

Électromagnétisme

Chapitre 5

Les ondes électromagnétiques

Table des matières

Introduction	5
I Propagation	6
I-1 Équations de propagation	6
I-1·i pour le champ électromagnétique	6
le champ électrique	6
le champ magnétique	7
I-1·ii interprétation	8
I-2 Solutions en OPP et OPPM	8
I-2·i de l'OPP à l'OPPM	8
visualisation	8
traduction pour une OPP	8
version OPPM	9
I-2·ii équations de MAXWELL et OPPM	9
réécrire nabla	9
réécrire MAXWELL	10
relation de dispersion	10
I-2·iii relation de structure	11
énoncé	11
représentation	12
démonstration	12
I-2·iv spectre électromagnétique	12
I-2·v retour à l'OPP	13
I-3 États de polarisation d'une OPPM	13
I-3·i onde polarisée ?	13
I-3·ii différentes polarisations	15
I-3·iii à retenir	16
I-3·iv traduction formelle de la polarisation	16
I-3·v lumière polarisée	23
I-4 Énergétique des OPPM	24
I-4·i densité volumique d'énergie	24
lien entre les champs	24
les densités instantanées	24
I-4·ii vecteur de POYNTING	25
I-4·iii à partir de la notation complexe	25
I-4·iv exemples numériques	26
I-4·v en termes de photons	26
II Ondes dans un milieu	27
II-1 Conducteur ohmique dans l'ARQS	27
II-1·i modèle du conducteur	27
II-1·ii densité volumique de charge	27
une densité nulle de charges	27
interprétation qualitative	28
II-1·iii courant de conduction et courant de déplacement	29
II-1·iv résumé des lois dans un conducteur dans l'ARQS	30
II-1·v équation de diffusion vérifiée par la densité de courant	30
résultat	30

	démonstration	30
II-1.vi	résolution pour un conducteur semi-infini	32
	situation, analyse	32
	vecteur d'onde complexe	32
	solution complète	33
	représentation graphique	33
	indice complexe	33
II-1.vii	épaisseur de peau	34
	interprétation	34
	AN	34
	conducteur parfait	35
II-1.viii	champ électromagnétique dans le conducteur	36
	champ électrique	36
	champ magnétique	36
	interprétation	37
II-2	Conducteur ohmique hors ARQS	37
II-2.i	modèle de DRÜDE	37
II-2.ii	mise en équation – approximation	38
II-2.iii	conductivité complexe	38
	expression	38
	première interprétation	39
II-2.iv	lois dans le conducteur	39
	conservation de la charge	40
	les équations de MAXWELL	40
	relation de dispersion	41
II-2.v	basses fréquences : effet de peau	42
	simplification de la relation de dispersion	42
	vecteur d'onde complexe	42
	retrouvailles	43
	vitesse	43
II-2.vi	haute fréquence : réflexion, transparence	44
	simplifier la relation de dispersion	44
	premier cas : $\omega > \omega_p \gg 1/\tau$	44
	deuxième cas : $\omega_p > \omega \gg 1/\tau$	45
II-3	Onde dans un plasma	46
II-3.i	modèle	46
	par exemple l'ionosphère	46
	modèle technique	46
II-3.ii	mise en équation	46
	loi de comportement du milieu	46
	réécrire l'équation de MAXWELL – AMPÈRE	47
II-3.iii	analogie avec le conducteur hors ARQS	47
	relation de dispersion	47
	des résultats identiques, cela s'explique	48
II-4	Réflexion et transmission en incidence normale	48
II-4.i	entre deux milieux d'indices différents	48
	situation, solution <i>a priori</i>	48
	traduction des conditions aux limites	49
	coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique	50
	coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le champ magnétique	50

	remarques	50
	coefficients de réflexion et transmission en puissance	51
II-4-ii	interface vide – plasma	52
	zone de transparence, $\omega > \omega_p$	52
	onde évanescente, $\omega < \omega_p$	53
II-4-iii	interface vide – conducteur	53
	dans l'ARQS	53
	hors ARQS	54
II-4-iv	interface entre deux milieux transparents	54
	exemple numérique	54
	invisibilité	54
	déphasage	54
	Compétences du chapitre	56

Les ondes électromagnétiques

La synthèse de la théorie électromagnétique par MAXWELL mit un point « final » au débat sur la nature ondulatoire ou corpusculaire de la lumière même si, nous le savons, EINSTEIN, puis la mécanique quantique, reviendront dessus. Toutefois, avec ces lois, il est désormais clair qu'il existe des ondes électromagnétiques et c'est HERTZ qui, le premier, a réussi à les mettre en évidence.

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à ces ondes électromagnétiques. Nous verrons ainsi, dans une première partie, les ondes dans le vide et, notamment, ce que nous allons appeler leur « structure ». Dans la deuxième partie, nous allons nous intéresser à la « propagation » de ces ondes dans des milieux qui ne sont pas le vide (plasma, conducteur ohmique) et aux coefficients de réflexion / transmission entre ces milieux.

I – Propagation

I.1 – Équations de propagation

✧ C'est la base de la base que de savoir retrouver les équations de propagation pour les champs électrique et magnétique.

I.1.i – pour le champ électromagnétique

★ le champ électrique

🔧 loi

Loi

L'équation vérifiée par le champ électrique dans le vide est une équation de propagation est

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

🔧 démonstration

✧ Commençons par réécrire les équations de MAXWELL dans le vide, *i.e.* dans un milieu sans charge ni matière.

$$\begin{array}{ll} \text{MAXWELL – GAUSS} & \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{MAXWELL – FARADAY} & \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{MAXWELL – THOMSON} & \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{MAXWELL – AMPÈRE} & \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \quad (\text{I.1})$$

✧ Nous constatons que les équations de MAXWELL – FARADAY et MAXWELL – AMPÈRE sont bien des équations de couplage, car elles font appel à des dérivées spatiale et temporelle des deux grandeurs que nous pouvons déjà soupçonner d'être duales : \vec{E} et \vec{B} .

✧ « Comme d'habitude », calculons le rotationnel du rotationnel de \vec{E} de deux manières différentes en commençant par la définition du laplacien vectoriel.

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E} \right) = \vec{\text{grad}} \left(\text{div } \vec{E} \right) - \vec{\Delta} \vec{E} \quad (\text{I.2})$$

✧ Et avec l'équation de MAXWELL – GAUSS, nous obtenons

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E} \right) = \vec{0} - \vec{\Delta} \vec{E} \quad (\text{I.3})$$

✧ Reprenons le rotationnel du rotationnel et utilisons MAXWELL – FARADAY

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E} \right) = \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (\text{I.4})$$

✧ Nous pouvons intervertir les dérivées spatiale et temporelle (théorème de SCHWARZ)

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\text{rot}} \vec{B} \right) \quad (\text{I.5})$$

✧ Et là nous pouvons utiliser la loi de MAXWELL – AMPÈRE

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \rightsquigarrow \vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{I.6})$$


✧ Ce qui donne, en regroupant

$$-\vec{\Delta} \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \rightsquigarrow \vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{I.7})$$

★ le champ magnétique

✧ Nous avons la même loi

3



Loi

L'équation vérifiée par le champ magnétique dans le vide est une équation de propagation est

$$\vec{\Delta} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

✧ Pour le montrer, nous allons utiliser le même principe que pour le champ électrique

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{B} \right) = \vec{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{B} \right) - \vec{\Delta} \vec{B} \quad (\text{I.8})$$

✧ L'équation de MAXWELL – THOMSON donne

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{B} \right) = \vec{0} - \vec{\Delta} \vec{B} \quad (\text{I.9})$$

✧ En reprenant le rotationnel du rotationnel et en utilisant MAXWELL – AMPÈRE

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{B} \right) = \vec{\text{rot}} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{I.10})$$

✧ Intervertissons les dérivées spatiale et temporelle (SCHWARZ)

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{B} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E} \right) \quad (\text{I.11})$$

✧ Puis MAXWELL – FARADAY

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{B} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \rightsquigarrow \vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{B} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (\text{I.12})$$

✧ Ce qui donne, en regroupant

$$-\vec{\Delta} \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \rightsquigarrow \vec{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (\text{I.13})$$

I.1.ii – interprétation

- ✧ Nous pouvons constater que les champs électrique et magnétique vérifient des équations de propagation. Les solutions sont donc en « $r - ct$ », même s'il s'agit d'un laplacien vectoriel.
- ✧ Le champ électrique est associé à l'énergie volumique $u_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ et le champ magnétique est associé à l'énergie volumique $u_{mg} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$. L'énergie est bien sous deux formes différentes, elle peut se propager et les champs électrique et magnétique sont les deux grandeurs duales.
- ✧ Remarquons enfin que les deux grandeurs duales vérifient la *même* équation de propagation, ce qui est fréquent mais non universel.

I.2 – Solutions en OPP et OPPM

- ✧ Ici nous allons nous limiter aux OPP et OPPM. Attention de **ne pas** généraliser les résultats à des ondes quelconques !

I.2.i – de l'OPP à l'OPPM

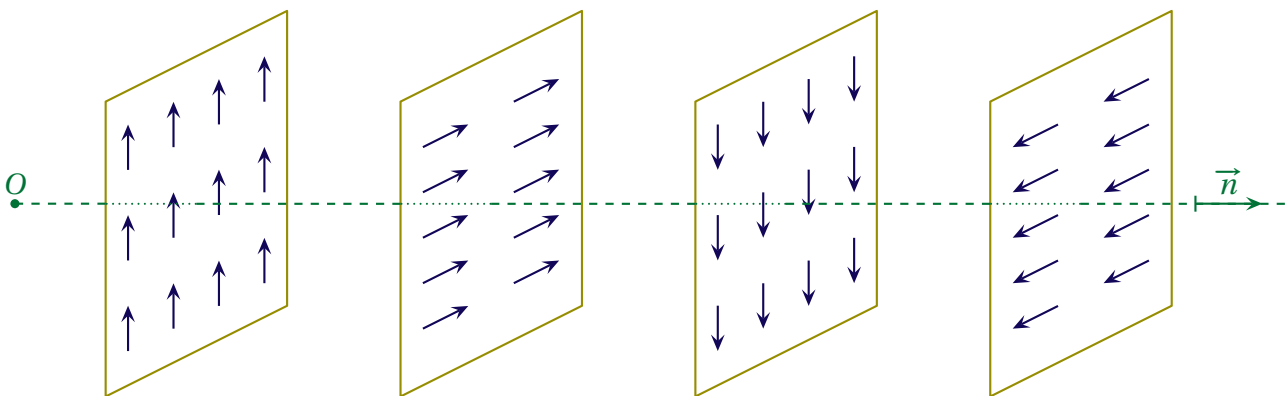
★ visualisation



Définition

Une onde est dite *plane* lorsqu'à tout instant les surfaces d'onde sont des plans.

- ✧ À un instant fixé (*i.e.* une photo), cela donne par exemple quelque chose comme ça



★ traduction pour une OPP

- ✧ Nous voyons ci-dessus que \vec{E} ne dépend que de l'abscisse sur l'axe \vec{n} , *i.e.* ne dépend que de

$$x \stackrel{\text{not}}{=} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} \quad (\text{I.14})$$

- ✧ En coordonnées **cartésiennes**, le laplacien vectoriel s'écrit

$$\vec{\Delta} \vec{E} = (\Delta E_x) \vec{u}_x + (\Delta E_y) \vec{u}_y + (\Delta E_z) \vec{u}_z \quad (\text{I.15})$$


- ✧ Dans ces conditions, la projection de l'équation de propagation donne, par exemple sur \vec{u}_x ,

$$\Delta E_x = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (\text{I.16})$$

- ✧ Il s'agit là d'une équation de propagation dont nous connaissons les solutions en OPP

$$E_x(M,t) = E_{0,x}(t - \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} / c) + E_{0,x}(t + \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} / c) \quad (\text{I.17})$$

✧ Nous reconnaissons là la somme d'une OPP \rightarrow et d'une OPP \leftarrow .



Loi

Les solution en OPP pour une propagation en 3D sont en

$$t - \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}}{c}$$

✧ Pour avoir le cas correspondant à $t + \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}}{c}$, il suffit de prendre $\vec{n}' = -\vec{n}$.

★ version OPPM


✧ Considérons une OPPM se propageant suivant \vec{n} tel que $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$.

✧ Dans ces conditions une OPPM d'un champ électrique avec trois composantes s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{E}(M,t) = & E_{0,x} \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_x\right) \vec{u}_x + \\ & E_{0,y} \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_y\right) \vec{u}_y + \\ & E_{0,z} \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + \varphi_z\right) \vec{u}_z \end{aligned}$$

✧ En notation complexe, cela donne

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \times e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})} \quad \text{avec} \quad \underline{\vec{E}}_0 = \begin{pmatrix} E_{0,x} e^{j\varphi_x} \\ E_{0,y} e^{j\varphi_y} \\ E_{0,z} e^{j\varphi_z} \end{pmatrix} \quad (\text{I.18})$$



Loi


Une OPPM *quelconque* s'écrit, en notation complexe,

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})}$$

🔥 *Remarque.* Cela ne présage en **rien** de l'état de polarisation de l'onde (cf. infra).

I-2-ii – équations de MAXWELL et OPPM

★ réécrire nabla



Loi

Dans le cas d'une OPPM en notation complexe et **seulement pour une OPPM**, nous avons

$$\vec{\nabla} = -j \vec{k}$$

🛑 Dans la relation précédente, il faut faire attention à la convention utilisée.

✧ Pour le montrer, reprenons l'OPPM en notation complexe

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})} \quad (\text{I.19})$$

✧ Exprimons le produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{OM}$

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k_x x + k_y y + k_z z \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} \quad (\text{I.20})$$

✧ Dans ces conditions, nous voyons que, **pour une OPPM en notation complexe** :

- dériver par rapport à x revient à multiplier par $-j k_x$;
- dériver par rapport à y revient à multiplier par $-j k_y$;
- dériver par rapport à z revient à multiplier par $-j k_z$.

✧ Et donc, finalement, pour nabla

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j k_x \\ -j k_y \\ -j k_z \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\nabla} = -j \vec{k} \quad (\text{I.21})$$

★ réécrire MAXWELL

✧ Reprenons les équations de MAXWELL dans le vide et réécrivons-les pour une OPPM complexe.

✧ MAXWELL – GAUSS donne

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -j \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad (\text{I.22})$$

✧ MAXWELL – FARADAY donne

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}} \quad \rightsquigarrow \quad -j \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}} \quad (\text{I.23})$$

✧ MAXWELL – THOMSON donne

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -j \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \quad (\text{I.24})$$

✧ MAXWELL – AMPÈRE donne

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{B}} = j\omega \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\vec{E}} \quad \rightsquigarrow \quad -j \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = j\omega \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\vec{E}} \\ \rightsquigarrow \quad \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}} \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

★ relation de dispersion



Loi

Pour une OPPM dans le vide, la relation de dispersion s'écrit

$$\omega^2 = k^2 c^2$$

✧ La relation ne présente pas de surprise. Toutefois sa démonstration n'est pas aussi triviale que nous pourrions l'imaginer et ce, à cause de l'aspect 3D de l'onde.

✧ Calculons $\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E})$ de deux manières différentes. Commençons par développer le double produit vectoriel

$$\begin{aligned}\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) &= (\vec{k} \cdot \vec{E}) \times \vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{k}) \times \vec{E} \\ &\stackrel{\text{M-G}}{=} 0 - k^2 \vec{E}\end{aligned}$$

✧ Calculons maintenant avec les autres lois de MAXWELL

$$\begin{aligned}\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) &\stackrel{\text{M-F}}{=} \vec{k} \wedge (\omega \vec{B}) \\ &= \omega (\vec{k} \wedge \vec{B}) \\ &\stackrel{\text{M-A}}{=} \omega \times (-\omega \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E})\end{aligned}$$

✧ En rassemblant

$$-k^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad k^2 \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \quad (\text{I.26})$$

✧ Et comme cette relation est valable quel que soit le champ qui se propage, nous pouvons en déduire la relation de dispersion bien connue

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (\text{I.27})$$

I.2.iii – relation de structure

4



Définition

La *structure* d'un champ (\vec{E}, \vec{B}) est l'ensemble des caractères du trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$.

★ énoncé



Loi

Pour une OPPM se propageant **dans le vide**, le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est normal et direct.



Définition

Un champ vectoriel propagatif \vec{E} est dit *transverse* lorsqu'à tout instant \vec{E} est normal à la direction de propagation.



Loi

Pour une OPPM se propageant dans le vide, \vec{E} et \vec{B} sont transverses.



