. Cette équation est **souvent** appelée équation de MAXWELL – flux.

- il ne sera pas toujours possible de définir un potentiel électrostatique (puisque le champ électrique n'est pas toujours à circulation conservative) et le théorème d'AMPÈRE ne sera pas toujours vrai ;
- le théorème de GAUSS est toujours vrai, de même que le champ magnétique sera toujours à flux conservatif.

### III.5.ii – il n'y a pas de monopôle magnétique

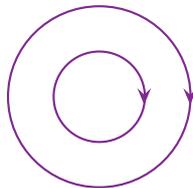
- ✧ Monopôle magnétique : c'est quelque chose qui serait « source » ou « puit » des lignes de champ, comme le sont les charges pour  $\vec{E}$ .
- ✧ Imaginons qu'un monopôle magnétique existe. Alors les lignes de champ magnétique ressemblent au dessin suivant.



- ✧ Calculons le flux sur une petite boule centrée sur le monopôle magnétique.
- ✧ Pour chaque élément de surface, nous trouvons que le flux élémentaire vaut :

$$d\Phi = \vec{B}(P) \cdot d\vec{S} > 0 \quad \rightsquigarrow \quad \Phi = \int d\Phi > 0 \quad (\text{III.53})$$

- ✧ Or cette dernière relation est en contradiction avec la loi fondamentale.
- ✧ Ainsi, comme les lignes de champ  $\vec{B}$  ne peuvent pas sortir de points, elles forment des boucles.



## III.6 – Lire les lignes de champ



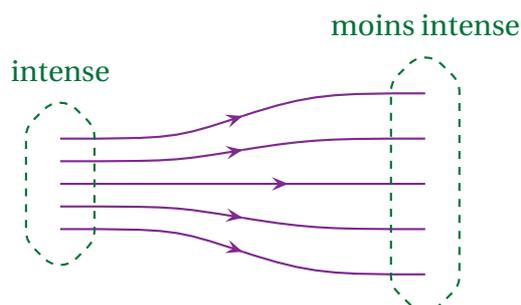
### Loi

En dehors des sources, le champ électrostatique est plus intense dans les zones où les lignes de champ se ressèrent.

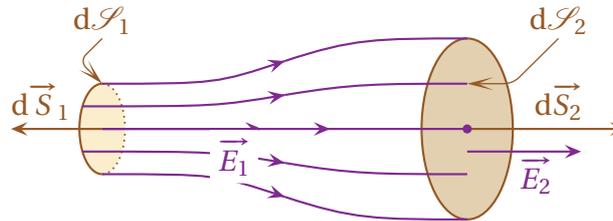


### Loi

Quelle que soit la présence de source, le champ magnétostatique est plus intense dans les zones où les lignes de champ se ressèrent.



- ✧ Démonstrons-le pour le champ électrostatique dans un espace vide de charges.
- ✧ Prenons comme surface de contrôle un tube de champ.



### Définition

Un *tube de champ* est une surface dont les parois latérales sont des lignes de champ, *i.e.* sont en tous leurs points tangentes au champ considéré.

- ✧ Choisissons  $d\mathcal{S}_1$  et  $d\mathcal{S}_2$  suffisamment petite pour que le champ  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  soit uniforme dessus et telles que  $d\mathcal{S}_1$  et  $d\mathcal{S}_2$  soient orthogonales aux lignes de champs (donc au champ).
- ✧ Nous avons alors  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_{\text{lat}} + \Phi_2$  avec :
  - $\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = -E_1 dS_1$  ;
  - $\Phi_{\text{lat}} = \int_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = 0$  car  $d\vec{S}$  orthogonal à  $\vec{E}$  par définition même du tube de champ ;
  - $\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = +E_2 dS_2$ .
- ✧ Et comme le théorème de GAUSS nous dit que  $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0$ , cela nous conduit à :

$$E_1 dS_1 = E_2 dS_2 \quad (\text{III.54})$$

- ✧ La démonstration est valide aussi pour le champ magnétique.
- ✧ Nous pouvons aisément vérifier, sur les graphiques précédents que, lorsque deux lignes de champ ont tendance à s'écarter, c'est bien que la norme du champ diminue.

# Compétences du chapitre

Les compétences à vocation essentiellement expérimentale sont indiquées en italique.

