

Électromagnétisme

Chapitre 3

Les dipôles

Table des matières

Introduction	4
I Le dipôle électrostatique	5
I-1 La modélisation	5
I-1 <i>·i</i> ils sont partout	5
molécules polaires	5
atomes polarisables	5
I-1 <i>·ii</i> modèle simple	6
I-2 Des champs plus faibles	6
I-2 <i>·i</i> analyse	6
I-2 <i>·ii</i> d'abord le potentiel	7
I-2 <i>·iii</i> puis le champ électrostatique	9
I-2 <i>·iv</i> représentation topographique	10
I-3 Le tout en écriture intrinsèque	10
I-3 <i>·i</i> loi	10
objectif	10
moment dipolaire	10
le potentiel en écriture intrinsèque	11
le champ en écriture intrinsèque	12
I-3 <i>·ii</i> valeurs numériques	12
I-4 Forces subies par un dipôle rigide	12
I-4 <i>·i</i> rigidité d'un dipôle	13
I-4 <i>·ii</i> résultante	13
champ uniforme	13
champ non uniforme	13
I-4 <i>·iii</i> moment	15
champ uniforme	15
champ non uniforme	16
équilibre, interprétation	16
I-4 <i>·iv</i> bilan	16
I-5 Point de vue énergétique pour un dipôle rigide	17
I-5 <i>·i</i> l'énergie potentielle...	17
I-5 <i>·ii</i> ... permet de retrouver la force	18
I-6 Cas du dipôle non rigide	18
I-6 <i>·i</i> molécule déformable	18
I-6 <i>·ii</i> modèle de THOMSON	19
description	19
champ créé par le noyau, rappel	19
polarisabilité	19
I-6 <i>·iii</i> la force peut se négocier...	20
I-6 <i>·iv</i> ... mais pas l'énergie potentielle	20
I-6 <i>·v</i> interaction dipôle-dipôle	20
II Le dipôle magnétostatique	22
II-1 Modélisation	22
II-1 <i>·i</i> origine atomique	22
II-1 <i>·ii</i> modèle simple	22
une boucle de courant	22

	grandeur caractéristique	22
	approximation dipôlaire	23
II.1.iii	topographie	23
	avec l'approximation dipôlaire	23
	hors approximation dipôlaire	24
	une analogie explicable	24
II.2	Actions subies	24
II.2.i	origine physique	24
II.2.ii	des résultats analogues	25
	résultante	25
	moment	25
	énergie potentielle	25
	coïncidence	26
II.3	Au niveau microscopique	26
II.3.i	magnéton de BOHR	26
II.3.ii	modèle planétaire	27
	présentation	27
	une trajectoire circulaire	27
	moment cinétique	27
	moment magnétique	28
II.3.iii	aimants permanents	28
	moment magnétique volumique	28
	équivalence avec une boucle de courant	29
	force d'arrachement	29
Compétences du chapitre		32

Les dipôles

Maintenant que, grâce aux deux premiers chapitres, nous savons tout de l'interaction champ électromagnétique \longleftrightarrow matière, nous pouvons penser qu'*a priori*, nous pouvons tout faire. Et c'est bien le cas ! Du moins, en mécanique classique (non quantique, non relativiste). Toutefois, comme nous l'avons évoqué dans les chapitres précédents, les lois générales que nous avons mises en évidence conduisent à des calculs insurmontables, sauf dans quelques cas très particuliers.

Toutefois, au niveau intermoléculaire, à une échelle où la mécanique classique est déjà valable, les phénomènes électromagnétiques sont d'une importance si considérable que nous ne pouvons pas ne pas nous en occuper. Nous allons, dans ce chapitre, aller au cœur de la matière afin de modéliser (de manière simple) ce qui s'y passe par ce que nous appellerons des *dipôles*. Nous aurons l'occasion de constater qu'une partie notable des calculs se fait bien, ce qui nous amènera à des résultats analytiques sources d'interprétation.

Dans ce chapitre, nous allons commencer par nous intéresser au dipôle électrostatique : son origine, sa modélisation, son interaction avec le champ électromagnétique. Dans la deuxième partie, nous ferons la même chose avec le dipôle magnétique, tout simplement.

I – Le dipôle électrostatique

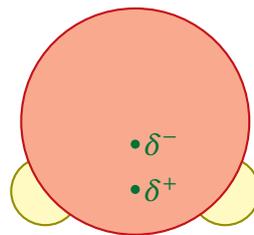
I.1 – La modélisation

I.1.i – ils sont partout

- ✧ Nous savons que la matière est globalement neutre car les atomes le sont : il faut une opération extérieure pour charger la matière ce qui correspond, au niveau atomique, à la capture ou à la cession d'un électron du nuage électronique d'un atome.
- ✧ Une fois la matière chargée, nous sommes ramenés, au niveau de l'interaction avec le champ (en tant que source active ou matière passive) aux cas étudiés dans les chapitres précédents.
- ✧ Que se passe-t-il dans le cas, très fréquent, où la matière reste globalement neutre ?

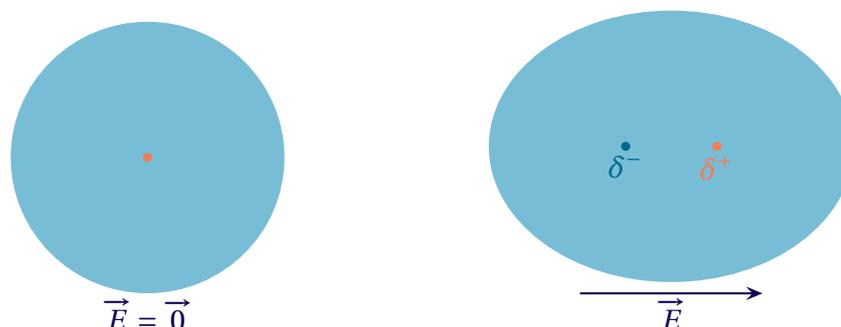
★ molécules polaires

- ✧ Certaines molécules globalement neutres peuvent néanmoins présenter une répartition de charges telle que le barycentre des charges positives δ^{\oplus} ne soit pas superposé au barycentre des charges négatives δ^{\ominus} .
- ✧ C'est le cas de molécules telles que HCl ou H₂O.
- ✧ Ainsi, pour la molécule d'eau, sa géométrie coudée et la plus forte électronégativité de l'oxygène par rapport à l'hydrogène, déplacent le barycentre des charges négatives un peu plus vers l'oxygène.



★ atomes polarisables

- ✧ Au delà de ces molécules qui ont intrinsèquement des barycentres de charges δ^{\oplus} et δ^{\ominus} différents, quasiment toutes les molécules peuvent être déformées par un champ extérieur de telle sorte qu'elles aussi voient leurs barycentres δ^{\oplus} et δ^{\ominus} se distinguer.
- ✧ Considérons ainsi un atome parfaitement sphérique dont les barycentres δ^{\oplus} et δ^{\ominus} sont confondus et soumettons-le à un champ uniforme \vec{E} .



- ✧ Parce que les charges positives subissent une force dans le sens de \vec{E} alors que les charges négatives subissent une force dans le sens opposées, nous pouvons voir que globalement le champ \vec{E} a tendance à le déformer et, ainsi, à séparer les deux barycentres δ^{\oplus} et δ^{\ominus} .

I.1.ii – modèle simple

- ✧ Pour représenter une distribution de charges globalement neutre nous utiliserons le modèle dit du dipôle électrique.

Définition

Un *dipôle électrique* est un ensemble de deux charges opposées ponctuelles distantes de a .



- ✧ Sauf précision contraire, nous prendrons toujours $a = C^{te}$ mais rien ne l'oblige *a priori*. Avec $a = C^{te}$, le dipôle est un dipôle électrostatique.
- ✧ Toujours dans l'idée que ces dipôles vont modéliser des molécules, *i.e.* des choses très petites à l'échelle mésoscopique et, *a fortiori*, à l'échelle macroscopique, nous pourrons toujours considérer que nous nous plaçons à de très grandes distances du dipôle.

Définition

L'approximation dipolaire consiste à étudier un dipôle à des distances très supérieure à sa taille.

- ✧ Le but, dans un premier temps, va être de trouver le potentiel V_{dip} et le champ \vec{E}_{dip} créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire.

