

# Mécanique

## Chapitre 1

### **Mécanique du point... et un peu plus**

# Table des matières

<b>Biographies succinctes</b>	<b>6</b>
<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>I Cinématique</b>	<b>9</b>
I-1 Différentes coordonnées . . . . .	9
I-1·i cartésiennes . . . . .	9
présentation . . . . .	9
interprétation . . . . .	9
déplacement élémentaire . . . . .	10
I-1·ii cylindro-polaires . . . . .	11
présentation . . . . .	11
interprétation . . . . .	12
déplacement élémentaire . . . . .	13
I-1·iii sphériques . . . . .	14
présentation . . . . .	14
déplacement élémentaire . . . . .	15
interprétation . . . . .	16
I-2 Les systèmes étudiés . . . . .	16
I-2·i le point matériel . . . . .	16
définition . . . . .	16
intérêt . . . . .	17
cinétique . . . . .	17
I-2·ii un ensemble de points matériels . . . . .	17
grandeurs . . . . .	18
intérêt . . . . .	18
cinétique . . . . .	18
I-2·iii un solide . . . . .	19
définition . . . . .	19
intérêt . . . . .	19
cinétique . . . . .	20
moment d'inertie . . . . .	21
I-3 Mouvements particuliers . . . . .	22
I-3·i oscillations sinusoïdales . . . . .	22
I-3·ii mouvement uniformément accéléré . . . . .	22
I-3·iii mouvement circulaire . . . . .	23
<b>II Dynamique</b>	<b>24</b>
II-1 Les actions . . . . .	24
II-1·i Les quatre interactions fondamentales . . . . .	24
II-1·ii Forces à distance . . . . .	24
gravitation . . . . .	24
poids . . . . .	25
force électromagnétique . . . . .	26
force de LAPLACE . . . . .	27
II-1·iii Forces de contact connues <i>a priori</i> . . . . .	27
force exercée par un ressort . . . . .	27
force pressante . . . . .	28

	force de frottement fluide . . . . .	28
II.1.iv	Forces de contact inconnues <i>a priori</i> : les liaisons . . . . .	29
	force exercée par un support solide . . . . .	29
	fils et poulies idéaux . . . . .	30
II.2	Lois de NEWTON . . . . .	31
II.2.i	1 <sup>re</sup> loi, ou principe d'inertie . . . . .	31
	énoncé . . . . .	31
	utilisation . . . . .	31
II.2.ii	2 <sup>e</sup> loi, ou principe fondamental de la dynamique . . . . .	31
	énoncé . . . . .	31
	utilisation . . . . .	32
II.2.iii	3 <sup>e</sup> loi, ou principe des actions réciproques . . . . .	32
	énoncé . . . . .	32
	intérêt . . . . .	32
II.3	Théorème du moment cinétique . . . . .	33
II.3.i	quand ? pourquoi ? . . . . .	33
II.3.ii	énoncés . . . . .	33
	version vectorielle . . . . .	33
	version scalaire . . . . .	33
II.3.iii	Actions d'axe . . . . .	34
	support . . . . .	34
	couple . . . . .	35
II.4	Approche énergétique . . . . .	37
II.4.i	Énergie cinétique . . . . .	37
	les deux versions . . . . .	37
	système déformable . . . . .	38
	quelle version ? quand ? . . . . .	38
	calculer le travail fourni par une force . . . . .	38
	aspect énergétique pour la rotation . . . . .	39
	travail des interactions intérieures . . . . .	40
II.4.ii	Énergie potentielle . . . . .	41
	force conservative . . . . .	41
	le gradient . . . . .	42
	énergie potentielle et équilibre . . . . .	43
	interaction conservative . . . . .	44
	cas du ressort . . . . .	44
II.4.iii	Énergie mécanique . . . . .	44
	énoncés . . . . .	45
	intérêt . . . . .	45
<b>III</b>	<b>Exemples</b> . . . . .	<b>46</b>
III.1	Lire un plan de phase . . . . .	46
III.1.i	présentation . . . . .	46
III.1.ii	caractères à repérer . . . . .	46
III.2	pendule grave . . . . .	50
III.2.i	situation, analyse . . . . .	50
III.2.ii	mise en équation . . . . .	51
III.2.iii	interprétation . . . . .	52
III.3	mise en rotation d'un moteur . . . . .	52
III.3.i	situation, analyse . . . . .	52

III-3·ii	mise en équation	53
III-3·iii	interprétation	53
III-4	poulie non idéale – machine d'ATWOOD	54
III-4·i	situation, analyse	54
III-4·ii	mise en équation	55
	TPM	55
	$E_c$	55
	$E_p$	56
	couplage des degrés de description	56
	rassemblement	57
III-4·iii	interprétation	57
	analyse du résultat	57
	tension exercée par le fil	57
	cas $m_2 \gg m_1$	58
III-5	Véhicule à roue	59
III-5·i	mise en situation	59
III-5·ii	première analyse	60
	analyse physique	60
	analyse technique	60
	condition de non glissement	61
III-5·iii	véhicule non motorisé	61
	récapitulatif des actions	61
	théorème du centre d'inertie	62
	théorèmes du moment cinétique	62
	interprétation	64
III-5·iv	Véhicule motorisé	66
	récapitulatif des actions	66
	théorème du centre d'inertie	67
	théorèmes du moment cinétique	67
	interprétation	68
III-5·v	retour sur le modèle	71
	le rôle des frottements	71
	approche numérique	72
<b>IV</b>	<b>Mouvement dans un champ de force central</b>	<b>74</b>
IV-1	Description de la situation étudiée	74
IV-2	Lois de conservation	74
IV-2·i	moment cinétique	74
IV-2·ii	énergie mécanique	74
IV-3	Énergie potentielle effective	75
IV-3·i	expression	75
IV-3·ii	représentation graphique	76
IV-4	Cas particulier du mouvement newtonien	77
IV-4·i	qui cela concerne-t-il?	77
IV-4·ii	types de trajectoire	77
	états liés	77
	états de diffusion	79
	force attractive ou répulsive	79
IV-4·iii	les lois de KÉPLER	79
	rappel historique	79

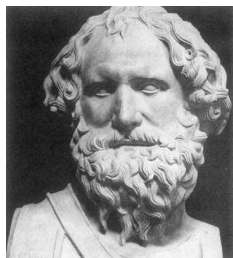
---

	première loi . . . . .	80
	deuxième loi . . . . .	81
	troisième loi . . . . .	81
IV.4.iv	méthode . . . . .	82
	l'analyse physique . . . . .	82
	l'analyse technique . . . . .	82
IV.4.v	exemples . . . . .	82
	satellite géostationnaire . . . . .	82
	vitesse de satellisation . . . . .	83
	vitesse de libération . . . . .	83
	distance minimale d'approche . . . . .	84
<b>Compétences du chapitre</b>		<b>86</b>

## Biographies succinctes

### ARCHIMÈDE

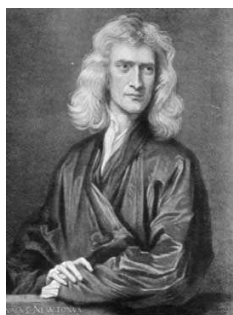
(287 av. J.-C. Syracuse – 212 av J.-C. Syracuse)



Peu d'éléments biographiques sur la vie de d'Archimède sont parvenus jusqu'à nous. Son père, Phidias, était un astronome, peut-être de la famille du roi de Syracuse Hiéron. Les travaux d'ARCHIMÈDE ont fait qu'il était sans aucun doute connu de ses contemporains : vis sans fin, moufles, leviers... Les deux anecdotes les plus célèbres concernant ARCHIMÈDE sont celles où il dit « Donnez-moi un point d'appui et je vous souleverai la Terre » et dans laquelle il court (nu?) dans les rues en s'écriant « Eurêka ». En revanche, qu'il ait mis feu à des voiles à l'aide de miroirs semble être un mythe.

### Isaac NEWTON

(1642 Woolsthorpe – 1727 Kensington)



Son père meurt quelque temps avant sa naissance. C'est uniquement parce qu'il a montré des aptitudes exceptionnelles que sa mère accepte qu'Isaac aille suivre des études au Trinity College de Cambridge, au lieu de reprendre la ferme familiale en 1661. Il interrompt ses études en 1665 à cause d'une épidémie de peste et revient pendant 18 mois à la ferme familiale. C'est durant cette période qu'il effectue le plus gros de ses travaux (cf. légende de la pomme). De retour à Cambridge pour finir ses études, il est nommé professeur en 1669 et ne commence à publier ses travaux qu'en 1670. Il devient aussitôt célèbre. Il publie *Opticks* en 1675 et son œuvre majeure *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* en 1687. Très religieux, mais à sa manière, il meurt en refusant les derniers sacrements.

### Charles Augustin COULOMB

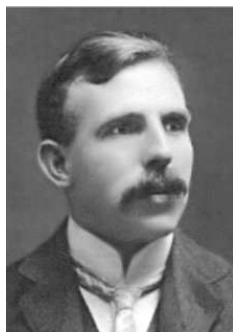
(1736 Angoulême – 1806 Paris)



Parce qu'il a choisit de suivre des cours de mathématiques plutôt que ceux de médecine auxquels ses parents le destinent, Charles est déshérité et doit aller vivre à Montpellier de 1757 à 1759, dans la famille de son père. Il rentre à Paris en 1759 pour suivre des cours préparatoires au concours d'entrée de l'école de génie de Mézière, concours qu'il réussit. Sorti en 1761, Charles est envoyé en mission en Martinique en 1764 et est rapatrié en 1772 pour raison médicale avec le grade de capitaine. Il effectue des recherches scientifiques tout en assurant son travail d'ingénieur militaire. Promu lieutenant-colonel en 1786, la révolution le force à abandonner tous ses biens en 1791. De retour à Paris sous Bonaparte en 1802, il sera Inspecteur général de l'instruction publique durant les 4 dernières années de sa vie.

**Ernest RUTHERFORD**

(1871 Brightwater, Nouvelle-Zélande – 1937 Cambridge)



Quatrième d'une fratrie de 12 enfants, Ernest révèle très vite de grandes aptitudes en mathématiques et en rugby à XV. Obtenant la seule bourse de Nouvelle-Zélande, il part en 1895 étudier à Cambridge, non sans se fiancer avant. En 1898, à la fin de ses études, il accepte un poste de professeur à Montréal et peut faire venir sa fiancée, avec laquelle il se mariera en 1900. Il sera professeur à Manchester à partir de 1907 et à Cambridge à partir de 1919. Expérimenteur hors pair, il effectue beaucoup de recherches et obtient en 1908 le prix Nobel de chimie pour ses travaux sur les désintégrations des éléments. C'est en reprenant, en 1911, les résultats d'une expérience effectuée de nombreuses années plus tôt qu'il émet l'hypothèse d'un noyau atomique très petit par rapport à la taille de l'atome.

# Mécanique du point... et un peu plus

La mécanique est certainement un domaine, sinon *le* domaine, emblématique de la physique. Les raisons sont multiples. Cela commence par NEWTON qui, le premier, formalisme des phénomènes physiques (le mouvement des planètes) et ouvre, ainsi, la voie à une véritable rationalisation de la physique. Ensuite, c'est encore la mécanique qui, la première, est réécrite sous une forme totalement différente, appelée « mécanique analytique ». Enfin, c'est la mécanique qui a donné naissance aux deux révolutions « modernes » du début du XX<sup>e</sup> siècle : la relativité (restreinte et générale) et la mécanique quantique. Si nous ajoutons à cela que la mécanique possède un formalisme si robuste qu'elle a longtemps été enseignée par des mathématiciens, nous pouvons comprendre pourquoi elle est véritablement au cœur de la physique.

Comme la mécanique s'occupe de tout ce qui bouge ou, pour ne pas heurter la mécanique quantique, tout ce qui peut changer de place, il va de soi que son champ d'application est excessivement vaste : des électrons autour des atomes, aux galaxies dans l'univers en passant par les voitures dans la rue, la pluie, les océans, vos yeux qui suivent ces lignes, le sang dans vos artères et veines... tout bouge ou tout *peut* bouger. Devant cette immensité, nous allons évidemment nous concentrer sur quelques aspects. En particulier, dans les chapitres qui suivent, sauf précision contraire, nous étudierons essentiellement la mécanique de NEWTON. Nous rappellerons quelques remarques faites en première année sur la relativité restreinte et nous consacrerons un chapitre entier à une introduction à la mécanique quantique.

Dans ce chapitre, nous allons revoir **très** rapidement la totalité du cours de mécanique de première année. Il est évident, dans ces conditions, que certains passages seront (excessivement ?) succincts. Il est alors fortement recommandé de reprendre un cours complet de première année. Toutefois, au milieu de ces révisions, il est possible, d'une part que certaines lois soient écrites sous une forme un peu plus généralisée que celle vue lors de l'apprentissage en première année et, d'autre part, que nous abordions quelques notions de 2<sup>e</sup> année.

Les quatre parties se répartissent de la manière suivante :

- la cinématique ;
- la dynamique sous toutes ses formes ;
- une série d'exemples ;
- le cas particulier du mouvement à force centrale.



# I – Cinématique

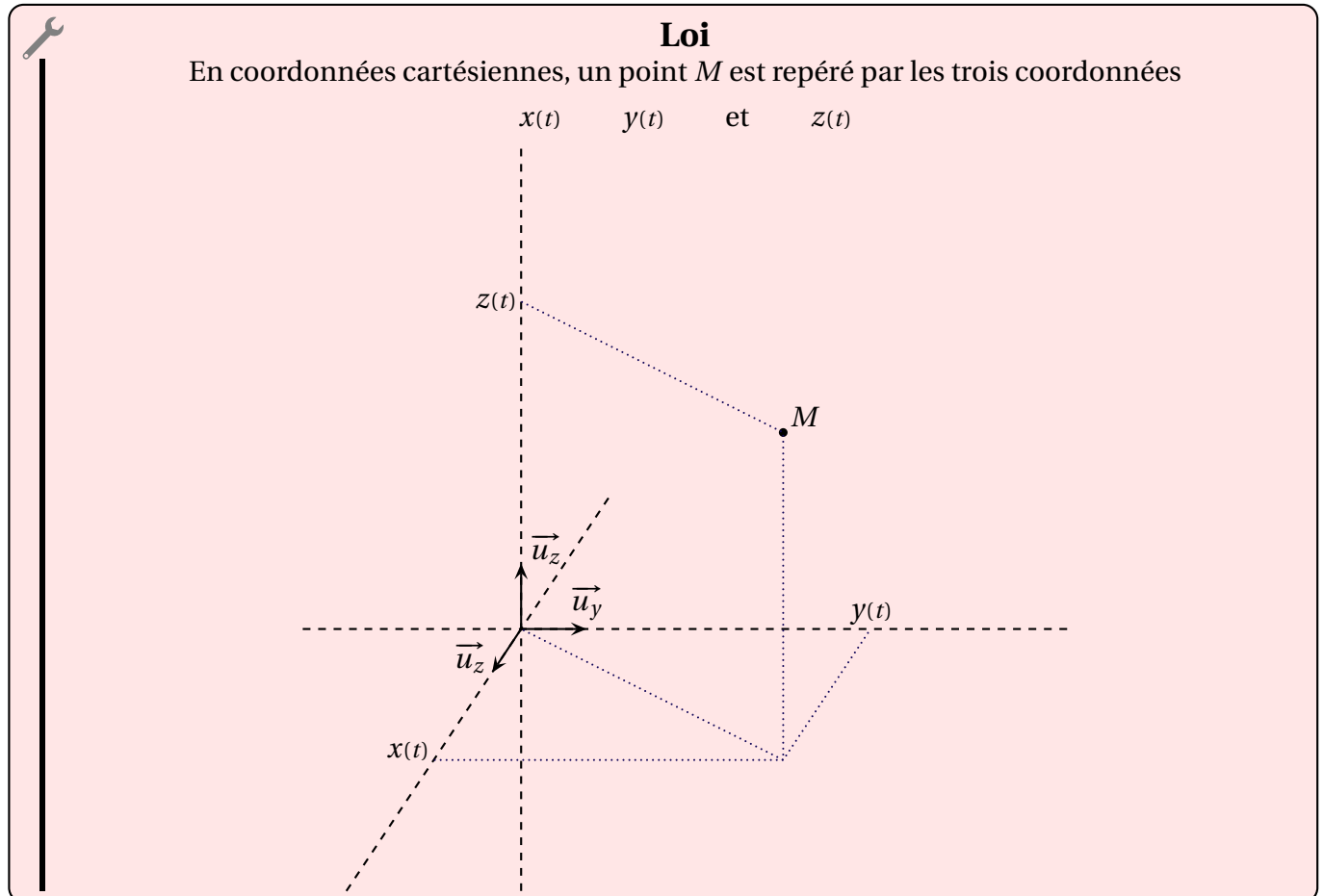
## I.1 – Différentes coordonnées

### I.1.i – cartésiennes

#### ★ présentation

✧ Aucune surprise.

5



#### ★ interprétation

- ✧ Les coordonnées cartésiennes (nom donné en hommage à DESCARTES) sont utiles dans trois grands cas :
  - lorsque le mouvement se fait sur un axe rectiligne ;
  - lorsque le mouvement est plan ou en 3D sans géométrie particulière (pas de rotation, pas de centre de force...);
  - pour traiter du cas général.
- ✧ L'énorme avantage, par rapport aux autres composantes, c'est l'indépendance des trois axes.
- ✧ Cette indépendance implique notamment que la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  ne dépend pas du mouvement de  $M$ .