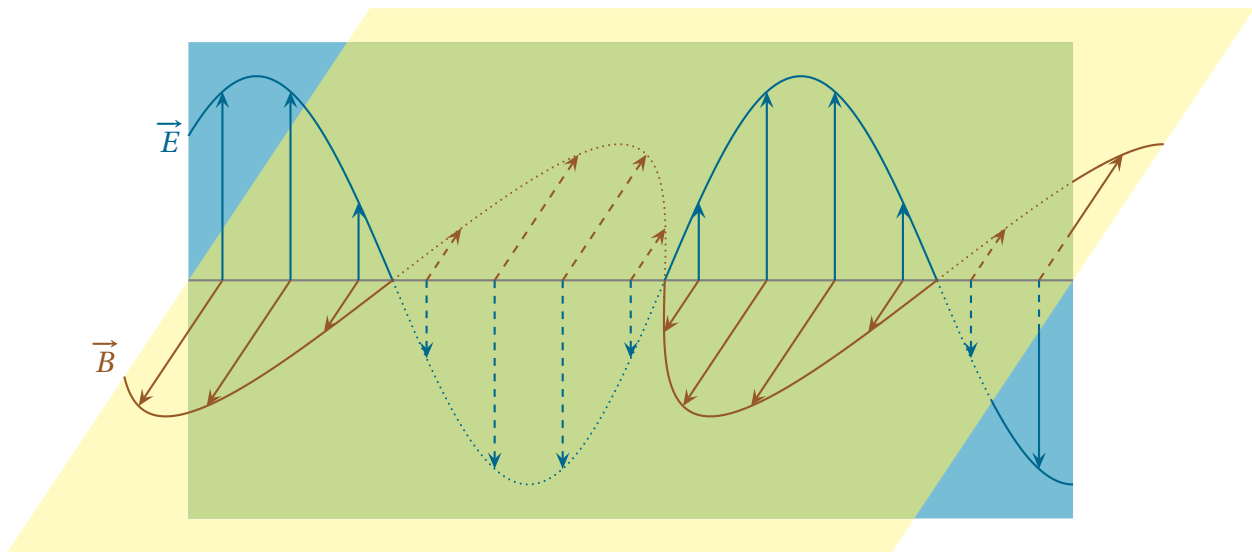
Loi

Pour une OPPM se propageant dans le vide

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

★ représentation

⇨ Visuellement, à un instant donné, cela donne quelque chose comme ça.



⇨ Comme nous le verrons plus bas, la représentation ci-dessus est la représentation d'une onde très particulière, puisqu'il s'agit d'une onde polarisée rectilignement. Dans le cas plus général d'une onde polarisée elliptiquement, il faudrait imaginer que les plans bleu et jaune ci-dessus se vrillent tout en avançant.

★ démonstration

⇨ Les démonstrations sont immédiates à partir de la réécriture des équations de MAXWELL en version complexe.

⇨ Les équations de MAXWELL – GAUSS et MAXWELL – THOMSON montrent que les champs sont transverses

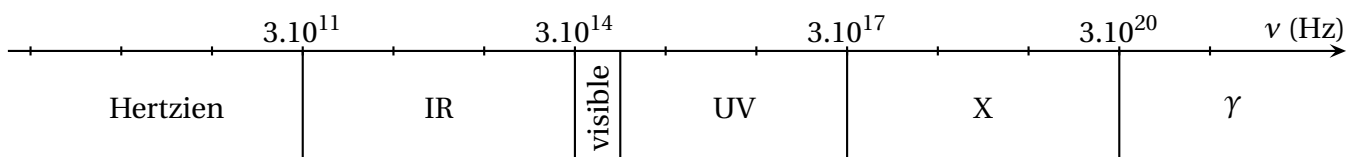
$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{I.28})$$

⇨ Quant à l'équation de MAXWELL – FARADAY, elle montre le lien entre \vec{B} et \vec{E} et prouve, du même coup que le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad (\text{I.29})$$

I-2.iv – spectre électromagnétique

⇨ Rappelons ici le spectre électromagnétique.



⇨ Les différents rayonnements sont les suivants

→ le rayonnement hertzien est celui utilisé pour les communications (radio, satellite, portable), il y a trop peu d'énergie transportée pour que cela soit utilisable (sauf dispositifs idoines comme les fours à micro-onde);

- le rayonnement IR est celui émis naturellement par les corps à température ambiante (lunette IR pour voir dans la nuit ou mode de cuisson au barbecue), du point de vue énergétique, cela se sent ;
- le visible, c'est le visible ;
- les UV sont des rayonnements plus énergétiques donc potentiellement plus dangereux, c'est pour cette raison que notre peau essaie de s'en prémunir en bronzant. D'ailleurs s'il n'y avait plus de couche d'ozone, nous aurions « quelques » problèmes ;
- les rayons X sont des rayons très pénétrants qui permettent de faire des radiographies, ils sont suffisamment énergétiques pour que des précautions soient prises à chaque radio ;
- mieux vaut ne pas être exposé à des rayons γ car, très énergétiques, ils peuvent pénétrer à l'intérieur des cellules et détruire des morceaux d'ADN qui, s'ils ne sont pas naturellement réparés, donnent naissance à des cellules cancéreuses.

I.2.v – retour à l'OPP

5



Loi

Pour une OPP se propageant dans le vide, le trièdre $(\vec{n}, \vec{E}, \vec{B})$ est normal et direct.



Loi

Pour une OPP dans le vide, \vec{E} et \vec{B} sont transverses.



Loi

Pour une OPP dans le vide se propageant dans la direction \vec{n}

$$\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c}$$

- ✧ Les démonstrations sont identiques à celles pour l'OPPM mais sont un peu plus lourde du fait qu'il faille gérer les fonctions quelconques (et leurs dérivées) correspondant aux ondes sur les différents vecteurs de base.
- ✧ Le plus simple, pour le démontrer, est de dire que toute OPP résulte de la superposition d'OPPM et que, puisque c'est vrai pour chaque OPPM, par linéarité, c'est vrai aussi pour toute OPP.

I.3 – États de polarisation d'une OPPM

I.3.i – onde polarisée ?

- ✧ Pour une onde transverse (se propageant par exemple sur \vec{u}_z), il y a donc deux composantes : une sur \vec{u}_x et une sur \vec{u}_y .



Définition

La *polarisation* d'une onde caractérise la manière dont évoluent les composantes transverses d'une onde.

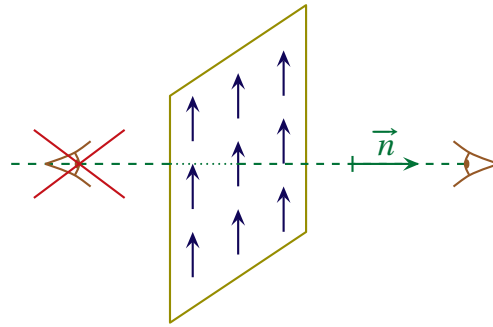
- ✧ Ici, il y a deux grandeurs transverses.



Loi

Par convention, la polarisation d'une onde est celle de son champ électrique.

- ✧ Imaginons une onde et la manière dont le champ évolue sur un plan d'onde. Nous pouvons observer la situation de deux points de vue : de face ou de dos.



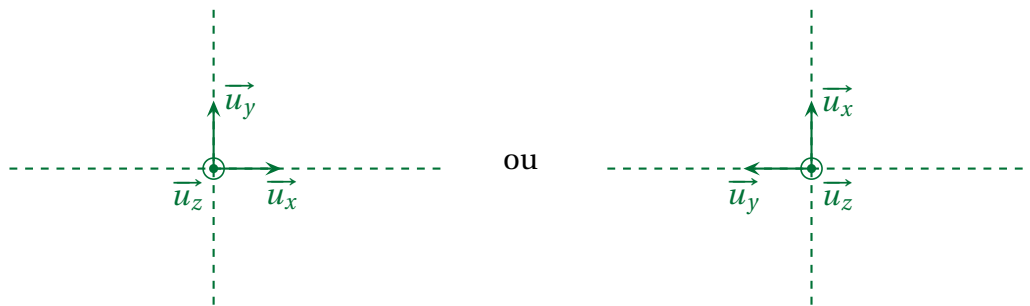
- ✧ Ces deux points de vue sont opposés, il faut en choisir un.



Loi

Pour déterminer la polarisation d'une onde, il faut se placer **face** à l'onde

- ✧ Autrement dit, il faut que l'onde se dirige **vers** l'observateur.
 ✧ Pour une onde se propageant suivant $+\vec{u}_z$, le plan d'onde **vu de face** se représente donc de la manière suivante



- ✧ Comme les composantes sur \vec{u}_x et \vec{u}_y obéissent à l'équation de propagation, nous avons, en toute généralité

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0,x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_{0,y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.30})$$



Définition

L'état de polarisation d'une onde est la courbe que dessine la pointe du champ \vec{E} dans un plan d'onde vu de face.

- ✧ Insistons sur le fait que, quelle que soit la polarisation, le fait d'être « incliné » n'est pas physique puisque cela dépend des axes choisis. C'est ainsi qu'une onde ne peut pas être inclinée puisqu'il est toujours possible d'imposer les axes idoines pour qu'elle ne le soit pas. En revanche, deux ondes peuvent être inclinées l'une par rapport à l'autre et, ça, c'est très intéressant et très utile.

I-3-ii – différentes polarisations

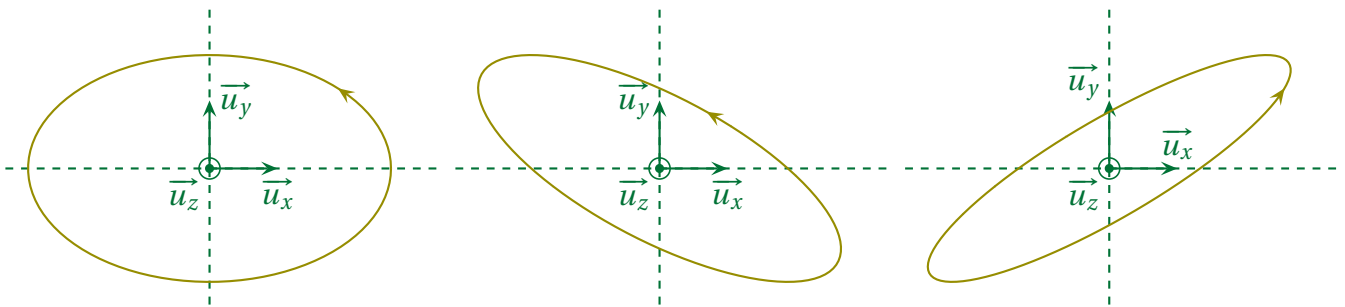
Attention !

Ce qui suit n'est pas à apprendre et à connaître en tant que tel car les résultats dépendent énormément du repérage choisi. En revanche la multiplicité des exemples est là pour montrer que la méthode, elle, est à connaître et savoir refaire. Quant aux résultats à connaître, ils suivent immédiatement cette section.

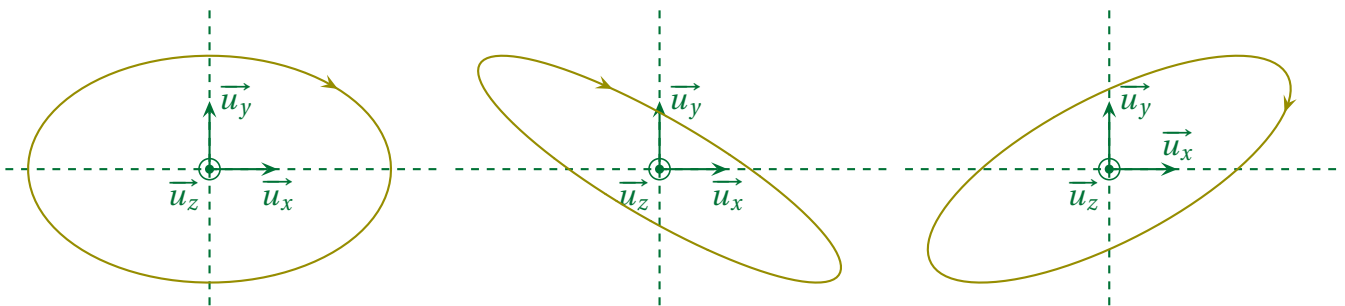
✧ L'état de polarisation d'une onde correspond à la forme de la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} X(t) = E_{0,x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ Y(t) = E_{0,y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{cases} \tag{I.31}$$

- ✧ Dans les expressions précédentes, z est fixé.
- ✧ Nous savons que cela correspond à une ellipse dans le cas général, mais cela regroupe en fait bon nombre de cas particuliers.
- ✧ Il y a tout d'abord la *polarisation elliptique gauche* qui correspond à une ellipse (pourquoi pas inclinée) dessinée en tournant sur la gauche.



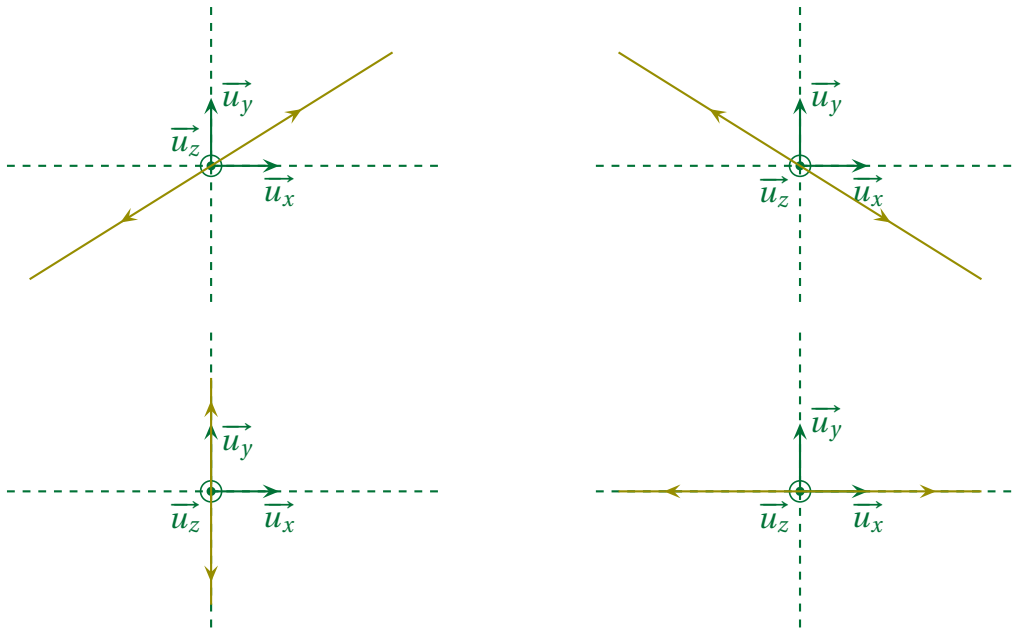
✧ Il y a, de manière analogue *polarisation elliptique droite* qui correspond à une ellipse (éventuellement inclinée) dessinée en tournant sur la droite.



✧ Mais il y a aussi la *polarisation circulaire* qui peut être *droite* ou *gauche* suivant que le sens de rotation se fait sur la droite ou sur la gauche.



⇨ Enfin, il y a la *polarisation rectiligne* qui correspond à une portion rectiligne, éventuellement inclinée



Loi

La polarisation d'une onde peut être :

- elliptique droite ou gauche ;
- circulaire droite ou gauche ;
- rectiligne.

I-3-iii – à retenir

⇨ Il y a trop de cas à retenir, concentrons-nous sur les aspects vraiment importants.

Loi

Pour qu'une onde soit polarisée rectilignement, il faut :

- soit une composante nulle ;
- soit des composantes en phase ($\Delta\varphi = 0$) ou en opposition de phase ($\Delta\varphi = \pm\pi$).

Loi

Pour qu'une onde soit polarisée circulairement, il faut :

- les deux composantes de même amplitude ;
- **et** les deux composantes en quadrature de phase $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

STOP Il est vivement déconseillé d'apprendre par cœur les liens droite-gauche avec $\Delta\varphi$ car ils dépendent :

- du sens de propagation ;
- des repérages ;
- de la convention pour $\Delta\varphi$.

I-3-iv – traduction formelle de la polarisation

⇨ Reprenons les composantes du champ

$$\begin{cases} E_x(t) = E_{0,x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y(t) = E_{0,y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

✧ Redéfinissons l'instant initial tel que

$$\omega t' = \omega t - kz + \varphi_x \quad (\text{I.33})$$

✧ Nous avons alors

$$\omega t - kz + \varphi_y = \omega t - kz + \varphi_x + \varphi_y - \varphi_x \rightsquigarrow \omega t - kz + \varphi_y = \omega t' + \Delta\varphi \quad \text{avec} \quad \Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x \quad (\text{I.34})$$

✧ Il reste ainsi

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = E_{0,y} \cos(\omega t' + \Delta\varphi) \end{cases} \quad \text{avec} \quad -\pi \leq \Delta\varphi \leq +\pi \quad (\text{I.35})$$

✧ Et maintenant « yapuka » passer en revue tous les cas de déphasage possible.

★ $\Delta\varphi = 0$

✧ Réécrivons tout d'abord les coordonnées du champ

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = E_{0,y} \cos(\omega t') \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

✧ Pour tracer la courbe correspondant à la polarisation, la méthode sera toujours la même :

- ① tracer le « rectangle de polarisation » qui correspond au rectangle de demi-largeur $E_{0,x}$ et $E_{0,y}$ dans lequel s'inscrit obligatoirement la courbe ;
- ② tracer le point correspondant à $\omega t'_1 = 0$ (en bleu dans les schémas qui suivent) ainsi que son symétrique correspondant à l'instant $\omega t'_3 = \pi$ (en violet dans les schémas qui suivent) ;
- ③ tracer le point correspondant à $\omega t'_2 = \pi/2$ (en rouge dans les schémas qui suivent) ;
- ④ finir la courbe « à la main » et interpréter.