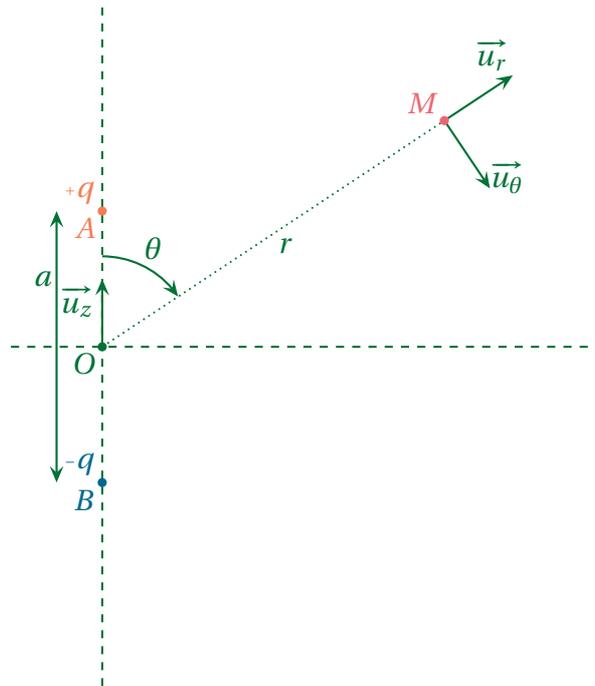
I.2 – Des champs plus faibles

I.2.i – analyse

- ✧ Le dipôle est une distribution de type disque puisqu'elle n'admet qu'une invariance par rotation et pas d'invariance par translation.
- ✧ Ici nous pouvons utiliser le repérage cylindrique mais nous allons plutôt utiliser le repérage sphérique car nous savons déjà que l'intérêt du dipôle est d'être utilisé à très grande distance, *i.e.* à une distance telle qu'il semble être ponctuel.
- ✧ Nous pouvons donc en déduire que le potentiel ne dépend pas de l'angle φ et que le champ n'en dépendra pas non plus :

$$V(r, \theta, \varphi) \quad \text{et} \quad \vec{E}(r, \theta, \varphi) \quad (I.1)$$

- ✧ Représentons la situation dans un plan méridien avec M quelconque.



✧ M étant quelconque :

- le plan $\mathcal{P}(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie des sources ;
- donc le plan $\mathcal{P}(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie du champ \vec{E} ;
- donc $\vec{E}_{(M \in \mathcal{P})}$ est tangent à \mathcal{P} ;
- donc $\vec{E}_{(M \in \mathcal{P})}$ est porté par \vec{u}_r et \vec{u}_θ .

✧ Ici il n'y a pas assez d'invariance, nous allons donc d'abord calculer le potentiel pour ensuite en déduire le champ grâce à la relation $\vec{E} = -\text{grad } V$.

✧ Les grandeurs pertinentes : q pour la distribution, a pour la géométrie et ε_0 pour la structure.

I-2-ii – d'abord le potentiel

✧ Il s'agit du potentiel créé par deux charges donc cela donne tout de suite :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{P}_i M\|} \quad (\text{I.2})$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 AM} + \frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0 BM} \quad (\text{I.3})$$

✧ Calculons maintenant $\frac{1}{AM}$ et, pour cela, passons par AM^2 :

$$AM^2 = \overrightarrow{AM}^2 = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} \right)^2 \quad (\text{I.4})$$

$$= \overrightarrow{AO}^2 + \overrightarrow{OM}^2 + 2 \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM} \quad (\text{I.5})$$

$$= AO^2 + OM^2 + 2 \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM} \quad (\text{I.6})$$

$$= \frac{a^2}{4} + r^2 + 2 \times \frac{a}{2} \times r \times \cos(\pi - \theta) \quad (\text{I.7})$$

$$= \frac{a^2}{4} + r^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times r \times \cos \theta \quad (\text{I.8})$$

$$= r^2 \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right) \quad (\text{I.9})$$

✧ Tenons compte maintenant de l'approximation dipolaire $r \gg a$ qui nous permet de faire un développement limité au premier ordre du résultat précédent avec $\frac{a}{r}$ d'ordre 1 et $\frac{a^2}{r^2}$ d'ordre 2 :

$$\frac{1}{AM} = \left(AM^2 \right)^{-1/2} \quad (\text{I.10})$$

$$= \frac{1}{r} \times \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \quad (\text{I.11})$$

$$\stackrel{\text{DL}}{=} \frac{1}{r} \times \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \quad (\text{I.12})$$

✧ Nous trouvons de même

$$BM^2 = \overrightarrow{BM}^2 = \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} \right)^2 \quad (\text{I.13})$$

$$= \frac{a^2}{4} + r^2 + ar \cos \theta \quad (\text{I.14})$$

$$= r^2 \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right) \quad (\text{I.15})$$

✧ Puis avec l'approximation dipolaire

$$\frac{1}{BM} = \left(AM^2 \right)^{-1/2} \stackrel{\text{DL}}{=} \frac{1}{r} \times \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \quad (\text{I.16})$$

✧ Il n'y a plus qu'à rassembler le tout :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} \times \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right) \quad (\text{I.17})$$

$$= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} \times \left(\chi + \frac{a}{2r} \cos \theta - \chi + \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \quad (\text{I.18})$$

✧ Et finalement nous aboutissons à

$$V(M) = \frac{q a \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \quad (\text{I.19})$$



Bon à retenir

Le potentiel dipolaire statique décroît en $\frac{1}{r^2}$.

7

I-2-iii – puis le champ électrostatique

✧ Utilisons la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ qui s'écrit ici, en coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta - \underbrace{\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}}_{=0} \vec{u}_\varphi \quad (\text{I.20})$$

✧ Nous trouvons ainsi :

$$\vec{E} = -\frac{2 q a \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \times \frac{-q a \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_\theta \quad (\text{I.21})$$

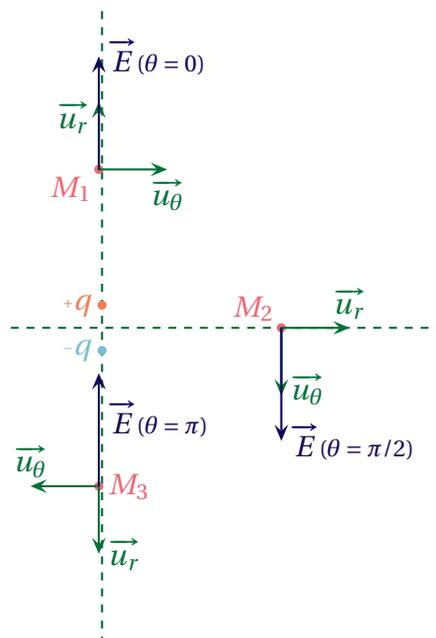
$$= \frac{q a}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \times (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) \quad (\text{I.22})$$



Bon à retenir

Le champ électrostatique dipolaire décroît en $\frac{1}{r^3}$.

✧ Regardons ce que cela donne qualitativement. Prenons 3 points M_1 , M_2 et M_3 situés à la même distance r du dipôle, mais à des azimuths particuliers.



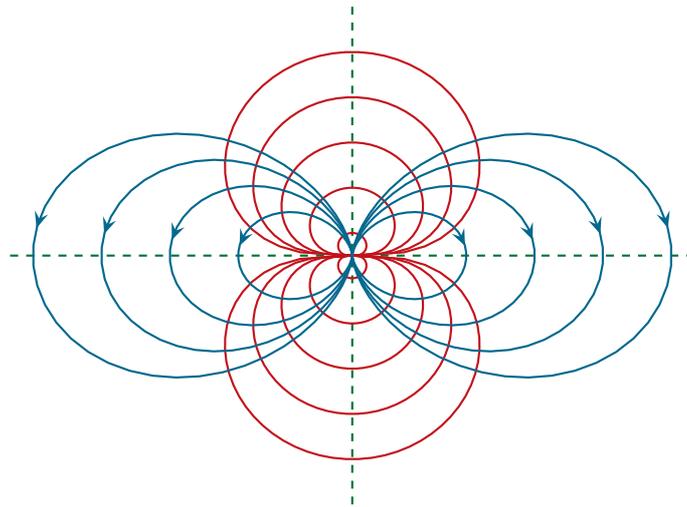
✧ Nous pouvons tout d'abord constater que le champ « fuit » les charges positives.

✧ De plus à $r = r_0$ fixé, nous pouvons constater que le champ est deux fois plus intense dans l'axe du dipôle que dans le plan médiateur.

- ✧ Enfin nous pouvons aussi remarquer que, pour $\theta = \pi/2$, le champ n'est porté que par \vec{u}_θ . C'est tout à fait normal étant donné que le plan médiateur est un plan d'antisymétrie des sources donc un plan d'antisymétrie du champ.

I.2.iv – représentation topographique

- ✧ Sont tracées ci-dessous dans l'approximation dipolaire :
- en rouge les isopotentielles ;
 - en bleu les lignes de champ.



- ✧ Nous pouvons constater que les différentes lignes se coupent bien à angle droit.

I.3 – Le tout en écriture intrinsèque

I.3.i – loi

★ objectif

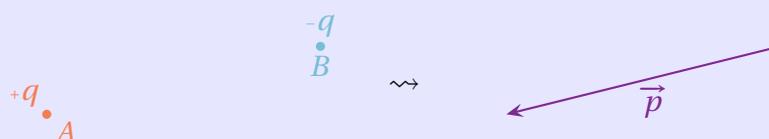
- ✧ Le problème de l'expression $V(M) = \frac{q a \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$ est qu'elle dépend du repérage par l'intermédiaire de r et θ .
- ✧ De plus cette loi dépend de a qui n'est pas une grandeur intéressante car à grande distance le dipôle est véritablement ponctuel!