## ★ déplacement élémentaire

6

**Loi**

Le déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

- ✧ Il est important de connaître le déplacement élémentaire car c'est lui qui permet de retrouver rapidement :
  - la vitesse dans le système de coordonnées choisi ;
  - le volume et les surfaces élémentaires.
- ✧ C'est ainsi que le volume élémentaire n'est autre que le produit des trois composantes du déplacement élémentaire.

**Bon à retenir**

*En coordonnées cartésiennes le volume élémentaire s'écrit*

$$d\tau = dx dy dz$$

- ✧ Pour les surfaces, il suffit de multiplier deux composantes du déplacement élémentaire

**Bon à retenir**

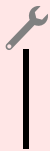
Les trois surfaces élémentaires ①, ② et ③ représentées ci-dessous ont pour expression

$$dS_1 = dx dy; \quad dS_2 = dx dz \quad \text{et} \quad dS_3 = dx dz$$

✧ Pour avoir la vitesse, il suffit de diviser le déplacement élémentaire par  $dt$

5

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \quad (\text{I.1})$$



### Loi

La vitesse en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}(t) \vec{u}_x + \frac{dy}{dt}(t) \vec{u}_y + \frac{dz}{dt}(t) \vec{u}_z$$

✧ Pour l'accélération, en revanche, il faut connaître.

5



### Loi

L'accélération en coordonnées cartésiennes s'écrit

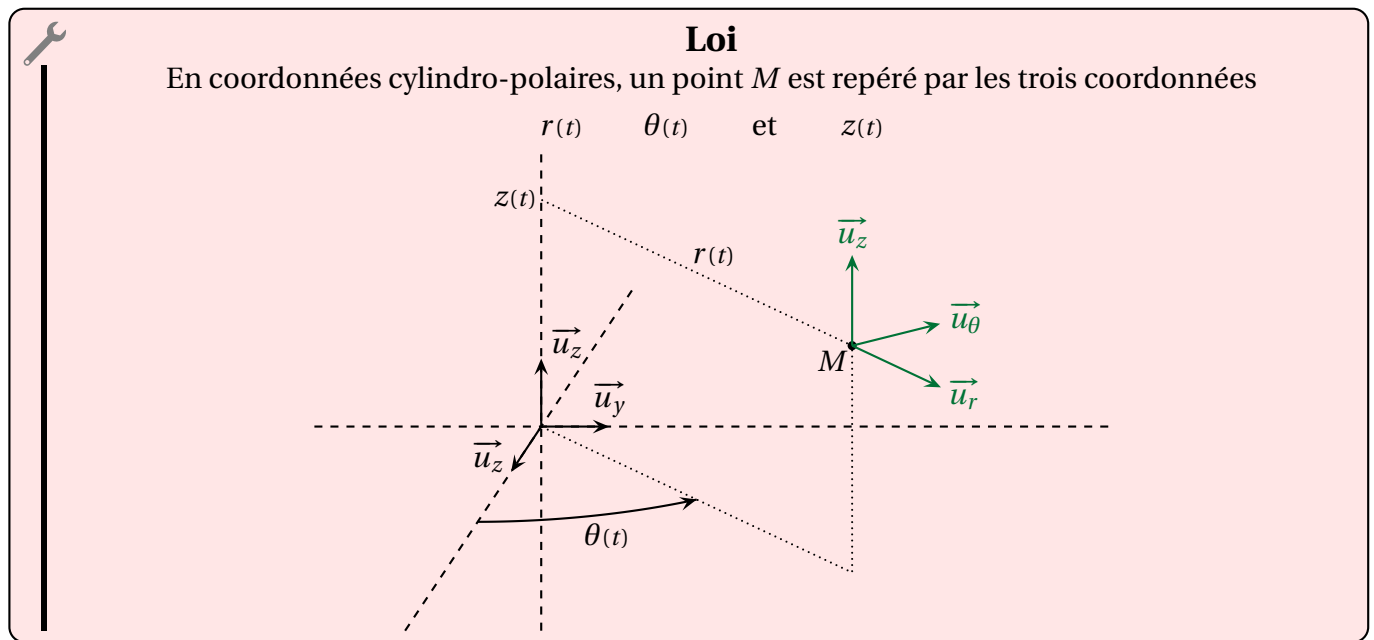
$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t) \vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}(t) \vec{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}(t) \vec{u}_z$$

## I.1.ii – cylindro-polaires

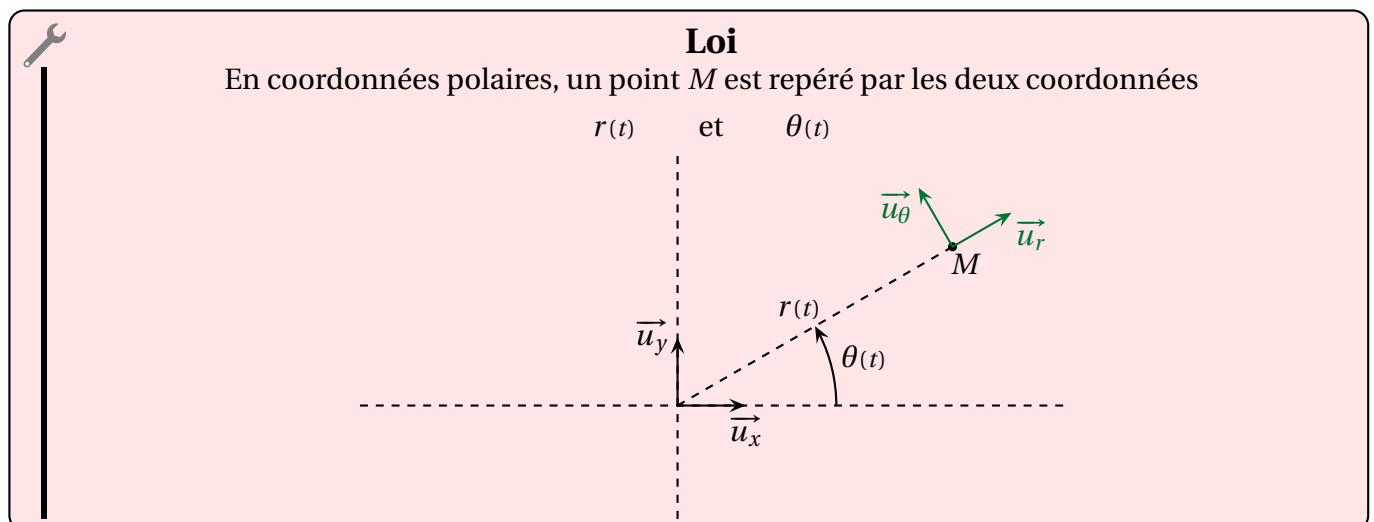
### ★ présentation

✧ Pas de surprise là non plus.

5



- ✧ Lorsque le mouvement est plan, nous choisissons le plan du mouvement comme le plan  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  et alors les coordonnées sont simplement appelées « polaires ».



### ★ interprétation

- ✧ Ces coordonnées sont à privilégier lorsqu'il y a un mouvement de rotation autour d'un axe (ou autour d'un point dans le cas d'un mouvement plan).
- ✧ L'inconvénient, par rapport aux coordonnées cartésiennes, c'est que la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  dépend de la position du point  $M$ .
- ✧ Cet inconvénient devient un avantage lorsque la géométrie est suffisamment particulière.

★ déplacement élémentaire

6

**Loi**

Le déplacement élémentaire en coordonnées cylindro-polaires s'écrit

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

✧ Nous avons ainsi

**Bon à retenir**

*En coordonnées cylindro-polaires le volume élémentaire s'écrit*

$$d\tau = r dr d\theta dz$$

✧ Pour les surfaces, même chose que précédemment

**Bon à retenir**

*Les trois surfaces élémentaires ①, ② et ③ représentées ci-dessous ont pour expression*

$$dS_1 = r dr d\theta ; \quad dS_2 = dr dz \quad \text{et} \quad dS_3 = r d\theta dz$$

✧ Pour avoir la vitesse, cela donne

5

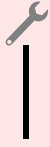
**Loi**

La vitesse en coordonnées cylindro-polaires s'écrit

$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}(t) \vec{u}_x + r \frac{d\theta}{dt}(t) \vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}(t) \vec{u}_z$$

✧ Pour l'accélération, en revanche, il faut connaître ou savoir retrouver très rapidement.

5

**Loi**

L'accélération en coordonnées cylindro-polaires s'écrit

$$\vec{a}(t) = \left( \ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2(t) \right) \vec{u}_r + \left( 2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t) \right) \vec{u}_\theta + \ddot{z}(t) \vec{u}_z$$

✧ Nous utiliserons souvent les coordonnées cylindro-polaires dans le cas d'un mouvement de rotation et, alors, nous utiliserons aussi le moment cinétique.

**Loi**

Le moment cinétique d'un point  $M$  par rapport à  $O$  s'écrit, pour un mouvement plan

$$\vec{\sigma}_{O(M,t)} = m r^2(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_z$$

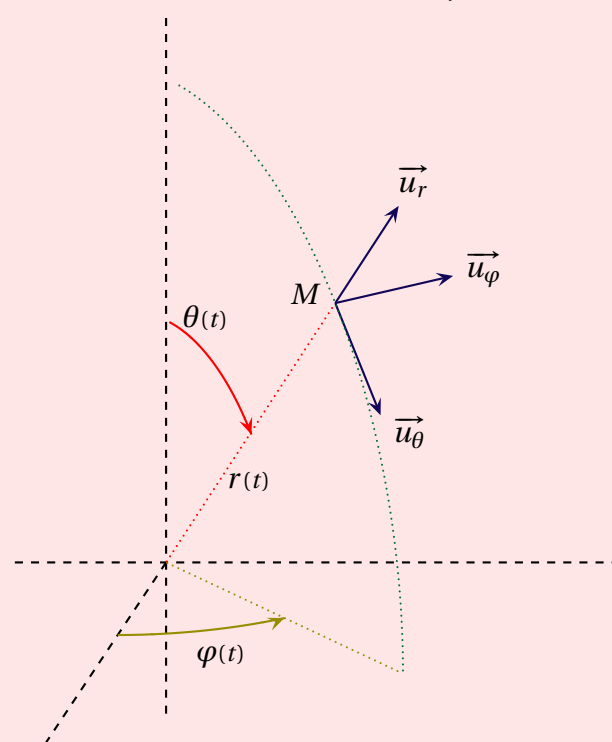
**I.1.iii- sphériques**★ **présentation**

✧ Elles sont moins utilisées en mécanique mais servent pour de nombreuses descriptions en électromagnétisme.

**Loi**

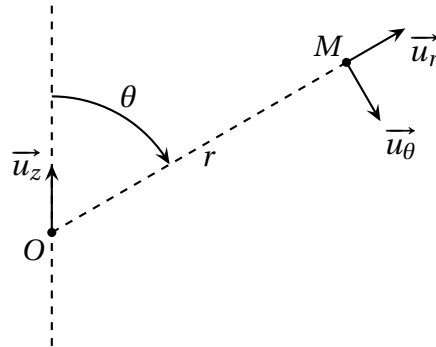
En coordonnées sphériques, un point  $M$  est repéré par les trois coordonnées

$r(t)$      $\theta(t)$     et     $\varphi(t)$



✧ Les notations peuvent sembler maladroites puisque  $\varphi$ , en coordonnées cylindriques, correspond au  $\theta$  des coordonnées cylindro-polaires et que les  $r$  n'ont pas les mêmes significations dans les deux systèmes de coordonnées.

- ✧ Il n'en est rien !
- ✧ Le fait est que, très souvent, lorsque nous aurons affaire aux coordonnées sphériques, nous nous placerons dans un plan méridien et nous retrouverons les coordonnées polaires.



### ★ déplacement élémentaire

**Loi**

Le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques s'écrit

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

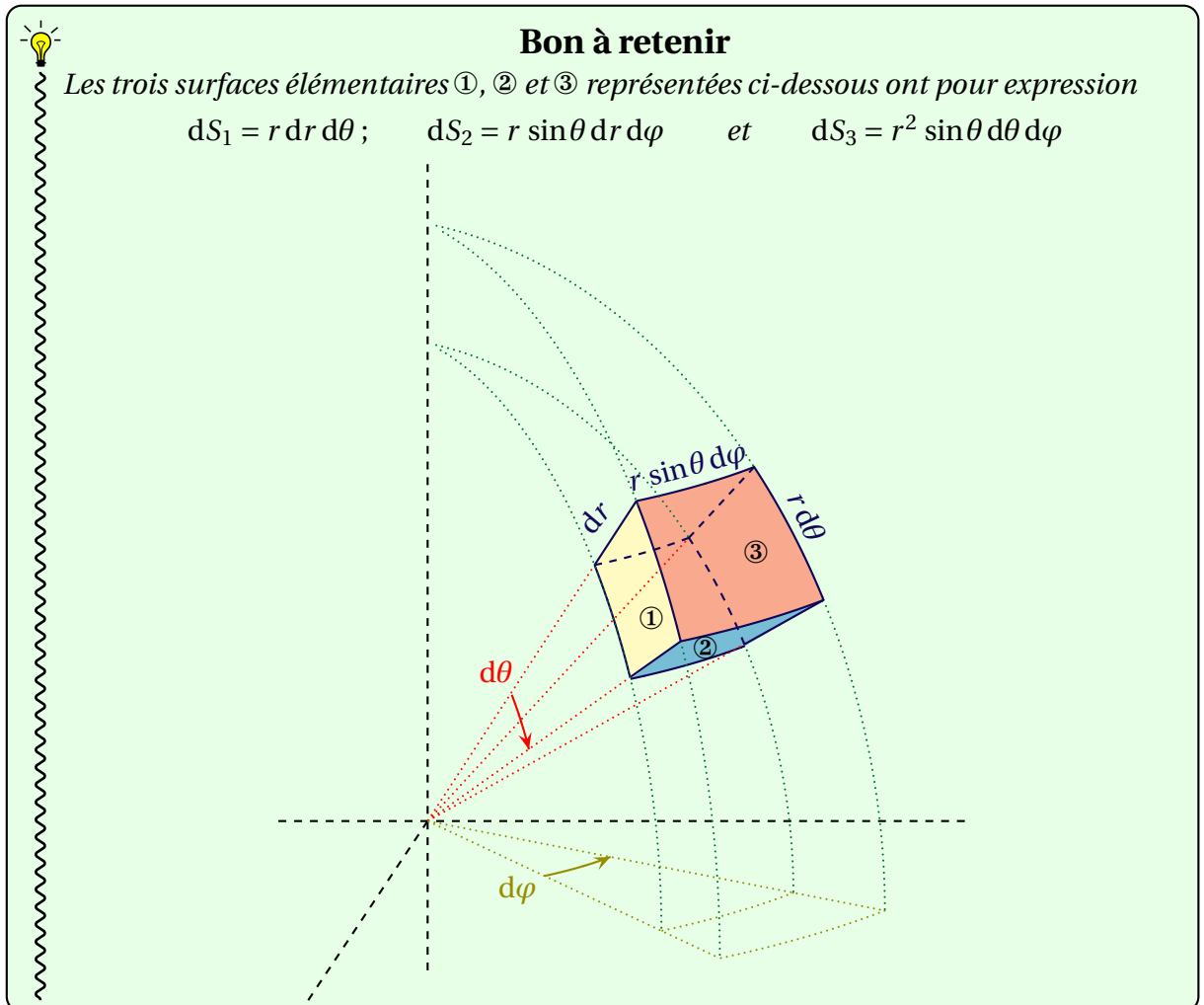
- ✧ Nous avons donc

**Bon à retenir**

*En coordonnées sphériques le volume élémentaire s'écrit*

$$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

- ✧ Pour les surfaces



✧ Tant pour la vitesse que pour l'accélération, les coordonnées sphériques ne pas très pratiques.

★ **interprétation**

- ✧ Nous utiliserons essentiellement les coordonnées sphériques lorsqu'un point jouera un rôle particulier en tant que « source » comme, par exemple, les dipôles.
- ✧ En revanche, en mécanique, étant données les lourdeurs des expressions de la vitesse et de l'accélération, nous ne l'utiliserons *a priori* pas.

## I.2 – Les systèmes étudiés

### I.2.i – le point matériel

★ **définition**



**Définition**

Un *point matériel* est un point de l'espace affecté d'une masse  $m$ .

- ✧ Parfois nous ferons des raisonnements sur des points de masse nulle.
- ✧ Dans ce cas, il faudra comprendre qu'un point de masse nulle est un point de très faible masse, *i.e.* de masse négligeable devant les autres masses du dispositif.
- ✧ Techniquement, pour un point de masse nulle, nous pourrons prendre un point de masse  $m'$  puis faire tendre  $m'$  vers 0.



### ★ intérêt

- ✧ Le point matériel est la brique élémentaire de la mécanique, c'est avec lui que s'écrivent les trois lois de la mécanique de NEWTON.
- ✧ Un point matériel peut représenter :
  - soit un point géométriquement particulier d'un dispositif (l'avant du capot de la voiture, le centre d'une raquette...);
  - soit un point physiquement particulier d'un dispositif (comme le célèbre *centre d'inertie*);
  - soit un objet très petit par rapport aux échelles du dispositif étudié.

### ★ cinétique

- ✧ Voici les trois grandeurs associées aux trois grandes lois de la mécanique du point.

#### Définition

La *quantité de mouvement* (ou *impulsion*)  $\vec{p}_{|\mathcal{R}}(M)$  d'un point matériel de masse  $m$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  s'écrit

$$\vec{p}_{|\mathcal{R}}(M) \triangleq m \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$$

#### Définition

Le *moment cinétique*  $\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M)$  d'un point matériel de masse  $m$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  par rapport à un point  $A$  s'écrit

$$\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(M) \triangleq \vec{AM} \wedge \vec{p}_{|\mathcal{R}}(M,t) = \vec{AM} \wedge m \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$$



#### Bon à retenir

§ Le moment cinétique représente la quantité de rotation de  $M$  autour de  $A$ .