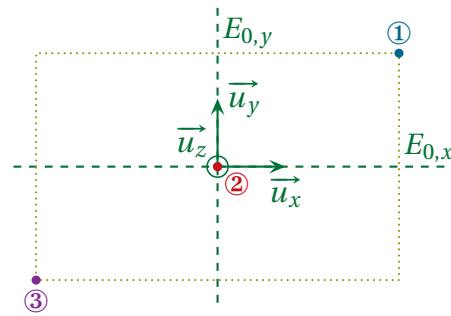
✧ Le point $\omega t'_3 = \pi$ est bien le symétrique du point $\omega t'_1 = 0$ car

$$\begin{aligned} E_{0,x} \cos(\omega t'_3) &= E_{0,x} \cos \pi = -E_{0,x} \\ E_{0,y} \cos(\omega t'_3 + \Delta\varphi) &= E_{0,y} \cos(\pi + \Delta\varphi) = -E_{0,y} \cos(\Delta\varphi) \end{aligned}$$

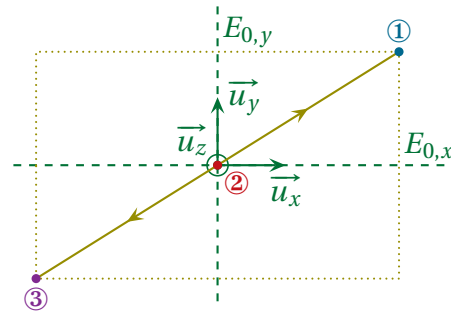
✧ Ici, nous avons très vite

$$\vec{E}(t_1) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \end{pmatrix}; \quad \vec{E}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}(t_3) = \begin{pmatrix} -E_{0,x} \\ -E_{0,y} \end{pmatrix} \quad (\text{I.37})$$

✧ Cela donne le schéma ci-dessous



⇨ Puis la polarisation



⇨ Nous avons affaire à une *polarisation rectiligne*. Cela peut aussi se voir par le fait que les deux composantes sont proportionnelles

$$E_y(t') = \frac{E_{0,y}}{E_{0,x}} E_x(t') \tag{I.38}$$

★ $0 < \Delta\varphi < \pi/2$

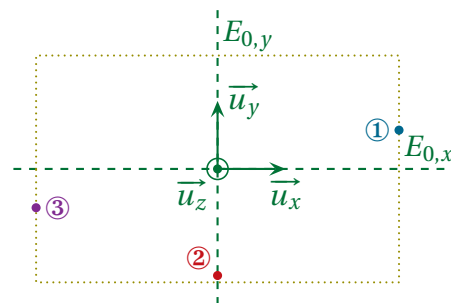
⇨ Même principe que ci-dessus. Commençons par réécrire le champ

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = E_{0,y} \cos(\omega t' + \Delta\varphi) \end{cases} \tag{I.39}$$

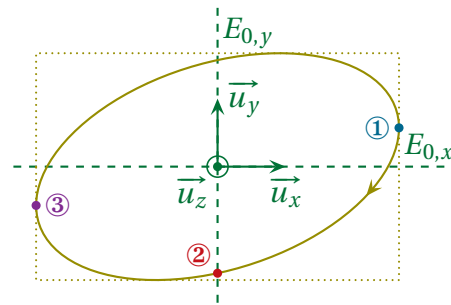
⇨ Nous avons ainsi, sans oublier que $0 < \Delta\varphi < \frac{\pi}{2}$

$$\vec{E}(t_1) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \cos \Delta\varphi > 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{E}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0,y} \sin \Delta\varphi < 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{E}(t_3) = \begin{pmatrix} -E_{0,x} \\ -E_{0,y} \cos \Delta\varphi \end{pmatrix} \tag{I.40}$$

⇨ Cela donne les trois points suivants



⇨ Et nous pouvons prolonger



✧ Nous avons affaire à une *polarisation elliptique droite*.

★ $\Delta\varphi = \pi/2$

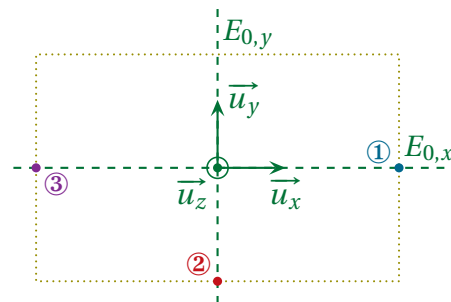
✧ La réécriture du champ

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = -E_{0,y} \sin(\omega t') \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

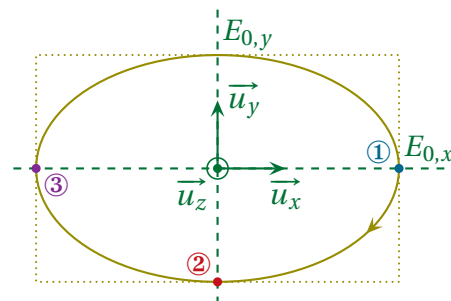
✧ Nous avons donc

$$\vec{E}(t_1) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{E}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0,y} < 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}(t_3) = \begin{pmatrix} -E_{0,x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.42})$$

✧ Cela donne les trois points suivants

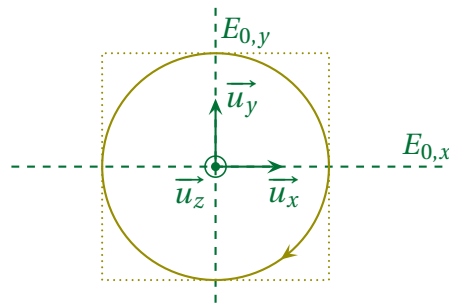


✧ Et nous pouvons prolonger



✧ Cela donne toujours une *polarisation elliptique droite*.

✧ Dans le cas particulier où $E_{0,x} = E_{0,y} \stackrel{\text{not}}{=} E_0$, nous avons cette fois une *polarisation circulaire droite*.



★ $\pi/2 < \Delta\varphi < \pi$

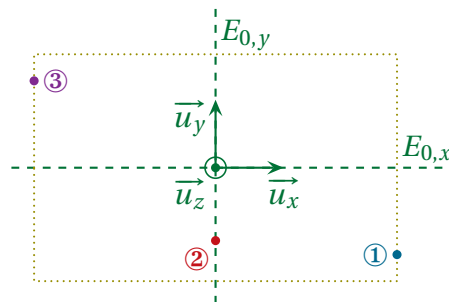
⇨ Toujours pareil

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = E_{0,y} \cos(\omega t' + \Delta\varphi) \end{cases} \quad (I.43)$$

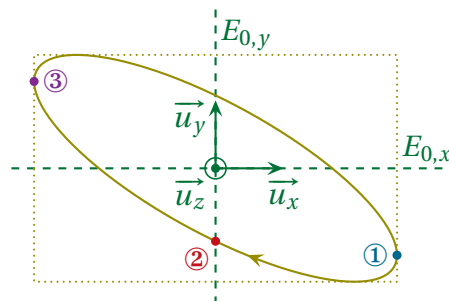
⇨ Nous avons ainsi, sans oublier que $\frac{\pi}{2} < \Delta\varphi < \pi$

$$\vec{E}(t_1) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \cos \Delta\varphi < 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{E}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0,y} \sin \Delta\varphi < 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{E}(t_3) = \begin{pmatrix} -E_{0,x} \\ -E_{0,y} \cos \Delta\varphi \end{pmatrix} \quad (I.44)$$

⇨ Cela donne les trois points suivants



⇨ Et nous pouvons prolonger



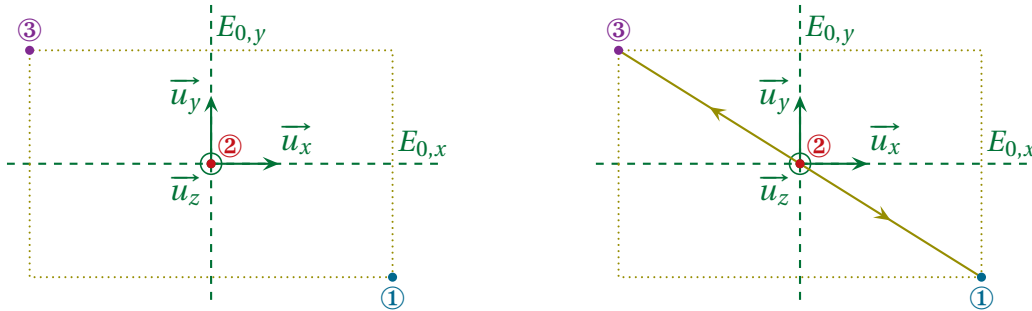
⇨ Nous avons affaire à une *polarisation elliptique droite*.

★ $\Delta\varphi = \pi$

✧ Les composantes

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = -E_{0,y} \cos(\omega t') \end{cases} \quad (I.45)$$

✧ Nous voyons que les deux composantes sont proportionnelles, nous avons donc bien une *polarisation rectiligne*.



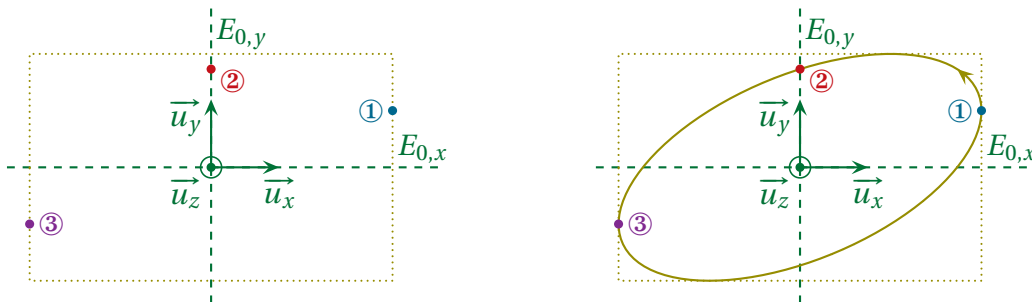
★ $-\pi/2 < \Delta\varphi < 0$

✧ Pas de surprise

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = E_{0,y} \cos(\omega t' + \Delta\varphi) \end{cases} \quad (I.46)$$

✧ Puis, avec $-\frac{\pi}{2} < \Delta\varphi < 0$

$$\vec{E}(t_1) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \cos \Delta\varphi > 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{E}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0,y} \sin \Delta\varphi > 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{E}(t_3) = \begin{pmatrix} -E_{0,x} \\ -E_{0,y} \cos \Delta\varphi \end{pmatrix} \quad (I.47)$$



✧ Nous avons affaire à une *polarisation elliptique gauche*.

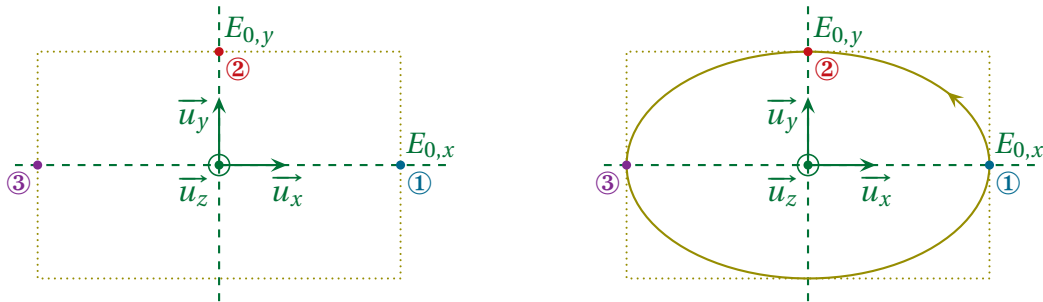
★ $\Delta\varphi = -\pi/2$

✧ Le champ

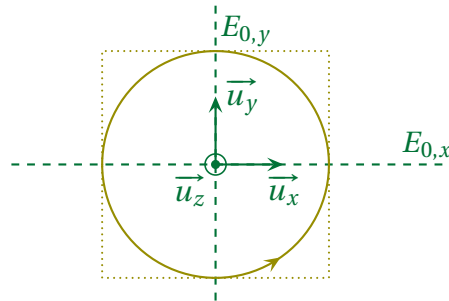
$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = E_{0,y} \sin(\omega t') \end{cases} \quad (I.48)$$

✧ Ce qui donne

$$\vec{E}(t_1) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{E}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0,y} > 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}(t_3) = \begin{pmatrix} -E_{0,x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.49})$$



✧ Cela donne une *polarisation elliptique gauche* et, dans le cas particulier où $E_{0,x} = E_{0,y} \stackrel{\text{not}}{=} E_0$, nous avons cette fois une *polarisation circulaire gauche*.



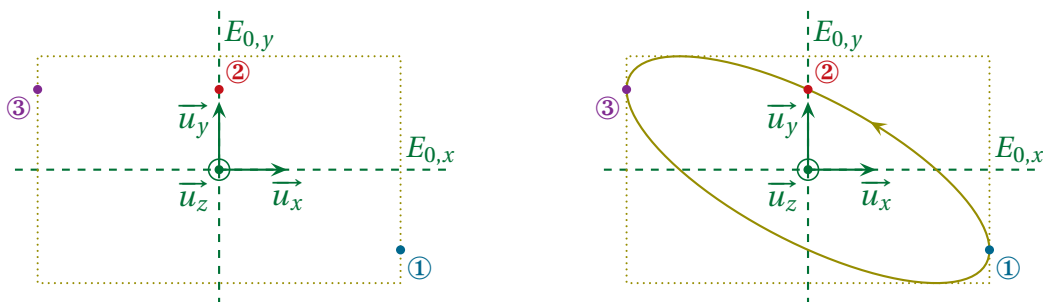
★ $-\pi < \Delta\varphi < -\pi/2$

✧ C'est reparti¹

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = E_{0,y} \cos(\omega t' + \Delta\varphi) \end{cases} \quad (\text{I.50})$$

✧ Cette fois $-\pi < \Delta\varphi < -\frac{\pi}{2}$

$$\vec{E}(t_1) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \cos \Delta\varphi < 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{E}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{0,y} \sin \Delta\varphi > 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{E}(t_3) = \begin{pmatrix} -E_{0,x} \\ -E_{0,y} \cos \Delta\varphi \end{pmatrix} \quad (\text{I.51})$$



✧ Nous retrouvons une *polarisation elliptique gauche*.

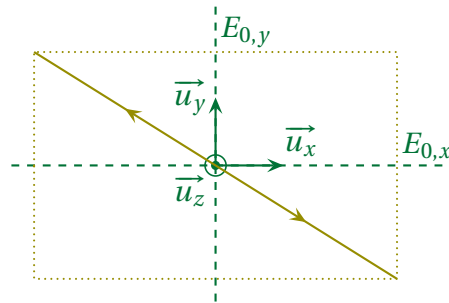
1. Vive le copier-coller!

$$\star \Delta\varphi = -\pi$$

✧ C'est le dernier cas (ouf!)

$$\begin{cases} E_x(t') = E_{0,x} \cos(\omega t') \\ E_y(t') = -E_{0,y} \cos(\omega t') \end{cases} \quad (I.52)$$

✧ Nous voyons que les deux composantes sont proportionnelles, nous avons donc bien une *polarisation rectiligne*.



I-3.v- lumière polarisée



Loi

Chaque onde a sa propre polarisation et n'en change pas à moins de traverser un milieu particulier.

▲ Les lames biréfringentes font parti des « milieux particuliers » permettant de changer la polarisation d'une onde.



Loi

La lumière naturelle est dite *non polarisée* car chaque train d'onde émis a une polarisation aléatoire. Cela se représente de la manière suivante

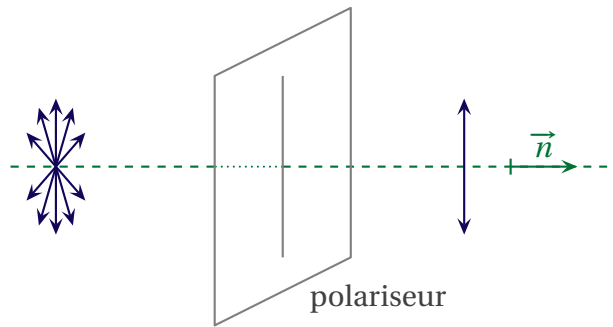


Définition

De la lumière est dite *polarisée* lorsque tous ses trains d'onde ont la même polarisation

✧ Dans le cas particulier de la production de lumière laser, il est parfois possible que celle-ci soit polarisée rectilignement.

✧ Pour polariser rectilignement, une lumière non polarisée, le plus simple est de la faire traverser un *polariseur* qui va absorber une composante plutôt qu'une autre.



✧ Nous verrons, dans le dernier TP de l'année, d'autres moyens de polariser une lumière.

⚠ Rappelons qu'il est possible de polariser une lumière aussi par diffusion (de RAYLEIGH) et par réflexion (sous l'angle de BREWSTER).