★ moment dipolaire

Définition

Le *moment dipolaire* d'un dipôle de charge q_A en A et q_B en B avec $q_A + q_B = 0$ s'écrit :

$$\vec{p} \triangleq q_A \vec{BA} = q_B \vec{AB}$$



Loi

Un moment dipolaire s'exprime en C.m.

⇨ Comme $q_A = -q_B$, nous avons

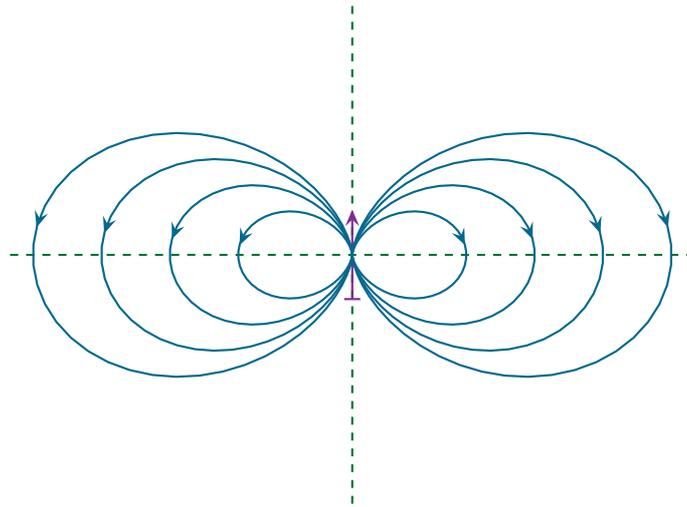
$$q_A \vec{BA} = (-q_B) \vec{BA} = q_B \vec{AB} \quad (\text{I.23})$$



Bon à retenir

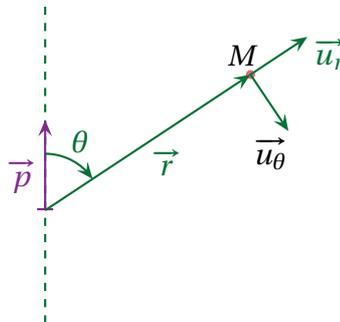
§ Le moment dipolaire est intrinsèque au dipôle.

⇨ Quand nous superposons le moment dipolaire aux lignes de champs, nous pouvons voir que ces dernières « sortent » dans le sens de \vec{p} .



★ le potentiel en écriture intrinsèque

⇨ Commençons par faire un schéma.



⇨ Nous voyons alors tout de suite

$$q a \cos \theta = \vec{p} \cdot \vec{u}_r = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r} \quad \rightsquigarrow \quad V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} \quad (\text{I.24})$$



Loi

En écriture intrinsèque, le potentiel créé par un dipôle \vec{p} situé en D s'écrit

$$V_{\text{dip}}(M) = \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{DM}}{4\pi \epsilon_0 DM^3} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

★ le champ en écriture intrinsèque

✧ Commençons par réécrire le champ avec le moment dipolaire.

$$\vec{E} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times (2 \cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta) \quad (\text{I.25})$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times (2 \cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta) \quad (\text{I.26})$$

✧ Remarquons ensuite que $\vec{p} = p \cos\theta \vec{u}_r - p \sin\theta \vec{u}_\theta$.

✧ Nous pouvons alors écrire

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times (3p \cos\theta \vec{u}_r - p \cos\theta \vec{u}_r + p \sin\theta \vec{u}_\theta) \quad (\text{I.27})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times (3p \cos\theta \vec{u}_r - \vec{p}) \quad (\text{I.28})$$

✧ Et avec $p \cos\theta = \vec{p} \cdot \vec{u}_r$ nous arrivons à :

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5} \quad (\text{I.29})$$

✧ Ce résultat n'est pas à connaître, mais à savoir reconnaître et, surtout, à savoir qu'il existe.

I.3.ii – valeurs numériques

✧ Étant donnés les ordres de grandeur des tailles et des charges des charges des molécules, leurs moments dipolaires vaudront à peu près

$$p = qa \equiv e \times r_0 \sim 1,6 \times 10^{-19} \times 10^{-10} \sim 10^{-29} \text{ C.m} \quad (\text{I.30})$$



Bon à retenir

Un moment dipolaire électrique s'exprime en **debye** (D) tel que

$$1 \text{ D} \simeq \frac{1}{3} 10^{-29} \text{ C.m}$$

✧ La définition réelle du debye est

$$1 \text{ D} = 10^{-18} \text{ statC.cm} \quad (\text{I.31})$$

✧ Le statC? C'est l'unité de charge de FRANKLIN qui correspond à la charge (en valeur absolue) contenue dans une mole d'électron.

✧ Quelques valeurs :

→ pour H₂O : $p = 1,85 \text{ D}$

→ pour NH₃ : $p = 1,5 \text{ D}$

→ pour HCl : $p = 1,08 \text{ D}$

I.4 – Forces subies par un dipôle rigide

I.4.i – rigidité d'un dipôle



Définition

Un dipôle est dit *rigide* lorsque la distance entre ses charges ne varie pas.

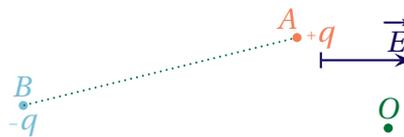


- ✧ Un dipôle rigide peut bouger, avancer, tourner sur lui-même, mais **pas** se déformer : tout se passe comme s'il s'agissait d'un solide.
- ✧ Un dipôle rigide permet de modéliser des molécules polaires.

I.4.ii – résultante

★ champ uniforme

- ✧ Représentons les deux charges modélisant le dipôle et calculons la résultante des forces exercées par le champ \vec{E}_0 uniforme



- ✧ La force totale s'écrit

$$\vec{f} = -q \vec{E}_{(B)} + (+q) \vec{E}_{(A)} = -q \vec{E}_0 + q \vec{E}_0 = \vec{0} \quad (\text{I.32})$$



Loi

Dans un champ électrique uniforme un dipôle électrique subit une résultante de force nulle.

★ champ non uniforme

🌀 loi



Loi

La force subie par un dipôle rigide \vec{p} plongé dans un champ \vec{E} non uniforme s'écrit

$$\vec{f} = \left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{E}$$

💡 L'opérateur $\left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)$ est bien moins difficile qu'il n'y paraît **et** sera revu en mécanique des fluides..



Ne pas confondre :

- ➔ $\left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{E}$ qui signifie qu'il faut **d'abord** effectuer $\left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)$ et seulement **après** l'appliquer à chacune des composantes de \vec{E} ;
- ➔ avec $\vec{p} \cdot \left(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{E} \right)$ qui n'a strictement aucune signification puisque le gradient doit agir sur un champ scalaire.

- ✧ En effectuant $\left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)$ nous trouvons

$$p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{I.33})$$

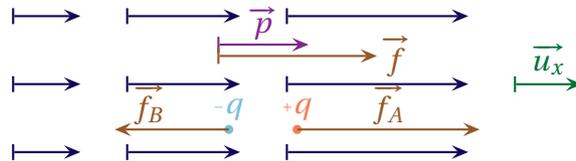
✧ Cela signifie que, tout étant développé, nous avons

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ p_x \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ p_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{I.34})$$

☞ *Remarque.* Heureusement que dans les cas pratiques il y a **beaucoup** de simplifications !

🔗 interprétation

✧ Considérons un champ électrostatique porté par \vec{u}_x , ne dépendant que de \vec{u}_x et un dipôle \vec{p} porté lui aussi par \vec{u}_x .



✧ Nous avons alors

$$\vec{E} = E(x) \vec{u}_x \rightsquigarrow \left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) = p_x \frac{d}{dx} \rightsquigarrow f_x = p_x \frac{dE_x}{dx} \quad (\text{I.35})$$

✧ Dans le cas représenté $p_x > 0$ et $\frac{dE_x}{dx} > 0$ donc $f_x > 0$: le dipôle est attiré vers la droite.

✧ Au niveau des charges nous pouvons constater que la charge positive est légèrement plus à droite que la charge négative donc elle subit une force légèrement plus intense.



Bon à retenir

Un dipôle orienté dans le sens du champ a tendance à se déplacer vers les zones de champ intense.