☞ *Remarque.* Même si le théorème du moment cinétique impose de calculer la grandeur éponyme par rapport à un point **fixe**, il faut remarquer que cela n'est pas obligatoire dans la définition.

- ✧ Il est possible, aussi, de parler de moment cinétique autour d'un axe. Il s'agit, alors, d'une grandeur algébrique.

#### Définition

Le *moment cinétique scalaire*  $\sigma_{|\mathcal{R},\Delta}(M)$  d'un point matériel de masse  $m$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  par rapport à un axe  $\Delta$  s'écrit

$$\sigma_{|\mathcal{R},A}(M) = \pm b_\ell \times p_{|\mathcal{R}}(M,t) \quad \text{où}$$

$b_\ell$  est le bras de levier de la quantité de mouvement par rapport à l'axe.

Le signe est déterminé suivant l'orientation arbitraire choisie.

#### Définition

L'*énergie cinétique*  $E_{c|\mathcal{R}}(M)$  d'un point matériel de masse  $m$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  s'écrit

$$E_{c|\mathcal{R}}(M) \triangleq \frac{(p_{|\mathcal{R}})^2(M,t)}{2m} = \frac{1}{2} m (v_{|\mathcal{R}})^2(M,t)$$

## I.2.ii – un ensemble de points matériels

## ★ grandeurs

**Définition**

Un *système de points matériels* est un ensemble de points matériels, isolés par la pensée, qui constitue l'objet d'une loi.

- ✧ Insistons : un *système* ne sert qu'à écrire des lois ! Il est donc totalement **arbitraire**, même si certains systèmes se révèlent, à l'usage, bien plus pratiques que d'autres.
- ✧ Il ne faut surtout pas confondre *système* avec *dispositif*.

**Définition**

Un *dispositif* est l'ensemble des éléments modélisés pour l'étude d'une situation.

- ✧ Ainsi, dans un problème, il n'y a qu'un seul et unique dispositif, le même pour tout le monde, mais il peut y avoir quantité de systèmes différents et, à moins qu'ils ne soient imposés, il n'ont aucune raison d'être identiques pour tous ceux qui étudieront le dispositif.

**Bon à retenir**

⋈ *La quantité de mouvement est une grandeur extensive.*

**Bon à retenir**

⋈ *Le moment cinétique est une grandeur extensive.*

**Bon à retenir**

⋈ *L'énergie cinétique est une grandeur extensive.*

## ★ intérêt

- ✧ Une des méthodes couramment utilisée en physique est le réductionnisme.
- ✧ C'est une méthode qui consiste à découper un problème en plusieurs morceaux afin de pouvoir poser les lois.
- ✧ Dans ces conditions, toute situation un minimum complexe (la trajectoire d'un ballon de football, le vol d'un avion, l'évolution d'une toupie...) pourra donner lieu à un découpage en petits morceaux du dispositif de sorte que chaque morceau soit d'une taille telle qu'il puisse être assimilé à un point matériel.
- ✧ C'est là la naissance des systèmes de points.

## ★ cinétique

- ✧ Pour la cinétique des systèmes, un point particulier s'avère très intéressant.

**Définition**

Le *centre de masse* (cdm), appelé aussi *centre d'inertie* (cdi), d'un système de  $N$  points est le point noté  $G$  tel que, avec des notations naturelles

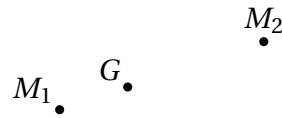
$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \iint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$$

**Bon à retenir**

Le centre de masse vérifie, quel que soit le point  $O$ ,

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2 + \dots + m_N \vec{OM}_N}{m_{\text{tot}}} \quad \text{ou} \quad \vec{OG} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \times \iiint_{\mathcal{V}} \vec{OM} dm$$

✧ Comme l'intuition peut le confirmer, le centre de masse est toujours du côté du plus massique (ici  $m_1$ ).



**STOP** Rappelons que le point  $G$ , le centre de masse, est un point qui « n'existe pas » ! En particulier, bien qu'il soit défini comme un point matériel (de position  $G$  et de masse la masse totale du système) ce n'est **pas** un point physique et, pour cette raison, il ne subit aucune force, il n'est pas possible d'écrire un « PFD » sur lui, de parler de l'énergie cinétique de  $G$ ... Quiconque doute encore de la **non** existence du centre de masse n'a qu'à essayer de ramasser un cerceau en le prenant par son centre de masse.

✧ Ce centre de masse permet de déterminer aisément la quantité de mouvement totale d'un système de points.

**Loi**

La quantité de mouvement d'un système  $\mathcal{S}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  s'écrit

$$\vec{p}_{|\mathcal{R}}(\mathcal{S}, t) = m_{\text{tot}} \vec{v}_{|\mathcal{R}}(G, t)$$

✧ Bien que les expressions du moment cinétique et de l'énergie cinétique pour un système de points dépassent le cadre du programme, il est important d'insister sur le fait que la relation précédente est une **exception** car nous avons

$$\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(\mathcal{S}, t) \neq \vec{AM} \wedge m_{\text{tot}} \vec{v}_{|\mathcal{R}}(G, t) \quad \text{et} \quad E_{c|\mathcal{R}}(\mathcal{S}, t) \neq \frac{1}{2} \times m_{\text{tot}} (v_{|\mathcal{R}})^2(G, t) \quad (\text{I.2})$$

## I.2.iii – un solide

### ★ définition

11

**Définition**

Un *solide* est un ensemble de points tel que, quels que soient  $A$  et  $B$ , la distance  $AB = \|\vec{AB}\|$  reste constante dans le temps.

✧ Il est donc tout à fait possible qu'un solide tourne sur lui-même. En revanche, parce que deux solides peuvent être articulés ensemble par l'intermédiaire d'une liaison,

**Bon à retenir**

§ Deux solides ne constituent pas forcément un solide.

### ★ intérêt

✧ Même si tout objet est déformable<sup>1</sup>, le solide constitue un très bon modèle d'un objet dont le but n'est pas de se déformer.

1. Nous aurons l'occasion de vérifier en TP que, rien qu'en s'appuyant sur une table, il est possible de déformer un objet posé sur celle-ci.

- ✧ Nous verrons, dans des chapitres ultérieurs, la mécanique des matériaux hautement déformables que sont les fluides.
- ✧ Notons néanmoins que tout n'est pas *soit* solide (non déformable), *soit* fluide (hautement déformable). Il suffit de penser, pour cela, à tout ce qui est tas de sable, pâte à modeler, ressort, trombone, feuille de papier... qui sont un peu des deux.

### ★ cinétique

- ✧ Un solide peut être vu comme un ensemble de points. Dans ces conditions, sa quantité de mouvement s'écrit

#### Loi

La quantité de mouvement d'un solide  $\Sigma$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  s'écrit

$$\vec{p}_{|\mathcal{R}}(\Sigma, t) = m_{\text{tot}} \vec{v}_{|\mathcal{R}}(G, t) \quad \text{où :}$$

$G$  est le centre de masse du solide.

40

#### Loi

Le moment cinétique scalaire d'un solide  $\Sigma$  quelconque tournant autour d'un axe  $\Delta$  fixe s'écrit

$$\sigma_{\Delta}(\Sigma) = J_{\Delta} \times \Omega \quad \text{où :}$$

→  $J_{\Delta}$  est le *moment d'inertie* du solide par rapport à  $\Delta$  ;  
 →  $\Omega$  est la vitesse de rotation algébrique du solide autour de  $\Delta$ .

- ✧ Dans le cas général nous ne pouvons **pas** écrire la relation sous forme vectorielle, c'est-à-dire que, pour un solide quelconque,  $\vec{\sigma}_O(\mathcal{S}) \neq J_{\Delta} \vec{\Omega}$  (avec  $O$  sur  $\Delta$ ) car cela dépend de la répartition de masse et, notamment, de la « symétrie » du solide autour de cet axe.
- ✧ Quoiqu'il en soit, ce n'est absolument pas grave car, quand nous aurons affaire à un solide en rotation autour d'un axe fixe, nous raisonnerons toujours avec le moment cinétique scalaire, le seul intéressant pour nous.

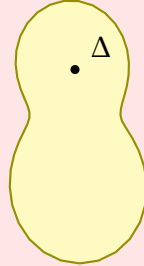
56

**Loi**

L'énergie cinétique d'un solide  $\Sigma$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  s'écrit

$$E_c(\Sigma) = \frac{1}{2} J_{\Delta} \times \Omega^2 \quad \text{où :}$$

- $J_{\Delta}$  est le *moment d'inertie* du solide par rapport à  $\Delta$  ;
- $\Omega$  est la vitesse de rotation algébrique du solide autour de  $\Delta$ .

★ **moment d'inertie****Bon à retenir**

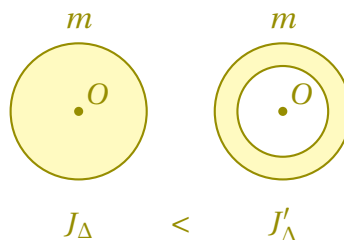
*Dimensionnellement parlant, en utilisant les unités SI pour les dimensions*

$$[J_{\Delta}] = (\text{kg}) \cdot (\text{m})^2$$

✧ À partir de la dimension du moment d'inertie, nous pouvons dire que :

- plus la masse est grande, plus le moment d'inertie est grand ;
- plus les distances sont grandes, plus le moment d'inertie est grand.

✧ En particulier, à masse et taille fixées, les objets « creux » ont un moment d'inertie plus grand puisque les points sont globalement plus éloignés de l'axe (cf. ci-dessous). 41



✧ Bien que les moments d'inerties s'expriment de manière simple en fonction des grandeurs géométriques du solide considéré (du moins pour des objets suffisamment réguliers), leurs expressions ne sont ni à connaître ni à savoir calculer.

✧ Toutefois, comme un moment d'inertie est en « masse fois longueur au carré » nous pouvons dire que, pour un objet de distance maximale  $\ell$  à l'axe  $\Delta$  de rotation et de masse  $m$ , le moment d'inertie s'écrit

$$J_{\Delta} = \alpha m \ell^2 \quad \text{avec} \quad \alpha \leq 1 \quad (\text{I.3})$$

✧ Le moment d'inertie est une grandeur caractéristique d'un solide une fois l'axe de rotation choisi, c'est pourquoi nous le considérerons toujours comme une grandeur pertinente.

**Bon à retenir**

*Un solide possède a priori une infinité de moment d'inertie puisque « le » moment d'inertie dépend de l'axe de rotation choisi.*

**Bon à retenir**

Plus un axe passe près du centre de masse, plus le moment d'inertie associé à la rotation autour de cet axe est petit.

**I-3 – Mouvements particuliers****I-3.i – oscillations sinusoïdales****Loi**

Un mouvement de coordonnée  $x(t)$  est sinusoïdal s'il obéit à l'équation différentielle de « *l'oscillateur harmonique* »

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

**Définition**

Un mouvement sinusoïdal s'écrit

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{où}$$

- $X_m$  est l'*amplitude*;
- $\omega_0$  est la *pulsation*;
- $\varphi$  est la *phase à l'origine*.

✧ Dans le cas d'un régime libre, nous avons naturellement  $\omega = \omega_0$

**I-3.ii – mouvement uniformément accéléré**

8

**Définition**

Un mouvement est dit *uniformément accéléré* lorsque l'accélération est vectoriellement constante.

$$\vec{a}(t) = \vec{C}^{\text{te}}$$

**Bon à retenir**

La trajectoire d'un mouvement uniformément accéléré est parabolique ou rectiligne suivant les conditions initiales.

✧ Trouver l'expression du vecteur position se fait directement en vectoriel en intégrant deux fois l'accélération

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_0 \tag{I.4}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{a}_0 \times t + \vec{v}(0) \tag{I.5}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{a}_0 \times \frac{t^2}{2} + \vec{v}(0) \times t + \vec{r}(0) \tag{I.6}$$

✧ Un cas particulier à connaître (très utile pour les interprétations qualitatives)

**Bon à retenir**

Un objet en chute libre lâché sans vitesse initiale acquiert la vitesse  $v = \sqrt{2gh}$  après une chute de hauteur  $h$ .

## I-3-iii – mouvement circulaire

9

**Définition**

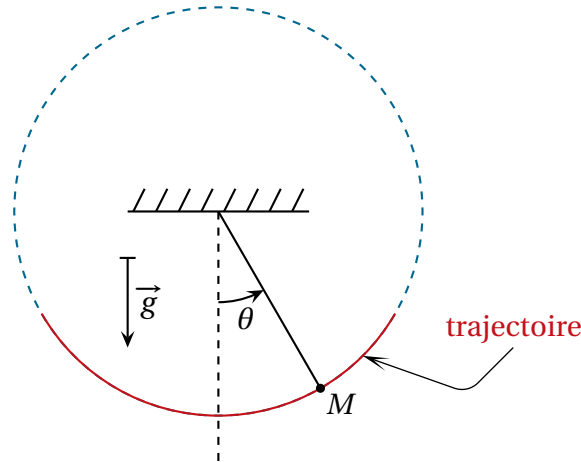
Un mouvement est dit *circulaire* lorsque la trajectoire est circulaire.



Comme cette définition est basée sur la trajectoire, cela dépend du référentiel !



Ne pas confondre « circulaire » et « circulaire uniforme ». Le plus célèbre des contre-exemple est le pendule simple qui **a bel et bien** un mouvement circulaire.



- ✧ De même si, pour un point, il n'y a pas d'ambiguïté, pour un solide, il faut distinguer la « trajectoire circulaire » de la « translation circulaire » : dans le premier cas, le centre de masse a un mouvement circulaire, indépendamment de ce que fait le solide sur lui-même alors que, dans le second cas il est impératif qu'en plus le solide ne tourne pas sur lui-même.
- ✧ C'est ainsi que la Terre a une trajectoire (quasi) circulaire autour du Soleil dans le référentiel héliocentrique mais n'effectue pas du tout une translation circulaire.
- ✧ Pour la vitesse, pas de difficulté.

**Loi**

La vitesse en coordonnées polaires pour un mouvement circulaire de rayon  $R$  et de vitesse angulaire  $\omega$ , s'écrit

$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta \quad \text{ou} \quad \vec{v}(t) = R\omega(t)\vec{u}_\theta$$

- ✧ En revanche, pour l'accélération, il faut soit la connaître parfaitement sans hésiter, soit savoir la retrouver sans erreur en moins de 10 secondes montre en main.

**Loi**

L'accélération en coordonnées polaires pour un mouvement circulaire de rayon  $R$  et de vitesse angulaire  $\omega$ , s'écrit, au choix

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= -R\dot{\theta}^2(t)\vec{u}_r + R\ddot{\theta}(t)\vec{u}_\theta \\ &= -R\omega^2(t)\vec{u}_r + R\dot{\omega}(t)\vec{u}_\theta \\ &= -\frac{v^2(t)}{R}\vec{u}_r + \frac{dv}{dt}(t)\vec{u}_\theta \end{aligned}$$

## II – Dynamique

- ✧ Contrairement à l'opinion commune, le concept de force n'est pas, et de loin, un concept facile à appréhender, tant au niveau scientifique qu'au niveau philosophique.
- ✧ C'est une des raisons, d'ailleurs, qui a poussé LAPLACE à développer la *mécanique analytique*, une mécanique sans aucune notion de force, *i.e.* sans aucun vecteur à trois composantes. À la place, il a utilisé uniquement des lois basées sur des grandeurs homogènes à une énergie.

### II.1 – Les actions

#### II.1.i – Les quatre interactions fondamentales

- ✧ Les quatre interactions fondamentales sont appelées ainsi car, à partir d'elles seules, il est possible de retrouver toutes les interactions qui existent à toutes les échelles (du microscopique au mégascopique<sup>2</sup>).
- ✧ Dans l'ordre d'intensité décroissante, les quatre interactions fondamentales sont :
  - l'interaction nucléaire forte, responsable de la cohésion des noyaux ;
  - l'interaction électromagnétique, inutile de la présenter ;
  - l'interaction nucléaire faible, responsable notamment des désintégrations nucléaires bêta ;
  - l'interaction gravitationnelle.
- ✧ Les interactions nucléaires forte et faible sont de courte portée et n'ont d'influence (comme leur nom l'indique) qu'à l'échelle nucléaire.
- ✧ En revanche, les interactions électromagnétique et gravitationnelle ont une portée infinie.
- ✧ Il est à noter que la physique des particules permet d'expliquer que les trois interactions nucléaires forte et faible et électromagnétique ne sont que trois facettes d'une seule interaction.
- ✧ En revanche, pour l'instant, aucune théorie éprouvée ne permet de « fusionner » toutes les interactions en une seule. Celui qui la trouvera sera, dans l'histoire de la physique, le successeur de NEWTON et EINSTEIN.

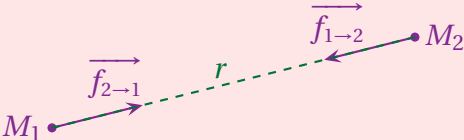
#### II.1.ii – Forces à distance

##### ★ gravitation

- ✧ L'interaction gravitationnelle est à réserver aux problèmes astronomiques.

**Loi**

Deux points  $M_1$  et  $M_2$  de masses  $m_1$  et  $m_2$  s'attirent et exercent l'un sur l'autre une force telle que



$$\vec{f}_{1-2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{12} \text{ où :}$$

- $G$  est la constante universelle de gravitation ;
- $r$  est la distance entre les deux masses ;
- $\vec{u}_{12}$  est le vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2.

2. L'auteur n'est pas certain que ce terme existe, mais il lui semble adapté pour désigner l'évolution à l'échelle de l'univers.