I-4 – Énergétique des OPPM

I-4.i – densité volumique d'énergie

★ lien entre les champs

Loi

Pour une OPP(M) dans le vide, en norme,

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

✧ Reprenons la relation de structure en notation réelle

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad (\text{I.53})$$

✧ Comme \vec{k} et \vec{E} sont orthogonaux (cf. structure), en norme, cela donne

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{k}\| \times \|\vec{E}\|}{\omega} \quad \text{et} \quad \omega = kc \quad \rightsquigarrow \quad \|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c} \quad (\text{I.54})$$

★ les densités instantanées

✧ La densité volumique d'énergie électrique s'écrit

$$u_{\text{él}}(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M, t) \quad (\text{I.55})$$

✧ Pour la densité volumique d'énergie magnétique, nous avons

$$u_{\text{mg}}(M, t) = \frac{1}{2\mu_0} B^2(M, t) \quad \rightsquigarrow \quad u_{\text{mg}}(M, t) = \frac{1}{2\mu_0 c^2} E^2(M, t) \quad \rightsquigarrow \quad u_{\text{mg}}(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M, t) \quad (\text{I.56})$$

✧ Autrement dit, en chaque point à chaque instant, nous avons

$$u_{\text{él}}(M, t) = u_{\text{mg}}(M, t) \quad (\text{I.57})$$

✧ De plus, à un instant en un point quelconque, nous avons

$$u_{\text{élmg}}(M, t) = u_{\text{él}}(M, t) + u_{\text{mg}}(M, t) \quad \rightsquigarrow \quad u_{\text{élmg}}(M, t) = \varepsilon_0 E^2(M, t) \quad (\text{I.58})$$

✧ Notons quand même, au passage, que la nature même de la propagation fait qu'il n'est pas étonnant de trouver un résultat du type

$$\langle u_{\text{él}}(M, t) \rangle = \langle u_{\text{mg}}(M, t) \rangle \quad (\text{I.59})$$

I-4-ii – vecteur de POYNTING

6

✧ Cherchons l'expression du vecteur de POYNTING en un point à un instant.

$$\vec{\Pi}_{(M, t)} = \frac{\vec{E}_{(M, t)} \wedge \vec{B}_{(M, t)}}{\mu_0} \quad (\text{I.60})$$

✧ Avec la relation de structure pour les OPP, cela donne

$$\vec{\Pi}_{(M, t)} = \frac{\vec{E}_{(M, t)}}{\mu_0} \wedge \left(\frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c} \right) \quad (\text{I.61})$$

✧ Développons le double produit vectoriel

$$\vec{\Pi}_{(M, t)} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\left(\vec{E}_{(M, t)} \cdot \vec{E} \right) \times \vec{n} - \left(\vec{E}_{(M, t)} \cdot \vec{n} \right) \vec{E} \times \right) \quad (\text{I.62})$$

✧ Et comme $\vec{E}_{(M, t)} \cdot \vec{n} = 0$ (onde transverse), il reste

$$\vec{\Pi}_{(M, t)} = \frac{E^2(M, t)}{\mu_0 c} \times \vec{n} \quad (\text{I.63})$$

✧ Faisons apparaître la densité volumique d'énergie électromagnétique $u_{\text{elmg}}(M, t) = \varepsilon_0 E^2(M, t)$

$$\vec{\Pi}_{(M, t)} = \frac{\varepsilon_0 E^2(M, t)}{\varepsilon_0 \mu_0 c} \times \vec{n} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\Pi}_{(M, t)} = c u_{\text{elmg}}(M, t) \times \vec{n} \quad (\text{I.64})$$

✧ Comme nous l'avons déjà montré dans le chapitre 3 de mécanique (celui traitant de la propagation), la relation précédente caractérise le fait que l'énergie se déplace à la célérité c .



Loi

Pour une OPP, le vecteur de POYNTING représente l'énergie qui se déplace à la célérité c dans la direction \vec{n} .

I-4-iii – à partir de la notation complexe

✧ Pour la notation complexe, **et la notation complexe uniquement**, nous pouvons calculer les valeurs moyennes de la manière suivante.

✧ Pour la densité volumique d'énergie électrique

$$u_{\text{él}}(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(M, t) \quad \rightsquigarrow \quad \langle u_{\text{él}}(M, t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \times \frac{1}{2} \mathcal{R}e \left(\underline{E} \times \underline{E}^* \right) \quad (\text{I.65})$$

✧ Pour la densité volumique d'énergie magnétique

$$u_{\text{mg}}(M, t) = \frac{1}{2 \mu_0} B^2(M, t) \quad \rightsquigarrow \quad \langle u_{\text{mg}}(M, t) \rangle = \frac{1}{2 \mu_0} \times \frac{1}{2} \mathcal{R}e \left(\underline{B} \times \underline{B}^* \right) \quad (\text{I.66})$$

✧ Pour le vecteur de POYNTING

$$\vec{\Pi}_{(M,t)} = \frac{\vec{E}_{(M,t)} \wedge \vec{B}_{(M,t)}}{\mu_0} \rightsquigarrow \langle \vec{\Pi}_{(M,t)} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \times \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\vec{E} \wedge \vec{B}^* \right) \quad (\text{I.67})$$

I-4-iv – exemples numériques

8

- ✧ Regardons ce qu'il en est de quelques champs électrique connaissant la puissance surfacique.
- ✧ Pour le Soleil, nous avons $\langle \Pi \rangle \sim 1,4 \text{ kW.m}^{-2}$. Cela donne un champ électrique de l'onde associé

$$E_0 = \sqrt{2 \mu_0 c \langle \Pi \rangle} \sim 10^3 \text{ V.m}^{-1} \quad (\text{I.68})$$

- ✧ Pour un LASER hélium-néon créant un faisceau de 1 mW de puissance et de rayon 1 mm, nous trouvons

$$E_0 = \sqrt{2 \mu_0 c \frac{P}{\pi r^2}} \sim 10^3 \text{ V.m}^{-1} \sim 300 \text{ V.m}^{-1} \quad (\text{I.69})$$

- ✧ Enfin, pour la téléphonie, les normes de sécurité françaises² imposent un champ électrique inférieur, grosso modo à 50 V.m^{-1} . Cela implique une puissance surfacique inférieure à

$$\langle \Pi \rangle = \frac{E_0^2}{2 \mu_0 c} = 3 \text{ W.m}^{-2} \quad (\text{I.70})$$

- ✧ Ainsi, pour une antenne relai dont la puissance d'alimentation est d'environ 40 W, en imaginant qu'elle envoie sa puissance dans toutes les directions (ce qui est faux), cela impose une distance minimale de sécurité telle que

$$\frac{P}{4 \pi d^2} < \Pi_{\max} \rightsquigarrow d > \sqrt{\frac{P}{4 \pi \Pi}} \sim 1 \text{ m} \quad (\text{I.71})$$

I-4-v – en termes de photons

7

- ✧ Une question que nous pouvons nous poser aussi, c'est « à combien de photon une onde électromagnétique correspond-elle ? »
- ✧ En effet, comme nous le savons et comme nous le reverrons dans le chapitre de mécanique quantique, une onde électromagnétique peut être vue comme un ensemble de corpuscules appelés « photon » possédant chacun l'énergie $E = h \nu$.
- ✧ Dans ces conditions, le flux surfacique ϕ_n de photons, *i.e.* le nombre de photons par unité de temps et de surface, correspondant à une onde s'écrit

$$\phi_n = \frac{\langle \Pi \rangle}{h \nu} = \frac{\lambda}{h c} \langle \Pi \rangle \quad (\text{I.72})$$

- ✧ Ainsi en prenant $\lambda_{\text{moyen}} = 600 \text{ nm}$, une surface $S = 1 \text{ m}^2$ de sol, reçoit, en plein été, de la part du Soleil, un « débit » de photons d'environ

$$D_n = \frac{600 \times 10^{-9}}{6,6 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^8} \times 1,4 \times 10^3 \sim 4 \times 10^{21} \text{ photons.s}^{-1} \quad (\text{I.73})$$

- ✧ Et pour le laser de TP, d'une puissance de 1 mW

$$D_n = \frac{\lambda}{h c} \langle \Pi \rangle = \frac{633 \times 10^{-9}}{6,6 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^8} \times 1 \times 10^{-3} \sim 3 \times 10^{15} \text{ photons.s}^{-1} \quad (\text{I.74})$$

2. Source : <http://www.champs-electro-magnetiques.com/ondes/normes-hf-de-differents-pays-en-europe-21.html>

II – Ondes dans un milieu

II.1 – Conducteur ohmique dans l'ARQS

II.1.i – modèle du conducteur

✧ Nous nous placerons dans le modèle suivant : « conducteur dans l'ARQS (magnétique) ».



Définition

Un *conducteur* est un matériau qui conduit significativement le courant électrique.

✧ Typiquement, il s'agit des métaux.

✧ Il existe aussi :

- des isolants, qui ne conduisent pas le courant électrique (et s'appellent des *diélectriques*) ;
- des semi-conducteurs, qui conduisent un peu mais pas trop le courant et qui sont à la base de tous les composants électroniques.



Loi

Un conducteur est caractérisé par la loi d'OHM qui s'écrit, au niveau local (ou mésoscopique)

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{où}$$

γ est la *conductivité* du matériau en S.m^{-1} .

✧ L'établissement de la loi d'OHM locale a été faite dans le cours de deuxième année (chapitre 2 d'électromagnétisme).



Loi

La conductivité pour un bon conducteur est de l'ordre de 10^7 S.m^{-1} .

II.1.ii – densité volumique de charge

★ *une densité nulle de charges*

🔗 *résultat*



Loi

Un conducteur, dans l'ARQS, possède une charge volumique nulle.

$$\rho = 0$$

🔗 *équation vérifiée par ρ*

✧ Reprenons l'équation de conservation de la charge dans le cas général.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

✧ En considérant un conducteur de conductivité uniforme, cela nous conduit à

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\gamma \vec{E}) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \text{div}(\vec{E}) = 0 \quad (\text{II.2})$$

✧ Puis, avec l'équation de MAXWELL – GAUSS

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \times \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (\text{II.3})$$

✧ Il s'agit là d'une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r} \rho = 0 \quad \text{avec} \quad \tau_r = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \quad (\text{II.4})$$

🕒 ordres de grandeurs

✧ Nous avons tout d'abord

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \rightsquigarrow \epsilon_0 \sim \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 9 \cdot 10^{16}} \rightsquigarrow \epsilon_0 \sim 10^{-11} \text{ F.m}^{-1} \quad (\text{II.5})$$

✧ Cela donne

$$\tau_r = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \rightsquigarrow \tau_r \sim \frac{10^{-11}}{10^7} \rightsquigarrow \tau_r \sim 10^{-18} \text{ s} \quad (\text{II.6})$$

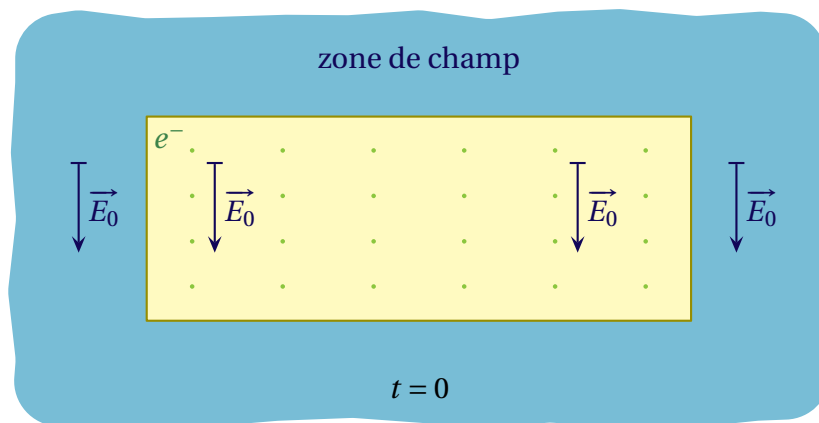
✧ Nous pouvons donc dire qu'au bout de $10\tau_r = 10^{-17}$ s la charge volumique est nulle partout dans le conducteur.

✧ Nous voyons là une caractérisation numérique de l'ARQS pour un conducteur, à savoir qu'il faut des champs dont la durée caractéristique soit plus grande que 10^{-17} s.

★ interprétation qualitative

✧ Imaginons un bon conducteur plongé dans un champ électrique uniforme et constant \vec{E}_0 .

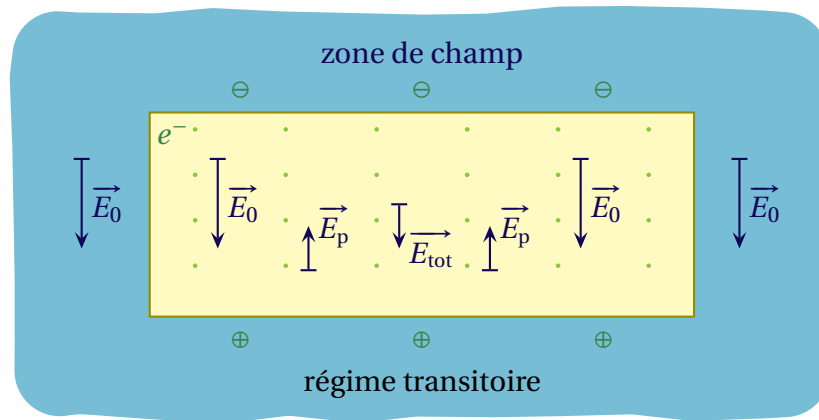
✧ À l'instant initial, le champ électrique est **à l'intérieur** du métal car *aucune* loi n'interdit au champ de « rentrer » dans la matière.



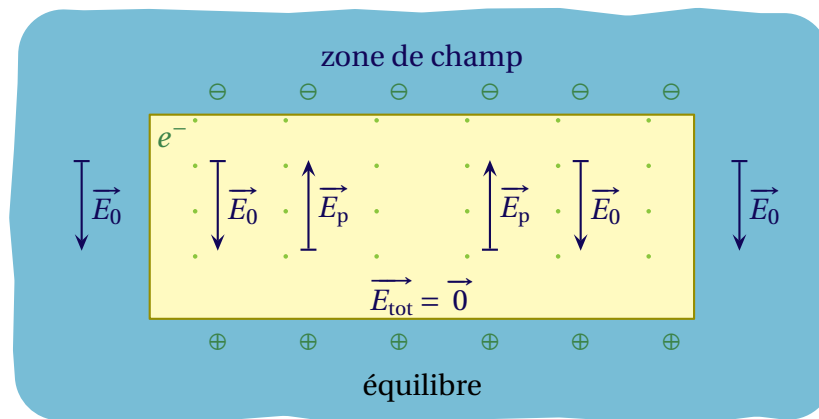
✧ Dans le conducteur, il y a des électrons libres, *i.e.* des électrons qui peuvent bouger quasiment sans entrave.

✧ Comme ces électrons libres sont plongés dans un champ \vec{E}_0 , ils subissent la force de LORENTZ et commencent à se déplacer dans le sens opposé au champ.

✧ Comme les électrons libres ne peuvent pas sortir du conducteurs, ils vont avoir tendance à s'accumuler sur une face et à manquer sur l'autre face. Cela crée des charges surfaciques puis un champ propre \vec{E}_p , à l'instar du condensateur idéal.



- ✧ Les électrons dans le conducteur voient donc désormais le champ total $\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$ et continuent à bouger (donc à s'accumuler sur les côtés) tant que le champ total n'est pas nul.
- ✧ En fait la situation d'équilibre est la suivante :
 - des électrons libres globalement immobiles ;
 - des surfaces chargées ;
 - un champ interne au conducteur nul.



- ✧ La charge surfacique est telle que le champ créé compense exactement le champ extérieur \vec{E}_0 soit, en prenant le modèle du condensateur idéal

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{II.7})$$

- ✧ La cohérence de ce résultat, au delà de rassurer, permet de voir que :
 - si le champ est nul à l'intérieur d'un conducteur, ce n'est pas parce que « des agents de sécurité microscopiques » interdisent l'entrée du matériau au champ électrique, mais parce que le conducteur crée lui même le champ qui permettra d'annuler, en son sein, le champ qui *est* rentré ;
 - même si la charge volumique est globalement nulle, cela n'interdit pas d'avoir des charges surfaciques.

II.1.iii – courant de conduction et courant de déplacement



Loi

Dans un conducteur dans l'ARQS, le courant de déplacement est négligeable devant le courant électrique.

✧ Nous savions déjà que, dans l'ARQS,

$$\|\mu_0 \vec{j}_d\| \ll \|\text{rot } \vec{B}\| \quad (\text{II.8})$$

✧ Nous allons montrer qu'en plus

$$\|\vec{j}_d\| \ll \|\vec{j}\| \quad (\text{II.9})$$

✧ Regardons ce qu'il en est en terme d'ODG

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|} \equiv \frac{\gamma E}{\varepsilon_0 \frac{E}{T}} \rightsquigarrow \frac{\|\vec{j}\|}{\|\vec{j}_d\|} \equiv \frac{T}{\tau_r} \gg 1 \quad (\text{II.10})$$

✧ Dans l'expression précédente, $\tau_r = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$ est la durée caractéristique de réaction du conducteur (cf. II.4).