9

🔗 démonstration

✧ Pour déterminer la résultante, sommions les forces subies par les deux charges.

$$\vec{f} = -q \vec{E}(B) + (+q) \vec{E}(A) = -q \vec{E}(B) + q \vec{E}(A) \quad (\text{I.36})$$

✧ Développons l'expression précédente en précisant les positions de B et A

$$\vec{r}_A = \vec{OA} \quad \text{et} \quad \vec{r}_B = \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{OA} + \vec{a} \quad (\text{I.37})$$

✧ Nous avons ainsi

$$\vec{f} = -q \vec{E}(\vec{r}_B) + q \vec{E}(\vec{r}_A) \quad (\text{I.38})$$

$$= -q \vec{E}(\vec{OA} + \vec{a}) + q \vec{E}(\vec{OA}) \quad (\text{I.39})$$

$$= \begin{pmatrix} -q \left(E_x(\vec{OA} + \vec{a}) - E_x(\vec{OA}) \right) \vec{u}_x \\ -q \left(E_y(\vec{OA} + \vec{a}) - E_y(\vec{OA}) \right) \vec{u}_y \\ -q \left(E_z(\vec{OA} + \vec{a}) - E_z(\vec{OA}) \right) \vec{u}_z \end{pmatrix} \quad (\text{I.40})$$

✧ Comme a est très petit devant toutes les grandeurs caractéristiques du problème (notamment celle concernant la variation du champ électrique), nous pouvons écrire

$$E_x(\vec{OA} + \vec{a}) - E_x(\vec{OA}) = dE_x = \overrightarrow{\text{grad}}(E_x) \cdot \vec{a} \quad (\text{I.41})$$

✧ En effectuant cette opération sur les trois composantes, nous obtenons :

$$\vec{f} = -q \begin{pmatrix} dE_x \\ dE_y \\ dE_z \end{pmatrix} = -q \begin{pmatrix} \overrightarrow{\text{grad}}(E_x) \cdot \vec{a} \\ \overrightarrow{\text{grad}}(E_y) \cdot \vec{a} \\ \overrightarrow{\text{grad}}(E_z) \cdot \vec{a} \end{pmatrix} \quad (\text{I.42})$$

$$= -q \times \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{\text{grad}}(E_x) \\ \overrightarrow{\text{grad}}(E_y) \\ \overrightarrow{\text{grad}}(E_z) \end{pmatrix} = -q \times \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (\text{I.43})$$

$$= - \left(q \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{E} \quad (\text{I.44})$$

✧ Et avec $\vec{p} = q_A \vec{BA} = -q \vec{a}$ nous arrivons au résultat attendu.

I.4.iii – moment

★ champ uniforme

8



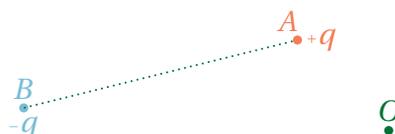
Loi

Le moment subit par un dipôle plongé dans un champ \vec{E} s'écrit

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

✧ Remarquons que ce moment est indépendant du point par rapport auquel il est calculé.

✧ Pour le montrer, reprenons la situation précédente et considérons le champ uniforme.



✧ Calculons le moment par rapport à O des forces exercées par le champ électrique

$$\vec{M}_O(\vec{f}) = \vec{OA} \wedge \vec{f}_A + \vec{OB} \wedge \vec{f}_B \quad (\text{I.45})$$

$$= \vec{OA} \wedge (q \vec{E}_0) + \vec{OB} \wedge (-q \vec{E}_0) \quad (\text{I.46})$$

$$= q(\vec{OA} - \vec{OB}) \wedge \vec{E}_0 \quad (\text{I.47})$$

$$= q \vec{BA} \wedge \vec{E}_0 \quad (\text{I.48})$$

✧ Ce qui est bien le résultat avec $\vec{p} = q \vec{BA}$.

★ champ non uniforme

✧ Il n'est pas utile de faire le cas où le champ n'est pas uniforme car le moment n'est pas nul avec un champ uniforme.

✧ La situation était différente pour le cas de la résultante qui était nulle avec un champ uniforme : nous n'avions pas eu le choix que de regarder le cas non uniforme.

★ équilibre, interprétation

✧ Un dipôle est à l'équilibre lorsque le moment qu'il subit est nul.



Bon à retenir

Un dipôle subit un moment nul lorsque son moment dipolaire \vec{p} est dans la même direction que le champ électrique.

✧ Prenons un dipôle aligné avec le champ mais de sens opposé et écartons-le de sa position d'équilibre.



✧ Nous voyons que le moment subi a tendance à rabattre encore davantage le dipôle sur le champ : la position d'équilibre est instable.

✧ Pour un dipôle initialement dans le même sens que \vec{E} c'est le contraire : la position d'équilibre est stable.



Bon à retenir

Les dipôles ont tendance à pointer dans la même direction et dans le même sens que le champ \vec{E} .

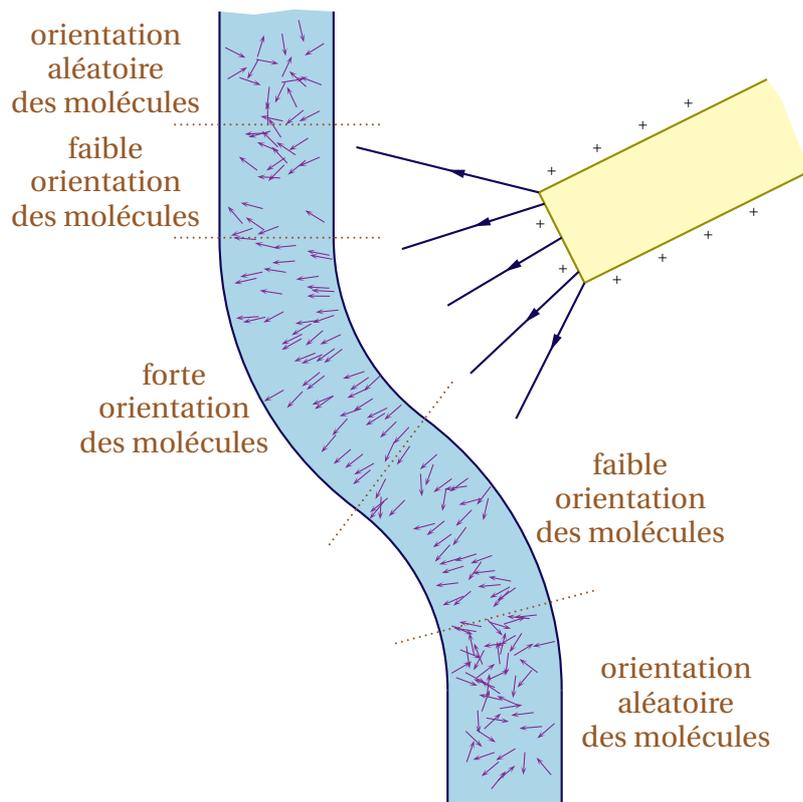
9

I.4.iv – bilan

✧ L'eau est composé de molécules polaires autrement dit, de dipôles.

✧ Prenons un bâton de plastique et électrisons-le par frottement.

✧ En rapprochant le bâton de l'eau, nous constatons que celle-ci est attirée.



✧ En fait il se passe les phénomènes suivants :

9

- les molécules d'eau arrivent de manière totalement désordonnée ;
- lorsque le champ électrique commence à se faire sentir, les molécules ont tendance à s'orienter dans la direction et le sens du champ ;
- les molécules plus ou moins alignées et dans le sens de \vec{E} sont attirées vers les zones de sens intenses c'est-à-dire vers le bâton : le filet d'eau est dévié ;
- la gravité aidant les molécules d'eau s'éloignent des zones de champ et les molécules perdent leurs orientations.

I-5 – Point de vue énergétique pour un dipôle rigide

I-5.i – l'énergie potentielle...

8

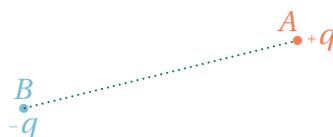


Loi

L'énergie potentielle que possède un dipôle rigide électrostatique s'écrit

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

✧ La démonstration est simple, elle consiste à sommer les énergies potentielles des deux charges.



✧ Nous avons tout d'abord

$$E_p(\text{dip}) = E_p(A) + E_p(B) \quad (\text{I.49})$$

$$= q V_A + (-q) V_B \quad (\text{I.50})$$

$$= q(V_A - V_B) = q dV_{BA} \quad (\text{I.51})$$

✧ À l'aide de la relation fondamentale du gradient et de la définition de v nous pouvons écrire

$$dV_{BA} = (\overrightarrow{\text{grad}} V) \cdot \overrightarrow{BA} \quad \rightsquigarrow \quad E_p(\text{dip}) = q \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V = \overrightarrow{p} \cdot (-\overrightarrow{E}) \quad (\text{I.52})$$

I.5.ii – ... permet de retrouver la force

✧ Partons de la définition d'une force conservative

$$\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \overrightarrow{\text{grad}} (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E}) \quad (\text{I.53})$$

✧ Pour que cette relation soit égale à $(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \overrightarrow{E}$ il faut que $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{C^{te}}$.