**Définition**

La *masse grave* caractérise la capacité d'un corps à attirer et à être attiré par l'interaction gravitationnelle.

**Loi**

Un point matériel de masse  $m$  situé au centre d'un référentiel crée le champ gravitationnel

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$$

**Bon à retenir**

Un astre à symétrie sphérique se comporte vis-à-vis de la gravitation comme un point matériel situé en son centre, dans lequel serait concentré toute la masse.

**Loi**

L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle s'écrit

$$E_{p,\text{grav}} = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad \text{où :}$$

- $m_1$  et  $m_2$  sont les masses des deux points en interaction ;
- $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  est la constante universelle de gravitation ;
- $r$  est la distance entre les deux points matériels.

30

- ✧ Rappelons qu'une énergie potentielle d'interaction est une énergie « partagée » entre les deux points ; il vaut donc mieux considérer les deux points dans le même système.
- ✧ Seul cas particulier (mais néanmoins fréquent) : quand un des deux points est immobile (par exemple le ①), l'énergie potentielle est alors entièrement contenue dans l'autre (ici le ②), qui peut donc être étudié « seul ».

★ **poids****Loi**

Dans le référentiel terrestre, un objet à la surface de la Terre subit son poids  $\vec{P}$  tel que

$$\vec{P} = m \vec{g} \quad \text{où :}$$

- $m$  est la masse grave ;
- $g$  est l'accélération de pesanteur avec  $g \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Définition**

$\vec{g}$  est *vertical* et dirigé vers le *bas*.

- ✧ Oui, ce sont effectivement les définitions de « vertical » et « bas ».
- ✧ Nous verrons dans le prochain chapitre que la *verticale*, même avec une Terre parfaitement sphérique, ne passe pas par le centre de celle-ci.

**Bon à retenir**

Le poids reste constant dans une zone restreinte à l'échelle planétaire.

- ✧ Cela permet de ne pas prendre en compte les variations (qui pourtant existent) du poids lorsqu'un problème est à l'échelle de plusieurs kilomètres.

30

**Loi**

L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit

$$E_{p,pes} = m g h \quad \text{où :}$$

$h$  est la **hauteur** comptée à partir d'une référence quelconque.

Attention, il s'agit bien de la « hauteur », donc d'une grandeur comptée positivement **vers le haut**.

★ **force électromagnétique**🔗 **force de LORENTZ**

✧ C'est une force que nous utiliserons dès qu'il y aura une particule (ou un corps) chargée.

**Loi**Un point matériel de charge  $q$  plongé dans un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  subit la force de

$$\vec{f} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

**Bon à retenir**

⚡ Pour une particule, la force de LORENTZ est toujours prédominante face au poids.

Le fait de négliger systématiquement<sup>3</sup> le poids n'est valable que pour les particules, pas pour les objets macroscopiques.

**Loi**

L'énergie potentielle électrostatique s'écrit

$$E_{p,elst} = q V \quad \text{où :}$$

- $q$  est la charge du point matériel ;
- $V$  est le potentiel électrostatique.

🔗 **force de COULOMB****Loi**Deux points matériels de charges  $q_1$  et  $q_2$  en vitesse faible l'un par rapport à l'autre exercent une

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{où :}$$

- $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$  est le vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2 ;
- $\epsilon_0 = 8,84 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  est la permittivité du vide.

**Loi**Le champ électrique créé en  $M$  par une charge ponctuelle  $q$  s'écrit

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

3. Il existe de très rares cas où le poids n'est pas négligeable pour une particule : lorsque celle-ci n'est soumise qu'à cette force et que sa vitesse est faible (pour une particule).

**Loi**

L'énergie potentielle d'interaction coulombienne s'écrit

$$E_{p,coul} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r} \quad \text{où :}$$

- $q_1$  et  $q_2$  sont les charges des deux points en interaction ;
- $\epsilon_0 = 8,84 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  est la permittivité du vide ;
- $r$  est la distance entre les deux points matériels.

✧ Voir la remarque page 25 sur l'énergie potentielle d'interaction.

★ **force de LAPLACE**

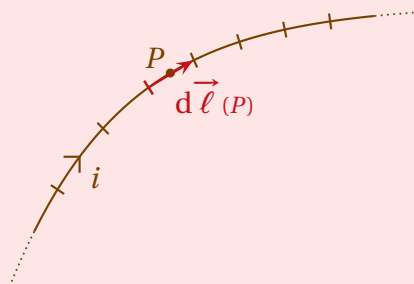
✧ C'est une force qui s'exerce lorsqu'un circuit parcouru par un courant est plongé dans un champ magnétique.

✧ Nous aurons l'occasion de revoir cette force avec les révisions de l'induction.

**Loi**

La force de LAPLACE qui s'exerce sur un conducteur parcouru par un courant plongé dans un champ magnétique s'écrit

$$\vec{F}_L = \int_{P \in \text{conducteur}} d\vec{F}_L(P) \quad \text{avec} \quad d\vec{F}_L(P) = i d\vec{\ell}_P \wedge \vec{B}(P)$$



## II.1.iii – Forces de contact connues a priori

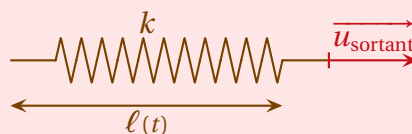
★ **force exercée par un ressort**

**Loi**

La force exercée par un ressort sur un point attaché à une de ses extrémités s'écrit

$$\vec{f} = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{sortant}} \quad \text{où :}$$

- $\ell(t)$  est la longueur du ressort ;
- $\ell_0$  est la longueur naturelle du ressort ;
- $\ell(t) - \ell_0$  est l'allongement ;
- $\vec{u}_{\text{sortant}}$  est le vecteur unitaire tangent au ressort et « sortant » du ressort au niveau du point qui subit la force.



✧ Un ressort idéal est un ressort :

- de masse nulle ;

- parfaitement élastique (pas de déformation irréversible de type « plastique » quand il est trop étiré) ;
- à spires non jointives (sinon il se comporte comme une barre rigide).

**Loi**

L'énergie potentielle élastique contenue dans un ressort s'écrit

$$E_{p,el} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$$

**Bon à retenir**

§ Un élastique est un ressort qui n'exerce de force que lorsqu'il est étiré.

★ **force pressante**

🌀 **force**

**Loi**

La force pressante qui s'exerce sur une surface  $\vec{dS}$  dirigée conventionnellement vers l'extérieur s'écrit

$$\vec{df}_p = -P \vec{dS}$$

Le diagramme illustre un système (orange) avec une surface élémentaire  $\vec{dS}$  (rouge) dirigée vers l'extérieur. La force pressante  $\vec{df}_p$  (vert) agit sur cette surface, dirigée vers l'intérieur du système.

🔗 Les forces de pression sont des forces très intenses

$$\frac{\|\vec{f}_p\|}{S} \sim 10 \text{ N.cm}^{-2} \quad \text{à} \quad P = 1,0 \text{ bar} \quad \text{(II.1)}$$

🌀 **poussée d'ARCHIMÈDE**

🔗 C'est la résultante classique des forces de pression.

**Loi**

Un objet entièrement immergé dans un fluide au repos subit la *poussée d'ARCHIMÈDE*, verticale, de bas en haut et de norme le poids du fluide remplacé.

★ **force de frottement fluide**

- 🔗 Ces forces sont à utiliser lorsqu'un objet est mobile **et** plongé dans un fluide.
- 🔗 L'atmosphère étant un fluide, nous devrions l'utiliser à peu près tout le temps. Toutefois, étant donné la faible masse de l'atmosphère remplacée par rapport à celle des objets usuels, nous la négligerons aussi très souvent. Seules exceptions usuelles : les montgolfières, les sondes et les dirigeables.

**Loi**

Pour des vitesses faibles, la force de frottement fluide exercée par un fluide sur un objet est linéaire et s'écrit

$$\vec{f} = -\lambda \vec{v}_{|\text{fluide}}(\text{objet}) \quad \text{où}$$

$\lambda$  est une constante qui dépend du fluide et de la forme de l'objet.

**Loi**

Pour des vitesses élevées, la force de frottement fluide exercée par un fluide sur un objet est quadratique et s'écrit

$$\vec{f} = -h \|\vec{v}_{|\text{fluide}}(\text{objet})\| \times \vec{v}_{|\text{fluide}}(\text{objet}) \quad \text{où}$$

$h$  est une constante qui dépend du fluide et de la forme de l'objet.

⚠ La limite basse ou haute vitesse dépend du nombre de REYNOLDS de l'écoulement.

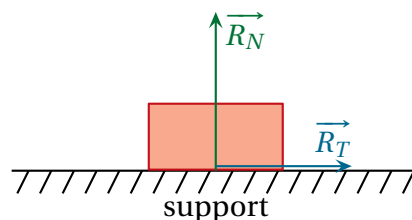
⚠ À grand Re la force de frottement n'est autre que la traînée avec

$$\vec{f} = -\frac{1}{2} \rho S C_x v \vec{v}$$

## II.1.iv – Forces de contact inconnues *a priori* : les liaisons

### ★ force exercée par un support solide

- ⚡ Localement, un contact est toujours plan ou, du moins, il est toujours possible de définir un plan tangent au contact.
- ⚡ Nous pouvons alors décomposer la force exercée par le « support » sur l'objet en une composante normale et une composante tangentielle.

**Loi**

La réaction normale  $\vec{R}_N$  est **toujours** présente dès lors qu'il y a contact et telle que :

- sa direction est normale au plan de tangence ;
- le sens est du support vers l'objet ;
- la norme est **inconnue**.

- ⚡ Parfois, il est possible d'avoir une réaction normale dirigée de l'objet vers le support.
- ⚡ Pour que tel soit le cas, il **faut** un dispositif d'anti-décollement de l'objet vis-à-vis du support comme c'est le cas des wagonnets des attractions sur les fêtes foraines.

**Loi**

Il n'y a de réaction tangentielle  $\vec{R}_T$  que lorsqu'il y a des frottements.  
Les frottements sont alors dit *solides*.



### Bon à retenir

L'action tangentielle exercée par un support dépend du mouvement de l'objet sur ce support :

- si l'objet glisse sur le support :
  - la direction de  $\vec{R}_T$  est la même que celle de la vitesse qu'a l'objet par rapport au support ;
  - $\vec{R}_T$  est opposée à la vitesse qu'a l'objet par rapport au support ;
  - la norme de  $\vec{R}_T$  vaut  $\|\vec{R}_T\| = f_d \|\vec{R}_N\|$  où  $f_d$  est le **coefficient de frottement dynamique** ;
- si l'objet ne glisse pas sur le support :
  - la direction de  $\vec{R}_T$  est inconnue ;
  - le sens de  $\vec{R}_T$  est inconnu ;
  - la norme de  $\vec{R}_T$  vérifie  $\|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\|$  où  $f_s$  est le **coefficient de frottement statique**.

✧ De manière générale,  $f_d \leq f_s$ .



### Bon à retenir

Sauf précision contraire, les coefficients de frottements statique et dynamique sont considérés égaux.

### ★ fils et poulies idéaux



### Bon à retenir

Un fil est **idéal** lorsqu'il est :

- sans masse ;
- inextensible ;
- infiniment souple.



### Bon à retenir

Une poulie est **idéale** lorsque :

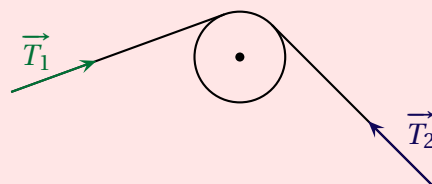
- elle est de masse nulle ;
- elle ne frotte pas en tournant autour de son axe ;
- le fil qui l'entoure ne glisse pas en s'enroulant ou en se déroulant.

👉 *Remarque.* Comme le fil ne glisse pas dans la gorge de la poulie, c'est qu'il y a *nécessairement* des frottements.



### Loi

Un fil exerce une force dans sa direction, dirigée vers lui et de norme **inconnue**.  
De plus, lorsque fils et poulie sont idéaux, la norme est identique à chaque extrémité.



$$\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\|$$

## II.2 – Lois de NEWTON

### II.2.i – 1<sup>re</sup> loi, ou principe d'inertie

#### ★ énoncé



#### Loi

Il existe des référentiels dits *galiléens* dans lesquels tout point matériel a une trajectoire rectiligne uniforme si et seulement si la résultante des forces qu'il subit est nulle.



Attention à la formulation de ce principe, (trop) souvent maltraité. En effet, la plupart du temps, l'énoncé est *démontrable* avec la 2<sup>e</sup> loi. Ce qui est **absurde** pour une loi dite fondamentale.

#### ★ utilisation

✧ Nous utiliserons cette loi uniquement pour savoir si un référentiel est galiléen ou non, puisqu'elle implique, entre autre, le résultat suivant.



#### Bon à retenir

Un référentiel est galiléen si et seulement s'il est en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen.

✧ Après, se posera la question du « premier » référentiel galiléen.

### II.2.ii – 2<sup>e</sup> loi, ou principe fondamental de la dynamique

#### ★ énoncé

✧ Voici la version fondamentale, qui s'applique uniquement à un point matériel.



#### Loi

Dans un référentiel galiléen, pour tout point matériel  $M$  de masse  $m$  subissant les forces  $\vec{f}_i$ , nous pouvons écrire :

$$\sum \vec{f}_i = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \quad \text{où} \quad \vec{p}(t) = m \vec{v}(t)$$

$\vec{p}(t)$  est appelée la *quantité de mouvement*.

✧ Et voici la version « théorème du centre d'inertie », qui s'applique à un système  $\mathcal{S}$  quelconque.



#### Loi

##### THÉORÈME DU CENTRE D'INERTIE (TCI)

Pour un système  $\mathcal{S}$  quelconque, dans un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen

$$\frac{d\vec{p}(\mathcal{S}, t)}{dt} = \sum \vec{f}_{\text{ext}} \quad \text{où :}$$

$\sum \vec{f}_{\text{ext}}$  est la résultante des forces exercée par l'extérieur sur le système  $\mathcal{S}$  considéré.

✧ En tant que théorème, il se *démontre*, c'est là la grande différence avec la version précédente.

✧ La « surprise » de ce théorème est que les actions intérieures ne comptent pas !

✧ En pratique il arrivera d'appeler « principe fondamental de la dynamique » un « théorème du centre d'inertie. »

👉 *Remarque.* Ce théorème est aussi appelé « théorème de la quantité de mouvement » (QDM).

## ★ utilisation

- ✧ Historiquement cette loi a été un tournant, une révolution. Elle a permis, à partir de principes d'une simplicité extrême, de *démontrer* les lois de KÉPLER trouvées quelques années auparavant.
- ✧ Théoriquement, son utilité est évidente : c'est à partir de cette loi que tous les mouvements peuvent se prévoir.
- ✧ Philosophiquement, cette loi pose un problème d'interprétation en terme de « cause / conséquence » puisque forces et accélérations sont *simultanées*.
- ✧ Techniquement, cette loi :
  - est une loi vectorielle donc fournit, par projection, 3 équations ;
  - présente souvent des forces inconnues (les forces de liaison).
- ✧ Concrètement, nous utiliserons cette loi :
  - quand les autres méthodes (énergétique, moment cinétique) ne conviennent pas ;
  - lorsqu'il faudra trouver une force.

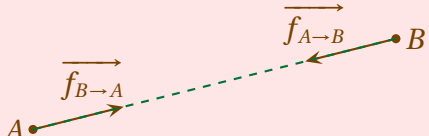
II.2.iii – 3<sup>e</sup> loi, ou principe des actions réciproques

## ★ énoncé

**Loi**

Lorsque deux points matériels sont en interaction, alors :

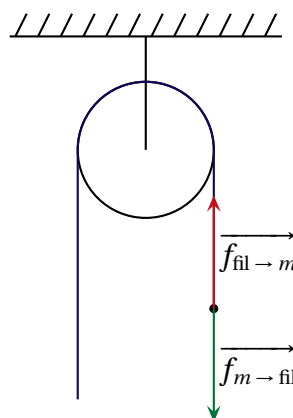
$$\vec{f}_{A \rightarrow B} = -\vec{f}_{B \rightarrow A} \quad \text{et} \quad \vec{f}_{A \rightarrow B} \parallel \vec{AB}$$



- ☞ *Remarque.* Cette loi aussi, comme la 1<sup>re</sup>, est souvent mal connue puisqu'il est fréquent d'oublier le « et  $\vec{f}_{A \rightarrow B} \parallel \vec{AB}$  » qui n'est, en aucun cas, sous-entendu par  $\vec{f}_{A \rightarrow B} = -\vec{f}_{B \rightarrow A}$ .

## ★ intérêt

- ✧ D'un point de vue théorique, elle est aussi fondamentale que les deux autres puisqu'elle permet de décrire les *interactions*.
- ✧ En pratique, c'est cette loi qui nous permettra de passer d'un sous-système à un autre.
- ✧ Sur l'exemple suivant, nous pouvons dire que la force que le fil exerce sur  $m$  est égale et opposée à la force que  $m$  exerce sur le fil mais qui n'est **pas** son poids (cf. exemple III.4)





## II-3 – Théorème du moment cinétique

### II-3.i – quand ? pourquoi ?

- ✧ Le théorème du moment cinétique est très souvent (voire toujours) utilisé avec les coordonnées cylindro-polaires, coordonnées « spécial rotation » rappelons-le.
- ✧ Quand utiliser l'approche en terme de moment cinétique ?
  - lorsqu'il n'y a qu'un point matériel, ce n'est pas obligatoire, le PFD projeté sur  $\vec{u}_\theta$  « marche » tout aussi bien ;
  - lorsqu'il y a un solide qui tourne, ce théorème est **indispensable**.