II.1.iv – résumé des lois dans un conducteur dans l'ARQS

✧ Toutes ces approximations mises ensemble nous permettent de dire que les lois valables dans un conducteur dans l'ARQS sont

$\text{div } \vec{E}(M,t) = 0$	équation de MAXWELL – GAUSS
$\text{rot } \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$	équation de MAXWELL – FARADAY
$\text{div } \vec{B}(M,t) = 0$	équation de MAXWELL – THOMSON
$\text{rot } \vec{B}(M,t) = \mu_0 \vec{j}(M,t)$	équation de MAXWELL – AMPÈRE
$\vec{j}(M,t) = \gamma \vec{E}(M,t)$	loi d'OHM

II.1.v – équation de diffusion vérifiée par la densité de courant

★ résultat

✧ Nous allons montrer que la densité surfacique de courant électrique en volume \vec{j} obéit à l'équation

$$\vec{\Delta} \vec{j} = \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (\text{II.11})$$

✧ Il s'agit là d'une équation de diffusion à savoir retrouver.

★ démonstration

✧ Comment souvent (voire toujours) pour trouver l'équation vérifiée par un champ vectoriel, nous commencerons à exprimer le rotationnel du rotationnel de deux manières différentes.

✧ Tout d'abord la définition du laplacien vectoriel donne

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{j}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{j} \quad (\text{II.12})$$

✧ Rajoutons la loi d'OHM

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \gamma \vec{E}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{j} \quad (\text{II.13})$$

✧ Comme le milieu est uniforme cela donne

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}) = \gamma \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{j} \quad (\text{II.14})$$

✧ Puis, avec la loi de MAXWELL – GAUSS

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}) = \vec{0} - \overrightarrow{\Delta} \vec{j} \quad (\text{II.15})$$

✧ Reprenons le rotationnel du rotationnel en incluant tout de suite la loi d'OHM et l'homogénéité du milieu

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}) &= \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\gamma \vec{E})\right) \\ &= \gamma \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \end{aligned}$$

✧ Injectons MAXWELL – FARADAY

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}) = \gamma \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad (\text{II.16})$$

✧ Intervenons les dérivées spatiale et temporelle

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}) = -\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \quad (\text{II.17})$$

✧ Soupoudrons de MAXWELL – AMPÈRE

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}) = -\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \vec{j}) \quad (\text{II.18})$$

✧ Et sortons les constantes

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}) = -\gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (\text{II.19})$$

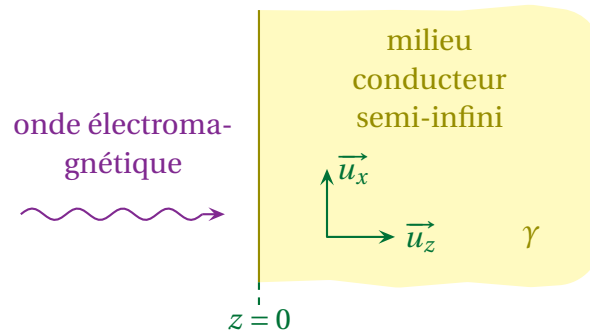
✧ En rassemblant les deux expressions, nous arrivons bien au résultat attendu.

$$-\overrightarrow{\Delta} \vec{j} = -\gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\Delta} \vec{j} = \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (\text{II.20})$$

II.1.vi – résolution pour un conducteur semi-infini

★ situation, analyse

✧ Considérons un conducteur semi-infini de conductivité homogène γ .



✧ Arrangeons-nous seulement pour que l'onde électromagnétique qui arrive crée, en surface, le courant

$$\vec{j}(z=0, t) = j_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x \quad (\text{II.21})$$

✧ Dans ces conditions, nous voyons que le dispositif est invariant suivant deux translations, une sur \vec{u}_x et une sur \vec{u}_y , ce qui nous permet de dire que le courant \vec{j} ne dépendra que de z .

✧ Ici, comme nous nous plaçons naturellement en coordonnées cartésiennes, l'équation vectorielle de diffusion se réécrit

$$\vec{\Delta} \vec{j} = \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \Delta j_x(z, t) = \gamma \mu_0 \frac{\partial j_x(z, t)}{\partial t} \quad (\text{II.22})$$

✧ Analyse technique :

- le repérage est déjà posé ;
- comme nous avons affaire à une équation aux dérivées partielles linéaire et que la contrainte est sinusoïdale, nous allons utiliser la notation complexe ;
- comme l'équation ici n'est pas une équation de propagation, nous allons rechercher la solution sous la forme POPPM

$$\underline{j}_x(z, t) = \underline{J}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \quad (\text{II.23})$$

ici, exceptionnellement, nous utiliserons la notation i et non j pour éviter de confondre j et j .

★ vecteur d'onde complexe

✧ Injectons la solution dans l'équation de diffusion

$$-\underline{k}^2 \underline{J}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} = \mu_0 \gamma i \omega \underline{J}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{k}^2 = -\mu_0 \gamma i \omega \quad (\text{II.24})$$

✧ Pour trouver \underline{k} , écrivons $-i$ sous sa forme exponentielle

$$\underline{k}^2 = \mu_0 \gamma \omega e^{-i\pi/2} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{k} = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} \times e^{-i\pi/4} \quad (\text{II.25})$$

✧ Repassons en notation algébrique

$$\underline{k} = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} \times \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad (\text{II.26})$$

✧ Ce que nous noterons

$$\underline{k} = \epsilon \times k_0 (1-i) \quad \text{avec} \quad k_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} \quad \text{et} \quad \epsilon = \pm 1 \quad (\text{II.27})$$

★ solution complète

✧ Ici la solution complète ne peut s'écrire que sous la forme

$$j_x(z,t) = \underline{J}_0 e^{i(\omega t - k_0(1-i)z)} \quad \rightsquigarrow \quad j_x(z,t) = \underline{J}_0 e^{-k_0 z} e^{i(\omega t - k_0 z)} \quad (\text{II.28})$$

✧ En effet, comme le milieu est semi-infini, z peut devenir infini. Il faut alors éviter toute divergence mathématique de $j_x(z,t)$ qui ne pourrait pas correspondre, ici, à une solution car le milieu est passif et ne crée **pas** d'énergie.

☞ *Remarque.* Dans le cas d'un milieu conducteur de longueur *finie*, cet argument ne tient plus et nous sommes obligés de garder les deux solutions

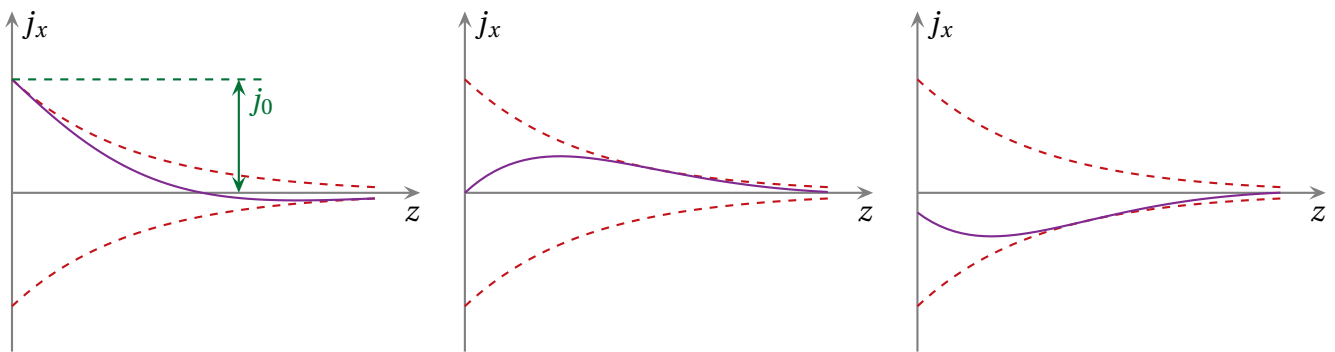
$$j_x(z,t) = \underline{J}_0 e^{i(\omega t - k_0(1-i)z)} + \underline{J}_1 e^{i(\omega t + k_0(1-i)z)} \quad (\text{II.29})$$

✧ La condition en $z = 0$ impose

$$j_x(0,t) = j_0 e^{i\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad j_x(z,t) = j_0 e^{-k_0 z} \times e^{i(\omega t - k_0 z)} \quad (\text{II.30})$$

★ représentation graphique

✧ À t fixé, $j_x(z,t)$ ressemble aux graphiques suivants.



★ indice complexe



Définition

L'indice complexe \underline{n} d'un milieu est défini pour une OPPM par

$$\underline{k} = \underline{n} \frac{\omega}{c} = \underline{n} k_0$$

✧ Comme toute grandeur complexe, nous pouvons écrire

$$\underline{n} = n' + j n'' \quad (\text{II.31})$$

✧ De plus le vecteur d'onde s'écrit

$$\underline{k} = k' + j k'' \quad \text{avec} \quad (\text{II.32})$$

→ k' qui caractérise la propagation ;

→ k'' qui caractérise l'atténuation.

✧ Nous pouvons donc en conclure



Loi

$n'(\omega)$ caractérise la propagation et $n''(\omega)$ caractérise l'atténuation.

✧ Dans ces conditions, nous avons



Loi

La vitesse de phase s'écrit

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{n'}$$

🔥 *Remarque.* Nous pouvons remarquer que cette définition est cohérente avec celle que nous connaissons de l'indice optique

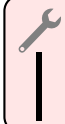
$$n = \frac{c}{v} \quad (\text{II.33})$$

II.1.vii – épaisseur de peau

★ interprétation

✧ L'enveloppe de $j_x(z,t)$ est en $e^{-k_0 z}$, enveloppe que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\text{enveloppe} \propto e^{-z/\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{1}{k_0} \quad (\text{II.34})$$



Loi

L'épaisseur de peau, noté δ , est la distance caractéristique d'atténuation de la densité de courant en volume \vec{j} à l'intérieur d'un conducteur.

✧ Ici, avec ce modèle, nous avons

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \quad (\text{II.35})$$

✧ Cette expression n'est pas à apprendre mais à savoir retrouver au cas par cas.

✧ À la limite, en repensant aux seules grandeurs pertinentes du problème, il est possible de retrouver, à $\sqrt{2}$ près, l'expression de δ . Les grandeurs pertinentes sont :

- μ_0 qui caractérise le champ électromagnétique décrit par les lois de MAXWELL dans l'ARQS (ϵ_0 a disparu de MAXWELL – GAUSS) ;
- γ qui caractérise le milieu conducteur ;
- ω qui caractérise la contrainte.

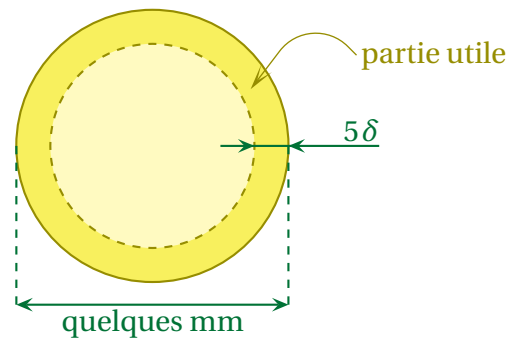
★ AN

✧ Pour le cuivre, nous trouvons

fréquence	50 Hz	1 MHz	1 GHz
δ	9 mm	65 μm	0,9 μm

✧ En « hautes » fréquences (mais suffisamment faibles pour rester dans l'ARQS), cela signifie que le courant ne passe que dans une portion réduite du conducteur.

✧ En admettant que l'épaisseur de peau est faible devant le rayon d'un fil, cela voudrait dire, par exemple, que le courant ne passe que une couronne d'épaisseur 5δ (cf. schéma ci-dessous).



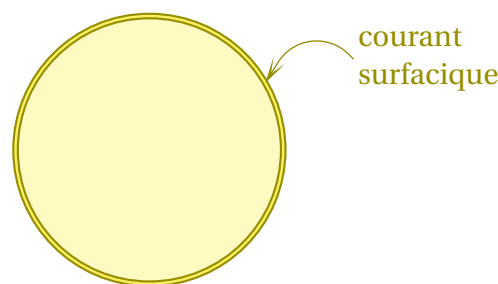
- ✧ L'inconvénient d'une telle situation est double :
 - cela signifie qu'il y a du fil (donc du cuivre) inutile, ce qui a pu engendrer des frais supplémentaire dont il aurait été possible de se passer ;
 - la résistance du fil étant inversement proportionnelle à la *section* effective du fil, la résistance dans une telle situation augmente et / ou est plus grande que prévue.
- ✧ C'est ce phénomène qui est à l'origine de l'augmentation sensible de la résistance des bobines en électrocinétique (cf. TP oscillations sinusoïdales).

★ conducteur parfait

🕒 modèle

- ✧ Nous pourrions, parfois, parler de conducteurs « parfaits » tels que leurs conductivités soient infinies.
- ✧ Il ne faut pas confondre « conducteur parfait » et « supra conducteur » qui sont deux notions différentes :
 - « conducteur parfait » est une approximation, une limite, d'un modèle de conducteur réel ;
 - un « supra conducteur » n'obéit **pas** à la loi d'OHM mais à d'autres lois qui, malheureux hasard, ont à peu près les mêmes conséquences que « conducteur parfait ».
- ✧ En fait, nous pourrions dire qu'un conducteur est parfait lorsque son épaisseur de peau est très faible devant sa taille caractéristique.
- ✧ Cela revient en fait au même car

$$\gamma \rightarrow +\infty \quad \rightsquigarrow \quad \delta \rightarrow 0 \quad (\text{II.36})$$



🕒 en pratique

- ✧ La présence d'un conducteur parfait implique :
 - l'utilisation d'un modèle macroscopique ;
 - la présence de courants localisés au niveau de la surface.
- ✧ Avec ce qui précède, nous pouvons dire que le champ électromagnétique est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait.
- ✧ Pour le champ électrique, c'est immédiat puisqu'avec $\delta \rightarrow 0$, le courant $\vec{j}(z,t)$ est partout sauf en $z = 0$ ce qui implique, *via* la loi d'OHM que \vec{E} est nul partout sauf en $z = 0$.

✧ Pour \vec{B} nous allons le prouver dans l'étape suivante.

II.1.viii – champ électromagnétique dans le conducteur

★ champ électrique

✧ Nous connaissons $\vec{j}(z,t)$ et nous voulons $\vec{E}(z,t)$. Utilisons tout simplement la loi d'OHM

$$\vec{j}(z,t) = \gamma \vec{E}(z,t) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E}(z,t) = \begin{cases} \frac{j_0}{\gamma} e^{-k_0 z} \times e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{u}_x \\ \frac{j_0}{\gamma} e^{i(\omega t - k z)} \vec{u}_x \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

★ champ magnétique

✧ Pour trouver $\vec{B}(z,t)$ connaissant $\vec{j}(z,t)$ et $\vec{E}(z,t)$, nous avons le choix entre deux lois :

→ la loi de MAXWELL – AMPÈRE $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$;

→ la loi de MAXWELL – FARADAY $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

✧ Nous allons choisir la 2^e car il toujours plus facile de calculer un rotationnel puis primitiver en t que d'inverser un rotationnel.

✧ Commençons par calculer le rotationnel de \vec{E} **en simplifiant avant**.

✧ Nous avons ainsi

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.38})$$

✧ Il reste donc

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \rightsquigarrow \vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{\text{rot}} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{u}_y \quad (\text{II.39})$$

✧ Le champ \vec{B} n'a donc de composantes que suivant \vec{u}_y et donc, en notation complexe,

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t}(z,t) = \frac{\partial E_x}{\partial z}(z,t) \rightsquigarrow -\frac{\partial B_y}{\partial t}(z,t) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{j_0}{\gamma} e^{i(\omega t - k z)} \right) \quad (\text{II.40})$$

✧ Cela nous donne, compte-tenu du fait que dériver par rapport à t revient à multiplier par $i\omega$

$$-i\omega \underline{B}_y(z,t) = -i\underline{k} \frac{j_0}{\gamma} e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \quad (\text{II.41})$$

✧ Puis, en remplaçant \underline{k} par son expression

$$\underline{k} = k_0(1-i) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{B}_y(z,t) = \frac{j_0 k_0(1-i)}{\omega \gamma} e^{-k_0 z} \times e^{i(\omega t - k_0 z)} \quad (\text{II.42})$$

★ interprétation

✧ Nous pouvons constater que

- il y a de la propagation suivant \vec{u}_z (cf. terme en $e^{i(\omega t - k_0 z)}$);
- \vec{E} est porté par \vec{u}_x qui est orthogonal à \vec{u}_z , \vec{E} est dit *transverse*;
- \vec{B} est porté par \vec{u}_y , qui est aussi orthogonal à \vec{u}_z , \vec{B} est dit *transverse*.

✧ Nous pouvons constater que les champs électrique et magnétique sont déphasés.