✧ Nous pouvons donc réécrire la force subie par un dipôle sous la forme

$$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\text{grad}} (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E})_{|\overrightarrow{p}=\overrightarrow{C^{te}}} \quad (\text{I.54})$$

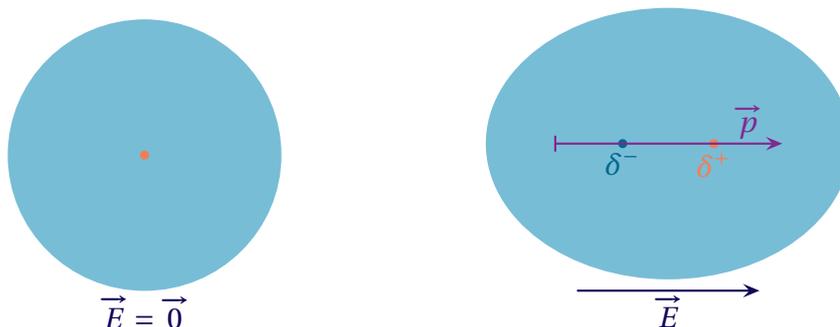
✧ Cette expression n'est pas forcément plus intéressante que l'autre, elle n'est donc donnée qu'à titre indicatif.

I.6 – Cas du dipôle non rigide

I.6.i – molécule déformable

✧ Il s'agit d'une molécule dont la répartition des électrons est suffisamment symétrique pour que le barycentre associé se confonde avec le noyau.

✧ Dans un champ électrique, il y a une légère déformation du nuage électronique ce qui permet à la molécule d'acquérir un moment dipolaire.



Définition

Le *coefficient de polarisabilité* α d'une entité (atome, molécule...) est défini par

$$\overrightarrow{p} = \alpha \epsilon_0 \overrightarrow{E}$$

α est en m^3 .

✧ La dimension de α se retrouve aisément à partir de celle de E :

$$E = \frac{p}{\alpha \epsilon_0} \equiv \frac{(C) \times (m)}{\epsilon_0 (m)^3} \equiv \frac{(C)}{\epsilon_0 (m)^2} \quad (I.55)$$

- ✧ Il s'agit bien là de la dimension du champ électrique.
- ✧ Comme les dimensions à l'échelle des molécules sont de l'ordre de 10^{-10} m nous pouvons en déduire que pour les molécules $\alpha \simeq 10^{-30}$ m³.

I-6-ii – modèle de THOMSON

★ description

- ✧ Alors même que la constitution des atomes n'était pas encore bien connue, THOMSON a proposé le modèle de l'atome d'hydrogène suivant :
 - la charge $+e$ du proton est uniformément répartie dans une boule de rayon r_0 , rayon de l'atome ;
 - l'électron, de charge $-e$, est ponctuel et se situe « au centre » de l'atome.
- ✧ Dans ce modèle, l'électron, ponctuel, se ballade dans le nuage que constitue le noyau. Nous savons que ce n'est pas le cas.

★ champ créé par le noyau, rappel

- ✧ Reprenons l'expression du champ créé par une boule chargée uniformément en volume, de charge totale q .

$$\begin{cases} \vec{E}_{\text{noy}}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \vec{u}_r & \text{pour } r \leq R \\ \vec{E}_{\text{noy}}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r & \text{pour } r > R \end{cases} \quad (I.56)$$

- ✧ Ce résultat a été démontré dans le premier chapitre d'électromagnétisme.

★ polarisabilité

- ✧ En négligeant l'interaction gravitationnelle entre l'électron et le noyau, nous pouvons dire que l'électron est soumis :
 - à la force électrostatique \vec{f}_{noy} exercée par le noyau ;
 - à la force électromagnétique \vec{f}_{ext} exercée par un champ extérieur.
- ✧ Ainsi, au repos, *i.e.* sans champ extérieur, l'électron est tel que

$$\vec{f}_{\text{noy}} = -e \vec{E}_{\text{noy}} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{r} = \vec{0} \quad (I.57)$$

- ✧ Nous retrouvons le fait qu'au repos et à l'équilibre, l'électron est au centre de l'atome.
- ✧ Soumis à un champ électrique \vec{E}_0 , l'électron de cet atome, une fois à l'équilibre, nous avons

$$\vec{f}_{\text{noy}} + \vec{f}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad (I.58)$$

- ✧ Cela implique

$$-e \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}_0 - e \vec{E}_0 = \vec{0} \quad (I.59)$$

- ✧ Nous trouvons, alors, une position d'équilibre

$$\vec{r}_0 = -\frac{4\pi\epsilon_0 R^3}{q} \vec{E}_0 \quad (I.60)$$

✧ Nous pouvons en déduire le moment dipolaire

$$\vec{p} = -e \vec{r}_0 = \frac{4\pi \varepsilon_0 R^3 e}{q} \vec{E}_0 \quad (\text{I.61})$$

✧ Puis la polarisabilité, en n'oubliant que la charge q du noyau n'est autre que e

$$\alpha = 4\pi R^3 \quad (\text{I.62})$$

I-6·iii – la force peut se négocier...

✧ En reprenant le même raisonnement que celui effectué pour le dipôle rigide, le lecteur pourra vérifier que la force s'écrit de la même manière.



Loi

La force subie par un dipôle \vec{p} plongé dans un champ \vec{E} non uniforme s'écrit

$$\vec{f} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}$$

I-6·iv – ... mais pas l'énergie potentielle

✧ Prenons le cas simple où le champ n'est porté que par \vec{u}_x .

✧ Nous avons alors

$$\vec{p} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad p_x = \alpha \varepsilon_0 E_x \quad (\text{I.63})$$

✧ Ainsi la force s'écrit

$$f_x = p_x \frac{dE_x}{dx} \quad (\text{I.64})$$

$$= \alpha \varepsilon_0 E_x \frac{dE_x}{dx} \quad (\text{I.65})$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \alpha \varepsilon_0 E_x^2 \right) \quad (\text{I.66})$$

$$= -\frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{2} p_x E_x \right) \quad (\text{I.67})$$

✧ Et cette relation est bien différente de

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \quad \text{avec} \quad E_p = -\frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{E} \quad (\text{I.68})$$

I-6·v – interaction dipôle-dipôle

✧ Les force qui s'exercent entre dipôles sont appelées forces de VAN DER WAALS.

✧ Expérimentalement, ces forces sont très bien représentée par une énergie potentielle de type

$$E_{p,\text{vdw}} = -\frac{C^{\text{te}}}{r^6} \quad (\text{I.69})$$

✧ Le caractère négatif de l'énergie montre que la force associée est attractive.

- ✧ À très courte distance, il faut rajouter des forces répulsives traduisant le fait que les nuages atomiques ne peuvent s'interpénétrer.
- ✧ La dépendance en $\frac{1}{r^6}$ se comprend très bien pour une molécule polarisable plongée dans un champ électrique dipolaire :
 - en tant que molécule polarisable, l'énergie est en E_{subi}^2 ;
 - le champ E_{subi} est en $1/r^3$ en tant que champ créé par un dipôle.
- ✧ En revanche, pour une interaction entre deux molécules polaires non polarisables, l'énergie devrait être du type

$$E_{\text{interaction}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{subi}} \sim C^{\text{te}} \times \frac{1}{r^3} \quad (\text{I.70})$$

- ✧ En fait, avec l'agitation thermique, les molécules polaires changent sans arrêt d'orientation. Ces fluctuations ont tendance à nettement diminuer la valeur moyenne des forces ressenties.
- ✧ Un calcul complet, et complexe, prenant en compte la variabilité non seulement du champ créé mais aussi de la direction du dipôle subissant la force, montre que la dépendance est, aussi, en $\frac{1}{r^6}$.

II – Le dipôle magnétostatique

II.1 – Modélisation

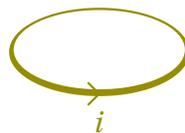
II.1.i – origine atomique

- ✧ Bien qu'il s'agisse de mécanique quantique, les électrons au sein d'un atome possèdent une sorte de mouvement.
- ✧ Or, une charge en mouvement n'est autre qu'un courant électrique.
- ✧ Dans ces conditions, en tant que « courant électrique », l'électron sera à la fois source de champ magnétique et subira des forces de la part de celui-ci.
- ✧ Insistons : le concept de mouvement n'existe pas à l'échelle atomique. C'est seulement que, pour ce que nous allons traiter, « tout se passe comme si ». Alors faisons « comme si ».

II.1.ii – modèle simple

★ une boucle de courant

- ✧ Nous modéliserons le « mouvement » d'un électron par un mouvement circulaire.
- ✧ Dans ces conditions, tout se passe comme s'il se comportait comme une spire circulaire de courant.



- ✧ Dans la suite, nous allons nous concentrer sur cette spire circulaire de courant en oubliant qu'il s'agit en fait d'un électron qui ne bouge pas vraiment mais que tout se passe comme si.