### II-3.ii – énoncés

#### ★ version vectorielle

### Loi

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE (TMC)

Soit un système  $\mathcal{S}$  quelconque, un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen et un point  $A$  fixe. Alors

$$\frac{d\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(\mathcal{S}, t)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{\text{ext}}) \quad \text{où :}$$

- $\vec{\sigma}_{A|\mathcal{R}}(\mathcal{S}, t)$  est le moment cinétique de  $\mathcal{S}$  par rapport à  $A$  ;
- $\sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{\text{ext}}) = \sum \overrightarrow{AM}_{\text{qui subit } \vec{f}} \wedge \vec{f}_{\text{ext}}$  est la résultante des moments par rapport à  $A$  des forces exercées par l'extérieur sur  $\mathcal{S}$ .

- ✧ Ici, contrairement au TCI (voir page 31), il est **fondamental** de savoir quel point subit la force. Inutile de dire qu'un (beau !) schéma prend alors une importance considérable.
- ✧ L'avantage de cette méthode est d'être 100 % vectorielle : écrire les vecteurs, poser les produits vectoriels, remplacer, agiter, calculer, c'est terminé, même pas besoin de laisser reposer.
- ✧ L'inconvénient de cette méthode est d'être 100 % vectorielle : entre les projections et les calculs, il est, non seulement, possible de se tromper mais, en plus, l'interprétation physique est davantage mise de côté.

#### ★ version scalaire

#### 🕒 le théorème

### Loi

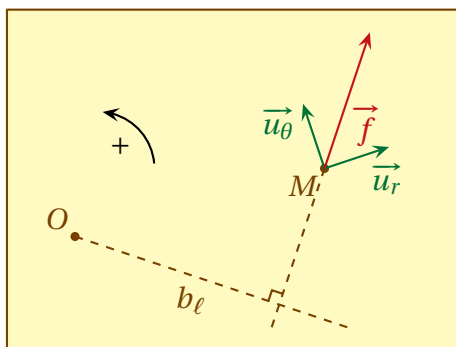
THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE SCALAIRE (TMCS)

Soit un système  $\mathcal{S}$  quelconque, un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen et un axe  $\Delta$  fixe. Alors

$$\frac{d\sigma_{\Delta}(\mathcal{S}, t)}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}_{\text{ext}}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}) = \pm \|\vec{f}\| \times \text{bras de levier}$$

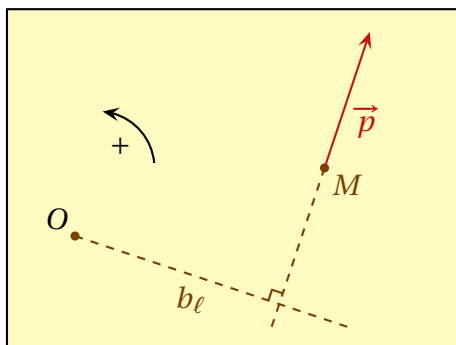
#### 🕒 calculer un moment scalaire

- ✧ Imaginons la situation suivante



- ⇨ Pour calculer le moment scalaire de la force, il faut :
  - orienter l'espace de rotation ;
  - écrire  $\mathcal{M}_\Delta = \pm \|f\| \times b_\ell$  avec  $b_\ell$  le bras de levier ;
  - trouver le bon signe : le moment total est *positif* lorsque la force a tendance à faire tourner dans le sens de rotation choisi et est *négatif* sinon <sup>4</sup>.
- ⇨ Dans l'exemple précédent, le moment scalaire s'écrit  $\mathcal{M}_\Delta = + \|f\| \times b_\ell$ .
- ⇨ Remarquons qu'il est en de même pour le moment cinétique, qui est à la quantité de mouvement ce que le moment d'une force est à une force.

39



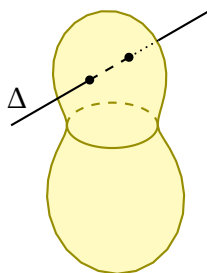
⇨ Nous avons dans l'exemple précédent

$$\sigma_{\Delta(M)} = \pm p \times b_\ell \quad \overset{\text{ici}}{\rightsquigarrow} \quad \sigma_{\Delta(M)} = + p \times b_\ell \tag{II.2}$$

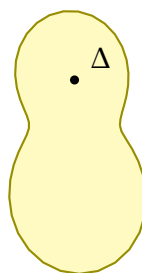
### II.3.iii – Actions d'axe

#### ★ support

⇨ Considérons un solide en rotation autour d'une tige rigide et fixe.



vue en perspective



vue de face

4. Attention de ne pas confondre « positif » et « signe + ». C'est une erreur classique!

- ✧ Cette tige devient, de fait, un axe de rotation.
- ✧ Cet axe a deux rôles **distincts**.
- ✧ Il doit tout d'abord supporter l'objet et, pour cela, il exerce une force de contact *a priori inconnue*. Pour trouver cette force, rien de tel qu'un bon TCI. Sauf que, à moins d'avoir une question spécifique dessus, nous ne le ferons jamais, puisque ce qui sera intéressant c'est l'aspect rotation et non le fait qu'il ne tombe pas.
- ☞ *Remarque*. Insistons, au passage, sur le fait que cette force n'a aucune raison d'être « égale et opposée » au poids ! D'ailleurs, la plupart du temps, c'est totalement faux.
- ✧ La tige peut aussi influencer la rotation en la créant (axe moteur), en la freinant (frottement) ou en étant complètement neutre (liaison parfaite). Dans tous les cas, il est fondamental de connaître *a priori* le rôle de la tige pour pouvoir écrire le TMCS.

### ★ couple

#### 🕒 définitions

- ✧ Lorsqu'il y a un axe qui maintient un solide, il y a toujours une partie « fixe » et une partie « mobile ».

45



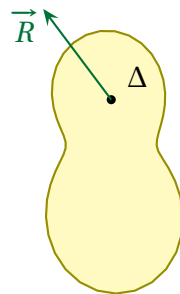
#### Définition

Dans un dispositif avec une liaison pivot, la partie fixe est appelée *stator* et la partie mobile *rotor*

- ✧ C'est le stator qui exerce des forces sur le rotor. Ces forces peuvent être motrices (comme dans le cas d'un moteur) ou résistantes (lorsqu'il y a des frottements) ou « neutres » (s'il n'y a pas de frottement).
- ✧ La force, ou les forces, que le stator exerce sur le rotor n'est pas forcément de résultante nulle<sup>5</sup>, mais cela importe peu : ce qui va compter, c'est essentiellement l'effet sur la rotation.

#### 🕒 une modélisation trompeuse

- ✧ La modélisation des actions de contact par une force unique s'exerçant au niveau de l'axe est trompeuse.

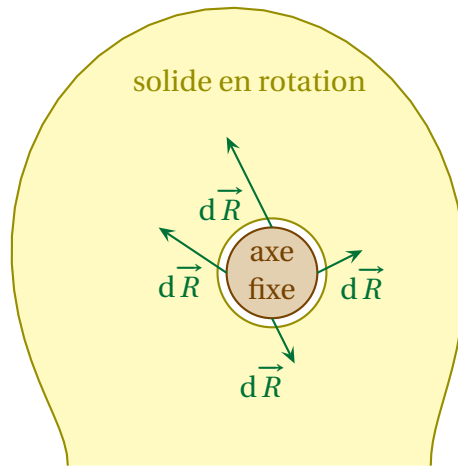


- ✧ En effet avec le schéma précédent, il est tentant d'écrire

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}) = \text{bras de levier} \times f = 0 \times f = 0 \quad (\text{II.3})$$

- ✧ Or le moment n'est pas forcément nul !
- ✧ En effet, si le bras de levier **semble** nul, c'est uniquement parce qu'à l'échelle du dessin, l'axe est représenté comme un point. Sauf que ce n'est pas un point ! Zoomons.

5. En situation de repos, ces forces doivent, au moins, compenser le poids.



- ✧ Avec la vue précédente, nous pouvons aisément constater que les bras de levier associés aux forces qui s'exercent n'est pas vraiment tout à fait nul. Et cela change tout !
- ✧ C'est pourquoi, pour une fois, il ne faut pas raisonner avec le schéma mais raisonner avec le bon sens et se poser la question : quelle est l'influence de la tige (ou de l'axe) sur la rotation du solide ?

**notion de couple**

43

**Définition**

Un *couple* (ou *couple de forces*) est un ensemble de forces de résultante nulle mais de moment par rapport à un axe non nul.  
 Par extension, le *couple* est le moment d'un couple de forces.

- ✧ Pour décrire l'ensemble des actions qu'une tige exerce sur un solide il faut donc, normalement, donner deux choses :
  - la force de contact au niveau de la tige ;
  - le couple exercée par la tige sur le solide.
- ✧ En pratique nous ne nous intéresserons qu'au moment **scalaire** du couple qu'une tige peut exercer sur un solide en rotation autour d'elle.

**couples à connaître**

44

**Définition**

Une *liaison pivot* est une liaison qui n'autorise que la rotation du rotor par rapport au stator.

- ✧ Les exemples sont nombreux :
  - les portes ;
  - les roues d'une voiture ;
  - les feuilles d'un cahier à spirale...
- ✧ Contre exemple classique : les liaisons de type « vis » qui avancent tout en tournant.
- ✧ Avant toute chose, rappelons le bon sens : le couple exercé par une tige sur l'objet en rotation correspond à l'influence qu'a la tige sur la rotation.
- ✧ Dans les exemples qui suivent le couple est donné scalairement et correspond à l'effet qu'il engendre sur la rotation autour de l'axe.

**Loi**

Dans le cas d'une liaison parfaite (dite aussi « sans frottement »), le couple est nul.

$\Gamma_{\Delta} = 0$

**Loi**

Dans le cas d'un couple de rappel (comme avec un fil de torsion), le couple s'écrit

$$\Gamma_{\Delta} = -C(\theta - \theta_0)$$

**Bon à retenir**

Dans le cas d'un couple résistant (liaison un peu « grippée »), le couple s'écrit

$$\Gamma_{\Delta} = -h\Omega$$

**Bon à retenir**

Dans le cas d'un couple moteur (tige reliée à une machine), le couple s'écrit

$$\Gamma_{\Delta} = \Gamma_m^{\text{svt}} = C^{\text{te}}$$

## II.4 – Approche énergétique

✧ Il s'agit là d'une approche très puissante et à privilégier **de manière impérative** lorsque le problème est à un degré de description et en régime libre.

### II.4.i – Énergie cinétique

#### ★ les deux versions

**Loi**

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE (TEC)

Soit  $\mathcal{S}$ , un système quelconque et deux états « début » et « fin » quelconques (avec  $B$  postérieur à  $A$ ) alors, dans un référentiel galiléen,

$$E_c(\mathcal{S}, \text{fin}) - E_c(\mathcal{S}, \text{début}) = \sum W(\vec{f}_{\text{ext}}) + \sum W(\vec{f}_{\text{int}})$$

59

**Loi**

THÉORÈME DE LA PUISSANCE CINÉTIQUE (TPC)

Soit  $\mathcal{S}$ , un système quelconque alors, dans un référentiel galiléen,


$$\frac{dE_c(\mathcal{S}, t)}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{ext}}) + \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{int}}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}_{(M_{\text{qui subit } \vec{f}})}$$

**STOP** Ne surtout pas oublier le « qui subit  $\vec{f}$  » pour déterminer le point qui « reçoit » l'énergie.

28

**Définition**

Une force qui fournit un travail  $W(\vec{f}_{\text{int}})$  positif (resp. négatif) est dite *motrice* (resp. *résistante*).

 Ne pas confondre « force résistante » et « frottement », car même s'il est vrai que ces deux notions vont souvent de paire, elles sont indépendantes : des forces autres que les forces de frottement peuvent très bien être résistantes (comme le poids lors d'une montée) et les forces de frottement peuvent très bien être motrices (entraînement par le vent, sur les tapis de caisse de supermarché...).

### ★ système déformable

- ✧ Les théorèmes précédents font apparaître des grandeurs « intérieures ».
- ✧ Dans ces conditions, il est **impératif** de définir explicitement le système étudié car, telle action peut être « intérieure » ou « extérieure » suivant le choix du système.
- ✧ En pratique, nous avons le résultat suivant

60



#### Loi

Pour un système indéformable, la puissance (et donc le travail) fournie par les interactions intérieures est constamment nulle.



#### Bon à retenir

*Un système indéformable est constitué soit d'un et un seul point matériel soit d'un et un seul solide.*

- ✧ Un système est donc déformable dès lors qu'il contient :
  - au moins deux solides articulés ;
  - un ressort (auquel cas le travail des interactions intérieures est conservatif) ;
  - deux points matériels (comme, par exemple, le système { Terre, Lune }).

### ★ quelle version ? quand ?

29

- ✧ Le théorème de la puissance cinétique est une vision locale au sens temporelle (autrement « instantanée ») des échanges énergétiques.
- ✧ Nous utiliserons donc cette version lorsque nous chercherons une équation différentielle.
- ✧ Le théorème de l'énergie cinétique, c'est tout le contraire : son expression ne fait plus apparaître la notion de temps.
- ✧ Nous utiliserons donc le TEC lorsque nous voudrons faire des bilans énergétiques sans préoccupation de durée.

### ★ calculer le travail fourni par une force

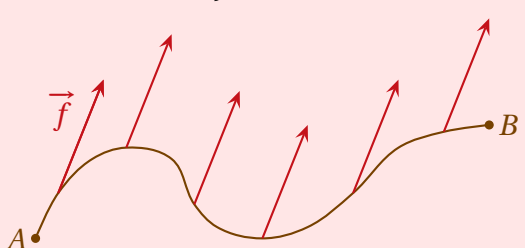
- ✧ Il y a bien sûr la définition du travail fourni par une force

$$W_{AB}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad (\text{II.4})$$

- ✧ Cette relation est la plupart du temps assez lourde à utiliser et inutile.
- ✧ Il vaut mieux connaître les quelques cas particuliers.

**Loi**

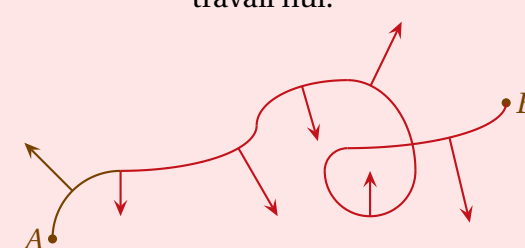
Un point matériel reçoit de la part d'une force vectoriellement constante  $\vec{f}$  entre deux points  $A$  et  $B$  de sa trajectoire le travail :



$$W_{AB} = \vec{f} \cdot \vec{AB}$$

**Loi**

Un point matériel reçoit de la part d'une force  $\vec{f}$  constamment orthogonale à la trajectoire un travail nul.

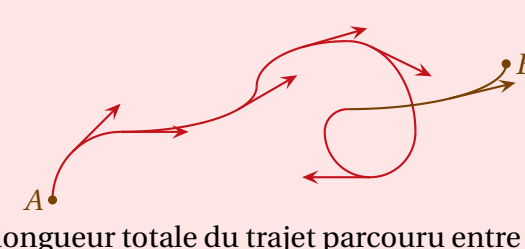


$$W_{AB} = 0$$

**STOP** La réaction  $\vec{R}_N$  ne travaille pas que si le support est **immobile**.

**Loi**

Un point matériel reçoit de la part d'une force  $\vec{f}$  constamment parallèle à la trajectoire et d'intensité constante le travail :



$$W_{AB} = \pm \ell_{AB} f \text{ où } \ell_{AB} \text{ est la longueur totale du trajet parcouru entre } A \text{ et } B \text{ et le signe dépendant du caractère moteur ou résistant de la force.}$$

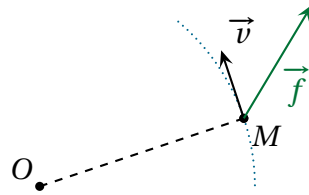
★ **aspect énergétique pour la rotation**

**Loi**

Le travail élémentaire et la puissance fournis par une force (ou un couple) s'écrivent

$$\delta W = \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) d\theta \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) \times \Omega$$

✧ Démontrons ce résultat en ne considérant qu'un point du solide : celui qui subit la force  $\vec{f}$ .



- ✧ Comme  $m$  fait partie d'un solide qui tourne autour d'un axe passant par  $O$ , il aura une trajectoire circulaire, ce qui permet d'écrire son déplacement élémentaire sous la forme  $\vec{d}r = r d\theta \vec{u}_\theta$ .
- ✧ Dès lors, l'énergie reçue par  $m$  – et donc fournie par  $\vec{f}$  – s'écrit

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{f} \cdot \vec{d}r \\ &= (f_r \vec{u}_r + f_\theta \vec{u}_\theta) \cdot (r d\theta \vec{u}_\theta) \\ &= r f_\theta d\theta \end{aligned}$$

- ✧ Et comme  $r f_\theta$  est le moment de la force, nous obtenons bien le résultat.

### ★ travail des interactions intérieures



#### Loi

Le travail fourni par une interaction intérieure à un système est une grandeur intrinsèque, c'est-à-dire une grandeur qui ne dépend pas du référentiel choisi.

- ✧ Comme il s'agit là d'une grandeur intrinsèque, nous pourrions l'interpréter physiquement.
- ✧ En revanche nous ne calculerons que rarement la puissance fournie par une telle interaction, nous utiliserons dans quasiment tous les cas un des résultats qui suit.
- ✧ Insistons : il n'est pas si « évident » de calculer la puissance fournie par les interactions intérieures car l'écriture  $\mathcal{P}(\vec{f}_{1 \rightarrow 2})$  comprend **deux** termes, à savoir les deux actions dites « réciproques »

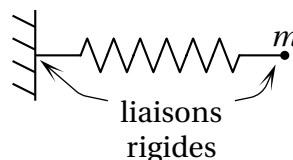
$$\mathcal{P}(\vec{f}_{1 \rightarrow 2}) = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2 + \vec{f}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1 \quad (\text{II.5})$$

### 🔗 deux points liés – liaison totale



#### Loi

Lorsque deux points sont rigidement liés, le travail de l'interaction de contact entre les deux est nul.