✧ En effet

$$(1-i) = \sqrt{2} e^{-i\pi/4} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{B}_y(z,t) = \frac{j_0 k_0 \sqrt{2}}{\omega \gamma} e^{-k_0 z} \times e^{i(\omega t - k_0 z - \pi/4)} \quad (\text{II.43})$$

✧ Dans ces conditions la phase de \vec{E} s'écrit

$$\varphi_E = \arg(\underline{E}_x(z,t)) \quad \rightsquigarrow \quad \varphi_E = \omega t - k_0 z \quad (\text{II.44})$$

✧ Et la phase φ_B de \vec{B}

$$\varphi_B = \arg(\underline{B}_y(z,t)) \quad \rightsquigarrow \quad \varphi_B = \omega t - k_0 z - \frac{\pi}{4} \quad (\text{II.45})$$

II.2 – Conducteur ohmique hors ARQS

II.2.i – modèle de DRÜDE

✧ Rappelons le modèle de DRÜDE.



Définition

Le *modèle de DRÜDE* est un modèle permettant de décrire l'évolution des électrons libres dans un conducteur.

✧ Dans un conducteur, il y a trois types de charges :

- les noyaux atomiques, chargés positivement, immobiles ;
- les électrons de valence et de cœur, chargés négativement, immobiles aussi ;
- les électrons libres, chargés négativement, mobiles.

✧ Quand un courant circule dans un conducteur, l'expérience montre le conducteur s'échauffe *via* l'effet JOULE.

✧ Cela montre que les électrons, responsables du courant électrique, perdent une partie de leur énergie au profit du réseau cristallin.

✧ Nous allons modéliser cette perte énergétique par une force de frottement que nous noterons

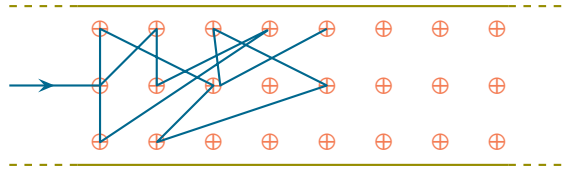
$$\vec{f} = -h \vec{v} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{f} \stackrel{\text{not}}{=} -\frac{m}{\tau} \vec{v} \quad (\text{II.46})$$

✧ τ s'interprète comme la durée entre deux interactions successives entre l'électron libre et le réseau cristallin.

**Loi**

Pour un bon conducteur, la durée entre deux interactions électron – réseau cristallin est de l'ordre de
 $\tau \sim 10^{-14}$ s

✧ N'oublions pas que l'électron va très vite (à cause de l'agitation thermique) entre deux interactions. En revanche, globalement, sur une « longue » durée, il va plutôt lentement.

**II.2.ii – mise en équation – approximation**

✧ Considérons un électron libre non relativiste et écrivons le PFD. Cela donne

$$m \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \overrightarrow{\text{poids}} + (-e) \left(\vec{E}_{\text{ext}} + \vec{v} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} \right) + \left(-\frac{m}{\tau} \vec{v} \right) \quad (\text{II.47})$$

✧ Comme l'électron est non relativiste, nous avons, pour une onde électromagnétique

$$B_{\text{ext}} \sim \frac{E_{\text{ext}}}{c} \quad \rightsquigarrow \quad \|\vec{E}_{\text{ext}}\| \gg \|\vec{v} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}\| \quad (\text{II.48})$$

✧ Nous arrivons ainsi à

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} \vec{v}(t) = -\frac{e}{m} \vec{E}(t) \quad \text{avec} \quad \vec{E}(t) = \text{Re} \left(\underline{\vec{E}}(t) \right) \quad \text{où} \quad \underline{\vec{E}}(t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i\omega t} \quad (\text{II.49})$$

II.2.iii – conductivité complexe**★ expression**

✧ Rappelons que la conductivité γ est définie par la relation

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (\text{II.50})$$

✧ La densité de courant électrique s'écrit, en notant n la densité particulière d'électron libre

$$\vec{j} = \ll n q \vec{v} \gg \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j} = -en \vec{v} \quad (\text{II.51})$$

✧ Nous allons directement rechercher cette densité de courant en notation complexe

$$\underline{\vec{j}}(t) = \underline{\vec{j}}_0 e^{i\omega t} \quad (\text{II.52})$$

✧ Passons le PFD en notation complexe

$$\frac{d\underline{\vec{v}}}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} \underline{\vec{v}}(t) = -\frac{e}{m} \underline{\vec{E}}(t) \quad (\text{II.53})$$

✧ Utilisons des notations usuelles

$$\underline{\vec{r}}(t) = \underline{\vec{r}}_0 e^{i\omega t}; \quad \underline{\vec{v}}(t) = \underline{\vec{v}}_0 e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}}(t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i\omega t}; \quad (\text{II.54})$$

✧ Nous arrivons alors à

$$\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right) \underline{\vec{v}}_0 e^{i\omega t} = -\frac{e}{m} \underline{\vec{E}}_0 e^{i\omega t} \quad (\text{II.55})$$

✧ Ce qui conduit d'abord à

$$\underline{\vec{v}}_0 = \frac{-\frac{e}{m}}{i\omega + \frac{1}{\tau}} \underline{\vec{E}}_0 \quad (\text{II.56})$$

✧ Puis à

$$\underline{\vec{J}}_0 = -ne \underline{\vec{v}}_0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{J}}_0 = \frac{ne^2}{i\omega + \frac{1}{\tau}} \underline{\vec{E}}_0 \quad (\text{II.57})$$

✧ Nous pouvons alors réécrire ce résultat sous la forme

$$\underline{\vec{J}}_0 = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau} \underline{\vec{E}}_0 \quad \text{avec} \quad \gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (\text{II.58})$$

✧ Nous voyons apparaître la conductivité complexe

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau} \quad \text{avec} \quad \gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (\text{II.59})$$

★ première interprétation

✧ Dans le cas de fréquences faibles telles que $\omega\tau \ll 1$, nous avons

$$\underline{\vec{J}}_0 = \gamma_0 \underline{\vec{E}}_0 \quad (\text{II.60})$$

✧ Nous retrouvons la loi d'OHM locale.

✧ En revanche, si $\omega\tau \gg 1$, nous avons

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{i\omega\tau} \underline{\vec{E}}_0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\gamma} = -i \frac{\gamma_0}{\omega\tau} \underline{\vec{E}}_0 \quad (\text{II.61})$$

✧ La puissance moyenne dissipée s'écrit donc

$$\mathcal{P} = \underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{E}} \quad \rightsquigarrow \quad \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{E}}^* \right) \quad \rightsquigarrow \quad \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(-i \frac{\gamma_0}{\omega\tau} E_0^2 \right) = 0 \quad (\text{II.62})$$

✧ Il n'y a pas d'effet JOULE dans le conducteur.

✧ Cela s'explique très bien en fait car si le champ change trop rapidement, l'électron n'a pas le temps de se déplacer entre deux noyaux. Il ne peut plus interagir avec le réseau, il ne perd donc plus d'énergie.



II.2.iv – lois dans le conducteur

✧ Considérons toujours une OPM comme champ extérieur.

★ conservation de la charge

✧ La conservation de la charge se traduit par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (\text{II.63})$$

✧ Avec la notation complexe, cela donne

$$\frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{\vec{J}} = 0 \quad (\text{II.64})$$

✧ Introduisons la conductivité

$$i\omega \underline{\rho} + \operatorname{div} (\underline{\gamma} \underline{\vec{E}}) = 0 \quad (\text{II.65})$$

✧ Comme le milieu est uniforme, nous pouvons « sortir » $\underline{\gamma}$ de la divergence

$$i\omega \underline{\rho} + \underline{\gamma} \operatorname{div} \underline{\vec{E}} = 0 \quad (\text{II.66})$$

✧ Puis MAXWELL – GAUSS donne

$$i\omega \underline{\rho} + \underline{\gamma} \frac{\underline{\rho}}{\underline{\epsilon}_0} = 0 \quad (\text{II.67})$$

✧ Ce qui conduit à

$$\left(i\omega + \frac{\underline{\gamma}}{\underline{\epsilon}} \right) \times \underline{\rho} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\rho} = 0 \quad (\text{II.68})$$



Loi

Dans un conducteur soumis à une onde électromagnétique, la charge volumique est nulle.

★ les équations de MAXWELL

✧ Nous allons chercher comment une OPPM peut se propager dans un conducteur. L'onde électrique s'écrit alors

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{r}})} \quad (\text{II.69})$$

✧ En fait, nous venons d'écrire la forme d'une solution pour une POPPM puisque nous autorisons les valeurs complexes pour $\underline{\vec{k}}$.

✧ Dans ces conditions, nabla s'écrit

$$\underline{\nabla} = -i \underline{\vec{k}} \quad (\text{II.70})$$

✧ Nous pouvons réécrire à présent les équations de MAXWELL.

✧ L'équation de MAXWELL – GAUSS s'écrit, compte-tenu du résultat précédent

$$\operatorname{div} \underline{\vec{E}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -i \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad (\text{II.71})$$

✧ Pas de surprise pour l'équation de MAXWELL – THOMSON

$$\operatorname{div} \underline{\vec{B}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -i \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \quad (\text{II.72})$$

⇨ Pour MAXWELL – FARADAY, cela donne

$$\vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \rightsquigarrow -i \underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}} \rightsquigarrow \underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}} \quad (\text{II.73})$$

⇨ Enfin, pour MAXWELL – AMPÈRE

$$\vec{\text{rot}} \underline{\vec{B}} = \mu_0 \left(\underline{\vec{J}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \right) \rightsquigarrow -i \underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \left(\underline{\gamma} \underline{\vec{E}} + \varepsilon_0 (i\omega) \underline{\vec{E}} \right) \quad (\text{II.74})$$

⇨ Et finalement

$$\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = i\mu_0 \left(\underline{\gamma} + \varepsilon_0 (i\omega) \right) \underline{\vec{E}} \quad (\text{II.75})$$

★ relation de dispersion

14

⇨ Rappelons que la relation de dispersion n'est autre que l'équation de « propagation » dans laquelle nous injectons une solution (en général une OPPM) pour trouver une condition nécessaire d'existence.

⇨ Or, pour trouver l'équation de « propagation » nous partons du calcul de $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}())$. Sauf qu'ici, le rotationnel est équivalent à un produit vectoriel avec $\underline{\vec{k}}$.

⇨ Calculons donc, pour changer, $\underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}})$

$$\underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}) = (\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}}) \times \underline{\vec{k}} - (\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{k}}) \times \underline{\vec{E}} \quad (\text{II.76})$$

⇨ Avec MAXWELL – GAUSS cela donne

$$\underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}) = 0 - k^2 \underline{\vec{E}} \quad (\text{II.77})$$

⇨ Reprenons le double produit vectoriel et injectons MAXWELL – FARADAY

$$\underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}) = \underline{\vec{k}} \wedge (\omega \wedge \underline{\vec{B}}) \rightsquigarrow \underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}) = \omega \times \underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} \quad (\text{II.78})$$

⇨ Et avec MAXWELL – AMPÈRE

$$\underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}) = i\omega \mu_0 \left(\underline{\gamma} + \varepsilon_0 (i\omega) \right) \underline{\vec{E}} \quad (\text{II.79})$$

⇨ En rapprochant les deux résultats, nous avons ainsi

$$-k^2 \underline{\vec{E}} = i\omega \mu_0 \left(\underline{\gamma} + \varepsilon_0 i\omega \right) \underline{\vec{E}} \quad (\text{II.80})$$

⇨ Et comme cette relation est vérifiée quelle que soit l'onde électrique envisagée

$$\underline{k}^2 = -i\omega \mu_0 \left(\underline{\gamma} + \varepsilon_0 i\omega \right) \quad (\text{II.81})$$

⇨ Réécrivons cette relation sous une autre forme en utilisant $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ et en remplaçant la conductivité complexe par son expression

$$\underline{k}^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - i\omega \mu_0 \underline{\gamma} \rightsquigarrow \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega \mu_0 \times \frac{\gamma_0}{1 + i\omega \tau} \quad (\text{II.82})$$

II.2.v – basses fréquences : effet de peau

★ simplification de la relation de dispersion

⇨ En basses-fréquences nous avons

$$\omega \tau \ll 1 \quad (\text{II.83})$$

⇨ La relation de dispersion se simplifie donc en

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega \mu_0 \gamma_0 \quad (\text{II.84})$$

⇨ Comparons les deux termes

$$\frac{\omega \mu_0 \gamma_0}{\frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0 \omega} \quad (\text{II.85})$$

⇨ Or, numériquement,

$$\gamma_0 \sim 10^7 \text{ S.m}^{-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 \sim 10^{-11} \text{ F.m}^{-1} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\omega \mu_0 \gamma_0}{\frac{\omega^2}{c^2}} \sim \frac{10^{18}}{\omega} \quad (\text{II.86})$$

⇨ Sauf que nous avons supposé les BF, ce qui implique, numériquement

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} \sim 10^{14} \text{ rad.s}^{-1} \quad (\text{II.87})$$

⇨ Nous pouvons donc en conclure que

$$\frac{\omega \mu_0 \gamma_0}{\frac{\omega^2}{c^2}} \sim \frac{10^{18}}{\omega} \gg 1 \quad (\text{II.88})$$

⇨ Ce qui permet de simplifier la relation de dispersion en

$$\underline{k}^2 = -i\omega \mu_0 \gamma_0 \quad (\text{II.89})$$

★ vecteur d'onde complexe

⇨ Pour trouver le vecteur d'onde complexe, utilisons la technique habituelle, à savoir écrire $-i$ sous sa forme exponentielle

$$\underline{k}^2 = \omega \mu_0 \gamma_0 \times e^{-i\pi/2} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{k} = \pm \sqrt{\omega \mu_0 \gamma_0} \times e^{-i\pi/4} \quad (\text{II.90})$$

⇨ Et en repassant en notation algébrique, cela donne

$$\underline{k} = \pm \sqrt{\omega \mu_0 \gamma_0} \times \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{k} \stackrel{\text{not}}{=} k_0 (1-i) \quad \text{avec} \quad k_0 = \sqrt{\frac{\omega \gamma_0 \mu_0}{2}} \quad (\text{II.91})$$

★ retrouvailles

✧ Nous retrouvons bien l'effet de peau.

✧ En effet, l'expression du champ s'écrit, en prenant $\underline{k} = k \underline{u}_z$

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \rightsquigarrow \underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - k_0(1-i)z)} \quad (\text{II.92})$$

✧ Et en séparant partie réelle et partie imaginaire de k

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \times e^{-z/\delta} \times e^{i(\omega t - k_0 z)} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{1}{k_0} = \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma_0 \mu_0}} \quad (\text{II.93})$$

✧ δ est bien l'épaisseur de peau.

☞ *Remarque.* Dans ce paragraphe, nous sommes parti d'un cas général, pour une fréquence (presque) quelconque et nous n'avons simplifié qu'après l'obtention de la relation de dispersion. Lorsque nous avons parlé de l'effet de peau juste avant, nous avons commencé par nous placer en ARQS et nous avons trouvé la solution après.

★ vitesses

✧ Reprenons l'expression du vecteur d'onde complexe

$$\underline{k} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \gamma_0}{2}} (1 - i) \rightsquigarrow \underline{k} = k'(\omega) + i k''(\omega) \quad (\text{II.94})$$

🕒 vitesse de phase

✧ Par définition, nous avons

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} \quad (\text{II.95})$$

✧ Cela donne tout de suite

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}} \quad (\text{II.96})$$

✧ Le fait que la vitesse de phase dépende de la pulsation montre qu'il y a de la dispersion.

🕒 vitesse de groupe

✧ La vitesse de groupe s'écrit, quant à elle

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} \quad (\text{II.97})$$

✧ Reste à calculer

$$v_g = \frac{1}{\frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0}{2\omega}}} \rightsquigarrow v_g = 2 \times \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}} = 2 v_\varphi \quad (\text{II.98})$$

✧ Nous pouvons constater que la vitesse de groupe n'est pas du tout égale à la vitesse de phase.

II.2.vi – haute fréquence : réflexion, transparence

★ simplifier la relation de dispersion

⇨ Reprenons la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu_0 \times \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau} \quad (\text{II.99})$$

⇨ Simplifions dans le cas des hautes fréquences, du moins pour les fréquences telles que $\omega\tau \gg 1$. Cela donne

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu_0 \times \frac{\gamma_0}{i\omega\tau} \rightsquigarrow \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0\gamma_0}{\tau} \quad (\text{II.100})$$

⇨ Utilisons l'expression que nous avons obtenue pour γ_0

$$\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \rightsquigarrow \underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \frac{\mu_0 ne^2 c^2}{m}}{c^2} \rightsquigarrow \underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \frac{ne^2}{m\epsilon_0}}{c^2} \quad (\text{II.101})$$

⇨ Nous voyons que la durée τ disparaît du résultat.

⇨ Ce n'est pas très étonnant quand nous pensons à l'approximation que nous venons de faire : la fréquence est si élevée que les électrons n'ont plus le temps d'interagir avec le réseau cristallin.

⇨ Réécrivons la relation de dispersion sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \quad (\text{II.102})$$

⇨ ω_p est appelée la pulsation plasmon (ou pulsation plasma).