★ grandeur caractéristique

}

Définition

Le *moment dipolaire magnétique* d'un dipôle magnétique s'écrit

$$\vec{\mathcal{M}} = i \times \vec{S}$$

où \vec{S} est le vecteur surface de la boucle de courant pris dans le sens de i .

}

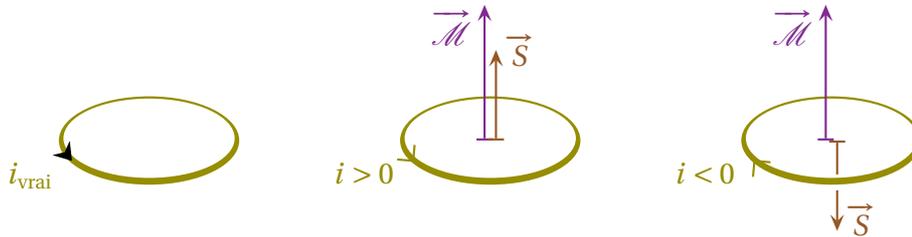
- ✧ Il faut remarquer la différence de vocabulaire entre « moment dipolaire » et « moment dipolaire magnétique ».
- ✧ Pour le premier, il faudrait en toute rigueur parler de « moment dipolaire électrique » sauf que son utilisation est si courante que l'usage autorise le raccourci « moment dipolaire » en sous-entendant « électrique » ;
- ✧ En revanche, pour le dipôle magnétique, il faudra **systématiquement** préciser « magnétique ». L'usage autorise le raccourci « moment magnétique » où cette fois est sous-entendu l'aspect « dipolaire ».



Bon à retenir

§ *Le moment dipolaire magnétique est une grandeur intrinsèque.*

⇨ Considérons une boucle de courant dans laquelle circule un courant dont nous connaissons le sens et cherchons le moment magnétique que cela donne suivant le sens dans lequel nous fléchons la boucle.



⇨ Nous voyons que dans les deux cas nous avons le même moment magnétique ce qui confirme bien le caractère intrinsèque de cette grandeur.

★ **approximation dipolaire**

⇨ Tout comme le dipôle électrique, le dipôle magnétique va être étudié à grande distance.



Bon à retenir

§ *L'approximation dipolaire pour le dipôle magnétique consiste à étudier le dipôle à des distances très grandes devant le rayon de la boucle de courant.*



Loi

Fonctionnellement les champs dipolaires magnétique et électrique sont rigoureusement identiques.

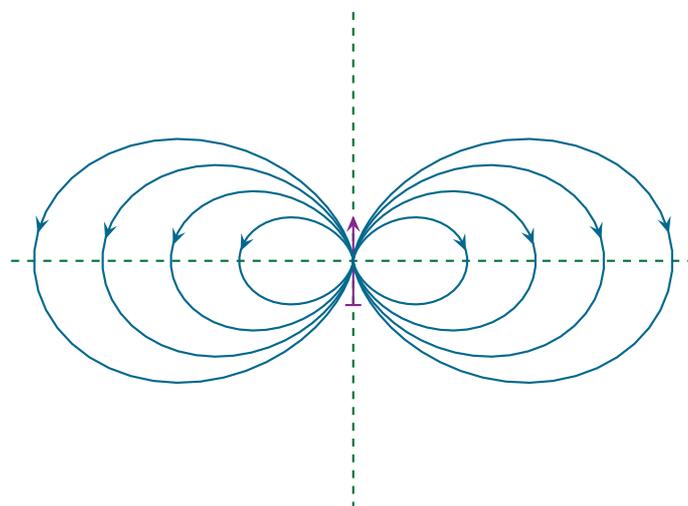
⇨ En particulier nous pouvons écrire tout de suite en écriture intrinsèque

$$\vec{B}_{(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{M}}{r^5} \tag{II.1}$$

II.1.iii – topographie

★ **avec l'approximation dipolaire**

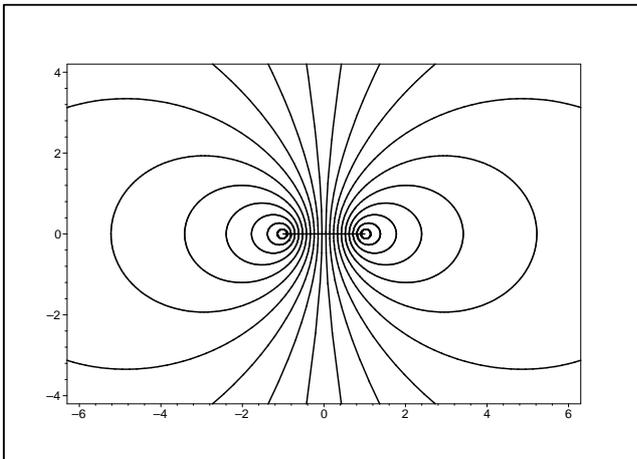
⇨ Le champ magnétique étant identique, nous pouvons tracer immédiatement les lignes de champ.



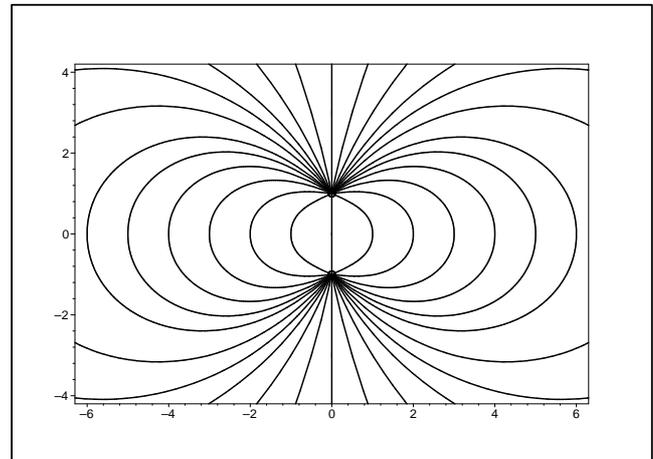
★ hors approximation dipolaire

✧ Bien que les lignes de champs électrique et magnétique soient identiques à grande distance pour les dipôles éponymes, la situation est, en revanche, bien différente à courte distance.

Graphique 1



Graphique 2



✧ Sont représentés :

- sur le graphique 1, les lignes de champ magnétique près d'une boucle de courant ;
- sur le graphique 2, les lignes de champ magnétique près de deux charges opposées.

★ une analogie explicable

- ✧ Le fait que les lignes de champ se ressemblent furieusement est explicable.
- ✧ En effet **loin** des sources il n'y a ni courant ni charges, donc la zone est *vide*.
- ✧ Or le théorème de GAUSS implique que dans une zone vide de l'espace le flux de \vec{E} soit toujours nul... comme l'est celui du champ magnétique.
- ✧ De même le théorème d'AMPÈRE implique que dans une zone vide de l'espace la circulation de \vec{B} soit toujours nulle... comme l'est celle du champ électrique.
- ✧ Finalement nous sommes face à deux champs qui obéissent aux mêmes lois, il est donc normal ou au moins pas très surprenant, qu'ils soient similaires.

II.2 – Actions subies

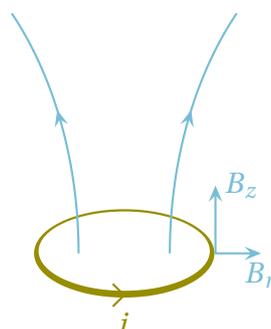
II.2.i – origine physique



Loi

Les forces de LAPLACE sont à l'origine des forces subies par le dipôle magnétique.

- ✧ Bien sûr, cela est vrai dans le modèle de la boucle de courant car, encore une fois, au niveau atomique...
- ✧ Regardons d'un peu plus près ce qui se passe.



✧ Comme la force de LAPLACE s'écrit, sur chaque portion de la boucle $d\vec{f}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ et en notant \vec{u}_z la direction du vecteur surface \vec{S} , nous pouvons constater que la composante intéressante du champ magnétique est B_r .



Bon à retenir

~ Pour qu'un dipôle magnétique subisse une force, il faut des lignes de champ magnétiques évasées, i.e. un champ magnétique non uniforme.

II.2.ii – des résultats analogues

✧ Nous allons faire directement l'analogie suivante

$$\vec{B} \longleftrightarrow \vec{E}; \quad \vec{\mathcal{M}} \longleftrightarrow \vec{p} \quad \text{et} \quad \frac{\mu_0}{4\pi} \longleftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (\text{II.2})$$

16

★ résultante

✧ Nous pouvons écrire tout de suite



Loi

Un dipôle magnétique subit, dans un champ magnétique \vec{B} une force

$$\vec{f} = + \left(\vec{\mathcal{M}} \cdot \text{grad} \right) \vec{B}$$



Bon à retenir

~ Un dipôle magnétique qui pointe dans le sens du champ magnétique est attiré vers les zones de champ intense.