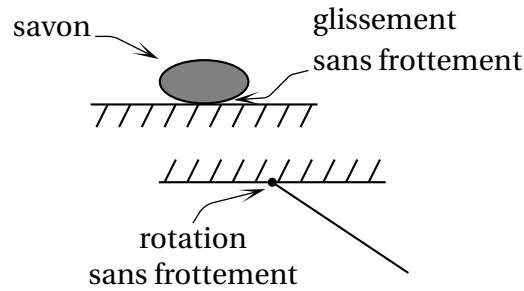
### 🔗 glissement sans frottement



#### Loi

Lorsque deux points sont reliés par une liaison sans frottement (contact plan, liaison pivot...), le travail de l'interaction est nul.





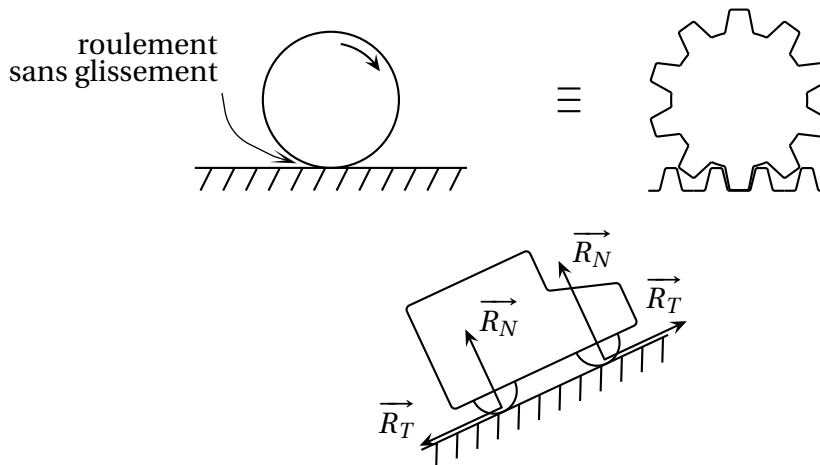
**STOP** C'est bien le travail fourni par **l'interaction** qui est nul car il est tout à fait possible de trouver un exemple de réaction sans frottement de travail non nul. Exemple : le travail de la force de contact sol → bonhomme dans un ascenseur.

**frottement sans glissement**

**Loi**

Le travail fourni par une interaction de contact avec frottement sans glissement (ou « roulement sans glissement ») est nul.

✧ C'est un résultat très utilisé en mécanique du solide pour tout ce qui est cylindre qui roule ou autre.



**II.4.ii – Énergie potentielle**

★ **force conservative**

31

**Définition**

Une force est dite *conservative*, lorsque le travail qu'elle fournit à un point matériel ne dépend pas de la trajectoire de ce dernier, mais uniquement des positions initiale et finale du point matériel.

✧ L'énergie potentielle est une énergie de *position* : donnez-moi une photo d'une situation, sans me dire ni ce qui bouge ni les conditions initiales, et je vous donnerai les énergies potentielles.

**Définition**

À chaque force conservative est associée une *énergie potentielle*  $E_p(M)$  ne dépendant que de la position et telle que :

- la force s'écrit  $\vec{f} = -\text{grad } E_p$  ;
- le travail fourni entre A et B s'écrit  $W_{AB} = -\Delta E_p = -(E_p(B) - E_p(A))$ .

✧ Une énergie *potentielle* s'appelle précisément ainsi parce qu'elle peut *potentiellement* devenir de l'énergie cinétique.

✧ Ainsi, dans les cas rares où l'expression d'une force (typiquement une force de frottement constante) permet de déterminer une énergie potentielle qui vérifie  $\vec{f} = -\vec{\text{grad}} E_p$ , sans que celle-ci ne puisse redevenir de l'énergie cinétique quels que soient la situation et les conditions initiales, alors nous n'appellerons pas celle-ci « énergie potentielle ».



### Bon à retenir

Conventionnellement, lorsque c'est possible, les énergies potentielles sont choisies nulles là où les forces le sont.

$$E_p(\vec{r}_0) = 0 \quad \text{pour } \vec{r}_0 \text{ tel que } \vec{f}(\vec{r}_0) = \vec{0}$$

### ★ le gradient



#### Définition

Le *gradient* est un opérateur vectoriel qui transforme un champ scalaire en champ vectoriel.



#### Loi

Soit un champ scalaire  $E_p(M)$  quelconque ; alors :

$$\vec{\text{grad}} E_p(M) \cdot d\vec{r} = dE_p$$



#### Loi

En coordonnées cartésiennes, le gradient s'écrit :

$$\vec{\text{grad}} E_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_p}{\partial x} \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{u}_z$$



#### Loi

En coordonnées cylindro-polaires, le gradient s'écrit :

$$\vec{\text{grad}} E_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_p}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{u}_z$$

**Loi**

En coordonnées sphériques, le gradient s'écrit :

$$\vec{\text{grad}} E_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_p}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

**Loi**

Quelles que soient les énergie potentielles  $E_{p1}(M)$  et  $E_{p2}(M)$ , nous pouvons écrire, avec  $\lambda = C^{te}$  :

$$\vec{\text{grad}} (\lambda E_p(M)) = \lambda \vec{\text{grad}} (E_p(M))$$

$$\vec{\text{grad}} (E_{p1}(M) + E_{p2}(M)) = \vec{\text{grad}} (E_{p1}(M)) + \vec{\text{grad}} (E_{p2}(M))$$

★ énergie potentielle et équilibre

34

✧ C'est sans contestation possible la méthode à utiliser lorsque la situation :

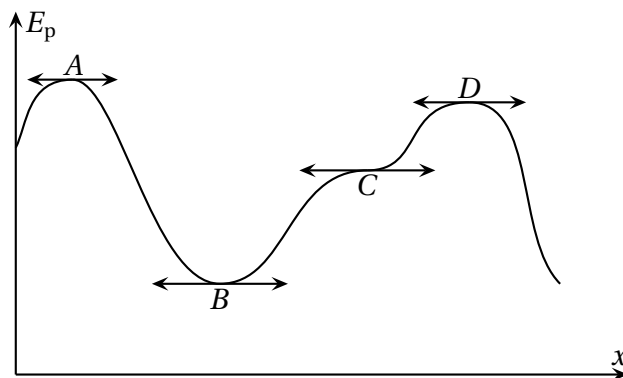
- est à un degré de description ;
- est en régime libre ;
- a des forces de frottement nulles à l'équilibre (donc *sans* frottement solide).

**Loi**

Les positions d'équilibre d'un point matériel possédant l'énergie potentielle  $E_p$  sont les points de l'espace où cette énergie potentielle est stationnaire.

**Bon à retenir**

*Les positions d'équilibre stables correspondent à des points où l'énergie potentielle est localement minimale.*



✧ La plupart du temps, la stabilité en un point  $x_0$  se prouve en calculant la dérivée seconde et en prouvant que

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_0) > 0 \tag{II.6}$$

- ✧ Il ne s'agit toutefois pas là d'une condition nécessaire, tout juste est-elle suffisante.
- ✧ Le lecteur montrera ainsi que, avec  $E_0$  une énergie et  $a$  une longueur, l'énergie potentielle suivante admet  $x = 0$  comme point d'équilibre stable, alors que  $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(0) = 0$

$$E_p(x) = E_0 \times \frac{x^4}{a^4} \quad (\text{II.7})$$

### ★ interaction conservative



#### Bon à retenir

⋈ L'énergie potentielle associée à des interactions intérieures n'est pas extensive.

- ✧ En effet, considérons deux points entre lesquels règne une interaction gravitationnelle.
- ✧ Nous avons envie d'écrire :

→ Pour  $\mathcal{S} = \{M_1\}$ , l'énergie potentielle s'écrit  $E_{p1} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$  ;

→ Pour  $\mathcal{S} = \{M_2\}$ , l'énergie potentielle s'écrit  $E_{p2} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$  ;

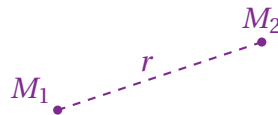
→ Pour  $\mathcal{S} = \{M_1 + M_2\}$ , l'énergie potentielle s'écrit  $E_{p,int} = -G \frac{m_1 m_2}{r} \neq E_{p1} + E_{p2}$ .



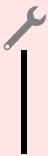
#### Loi

Pour les interactions, il ne faut compter qu'une seule fois l'énergie potentielle.

- ✧ Le paradoxe vient du fait qu'en réalité, l'expression de  $E_{p1}$  au dessus n'est valable **uniquement si**  $M_2$  est fixe.
- ✧ De même  $E_{p2}$  n'est valable que si et seulement si  $M_1$  est fixe.
- ✧ En revanche  $E_{p,int}$  est toujours juste.



### ★ cas du ressort



#### Loi

L'énergie potentielle interne contenue dans un ressort s'écrit

$$E_{p,int,él} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$$

- ✧ Considérons un cas usuel, un ressort avec deux masses fixées aux extrémités. Alors :
- l'interaction  $\vec{f}_{M_1 \leftrightarrow \text{ressort}}$  est une liaison rigide de travail nul ;
- l'interaction  $\vec{f}_{M_2 \leftrightarrow \text{ressort}}$  est une liaison rigide de travail nul ;
- le ressort possède de manière intrinsèque l'énergie potentielle  $E_{p,él} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$ .

## II.4.iii – Énergie mécanique

## ★ énoncés

**Loi**

## THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE (TEM)

Soit  $\mathcal{S}$ , un système quelconque et deux états « début » et « fin » quelconques (avec  $B$  postérieur à  $A$ ) alors, dans un référentiel galiléen,

$$E_m(\mathcal{S}, \text{fin}) - E_m(\mathcal{S}, \text{début}) = \sum W(\vec{f}_{\text{ext,nc}}) + \sum W(\vec{f}_{\text{int,nc}}) \quad \text{où}$$

→  $E_m = E_c + E_{p,\text{ext}} + E_{p,\text{int}}$  ;

→ « nc » signifie « non conservative ».

**Loi**

## THÉORÈME DE LA PUISSANCE MÉCANIQUE (TPM)

Soit  $\mathcal{S}$ , un système quelconque alors

$$\frac{dE_m(\mathcal{S}, t)}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{ext,nc}}) + \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{int,nc}})$$

## ★ intérêt

- ✧ Pour un problème de *mécanique*, les théorèmes de la puissance *mécanique* et de l'énergie *mécanique* sont évidemment plus adaptés.
- ✧ La différence entre la version « puissance » et la version « énergie » est la même que pour les versions cinétiques : la première est plus rapide pour trouver une équation différentielle et la seconde pour faire un bilan.

## III – Exemples

### III.1 – Lire un plan de phase

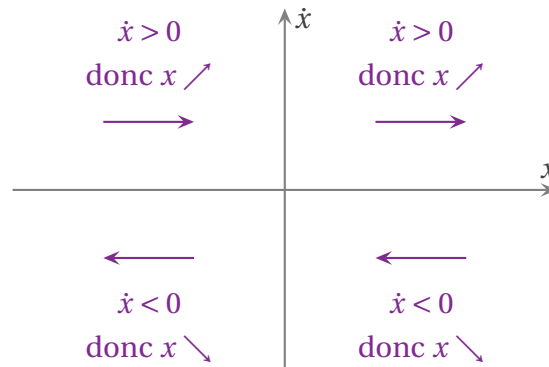
#### III.1.i – présentation



#### Définition

Le *plan de phase* est le plan qui permet de représenter la vitesse en fonction de la position.

✧ Les trajectoires vont forcément dans une certaine direction suivant le cadran.



#### Bon à retenir

ζ Dans le plan de phase, les trajectoires tournent globalement dans le sens horaire.



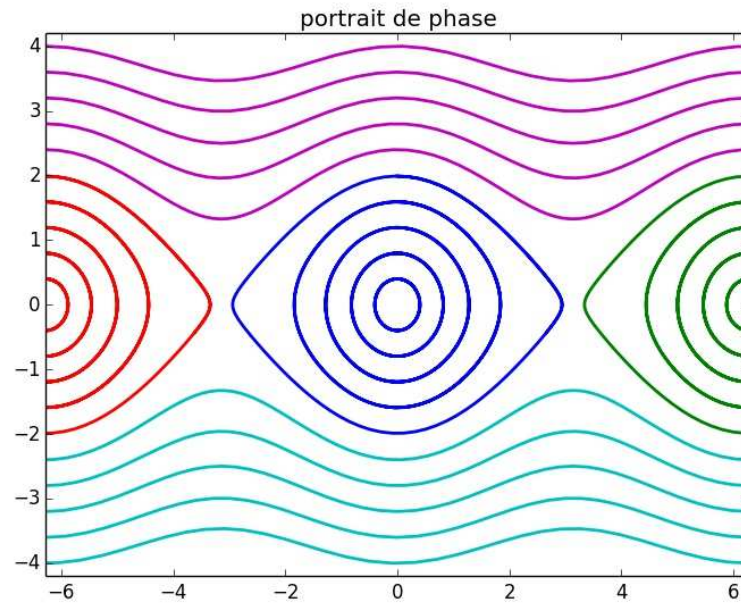
#### Bon à retenir

ζ Dans le plan de phase, les points de vitesse nulle sont situés sur l'axe des abscisses.

#### III.1.ii – caractères à repérer

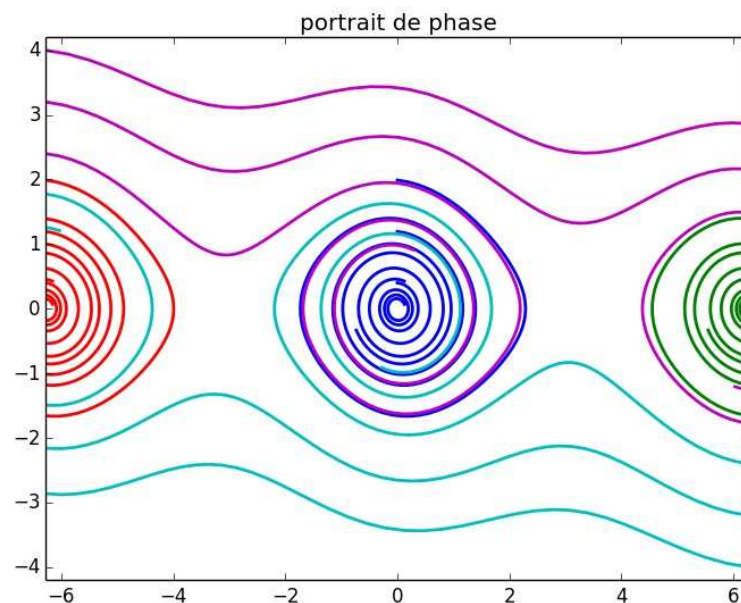
✧ Faisons-le sur des exemples<sup>6</sup>.

6. Programme : `meca01_portraits_phase.py`



✧ Sur ce plan de phase, nous pouvons voir :

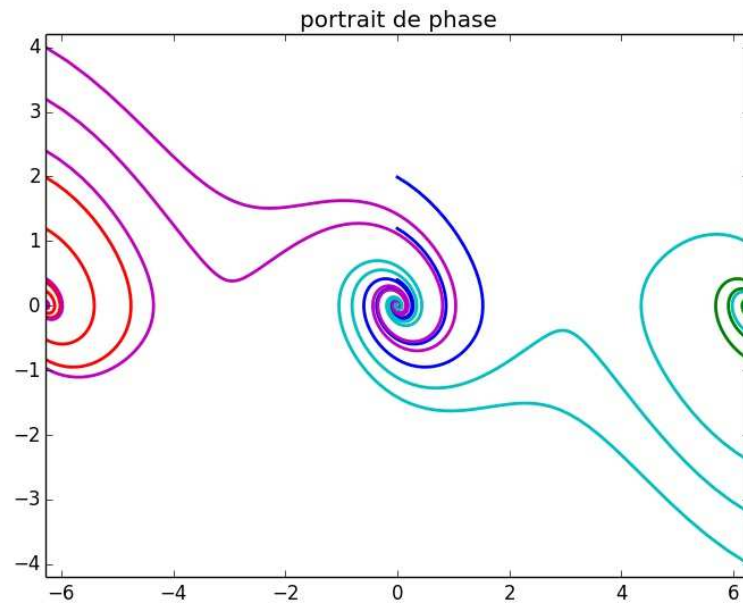
- que les courbes sont fermées, le régime est donc périodique ;
- que les petites boucles sont des ellipses, l'évolution est donc sinusoïdale à faible amplitude ;
- globalement, de nombreuses conditions initiales permettent un état lié puisque de nombreuses trajectoires ne partent pas à l'infini ;
- nous pouvons constater aussi que le régime est libre puisqu'aucune trajectoire n'en croise une autre ;
- libre et périodique nous fait dire qu'il n'y a pas de frottement.