⇨ Numériquement

$$\omega_p^2 \sim \frac{10^{29} \times 10^{-38}}{10^{-30} \times 10^{-11}} \sim 10^{32} \rightsquigarrow \omega_p \sim 10^{16} \text{ rad.s}^{-1} \quad (\text{II.103})$$

★ premier cas : $\omega > \omega_p \gg 1/\tau$

⇨ Dans ces conditions, nous avons

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} > 0 \quad (\text{II.104})$$

⇨ Le vecteur d'onde est réel et nous avons

$$\underline{k} = k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} \quad (\text{II.105})$$

⇨ Nous voyons alors que :

- il n'y a pas d'atténuation (car le vecteur d'onde est réel) ;
- il va y avoir de la dispersion (car k n'est pas proportionnel à ω).

⇨ Dans ces conditions, l'onde électromagnétique *traverse* le conducteur *sans* s'atténuer : le milieu est parfaitement transparent.

★ **deuxième cas** : $\omega_p > \omega \gg 1/\tau$

✧ Dans ce cas, la relation de dispersion s'écrit

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < 0 \quad (\text{II.106})$$

✧ Le vecteur d'onde est donc imaginaire pur et nous avons

$$\underline{k} = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} \stackrel{\text{not}}{=} \epsilon i k_0 \quad \text{avec} \quad \epsilon = \pm 1 \quad (\text{II.107})$$

✧ Le fait qu'il n'y ait pas de partie réelle montre qu'il n'y a **pas** de propagation.

✧ En revanche, il y a de l'atténuation car $\Im(\underline{k}) \neq 0$.

🕒 **une « onde » non propagative**

✧ Pour une OPPM polarisée rectilignement sur \vec{u}_x , cela donne

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \times e^{i(\omega t - i\epsilon k_0 z)} \times \vec{u}_x \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} = \vec{E}_0 \times e^{\epsilon k_0 z} \times e^{i\omega t} \times \vec{u}_x \quad (\text{II.108})$$

✧ Et en notation réelle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \times e^{\epsilon k_0 z} \times \cos(\omega t) \times \vec{u}_x \quad (\text{II.109})$$

✧ Nous pouvons effectivement constater que le résultat n'est pas une onde propagative car elle ne s'écrit pas sous la forme $\omega t - k_0 z$.

✧ « L'onde » ainsi obtenue est appelée *onde évanescente*.

🕒 **interprétation énergétique**

✧ Le vecteur de POYNTING vaut, en moyenne,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) \quad (\text{II.110})$$

✧ Or, avec la relation de structure, nous avons

$$\vec{E} \wedge \vec{B}^* = \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{k}^* \wedge \vec{E}^*}{\omega} \right) \quad (\text{II.111})$$

✧ En développant le double produit vectoriel et en utilisant la relation de structure

$$\vec{E} \wedge \vec{B}^* = \frac{E^2}{\omega} \vec{k}^* - 0 \quad (\text{II.112})$$

✧ Et ainsi

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{E^2}{\omega \mu_0} \vec{k}^* \right) \quad (\text{II.113})$$

✧ Sauf que le vecteur d'onde est imaginaire pur, ce qui implique

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0} \quad (\text{II.114})$$

- ✧ Autrement dit, il y a atténuation, mais *sans* absorption puisqu'aucune puissance n'est transportée par le vecteur de POYNTING.
- ✧ La question est : « Où part l'énergie ? »
- ✧ Si de l'énergie arrive mais qu'elle n'est pas conservée par le milieu, c'est qu'elle repart.
- ✧ Autrement dit, nous avons affaire ici à un phénomène de *réflexion*.
- ✧ Nous venons tout simplement de montrer que les métaux réfléchissent les ondes électromagnétique de hautes-fréquences.
- ✧ C'est exactement comme ça que fonctionnent les miroirs métalliques.

II-3 – Onde dans un plasma

II-3.i – modèle

12

★ par exemple l'ionosphère

- ✧ L'ionosphère est la dernière couche de l'atmosphère, si tant est que nous puissions encore l'appeler atmosphère.
- ✧ Située à plus de 100 km d'altitude, la pression n'y est plus que de 2 Pa.
- ✧ Dans ces conditions, les molécules de diazote ou de dioxygène sont facilement dissociées par le rayonnement solaire.
- ✧ Une fois dissociés, un rayonnement supplémentaire et les atomes se séparent d'un de leur électron.
- ✧ La faible densité particulaire, ajoutée à la charge globalement neutre du milieu fait que les recombinaisons ion – électrons sont suffisamment rares pour que, en moyenne, il existe une population non négligeables d'ions (cations) et d'électrons.

★ modèle technique

- ✧ Nous allons considérer un milieu globalement neutre possédant une densité n_0^* d'ion chargés positivement et une densité n^* d'électrons.
- ✧ Si les ions n'ont qu'une charge positive, alors $n_0^* = n^*$, ce que nous supposons par la suite.
- ✧ De plus comme les ions sont bien plus massif que les électrons, nous allons supposer que seuls ces derniers ont une inertie suffisamment faible pour réagir au passage d'une onde électromagnétique.
- ✧ Enfin, comme le milieu est peu dense, nous supposons que les électrons ne perdent pas d'énergie par interaction avec les ions. Autrement dit, il n'y a pas, ici, de « force de frottement ».
- ✧ Nous supposons, aussi, que les électrons ne sont pas relativistes.
- ✧ Le but est de chercher dans quelles conditions une onde électromagnétique peut se propager.

II-3.ii – mise en équation

★ loi de comportement du milieu

- ✧ Écrivons le PFD pour un électron en négligeant le poids de celui-ci

$$m \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = (-e) \times \vec{E}_{\text{ext}} + (-e) \times \vec{v} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} \quad (\text{II.115})$$

- ✧ Comme l'électron est non relativiste **et** que le champ extérieur est une onde électromagnétique pour laquelle $B_{\text{ext}} \sim \frac{E_{\text{ext}}}{c}$, il nous reste

$$m \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = (-e) \times \vec{E}_{\text{ext}} + \overrightarrow{\text{néglig}} \quad (\text{II.116})$$

⇨ En passant en notation complexe, cela donne

$$m(i\omega) \underline{\vec{v}}(t) = (-e) \times \underline{\vec{E}}_{\text{ext}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{v}}(t) = \frac{ie}{m\omega} \times \underline{\vec{E}}_{\text{ext}} \quad (\text{II.117})$$

★ réécrire l'équation de MAXWELL – AMPÈRE

⇨ Nous avons, parce que seuls les électrons bougent,

$$\underline{\vec{J}} = n^* (-e) \underline{\vec{v}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{J}} = -\frac{n^* e^2 i}{m\omega} \times \underline{\vec{E}}_{\text{ext}} \quad (\text{II.118})$$

⇨ Et, ainsi, l'équation de MAXWELL – AMPÈRE s'écrit, en notation complexe

$$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{B}} = \mu_0 \left(\underline{\vec{J}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \right) \quad (\text{II.119})$$

⇨ Ce qui donne

$$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{B}} = \mu_0 \left(-\frac{n^* e^2}{m\omega} \times \underline{\vec{E}} + \varepsilon_0 i\omega \underline{\vec{E}} \right) \quad (\text{II.120})$$

⇨ Ou encore

$$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 i\omega \left(-\frac{n^* e^2}{m\varepsilon_0 \omega^2} + 1 \right) \times \underline{\vec{E}} \quad (\text{II.121})$$

⇨ Soit, en notation complexe

$$\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega \left(-\frac{n^* e^2}{m\varepsilon_0 \omega^2} + 1 \right) \times \underline{\vec{E}} \quad (\text{II.122})$$

II-3-iii – analogie avec le conducteur hors ARQS

★ relation de dispersion

⇨ Utilisons la notation complexe et calculons

$$\underline{\vec{k}} \wedge \left(\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} \right) = \left(\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} \right) \underline{\vec{k}} - \left(\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{k}} \right) \underline{\vec{E}} \quad (\text{II.123})$$

⇨ Compte-tenu du fait que le plasma est globalement neutre cela donne, avec l'équation de MAXWELL – GAUSS,

$$\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{k}} \wedge \left(\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} \right) = 0 - \underline{\vec{k}}^2 \underline{\vec{E}} \quad (\text{II.124})$$

⇨ Reprenons le double produit vectoriel et injectons MAXWELL – FARADAY

$$\underline{\vec{k}} \wedge \left(\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} \right) = \underline{\vec{k}} \wedge \left(\omega \underline{\vec{B}} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{k}} \wedge \left(\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} \right) = \omega \times \underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} \quad (\text{II.125})$$

⇨ Et avec MAXWELL – AMPÈRE trouvée au-dessus

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \left(-\frac{n^* e^2}{m \varepsilon_0 \omega^2} + 1 \right) \times \vec{E} \quad (\text{II.126})$$

⇨ En rapprochant les deux résultats, nous avons ainsi

$$-k^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \left(-\frac{n^* e^2}{m \varepsilon_0 \omega^2} + 1 \right) \times \vec{E} \quad (\text{II.127})$$

⇨ Et comme cette relation est vérifiée quelle que soit l'onde électrique envisagée

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \left(-\frac{n^* e^2}{m \varepsilon_0 \omega^2} + 1 \right) \quad (\text{II.128})$$

⇨ Introduisons la pulsation plasma³

$$\omega_p^2 = \frac{n^* e^2}{m \varepsilon_0} \quad (\text{II.129})$$

⇨ Maintenant récrivons cette relation sous une autre forme en utilisant $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad (\text{II.130})$$

★ des résultats identiques, cela s'explique

⇨ Nous retrouvons là, ni plus ni moins que la relation de dispersion trouvée en II.102.

⇨ Nous aurons donc des résultats identiques :

13

- pour des pulsation $\omega < \omega_p$, le vecteur d'onde est complexe, il n'y a pas de propagation, il n'y a qu'une onde évanescence et toute l'énergie se réfléchit sur le plasma ;
- pour des pulsation $\omega > \omega_p$, le vecteur d'onde est réel, il y a propagation sans atténuation mais avec dispersion.

⇨ Les raisons d'une telle coïncidence sont simples, c'est parce que, physiquement, il s'y déroule la même chose.

⇨ Dans le cas du plasma, nous avons des électrons soumis à une onde électromagnétique et qui ne perdent pas d'énergie parce qu'ils sont suffisamment éloignés des ions.

⇨ Dans le cas du conducteur, nous avons des électrons soumis à une onde électromagnétique et qui ne perdent pas d'énergie parce que l'onde, de fréquence très élevée, ne leur en laisse pas le temps.

20

II.4 – Réflexion et transmission en incidence normale

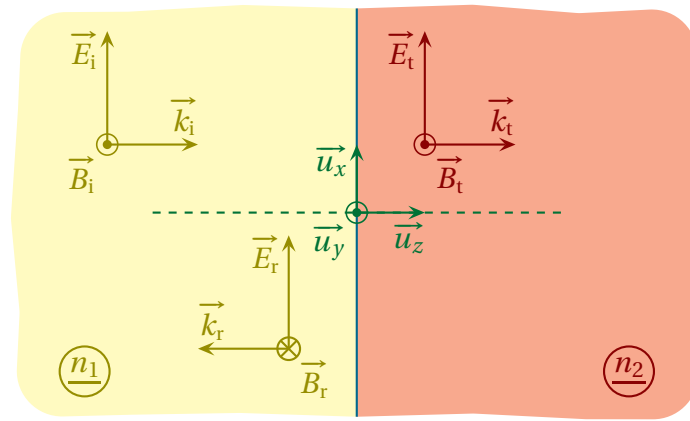
II.4.i – entre deux milieux d'indices différents

★ situation, solution *a priori*

⇨ Regardons le cas particulier de l'incidence normale.

⇨ Imaginons une onde électromagnétique qui arrive sur une interface entre deux milieux d'indices *a priori* complexes n_1 et n_2 . Cela engendre à la fois une onde réfléchi et une onde transmise.

3. Quelle coïncidence!



- ✧ Considérons une onde électromagnétique polarisée rectilignement.
- ✧ Le caractère « onde polarisée rectilignement » ne restreint pas la généralité de l'étude qui suit *dans le cas d'une incidence normale*. En effet :
 - ➔ l'invariance par rotation du problème autour de l'axe normal à l'interface nous assure que les coefficients que nous trouverons seront les mêmes quelle que soit la polarisation ;
 - ➔ le caractère linéaire des phénomènes nous permet de considérer chaque composante séparément.
- ✧ Dans ces conditions, avec le repérage choisi, l'onde électrique incidente s'écrit

$$\underline{\vec{E}}_i = \underline{E}_{0i} e^{j(\omega t - \underline{k}_1 z)} \underline{\vec{u}}_x \tag{II.131}$$

- ✧ Comme il s'agit d'une OPPM, nous pouvons utiliser la relation de structure et ainsi

$$\underline{\vec{B}}_i = \frac{(+\underline{k}_1 \underline{\vec{u}}_z) \wedge \underline{\vec{E}}_i}{\omega} \rightsquigarrow \underline{\vec{B}}_i = \frac{E_{0i} k_1}{\omega} e^{j(\omega t - \underline{k}_1 z)} \underline{\vec{u}}_y \tag{II.132}$$

- ✧ De même, sans oublier que $\underline{\vec{k}}_r = -\underline{k}_1 \underline{\vec{u}}_z$

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{E}_{0r} e^{j(\omega t + \underline{k}_1 z)} \underline{\vec{u}}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_r = -\frac{E_{0r} k_1}{\omega} e^{j(\omega t + \underline{k}_1 z)} \underline{\vec{u}}_y \tag{II.133}$$

- ✧ Et pour l'onde transmise

$$\underline{\vec{E}}_t = \underline{E}_{0t} e^{j(\omega t - \underline{k}_2 z)} \underline{\vec{u}}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_t = \frac{E_{0t} k_2}{\omega} e^{j(\omega t - \underline{k}_2 z)} \underline{\vec{u}}_y \tag{II.134}$$

★ **traduction des conditions aux limites**

- ✧ Nous avons déjà traduit le fait que le milieu ② s'étendait à l'infini en ne faisant pas intervenir d'onde retour dans le milieu ②.
- ✧ Reste l'interface...
- ✧ Nous avons affaire à trois ondes, dont deux sont considérées comme inconnues (l'onde incidente est censée être quelconque).
- ✧ Il nous faut donc *deux* conditions aux limites. Nous admettrons que

17

Loi

À l'interface de deux milieux, le champ électromagnétique est continu.

- ✧ La continuité de la composante sur $\underline{\vec{u}}_x$ du champ électrique impose

$$E_1(0^-) = E_2(0^+) \rightsquigarrow \underline{E}_{i0} + \underline{E}_{r0} = \underline{E}_{0t} \tag{II.135}$$

⇨ De même, la continuité du champ magnétique sur \vec{u}_y donne

$$\frac{E_{i0} k_1}{\omega} - \frac{E_{r0} k_1}{\omega} = \frac{E_{0t} k_2}{\omega} \quad \text{et} \quad k = \frac{n\omega}{c} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{n_1 E_{i0}} - \underline{n_1 E_{r0}} = \underline{n_2 E_{0t}} \quad (\text{II.136})$$

★ coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique

⇨ Les deux conditions aux limites donnent

$$-E_{r0} + E_{0t} = E_{i0} \quad \text{et} \quad \underline{n_1 E_{r0}} + \underline{n_2 E_{0t}} = \underline{n_1 E_{i0}} \quad (\text{II.137})$$

⇨ Il s'agit là d'un système de deux équations à deux inconnues dont les solutions sont

$$\underline{E_{r0}} = \frac{\underline{n_1} - \underline{n_2}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \times \underline{E_{i0}} \quad \text{et} \quad \underline{E_{0t}} = \frac{2 \underline{n_1}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \times \underline{E_{i0}} \quad (\text{II.138})$$

⇨ Ce qui conduit aux coefficients de réflexion et de transmission en amplitude électrique

$$\underline{r_E} = \frac{\underline{n_1} - \underline{n_2}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \quad \text{et} \quad \underline{t_E} = \frac{2 \underline{n_1}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \quad (\text{II.139})$$

★ coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le champ magnétique

⇨ Nous avons, par définition du coefficient de réflexion en amplitude pour \vec{B}

$$\underline{r_B} = \frac{\underline{B_{r0}}}{\underline{B_{i0}}} \quad (\text{II.140})$$

⇨ Avec le lien qui existe entre champs électrique et magnétique, nous obtenons successivement

$$\underline{B_{r0}} = -\frac{k_1}{\omega} \underline{E_{r0}} \quad \text{et} \quad \underline{B_{i0}} = +\frac{k_1}{\omega} \underline{E_{i0}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{r_B} = -\frac{\underline{E_{r0}}}{\underline{E_{i0}}} = -\underline{r_E} = \frac{\underline{n_2} - \underline{n_1}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \quad (\text{II.141})$$