## Deuxième année

### 1 – Sources du champ électromagnétique

#### ★ 1.1 – Description microscopique et mésoscopique des sources

✧ Densité volumique de charges. Charge traversant un élément de surface fixe et vecteur densité de courant. Intensité du courant.

- 1 Exprimer  $\rho$  et  $\vec{j}$  en fonction de la vitesse moyenne des porteurs de charge, de leur charge et de leur densité volumique. [51,51]
- 2 Relier l'intensité du courant et le flux de  $\vec{j}$ . [52,52]

### 2 – Électrostatique

#### ★ 2.1 – Champ électrostatique

✧ Loi de COULOMB. Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle : relation  $\vec{E} = -\text{grad } V$ . Principe de superposition.

- 3 Citer l'ordre de grandeur du champ créé par le noyau sur l'électron dans un atome d'hydrogène. [38]

✧ Équation locale  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ .

- 4 Associer la relation  $\vec{E} = -\text{grad } V$  au fait que les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles et orientées dans le sens des potentiels décroissants. [40,40]

✧ Propriétés de symétrie.

- 5 Exploiter les propriétés de symétrie des sources (translation, rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé. [20,20,21]

✧ Théorème de GAUSS et équation locale  $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ .

- 6 Choisir une surface adaptée et utiliser le théorème de GAUSS. [26,31,35]

✧ Propriétés topographiques.

- 7 Justifier qu'une carte de lignes de champs puisse ou non être celle d'un champ électrostatique ; repérer d'éventuelles sources du champ et leur signe. [11,12,24]
- 8 Associer l'évolution de la norme de  $\vec{E}$  à l'évasement des tubes de champ loin des sources. [11]
- 9 Dédire les lignes équipotentielles d'une carte de champ électrostatique, et réciproquement. [40]
- 10 Évaluer le champ électrique à partir d'un réseau de lignes équipotentielles. [41]

#### ★ 2.2 – Exemples de champs électrostatiques

✧ Plan infini uniformément chargé en surface.

- 11 Établir l'expression du champ créé. [33]

✧ Condensateur plan modélisé par deux plans parallèles portant des densités superficielles de charges opposées et uniformes. Capacité. Densité volumique d'énergie électrostatique.

- 12 Établir l'expression du champ créé. [45]

13 Déterminer la capacité du condensateur. [46]

14 Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air. [38]

⇧ Noyau atomique modélisé par une boule uniformément chargée : énergie de constitution de la distribution.

15 Exprimer l'énergie de constitution du noyau à un préfacteur numérique près par analyse dimensionnelle. [49]

16 Relier les ordres de grandeur mis en jeu : rayons et énergies. Justifier la nécessité de l'interaction forte. [49]

### 3 – Magnétostatique

#### ★ 3.1 – Champ magnétostatique

⇧ Équations locales de la magnétostatique et formes intégrales : flux conservatif et théorème d'AMPÈRE.

17 Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'AMPÈRE. [54,56,59,60]

⇧ Linéarité des équations.

18 Utiliser une méthode de superposition. [8]

⇧ Propriétés de symétrie.

19 Exploiter les propriétés de symétrie des sources (rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé. [20,20,21]

⇧ Propriétés topographiques.

20 Justifier qu'une carte de lignes de champs puisse ou non être celle d'un champ magnétostatique ; repérer d'éventuelles sources du champ et leur signe/sens. [12,12]

21 Associer l'évolution de la norme de  $\vec{B}$  à l'évasement des tubes de champ. [12]

#### ★ 3.2 – Exemples de champs magnétostatiques

⇧ Câble rectiligne « infini ». Limite du fil rectiligne infini.

22 Déterminer le champ créé par un câble rectiligne infini. [58]

23 Calculer et connaître le champ créé par un fil rectiligne infini. Utiliser ces modèles près d'un circuit filiforme réel. [55,56]

⇧ Solénoïde long sans effets de bords.

24 Calculer et connaître le champ à l'intérieur, la nullité du champ extérieur étant admise. [60]

⇧ Inductance propre. Densité volumique d'énergie magnétique.

25 Établir les expressions de l'inductance propre et de l'énergie d'une bobine modélisée par un solénoïde. Associer cette énergie à une densité d'énergie volumique. [63,64]