✧ La situation est différente ici :

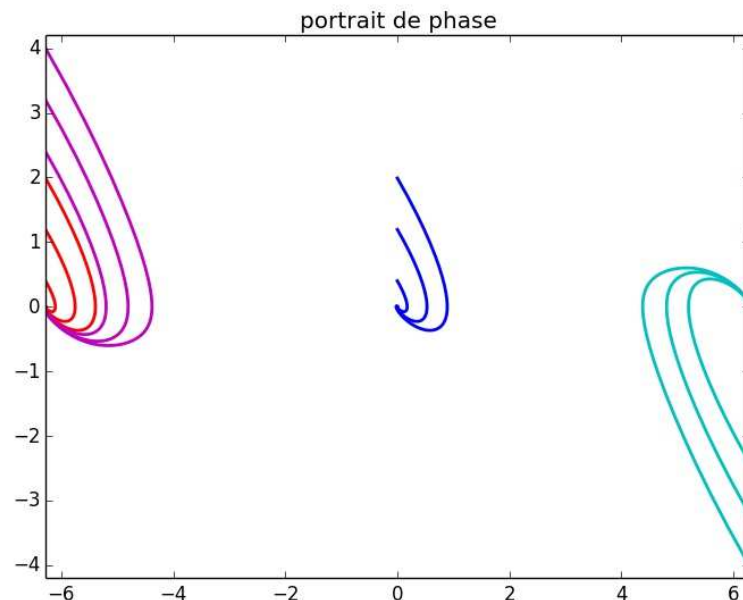
- il y a des frottements, nous voyons apparaître des points attracteurs (points d'équilibre stable) ;
- au vu du nombre d'oscillations, nous pouvons dire que le facteur de qualité est de l'ordre d'une petite dizaine ;

→ le régime est toujours libre puisque qu'aucune trajectoire n'en coupe une autre.



✧ Ici, nous pouvons dire que :

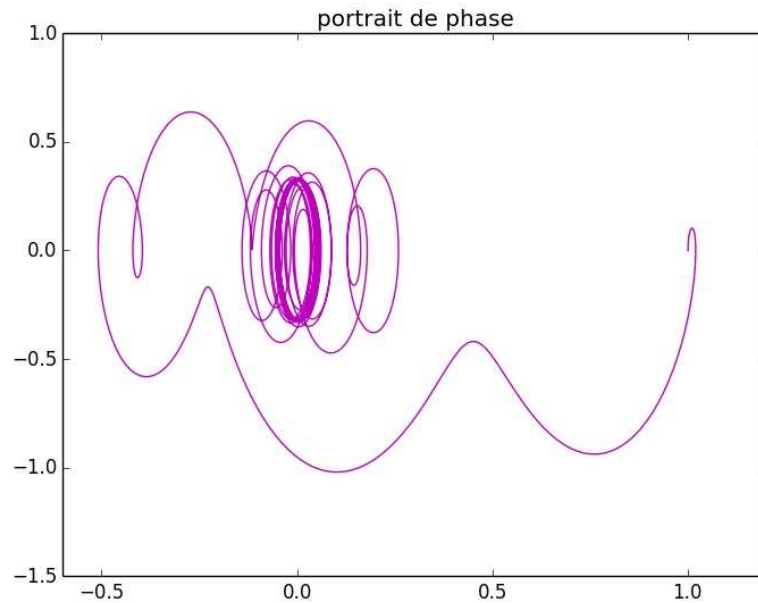
- le régime est toujours libre puisque qu'aucune trajectoire n'en coupe une autre ;
- il y a encore plus de frottements, le facteur de qualité étant de l'ordre de 1 ou 2.



✧ Ici, nous pouvons affirmer que :

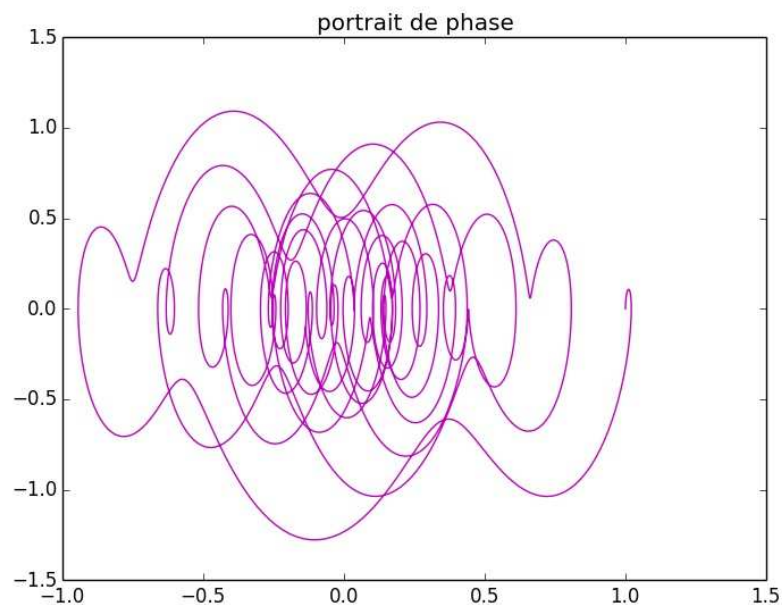
- le régime est toujours libre puisque qu'aucune trajectoire n'en coupe une autre ;
- il y a tellement de frottements qu'il n'y a plus d'oscillation, le régime est aperiodique.





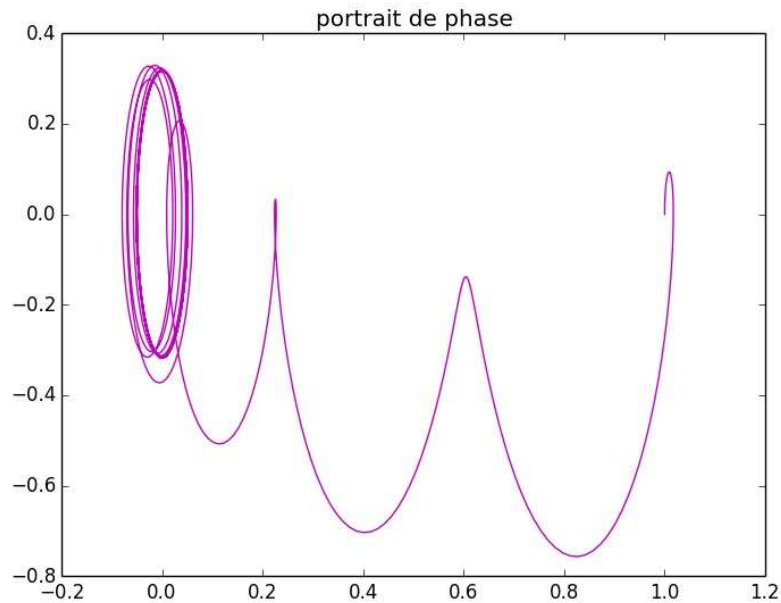
✧ Ici, nous pouvons affirmer que :

- le régime n'est plus libre puisque la trajectoire se coupe ;
- nous voyons apparaître un cycle limite qui est caractéristique d'une contrainte périodique ;
- le cycle limite n'est pas atteint très rapidement, il semble ne pas y avoir beaucoup de frottements.



✧ Ici, nous pouvons affirmer que :

- le régime n'est plus libre puisque la trajectoire se coupe ;
- le cycle limite n'est toujours pas atteint, ce qui signifie que l'amortissement, s'il existe, doit être très faible.



✧ Enfin, pour ce dernier plan de phase, nous pouvons affirmer que :

- le régime n'est plus libre puisque la trajectoire se coupe ;
- le régime périodique est atteint rapidement, l'amortissement est fort ;
- en admettant que l'excitation soit sinusoïdale, nous pouvons constater que le cycle limite est elliptique, ce qui correspond à une réponse sinusoïdale aussi ; le dispositif a de bonnes chances d'être linéaire.

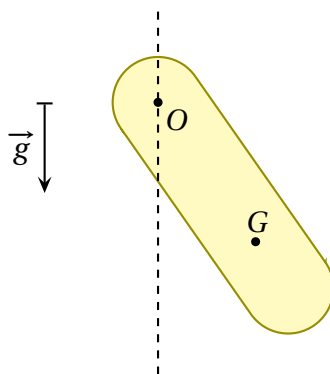
## III.2 – pendule grave

### III.2.i – situation, analyse

50

✧ Considérons un pendule grave<sup>7</sup> en rotation autour d'une tige.

✧ La liaison se fait avec des frottements mais les frottements de l'air sont négligés.



✧ Quelle est l'équation différentielle régissant le mouvement ?

✧ Analyse physique :

- il s'agit d'un dispositif à un degré de liberté (liaison pivot) donc à un seul degré de description. De plus l'évolution est libre **mais** non conservative (frottements) ;
- les grandeurs pertinentes sont :  $J_{\Delta}$  et  $m$  (inertie),  $\ell$  et  $\alpha$  (géométrie),  $g$  et  $h$  pour les actions. Il n'y a pas ici ni de conditions initiales, ni de contraintes particulières.

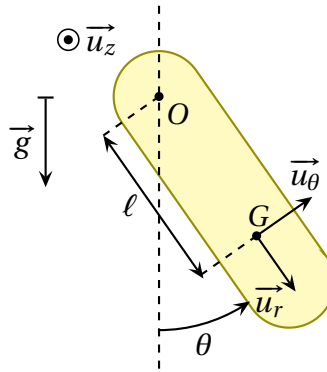
7. « grave » vient de « gravitation ». Il s'agit simplement d'un pendule qui oscille à cause de la pesanteur.

✧ Analyse technique :

- nous allons évidemment choisir un degré de description de rotation, donc un angle, que nous repèrerons par rapport à la verticale de sorte que la position d'équilibre naturelle (celle « stable ») soit en  $\theta = 0$  ;
- comme l'évolution n'est pas conservative, nous allons plutôt choisir une approche en TMCS.

### III.2.ii – mise en équation

✧ Commençons par un schéma.



✧ Écrivons le TMCS par rapport à l'axe  $\Delta$  fixe dans le référentiel pour le système { pendule }.

✧ Le système subit deux forces *extérieures* :

- force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = m g (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$  ;
- action de l'axe : une force  $\vec{R}$  inconnue et un couple  $\vec{\Gamma}$  de frottement.

✧ Calculons le moment par rapport à l'axe  $\Delta$  du poids

42

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \left( \vec{OG} \wedge \vec{P} \right) \cdot \vec{u}_z \quad (\text{III.1})$$

$$= \ell \vec{u}_r \wedge m g (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_z \quad (\text{III.2})$$

$$= -m g \ell \sin \theta \quad (\text{III.3})$$

✧ En ce qui concerne l'action d'axe, la projection du couple sur  $\vec{u}_z$  donne, compte-tenu du fait qu'il s'agit de frottement linéaires

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z = -h \dot{\theta} \quad (\text{III.4})$$

🔥 *Remarque.* Les composantes de  $\vec{\Gamma}$  sur les autres axes de l'axe  $\vec{u}_z$  sont inconnues et *a priori* non nulles.

✧ Le TMCS par rapport à  $\Delta$  appliqué au pendule s'écrit donc

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \Gamma \quad (\text{III.5})$$

✧ Et comme le pendule est en rotation autour de l'axe fixe  $\Delta$

40

$$\sigma_\Delta = J_\Delta \dot{\theta} \quad (\text{III.6})$$

✧ En regroupant le tout nous arrivons à

$$J_\Delta \ddot{\theta}(t) = -m g \ell \sin \theta(t) - h \dot{\theta}(t) \quad (\text{III.7})$$

✧ Ce qui donne, sous forme canonique,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + \frac{h}{J_\Delta} \frac{d\theta}{dt}(t) + \frac{m g \ell}{J_\Delta} \sin \theta(t) = 0 \quad (\text{III.8})$$

### III.2.iii – interprétation

✧ Vérifions tout d'abord l'homogénéité :

- $h\dot{\theta}$  est un moment de force, comme  $mg\ell$  ;
- en terme de coefficients (et en utilisant les unités en guise de dimension).

$$\frac{mg\ell}{J_{\Delta}} \equiv \frac{\text{kg.m.m.s}^{-2}}{\text{kg.m}^2} \equiv \text{s}^{-2} \quad (\text{III.9})$$

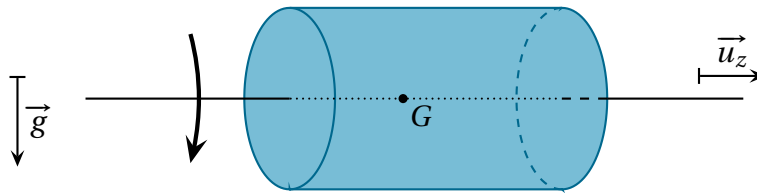
✧ D'un point de vue cohérence, nous pouvons aisément vérifier que, pour  $\theta$  petit, nous retrouvons une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants dont tous les termes sont positifs, il s'agit donc d'un mouvement non divergent.

✧ Le terme d'amortissement est en  $\frac{h}{J_{\Delta}}$  soit d'autant plus élevé que les frottements sont intenses et d'autant plus faible que l'inertie est grande. Tout ceci est normal.

## III.3 – mise en rotation d'un moteur

### III.3.i – situation, analyse

- ✧ Considérons un modèle simple de moteur qui est *la* machine tournante par excellence.
- ✧ Pour une telle machine, le centre de masse  $G$  est positionné sciemment sur l'axe de rotation. Sans une telle précaution, la machine tremblerait lors du fonctionnement, comme le font les machines à laver<sup>8</sup>.
- ✧ Représentons-la de manière simple.



- ✧ Quelle est l'équation différentielle régissant le mouvement sachant que la machine est initialement immobile ?
- ✧ Analyse physique :
  - il s'agit d'un dispositif à un degré de liberté (liaison pivot) donc à un seul degré de description. L'évolution est *forcée* donc non conservative ;
  - les grandeurs pertinentes sont :  $J_{\Delta}$  (inertie),  $\Gamma_m$  et  $h$  pour les actions. Nous pouvons d'ores et déjà nous douter que la pesanteur ne jouera aucun rôle. De plus la condition initiale étant une condition de nullité et qu'il n'y a pas de contrainte particulière, cela n'engendre pas de grandeur pertinente supplémentaire.
- ✧ Analyse technique :
  - nous allons évidemment choisir un degré de description de rotation, donc un angle, dont le repérage « exact » n'a que peu d'importance puisque ce qui va essentiellement compter c'est la vitesse de rotation ;
  - comme le dispositif n'est pas conservatif, nous allons plutôt choisir une approche en TMCS.

8. Le lecteur cherchera où, dans la vie courante, les constructeurs font exprès de ne pas mettre le centre de masse sur l'axe de rotation.

### III.3.ii – mise en équation

✧ Écrivons le TMCS par rapport à l'axe  $\Delta$  fixe dans le référentiel terrestre pour le système { moteur }.

✧ Le système subit deux forces *extérieures* :

→ force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g}$  ;

→ action de l'axe : une force  $\vec{R}$  inconnue et un couple  $\vec{\Gamma}_m$  ;

→ action de l'air : un couple de frottement proportionnel à la vitesse de rotation.

✧ Comme le centre de masse est choisi sur l'axe  $\Delta$  de rotation, le moment exercé par le poids est nul

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0 \quad (\text{III.10})$$

✧ Pour les frottements, nous avons, comme pour le pendule

$$\vec{\Gamma}_f \cdot \vec{u}_z = -h \dot{\theta}(t) \quad (\text{III.11})$$

✧ En ce qui concerne l'action d'axe, la projection du couple sur  $\vec{u}_z$  donne immédiatement

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z = \Gamma_m \stackrel{\text{ici}}{=} C^{\text{te}} \quad (\text{III.12})$$

👉 *Remarque.* Ici aussi les composantes de  $\vec{\Gamma}$  sur axes autres que l'axe  $\vec{u}_z$  sont inconnues et *a priori* non nulles.

✧ Le TMCS par rapport à  $\Delta$  appliqué au moteur s'écrit donc

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = 0 + \Gamma_m - h \dot{\theta}(t) \quad (\text{III.13})$$

✧ Et comme le moteur est en rotation autour de l'axe fixe  $\Delta$

$$\sigma_\Delta = J_\Delta \dot{\theta} \quad (\text{III.14})$$

✧ En regroupant le tout nous arrivons, en notant  $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}(t)$ ,

$$J_\Delta \ddot{\theta}(t) = -h \dot{\theta}(t) + \Gamma_m \quad (\text{III.15})$$

✧ Et, sous forme canonique,

$$\frac{d\omega}{dt}(t) + \frac{h}{J_\Delta} \omega(t) = \frac{\Gamma_m}{J_\Delta} \quad (\text{III.16})$$

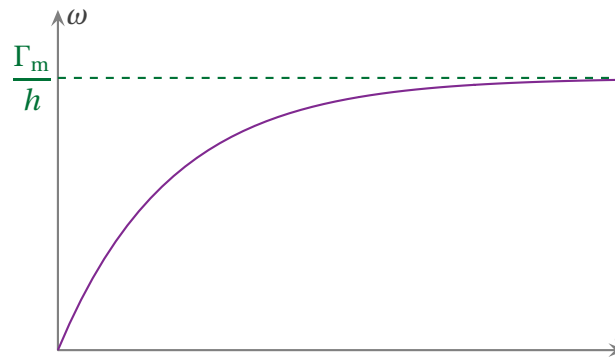
### III.3.iii – interprétation

✧ Le temps caractéristique  $\tau = \frac{J_\Delta}{h}$  apparaît. Autrement dit, il faut attendre d'autant plus longtemps le régime permanent que l'inertie  $J_\Delta$  est grande. C'est normal.