⇨ De même, pour le coefficient de transmission en amplitude pour \vec{B}

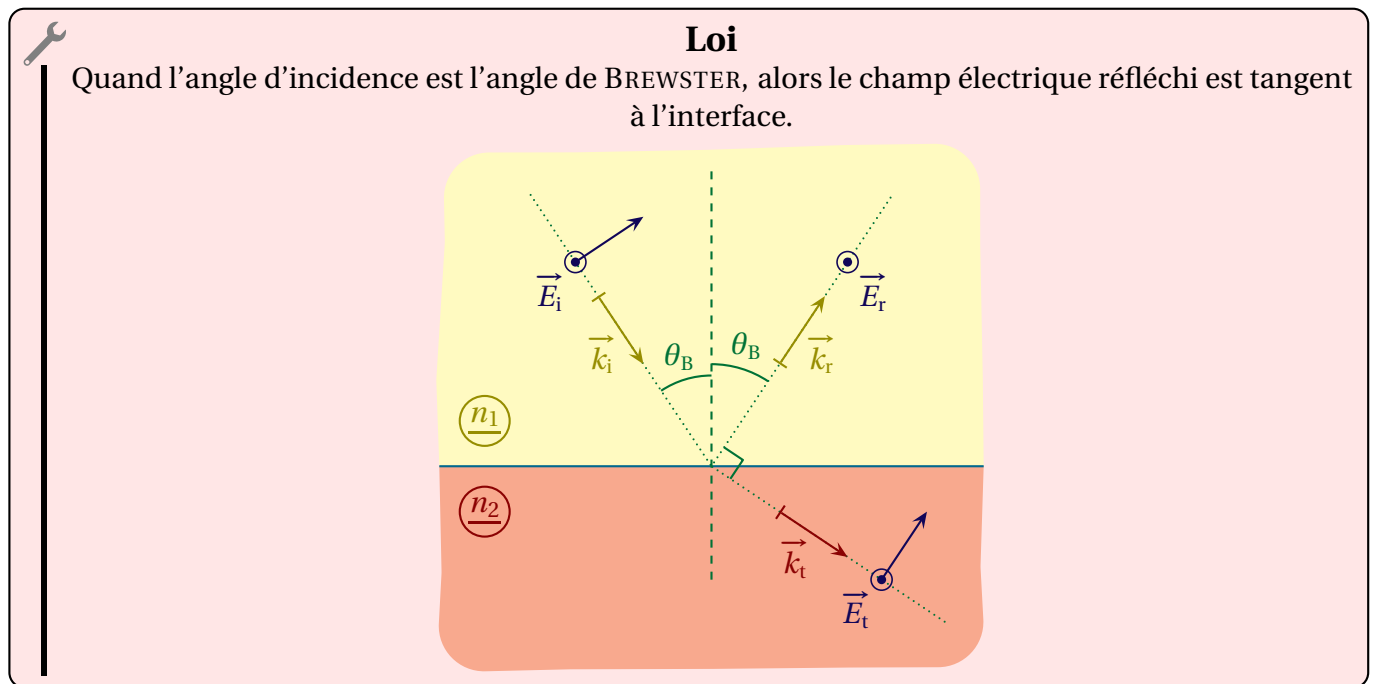
$$\underline{t_B} = \frac{\underline{B_{0t}}}{\underline{B_{i0}}} \quad \text{et} \quad \underline{B_{0t}} = +\frac{k_2}{\omega} \underline{E_{0t}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{t_B} = \frac{k_2 \underline{E_{0t}}}{k_1 \underline{E_{i0}}} = \frac{\underline{n_2}}{\underline{n_1}} \underline{t_E} = \frac{2 \underline{n_2}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \quad (\text{II.142})$$

★ remarques

- ⇨ Ici nous avons fait les calculs avec des indices n complexes.
- ⇨ Ce sont les mêmes raisonnements (et les mêmes calculs) pour des milieux avec des indices réels.
- ⇨ En revanche, si l'incidence n'est plus normale, les raisonnements sont identiques mais les calculs sont plus lourds car il faut tenir compte des deux composantes de l'onde.
- ⇨ En particulier l'angle d'incidence influence les coefficients de réflexion et de transmission.
- ⇨ Si l'expression générale de ces coefficients n'est pas à connaître, un résultat l'est.

Définition

L'angle de BREWSTER est l'angle d'incidence tel que le vecteur d'onde réfléchi et le vecteur d'onde transmis sont orthogonaux.



★ **coefficients de réflexion et transmission en puissance**

🕒 **expression du vecteur de POYNTING**

✧ Nous avons, par définition,

$$\vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} \quad (\text{II.143})$$

✧ Cela donne donc

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i^*}{\mu_0} \right) \quad (\text{II.144})$$

✧ Ce qui conduit, pour un vecteur d'onde complexe,

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{E_{i0}^2}{\omega} \text{Re} \left(\vec{k}_i \right) \quad (\text{II.145})$$

✧ Soit, avec l'indice complexe, en notant \vec{k}_0 le vecteur d'onde dans le vide,

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{E_{i0}^2}{\omega} \vec{k}_0 \times \text{Re}(\underline{n}_1) \quad (\text{II.146})$$

✧ De même, nous obtenons rapidement

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{1}{2\mu_0} \times \frac{E_{r0}^2}{\omega} \vec{k}_0 \times \text{Re}(\underline{n}_1) \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{E_{t0}^2}{\omega} \vec{k}_0 \times \text{Re}(\underline{n}_2) \quad (\text{II.147})$$

🕒 **les coefficients**

✧ Définissons le coefficient de réflexion R en puissance par

$$R = \frac{\left\| \langle \vec{\Pi}_r \rangle \right\|}{\left\| \langle \vec{\Pi}_i \rangle \right\|} \quad (\text{II.148})$$

✧ Nous obtenons donc

$$R = \frac{E_{r0}^2}{E_{i0}^2} = |r_E|^2 = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2 \quad (\text{II.149})$$

✧ De même, définissons le coefficient de transmission en puissance par

$$T = \frac{\left\| \langle \vec{\Pi}_t \rangle \right\|}{\left\| \langle \vec{\Pi}_i \rangle \right\|} \quad (\text{II.150})$$

✧ Et nous trouvons

$$T = \frac{\Re(\underline{n}_2) E_{t0}^2}{\Re(\underline{n}_1) E_{i0}^2} = \frac{\Re(\underline{n}_2)}{\Re(\underline{n}_1)} \times |t_E|^2 = \frac{\Re(\underline{n}_2)}{\Re(\underline{n}_1)} \times \frac{4 |\underline{n}_1|^2}{|\underline{n}_1 + \underline{n}_2|^2} \quad (\text{II.151})$$

II.4.ii – interface vide – plasma

18

✧ Dans ce cas, nous avons

$$\underline{n}_1 = 1 \quad \text{et} \quad \underline{n}_2 = \underline{n}_{\text{plasma}} \quad (\text{II.152})$$

★ zone de transparence, $\omega > \omega_p$

✧ Nous avons alors montré (cf. II.105) que le vecteur d'onde était réel, ce qui implique le que l'indice n l'est aussi.

✧ Les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique s'écrit alors

$$r_E = \frac{1 - n}{1 + n} \quad \text{et} \quad t_E = \frac{2}{1 + n} \quad (\text{II.153})$$

✧ Pour le coefficient de réflexion en puissance, cela donne,

$$R = |r_E|^2 = \left(\frac{1 - n}{1 + n} \right)^2 \quad (\text{II.154})$$

✧ Et pour le coefficient de transmission en puissance

$$T = \frac{\Re(\underline{n}_2)}{\Re(\underline{n}_1)} \times |t_E|^2 = \frac{n}{1} \times \frac{4}{(1 + n)^2} \quad (\text{II.155})$$

✧ Le lecteur vérifiera aisément que la loi de conservation de l'énergie est vérifiée

$$R + T = 1 \quad (\text{II.156})$$

★ **onde évanescente**, $\omega < \omega_p$

21

- ✧ Nous avons alors montré (cf. II.107) que le vecteur d'onde était imaginaire pur, ce qui implique que l'indice $\underline{n} = i n''$ l'est aussi.
- ✧ Les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique s'écrivent alors

$$r_E = \frac{1 - i n''}{1 + i n''} \quad \text{et} \quad t_E = \frac{2}{1 + i n''} \quad (\text{II.157})$$

- ✧ Pour le coefficient de réflexion en puissance, cela donne,

$$R = |\underline{r}_E|^2 = \left(\frac{1 - i n''}{1 + i n''} \right)^2 = 1 \quad (\text{II.158})$$

- ✧ Et pour le coefficient de transmission en puissance

$$T = \frac{\text{Re}(\underline{n}_2)}{\text{Re}(\underline{n}_1)} \times |\underline{t}_E|^2 = \frac{0}{1} \times \frac{4}{|1 + i n''|^2} = 0 \quad (\text{II.159})$$

- ✧ Nous pouvons constater que ce coefficient est nul *parce que* l'indice complexe dans le milieu est imaginaire pur.
- ✧ La loi de conservation de l'énergie est trivialement vérifiée

$$R + T = 1 \quad (\text{II.160})$$

II.4.iii – interface vide – conducteur

19

★ **dans l'ARQS**

- ✧ Nous avons montré (cf. II.27) que, dans l'ARQS, le vecteur d'onde s'écrivait

$$\underline{k} = k_0 (1 - i) = \frac{1 - i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \quad (\text{II.161})$$

- ✧ La condition trouvée en II.88 validant l'ARQS se réécrit

$$\frac{\omega}{c} \ll \frac{1}{\delta} \quad \rightsquigarrow \quad \varepsilon \stackrel{\text{not}}{=} \frac{2\pi\delta}{\lambda} \ll 1 \quad (\text{II.162})$$

- ✧ Cela implique que l'indice complexe s'écrit

$$\underline{n} = \underline{k} \times \frac{c}{\omega} = \frac{(1 - i)c}{\omega\delta} = \frac{1 - i}{\varepsilon} \quad (\text{II.163})$$

- ✧ Ainsi, en remplaçant dans l'expression du coefficient de réflexion de l'amplitude du champ électrique

$$\underline{r}_E = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} = -\frac{1 - j - \varepsilon}{1 - j + \varepsilon} \quad (\text{II.164})$$

- ✧ Et pour le coefficient de transmission

$$\underline{t}_E = \frac{2}{1 + \underline{n}} = \frac{2\varepsilon}{1 - i + \varepsilon} \quad (\text{II.165})$$

- ✧ Lorsque l'épaisseur de peau δ tend vers 0 (conducteur « parfait »), alors

$$\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{r}_E \longrightarrow 1 \quad \text{et} \quad \underline{t}_E \longrightarrow 0 \quad (\text{II.166})$$

- ✧ Nous retrouvons là le fait que le champ électrique (et donc magnétique) est nul dans le cas d'un conducteur parfait.

★ hors ARQS

⇨ Hors ARQS, nous avons montré (cf. II.3.iii) que nous retrouvons le cas du plasma.

II.4.iv – interface entre deux milieux transparents

⇨ Prenons le cas où les deux milieux ont des indices réels (milieux transparents usuels comme l'air, le verre, l'eau...).

⇨ Rappelons l'expression du coefficient de réflexion pour le champ électrique

$$r_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (\text{II.167})$$

★ exemple numérique

⇨ Prenons

$$n_{\text{air}} = 1 \quad \text{et} \quad n_{\text{verre}} = 1,5 \quad (\text{II.168})$$

⇨ Nous trouvons alors

$$R = 0,04 \quad \text{et} \quad T = 0,96 \quad (\text{II.169})$$

⇨ Cela signifie que, dans la vie de tous les jours, 4 % (environ) de la lumière est réfléchi par la simple interface air – verre.

★ invisibilité

⇨ Si $n_1 = n_2$ il n'y a pas de réflexion **même avec deux milieux matériels différents**.

⇨ En plongeant ainsi une bouteille de verre remplie de glycérine, d'indice très proche, dans de la glycérine celle-ci disparaît presque⁴.



★ déphasage

⇨ Nous constatons aussi que suivant le signe de $n_1 - n_2$, le coefficient de réflexion en amplitude du champ électrique peut être positif ou négatif :

- $r_E > 0$ pour $n_1 > n_2$, i.e. E_{r0} et E_{i0} sont *phase*;
- $r_E < 0$ pour $n_1 < n_2$, i.e. E_{r0} et E_{i0} sont *en opposition de phase*.

4. Il s'agit d'une expérience facile à réaliser à la maison car la glycérine est un produit en vente libre. L'image est issue d'un film amateur dont le lien est :

<http://tapas.palats.com/video/1976/comment-rendre-bouteille-invisible.html>

- ✧ C'est la raison pour laquelle, en optique ondulatoire, lorsqu'il y avait une réflexion vitreuse, *i.e.* une réflexion telle que $n_2 > n_1$, il fallait rajouter un déphasage de π .
- ✧ Rappelons que, comme c'est le champ E qui interagit avec la matière dans le cas des ondes électromagnétiques, c'est lui dont la phase est importante.

Compétences du chapitre

Les compétences à vocation essentiellement expérimentale sont indiquées en italique.

Première année

Signaux physiques

✧ Polarisation rectiligne de la lumière. Loi de MALUS.

- 1 Reconnaître et produire une onde lumineuse polarisée rectilignement.
- 2 Mettre en oeuvre une démarche expérimentale autour de la loi de MALUS.

Deuxième année

Physique des ondes

★ 1.3. Ondes électromagnétiques dans le vide

✧ Équations de propagation de \vec{E} et \vec{B} dans une région sans charge ni courant.

- 3 Établir et citer les équations de propagation. [6,7]

✧ Structure d'une onde plane progressive harmonique.

- 4 Établir et décrire la structure d'une OPPH. [11]
- 5 Utiliser le principe de superposition d'OPPH. [13]

✧ Aspects énergétiques.

- 6 Relier la direction du vecteur de POYNTING et la direction de propagation de l'onde. [25]
- 7 Relier le flux du vecteur de POYNTING à un flux de photons en utilisant la relation d'EINSTEIN – PLANCK. [26]
- 8 Citer quelques ordres de grandeur de flux énergétiques surfaciques moyens (laser hélium-néon, flux solaire, téléphonie, etc...) et les relier aux ordres de grandeur des champs électriques associés. [26]

✧ Polarisation des ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques : polarisation elliptique, circulaire et rectiligne.

- 9 Relier l'expression du champ électrique à l'état de polarisation d'une onde. [15,16,16]

✧ Analyse d'une lumière totalement polarisée. Utiliser une lame quart d'onde ou demi-onde pour modifier ou analyser un état de polarisation, avec de la lumière totalement polarisée.

- 10 Reconnaître une lumière non polarisée.
- 11 Distinguer une lumière non polarisée d'une lumière totalement polarisée.

★ 2.1 Ondes électromagnétiques dans les plasmas et dans les métaux

✧ Interaction entre une onde plane progressive harmonique et un plasma localement neutre sans collisions. Conductivité imaginaire pure. Interprétation énergétique.

- 12 Décrire le modèle. Construire une conductivité complexe en justifiant les approximations. [46]
- 13 Associer le caractère imaginaire pur de la conductivité complexe à l'absence de puissance échangée en moyenne temporelle entre le champ et les porteurs de charges. [39,45,45,48]

- ✧ Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu localement neutre possédant une conductivité complexe : relation de dispersion, indice complexe. Dispersion, absorption.
 - 14 Établir une relation de dispersion pour des ondes planes progressives harmoniques. Associer les parties réelle et imaginaire de k aux phénomènes de dispersion et d'absorption. [41,44,45]
- ✧ Cas particulier d'une propagation unidirectionnelle dans un plasma sans collisions : onde évanescente dans le domaine réactif ($\omega < \omega_p$) ; absence de propagation de l'énergie en moyenne temporelle.
 - 15 Reconnaître une onde évanescente (onde stationnaire atténuée). [45]
- ✧ Cas particulier d'un conducteur ohmique de conductivité réelle : effet de peau.
 - 16 Repérer une analogie formelle avec les phénomènes de diffusion. Connaître l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à 50Hz. [30,34]

★ 3. Interfaces entre deux milieux

- ✧ Réflexion d'une onde plane progressive harmonique entre deux demi-espaces d'indices complexes n_1 et n_2 sous incidence normale : coefficients de réflexion et de transmission du champ électrique. Cas d'une interface vide-plasma. Coefficients de réflexion et de transmission en puissance.
 - 17 Exploiter la continuité (admise) du champ électromagnétique dans cette configuration pour obtenir l'expression du coefficient de réflexion en fonction des indices complexes. [49]
 - 18 Distinguer les comportements dans le domaine de transparence et dans le domaine réactif du plasma. [52]
- ✧ Cas d'une interface vide-conducteur ohmique de conductivité réelle constante.
 - 19 Établir les expressions des coefficients de réflexion et transmission du champ pour un métal réel. Passer à la limite d'une épaisseur de peau nulle. [53]
- ✧ Cas d'une interface vide-conducteur ohmique dans le domaine optique visible.
 - 20 Identifier le comportement du métal dans ce domaine, avec celui d'un plasma localement neutre peu dense en-dessous de sa pulsation de plasma. [48,54]
 - 21 Associer la forme du coefficient complexe de réflexion à l'absence de propagation d'énergie dans le métal en moyenne temporelle. [53]
- ✧ Polarisation par réflexion vitreuse sous incidence oblique.
 - 22 Identifier l'incidence de BREWSTER et utiliser cette configuration pour repérer la direction absolue d'un polariseur.