★ moment



Loi

Un dipôle magnétique subit, dans un champ magnétique \vec{B} un moment

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$



Bon à retenir

~ Les dipôles magnétiques ont tendance à pointer dans la même direction et le même sens que le champ magnétique.

✧ Donc globalement, les dipôles magnétiques, tout comme les dipôles électriques, s'orientent dans le sens de \vec{B} puis sont attirés vers les zones de champ intense.

★ énergie potentielle

✧ Encore par analogie



Loi

Un dipôle magnétique plongé dans un champ \vec{B} possède l'énergie potentielle

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$$

★ **coïncidence**

✧ Il peut, quand même, paraître très étonnant que les dipôles électrostatique et magnétostatique subissent des actions analogues, alors même que les forces qui en sont à l'origine s'expriment de manière très différente

$$\vec{f}_{\text{él}} = q \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{f}_{\text{mg}} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{II.3})$$

✧ En fait, il faut prendre conscience, aussi qu'étant donné le peu de grandeur pertinentes, il n'y a beaucoup de choix.

✧ Ainsi, pour la force, dans les deux cas, elle est telle que :

- c'est un vecteur ;
- la résultante soit nulle quand le champ est uniforme ;
- la résultante attire vers les zones de champ fort.

✧ Pour le moment :

- c'est un vecteur ;
- il est nul quand le moment dipolaire est aligné avec le champ ;
- il a tendance à faire en sorte que le moment dipolaire et le champ soient de même sens.

✧ Pour l'énergie :

- c'est un scalaire ;
- le minimum doit être obtenu lorsque le moment dipolaire est dans le sens du champ.

✧ Et toutes ces grandeurs ne sont à construire qu'avec deux autres vecteurs, (\vec{p}, \vec{E}) ou $(\vec{\mathcal{M}}, \vec{B})$.

II.3 – Au niveau microscopique

II.3.i – magnéton de BOHR

13

✧ Cherchons, par homogénéité, quelle valeur peut prendre le moment magnétique d'un atome.

✧ Les grandeurs pertinentes sont :

- m , la masse d'un électron, d'unité kg ;
- e , la charge d'un électron, d'unité C ;
- a , la taille de l'atome, d'unité m ;
- \hbar , qui caractérise les effets à l'échelle quantique, d'unité $\text{J}\cdot\text{s}=\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$.

✧ Avec ces grandeurs, nous devons trouver un moment magnétique en $\text{A}\cdot\text{m}^2$, *i.e.* en $\text{C}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^2$.

✧ Pour obtenir l'unité « coulomb », nous devons avoir

$$\mathcal{M} \propto e \quad (\text{II.4})$$

✧ Pour obtenir, en plus, des s^{-1} , nous devons ajouter

$$\mathcal{M} \propto e \hbar \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{M} \equiv \text{C}\cdot\text{s}^{-1}\text{kg}\cdot\text{m}^2 \quad (\text{II.5})$$

✧ Pour éliminer la masse apparue, nous devons diviser par m

$$\mathcal{M} \propto \frac{e \hbar}{m} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{M} \equiv \text{C}\cdot\text{s}^{-1}\text{m}^2 \quad (\text{II.6})$$

✧ Et, là, nous avons la bonne dimension. a est inutile.

✧ La grandeur construite s'appelle le *magnéton de BOHR*.

$$\mu_{\text{B}} = \frac{e \hbar}{m} = 10^{-23} \text{ A}\cdot\text{m}^2 \quad (\text{II.7})$$

✧ Le magnéton de BOHR représente l'ordre de grandeur des moments magnétiques à l'échelle atomique.

II.3.ii – modèle planétaire

★ présentation

- ✧ Prenons comme exemple l'atome d'hydrogène (car il ne comporte qu'un seul électron) avec un modèle « classique », dit aussi « planétaire » :
 - le noyau est fixe au centre du repère ;
 - l'électron tourne autour sur une trajectoire circulaire de rayon $a \sim 10^{-10}$ m ;
 - la seule interaction entre les deux particules est l'interaction électrostatique.
- ✧ Insistons : ce modèle est *faux* car, d'un point de vue classique, une charge qui oscille doit émettre une onde électromagnétique.
- ✧ En effet, une charge qui bouge n'est pas tout le temps au même endroit, donc, au minimum, le champ électrique qu'elle crée doit varier. Et, lorsqu'un champ électrique dépend du temps, il engendre un champ magnétique qui dépend aussi du temps et, de là, une onde électromagnétique.
- ✧ Une onde ne peut se propager sans emporter de l'énergie.
- ✧ Conclusion : si un électron tourne autour d'un noyau, il **doit** perdre de l'énergie... et finir par s'écraser sur le noyau.
- ✧ L'existence même de la matière prouve que les électrons ne s'effondrent pas sur le noyau, *i.e.* qu'ils ne rayonnent pas. Cela implique une chose : ils ne peuvent pas *tourner* au sens classique du terme.

★ une trajectoire circulaire

- ✧ Comme la force exercée sur l'électron est radiale, le PFD appliqué à l'électron s'écrit

$$m \vec{a}(t) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_r \quad (\text{II.8})$$

- ✧ La projection sur \vec{u}_θ donne

$$m R \dot{\omega}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \omega(t) = C^{\text{te}} \stackrel{\text{not}}{=} \Omega \quad (\text{II.9})$$

- ✧ Autrement dit, l'électron a un mouvement circulaire *uniforme*.

- ✧ La projection du PFD appliqué à l'électron sur \vec{u}_r donne

$$-m a \Omega^2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \quad \rightsquigarrow \quad \Omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m a^3}} = 1,6 \times 10^{16} \text{ rad.s}^{-1} \quad (\text{II.10})$$

- ✧ Soit une période de

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 4,0 \times 10^{-16} \text{ s} \quad (\text{II.11})$$

- ✧ Et, accessoirement, une vitesse de

$$v = \Omega a = 1,6 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1} \quad (\text{II.12})$$

- ✧ L'électron, dans ce modèle, n'est pas relativiste (ouf!)

★ moment cinétique

- ✧ Le moment cinétique de l'électron par rapport au noyau s'écrit

$$\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} \quad (\text{II.13})$$

- ✧ Ce qui donne

$$\vec{\sigma} = m a^2 \Omega \vec{u}_z \quad (\text{II.14})$$

★ moment magnétique

✧ Le moment magnétique s'écrit

$$\vec{\mathcal{M}} = I \times \vec{S} = I \times \pi a^2 \vec{u}_z \quad (\text{II.15})$$

✧ Reste à calculer I .

✧ Pour cela, comptons le nombre de charges qui passent à un endroit précis de la trajectoire durant δt .

✧ Comme il n'y a qu'un seul électron sur la trajectoire, il suffit de compter combien de tours peut faire cet électron durant δt .

✧ De manière naturelle, étant donné qu'il met T pour parcourir un tour, pendant δt , il fera N tours avec

$$N = \frac{\delta t}{T} \quad \rightsquigarrow \quad N = \frac{\Omega \delta t}{2\pi} \quad (\text{II.16})$$

✧ Ce qui correspond à une charge totale

$$\delta q = -e \times N = -\frac{e\Omega \delta t}{2\pi} \quad (\text{II.17})$$

✧ Et donc à un courant

$$I = \frac{\delta q}{\delta t} = -\frac{e\Omega}{2\pi} \quad (\text{II.18})$$

✧ Finalement, le moment magnétique s'écrit

$$\vec{\mathcal{M}} = -\frac{e\Omega a^2}{2} \vec{u}_z \quad (\text{II.19})$$

✧ Nous avons donc une *proportionnalité* entre le moment cinétique et le moment magnétique de l'atome d'hydrogène

$$\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{\sigma} \quad \text{avec} \quad \gamma = -\frac{e}{2m} \quad (\text{II.20})$$

✧ γ est appelé le *rapport gyromagnétique* de l'électron.

✧ Comme la mécanique quantique impose que le moment cinétique est quantifié, nous avons, avec \hbar la constante réduite de PLANCK,

$$\sigma = n\hbar \quad (\text{II.21})$$

✧ Ce qui impose, de fait,

$$\mathcal{M} = n\gamma\hbar = -\frac{ne\hbar}{2m} \quad (\text{II.22})$$

✧ Nous retrouvons là le résultat obtenu par homogénéité.

II.3.iii – aimants permanents

★ moment magnétique volumique

✧ Dans un matériau usuel, les moment magnétiques de tous les atomes sont dans des directions aléatoires.

✧ Dans ces conditions, de manière globale, le matériau n'est pas source de champ magnétique.

✧ En revanche, dans les matériaux *ferromagnétique*, une interaction d'origine quantique tend à faire en sorte que tous les moments magnétiques s'alignent et pointent dans la même direction.

- ✧ Comme le moment magnétique est une grandeur extensive, cela a pour conséquence de créer un volume dans lequel le moment magnétique est non nul : c'est un aimant permanent.
- ✧ Certains aimants permanents ont un moment magnétique très faible (comme les aiguilles d'une boussole), alors que d'autres peuvent être très « forts », comment les aimants au néodyme.
- ✧ Ainsi, en estimant que les atomes s'alignent dans des cubes de côté $a = 2 \times 10^{-10}$ m, la densité particulaire n s'écrit

$$n = \frac{1}{a^3} \sim 10^{29} \text{ m}^{-3} \quad (\text{II.23})$$

- ✧ D'où un moment magnétique volumique de

$$\frac{d\mathcal{M}}{d\tau} = \mu_B \times n = 10^6 \text{ A.m}^{-1} \quad (\text{II.24})$$

★ équivalence avec une boucle de courant

- ✧ Prenons un aimant cubique de $\mathcal{V} = 1 \text{ cm}^3$.
- ✧ Son moment magnétique vaut alors, avec le moment magnétique volumique précédent,

$$\mathcal{M} = \frac{d\mathcal{M}}{d\tau} \times \mathcal{V} = 1 \text{ A.m}^2 \quad (\text{II.25})$$

- ✧ En modélisant cet aimant par un courant d'intensité I circulant dans un circuit carré de surface $S = 1 \text{ cm}^2$, nous avons

$$I = \frac{\mathcal{M}}{S} = 10^4 \text{ A} \quad (\text{II.26})$$

- ✧ Sans conteste, même si les électro-aimants peuvent engendrer des champs intense, à volume fixé, un aimant permanent est bien plus performant.

★ force d'arrachement

- ✧ Quelle est la force qu'exerce un aimant ?
- ✧ Sous cette forme, la question est délicate car la force qu'il exerce dépend de la forme de ses lignes de champs (car la force dépend du *gradient* du champ).
- ✧ En revanche, nous pouvons construire, par homogénéité, une grandeur associée homogène à une force.
- ✧ Pensons à la force d'arrachement des aimants, *i.e.* à la force à exercer pour les retirer d'une plaque métallique. Si nous prenons deux aimants identiques, la force d'arrachement est double. Autrement dit, la force d'arrachement est une grandeur extensive.
- ✧ Cherchons donc la force d'arrachement par unité de surface de l'aimant (la surface au contact avec la plaque métallique).
- ✧ Les grandeurs pertinentes sont :

- le moment magnétique volumique de l'aimant $\frac{d\mathcal{M}}{d\tau}$ en A.m^{-1} ;
- la hauteur de l'aimant ℓ en m ;
- la perméabilité du vide μ_0 , associé à tout ce qui est champ magnétique, en H.m^{-1} .

- ✧ Et il faut construire une grandeur homogène à $\frac{F}{S}$, soit en

$$\frac{F}{S} \equiv \text{kg.m}^{-1} \dots \text{s}^{-2} \quad (\text{II.27})$$

- ✧ Cherchons tout d'abord à réexprimer l'unité « henry » à partir du champ magnétique créé par un solénoïde et de la force de LAPLACE

$$F \equiv \underbrace{T.A.m}_{\text{Bi}\ell} \quad \text{et} \quad T = \underbrace{(H.m^{-1}).m^{-1}.A}_{\mu_0 n i} \quad (\text{II.28})$$

✧ Nous trouvons

$$\text{kg.m.s}^{-2} \equiv (H.m^{-1}).A^2 \quad (\text{II.29})$$

$$H \equiv \text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}.A^{-2} \quad (\text{II.30})$$

$$\mu_0 \equiv \text{kg.m.s}^{-2}.A^{-2} \quad (\text{II.31})$$

$$(\text{II.32})$$

✧ Ainsi, dans les grandeurs pertinentes, seule μ_0 possède des « seconde ». Nous pouvons commencer par là et imposer

$$\frac{F}{S} \propto \mu_0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{F}{S} \equiv \text{kg.m.s}^{-2}.A^{-2} \quad (\text{II.33})$$

✧ Il y a des « ampère » en trop. Éliminons-les avec le moment magnétique volumique

$$\frac{F}{S} \propto \mu_0 \times \left(\frac{d\mathcal{M}}{d\tau} \right)^2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{F}{S} \equiv \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2} \quad (\text{II.34})$$

✧ Et nous avons ce qu'il faut ! La grandeur pertinente ℓ n'est pas nécessaire. Ce qui signifie, au passage, que la longueur d'un aimant n'influence que peu la *force* exercée.

✧ Numériquement, cela donne

$$\frac{F}{S} \sim 10^6 \text{ Pa} \sim 10 \text{ bar} \quad (\text{II.35})$$

✧ C'est une force très importante !

✧ Comparons avec un des premiers aimants trouvés sur internet ¹



1. Source : [http://i.ebayimg.com/00/s/MTI3N1gxMjc2/z/xBIAA0xykMpTGmXG/\\$_57.JPG](http://i.ebayimg.com/00/s/MTI3N1gxMjc2/z/xBIAA0xykMpTGmXG/$_57.JPG)

✧ La pression d'arrachement correspond à

$$P = \frac{m g}{S} = 4,5 \text{ bar} \quad (\text{II.36})$$

✧ Nous sommes totalement dans l'ordre de grandeur trouvé par l'homogénéité.

✧ Et remarquez, au passage, que l'aimant, en lui-même, c'est pas très grand.

Compétences du chapitre

Les compétences à vocation essentiellement expérimentale sont indiquées en italique.

Première année

INDUCTION ET FORCES DE LAPLACE

★ 1. Champ magnétique

⇨ Moment magnétique.

- 1 Définir le moment magnétique associé à une boucle de courant plane. [22]
- 2 Par analogie avec une boucle de courant, associer à un aimant un moment magnétique.
- 3 Connaître un ordre de grandeur du moment magnétique associé à un aimant usuel. [29]

★ 2. Actions d'un champ magnétique

⇨ Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant. Positions d'équilibre et stabilité.

- 4 *Mettre en oeuvre un dispositif expérimental pour étudier l'action d'un champ magnétique uniforme sur une boussole.*

⇨ Effet moteur d'un champ magnétique tournant.

- 5 *Créer un champ magnétique tournant à l'aide de deux ou trois bobines et mettre en rotation une aiguille aimantée.*

Deuxième année

2. Électrostatique

★ 2.2 Exemples de champs électrostatiques

⇨ Dipôle électrostatique. Moment dipolaire

- 6 Décrire les conditions de l'approximation dipolaire. [6]

⇨ Potentiel et champ créés.

- 7 Établir l'expression du potentiel V . Comparer la décroissance avec la distance du champ et du potentiel dans le cas d'une charge ponctuelle et dans le cas d'un dipôle. Tracer l'allure des lignes de champ. [7,9,10]

⇨ Actions subies par un dipôle placé dans un champ électrostatique d'origine extérieure : résultante et moment.

- 8 Utiliser les expressions fournies de l'énergie potentielle E_p , de la résultante F et du moment \mathcal{M} . [13,15,17]

⇨ Énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique d'origine extérieure.

⇨ Approche descriptive des interactions ionmolécule et molécule-molécule.

- 9 Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle dans un champ d'origine extérieure \vec{E} . [14,16,17]

⇨ Dipôle induit. Polarisabilité.

- 10 Expliquer qualitativement la solvatation des ions dans un solvant polaire. Expliquer qualitativement pourquoi l'énergie d'interaction entre deux molécules polaires n'est pas en $1/r^3$. [20]
- 11 Exprimer la polarisabilité d'un atome en utilisant le modèle de THOMSON. Associer la polarisabilité et le volume de l'atome en ordre de grandeur. [19]

★ 3.3 Dipôles magnétostatiques

- ✧ Moment magnétique d'une boucle de courant plane.
 - 12 Utiliser un modèle planétaire pour relier le moment magnétique d'un atome d'hydrogène à son moment cinétique. [27]
- ✧ Rapport gyromagnétique de l'électron. Magnéton de BOHR.
 - 13 Construire en ordre de grandeur le magnéton de BOHR par analyse dimensionnelle. Interpréter sans calculs les sources microscopiques du champ magnétique. [26]
 - 14 Évaluer l'ordre de grandeur maximal du moment magnétique volumique d'un aimant permanent. [28]
- ✧ Ordre de grandeur de la force surfacique d'adhérence entre deux aimants permanents identiques en contact.
 - 15 Obtenir l'expression de la force surfacique d'adhérence par analyse dimensionnelle. [29]
- ✧ Actions subies par un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure : résultante et moment.
 - 16 Utiliser des expressions fournies. [25]
- ✧ Énergie potentielle d'un dipôle magnétique rigide placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure.
 - 17 Approche documentaire de l'expérience de STERN et GERLACH : expliquer sans calculs les résultats attendus dans le cadre de la mécanique classique ; expliquer les enjeux de l'expérience.