✧ Résolvons l'équation différentielle compte-tenu de  $\omega(0) = 0$

$$\omega(t) = \frac{\Gamma_m}{h} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{J_\Delta}{h} \quad (\text{III.17})$$

✧ Graphiquement cela donne



✧ Nous pouvons constater que le régime permanent (qui est ici un régime permanent stationnaire) est

$$\omega_{RS} = \frac{\Gamma_m}{h}. \text{ Autrement dit :}$$

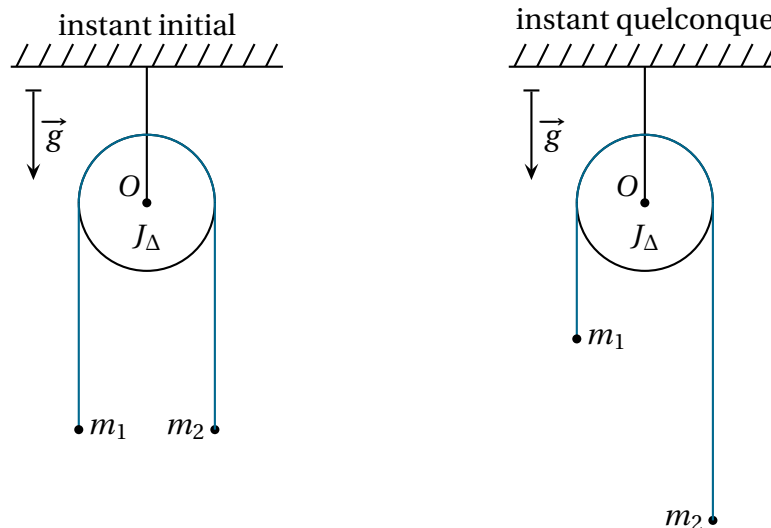
- il est d'autant plus rapide que le moteur est puissant (normal) ;
- il est d'autant plus lent qu'il y a de frottement (normal) ;
- il est indépendant de l'inertie (normal pour un régime stationnaire).

## III.4 – poulie non idéale – machine d'ATWOOD

### III.4.i – situation, analyse

✧ Considérons le dispositif suivant qui, s'il n'a pas vraiment d'intérêt pratique (quoiqu'une poulie...), permet de mieux comprendre que le concept de « transmission de force » est un concept qui n'existe pas scientifiquement ou, pour dire autrement, qui est **faux**.

✧ Imaginons une poulie « toute simple », à savoir une poulie qui tourne librement autour de son axe  $\Delta$ , qui possède un moment d'inertie  $J_\Delta$ . Autour de cette poulie est enroulé un fil, aux extrémités duquel sont attachées deux masses,  $m_1$  et  $m_2$ .



✧ Bien évidemment, nous n'allons pas nous compliquer la vie :

- le fil est idéal (en particulier inextensible et sans masse) ;
- le fil ne glisse pas par rapport à la poulie ;
- nous allons négliger les frottements avec l'air.

✧ La question est : « Quelle est l'accélération de  $M_1$  ? »

✧ Analyse physique :

- tout étant initialement immobile et les actions agissant sur les masses étant verticales, l'ensemble évoluera dans un plan. Autrement dit, alors qu'il y a beaucoup de degrés de liberté (il n'est pas très difficile d'en trouver 7), un seul degré de description suffira ;
- l'évolution est clairement libre et, comme il n'y a pas de phénomènes dissipatifs, l'évolution sera conservative ;
- grandeurs pertinentes :  $J_\Delta$ ,  $m_1$  et  $m_2$  (inertie),  $R$  rayon de la poulie et  $\ell$  longueur du fil (géométrie),  $g$  action et, comme nous cherchons une accélération, les conditions initiales ne rentreront pas en compte.

✧ Analyse technique :

- nous cherchons l'accélération de  $M_1$  ? Prenons  $z_1(t)$  comme degré de description final ;
- nous aurons comme degré de description intermédiaire la cote  $z_2(t)$  de  $M_2$  et l'angle de rotation  $\theta(t)$  de la poulie ;
- « 1DD – libre – conservatif », pas le temps de réfléchir nous savons déjà que nous allons utiliser une approche énergétique. Ici comme nous cherchons une accélération, nous allons utiliser le TPM ;
- en ce qui concerne le système, nous allons prendre tous les morceaux avec de l'inertie ainsi que tout ce qui les relie soit  $\{ m_1, m_2, \text{fil}, \text{poulie} \}$ . L'axe autour duquel tourne la poulie n'est **pas** dans le système.

### III.4.ii – mise en équation

#### ★ TPM

✧ Commençons par faire la liste des actions extérieures s'exerçant sur le système choisi :

- force à distance : les poids  $\vec{P}_1$  et  $\vec{P}_2$  des masses  $M_1$  et  $M_2$ . Il s'agit de forces conservatives dont il faudra déterminer l'énergie potentielle. Le poids de la poulie n'entre pas en ligne de compte puisque son centre de masse reste immobile ;
- force de contact : puisque nous négligeons l'action de l'air, la seule force de contact est celle qu'exerce l'axe de la poulie sur la poulie. Et comme il s'agit d'une action sans frottement nous pouvons dire  $\mathcal{P}_{\text{axe}} = 0$ .

✧ Liste des interactions intérieures :

- interactions  $M_1 \leftrightarrow \text{fil}$  et  $M_2 \leftrightarrow \text{fil}$  : interaction de travail nul puisqu'il s'agit d'une liaison rigide ;
- interaction poulie  $\leftrightarrow \text{fil}$  : interaction de travail nul puisque le contact se fait avec frottement mais sans glissement (un peu comme une chaîne de vélo) ;
- interaction fil  $\leftrightarrow \text{fil}$  : interaction de travail nul puisque le fil est idéal (aucune élasticité, aucune torsion, souplesse infinie) ;
- interaction poulie  $\leftrightarrow \text{poulie}$  : interaction de travail nul puisque la poulie est un solide.

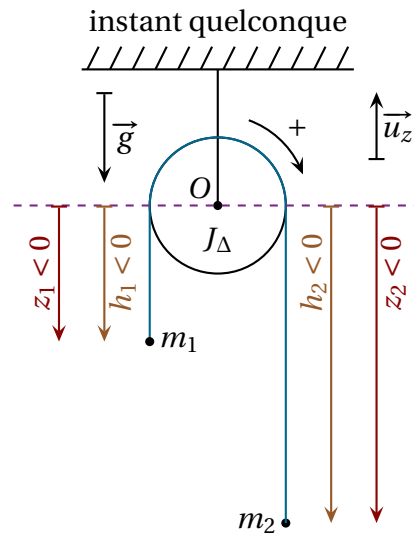
✧ Finalement, le système n'est soumis qu'à des forces et des interactions intérieures conservatives ou de travail nul.

✧ L'évolution est donc bien conservative.

✧ Remarquons, au passage, que la démonstration de la conservation de l'énergie est complexe car elle fait intervenir de nombreux phénomènes (souplesse du fil, caractère solide de la poulie...) mais elle est facile étant donné le peu de calculs présents.

#### ★ $E_c$

✧ Faisons un schéma à un instant quelconque pour mieux préciser les repérages.



⇨ L'énergie cinétique est une grandeur extensive donc pour le système elle s'écrit

$$E_c(\mathcal{S}) = E_c(M_1) + E_c(M_2) + E_c(\text{poulie}) \tag{III.18}$$

⇨ Comme les points sont en translation suivant un seul axe et que la poulie est en rotation autour d'un axe fixe, cela donne immédiatement 56

$$E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2(t) + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2(t) + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2(t) \tag{III.19}$$

★  $E_p$

⇨ L'énergie potentielle de pesanteur est extensive puisqu'elle est associée à une force extérieure.

⇨ Cela donne, pour le point  $M_1$ , et compte-tenu de l'orientation de  $z_1(t)$  choisie sur le schéma, 30

$$E_{p1} = m_1 g \underbrace{h_1}_{<0} \rightsquigarrow E_{p1} = m_1 g \underbrace{z_1}_{<0} \tag{III.20}$$

⇨ De même

$$E_{p1} = m_2 g h_2 = m_2 g z_2 \tag{III.21}$$

★ **couplage des degrés de description**

⇨ Au fond, nous savons que tout peut s'écrire en fonction d'un seul degré de description (nous avons choisi  $z_1(t)$ ), mais nous en avons pour l'instant deux supplémentaires ( $z_2(t)$  et  $\theta(t)$ ).

⇨ Pour faire disparaître ces deux degrés de description superflus, nous allons utiliser deux lois physiques qui, une fois traduites analytiquement, constitueront des lois de *couplage*.

⇨ Si  $M_1$  bouge lorsque  $M_2$  bouge, c'est bien parce que fil est inextensible. Imaginez un élastique en lieu et place du fil et vous verrez que vous pouvez tirer  $M_2$  vers le bas en maintenant  $M_1$  à sa cote initiale.

⇨ Traduisons donc l'inextensibilité du fil. Commençons par écrire sa longueur  $\ell$  en supposant que le fil fait  $n$  tours autour de la poulie (attention aux signes devant  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$ )

$$\ell = -z_1(t) + \pi R + 2 n \pi R - z_2(t) \tag{III.22}$$

⇨ Comme le fil est inextensible, sa longueur est constante et donc

$$\frac{d\ell}{dt} = 0 = -\dot{z}_1(t) + 0 + 0 - \dot{z}_2(t) \rightsquigarrow \dot{z}_2(t) = -\dot{z}_1(t) \tag{III.23}$$



- ✧ Ceux qui voient directement la relation  $\dot{z}_2(t) = -\dot{z}_1(t)$  peuvent l'écrire directement à **condition** de préciser qu'elle vient de l'inextensibilité du fil.
- ✧ De même si la poulie tourne lorsque  $M_1$  monte ou descend c'est bien parce que le fil ne glisse pas par rapport à la poulie. En écrivant que la vitesse d'un point du fil est la même que la vitesse d'un point de la poulie nous obtenons (attention aux signes)

$$\dot{z}_1(t) = +R\dot{\theta}(t) \quad (\text{III.24})$$

### ★ rassemblement

- ✧ Finalement le TPM donne

$$\frac{dE_m(\mathcal{S})}{dt} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2(t) + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2(t) + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2(t) + m_1 g z_1(t) + m_2 g z_2(t) \right) = 0 \quad (\text{III.25})$$

- ✧ Cela donne d'abord

$$m_1 \dot{z}_1(t) \ddot{z}_1(t) + m_2 \dot{z}_2(t) \ddot{z}_2(t) + J_\Delta \dot{\theta}(t) \ddot{\theta}(t) + m_1 g \dot{z}_1(t) + m_2 g \dot{z}_2(t) = 0 \quad (\text{III.26})$$

- ✧ En utilisant les relations de couplage

$$m_1 \dot{z}_1(t) \ddot{z}_1(t) + m_2 \dot{z}_1(t) \ddot{z}_1(t) + \frac{J_\Delta}{R^2} \dot{z}_1(t) \ddot{z}_1(t) + m_1 g \dot{z}_1(t) - m_2 g \dot{z}_1(t) = 0 \quad (\text{III.27})$$

- ✧ Simplifions par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre  $\dot{z}_1(t) = 0$

$$\left( m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{R^2} \right) \ddot{z}_1(t) + (m_1 - m_2) g = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{z}_1(t) = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + J_\Delta/R^2} \quad (\text{III.28})$$

## III.4.iii – interprétation

### ★ analyse du résultat

- ✧ Du point de vue de l'homogénéité tout va bien puisque  $J_\Delta/R^2$  est une masse. Ainsi le dénominateur est une masse, la fraction se réduit dimensionnellement à  $g$  qui est bien une accélération.
- ✧ Remarquons aussi que le dénominateur caractérise l'inertie du système. Les masses  $m_1$  et  $m_2$  sont des masses *inertielles* qui proviennent de l'énergie cinétique. De même  $J_\Delta$  est directement lié à l'inertie.
- ✧ Au numérateur, en revanche, les masses sont des masses *graves* qui proviennent de l'expression du poids.
- ✧ Nous constatons que l'intuition est juste lorsqu'il s'agit de savoir quelle masse monte et quelle masse descend, puisque si  $M_2$  est plus lourde que  $m_1$  alors cette dernière monte. Ce qui est, répétons-le, logique.

### ★ tension exercée par le fil

- ✧ Cherchons l'expression de la tension exercée par le fil sur  $M_1$ .
- ✧ Il s'agit d'une force de contact **donc a priori** inconnue, rien de tel qu'un PFD pour en venir à bout. En effet cette loi relie force et mouvement. La plupart du temps nous l'utilisons dans le sens « j'ai la force, je cherche le mouvement », là nous allons l'utiliser dans l'autre sens « j'ai le mouvement, je cherche la force ».
- ✧ Pour cela il faut d'abord déterminer le mouvement de  $M_1$ . C'est là que la vie est bien faite puisque nous connaissons *déjà* son mouvement grâce à la détermination de son accélération.
- ✧ La liste des forces qui s'exercent sur  $M_1$  se réduit à

- force à distance : le poids ;
- force de contact : la force exercée par le fil.

◇ Le PFD appliqué à la masse  $M_1$  et directement projeté sur  $\vec{u}_z$  donne

$$m_1 \ddot{z}_1(t) = -m_1 g + T_1 \quad \rightsquigarrow \quad T_1 = m_1 g + m_1 \ddot{z}_1(t) \quad (\text{III.29})$$

◇ En remplaçant par l'expression trouvée, nous obtenons ainsi

$$T_1 = m_1 g + \frac{g(m_2 - m_1) \times m_1}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{R^2}} \quad \rightsquigarrow \quad T_1 = \frac{2 m_1 m_2 + m_1 \frac{J_\Delta}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{R^2}} \times g \quad (\text{III.30})$$

- ◇ Nous pouvons aisément vérifier qu'il s'agit d'une force dirigée vers le haut.
- ◇ Contrairement à ce que l'intuition pourrait laisser penser, nous pouvons aussi voir que  $T_1 \neq m_2 g$ , autrement dit la force que le fil exerce sur  $M_1$  n'est **pas** le poids de  $M_2$  ! Et ce n'est pas qu'une question de poulie puisque même avec  $J_\Delta = 0$  nous aurions encore  $T_1 \neq m_2 g$ .
- ◇ La raison de cette non-égalité est simple : c'est parce que la « transmission de force » n'existe pas. Les rares cas où il s'avère que de telles « transmissions » existent c'est dans le cas très particulier de l'équilibre qui est, en général, assez peu intéressant.
- ◇ De plus comme les masses ① et ② ont des rôles symétriques, par un simple changement  $1 \leftrightarrow 2$ , nous pouvons trouver la force que le fil exerce sur  $M_2$  et cela donne

$$T_2 = \frac{2 m_1 m_2 + m_2 \frac{J_\Delta}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{R^2}} \times g \quad (\text{III.31})$$

- ◇ Nous constatons alors que  $T_1 \neq T_2$  ce qui signifie que la force que le fil exerce sur  $M_1$  n'est pas la même que celle que le fil exerce sur  $M_2$ . Cela peut surprendre (à tort) pour deux raisons :
  - tout d'abord, parce qu'il s'agit d'un fil idéal, il n'est pas déraisonnable de penser qu'il exerce une force de même intensité à chacune de ses extrémités. C'est oublier que pour que tel soit le cas il faut aussi que les poulies associées au fil soient idéales, hypothèse fautive ici. D'ailleurs en faisant  $J_\Delta = 0$  nous retrouvons bien  $T_1 = T_2$  ;
  - l'autre erreur, plus « grave » car beaucoup plus fautive physiquement parlant, c'est de croire que cela nie la loi des actions réciproques. En effet, il est courant de penser que la masse  $M_2$  exerce une force sur la masse  $M_1$  « par l'intermédiaire » du fil. En d'autre terme  $M_1$  et  $M_2$  seraient en interaction et les forces qu'ils exerceraient l'un sur l'autre devraient obéir à la 3<sup>e</sup> loi de NEWTON. Comme nous pouvons le constater, c'est faux. Le concept de force qui s'exerce « par l'intermédiaire » n'existe pas. Une force est soit à distance (gravitation, électromagnétisme) soit de contact. Ici l'interaction entre  $M_1$  et  $M_2$  n'est manifestement pas une des deux forces à distance et  $M_1$  ne **touche pas**  $M_2$  mais touche *le fil*, en conséquence de quoi il n'est pas possible qu'il s'agisse d'une interaction de contact.

#### ★ cas $m_2 \gg m_1$

- ◇ Une idée répandue est que, dans le cas particulier où  $m_2 \gg m_1$ , alors  $M_2$  va entraîner « de tout son poids »  $M_1$  vers le haut. Vérifions.
- ◇ Lorsque  $m_2 \gg m_1$  et  $m_2 \gg J_\Delta / R^2$  l'expression de  $T_1$  devient

$$T_1 = \frac{2 m_1 m_2 g + \text{néglig}}{m_2 + \text{néglig} + \text{néglig}} \rightarrow 2 m_1 g \quad (\text{III.32})$$

- ◇ Autrement dit, plus  $m_2$  est lourd, plus la force que le fil exerce sur  $M_1$  tend vers le double du poids de  $M_1$  !

- ✧ Cela s'explique, en fait, très simplement. Si  $M_2$  est très lourd, alors il va tomber en chute libre comme si de rien n'était et donc avoir l'accélération  $g$  vers le bas. Lié qu'il est avec  $M_1$ , ce dernier va avoir une accélération  $g$ , mais vers le haut. Or, naturellement, avec la gravité,  $M_1$  a une accélération  $g$  vers le bas. Le fil doit créer une double accélération  $g$  vers le haut : la première pour annuler la pesanteur, la 2<sup>e</sup> pour correspondre au mouvement imposé par la chute de  $M_2$ . Et une force créant une double accélération de  $g$  n'est ni plus ni moins que le double du poids.
- ✧ Par cet exemple, nous pouvons bien voir qu'il faut faire très attention au concept de force car il ne correspond pas forcément à l'intuition que nous pouvons en avoir.
- ✧ C'est pourquoi, pour éviter de tenter l'intuition et (donc) d'augmenter le risque d'erreur, il est fortement conseillé de raisonner en termes énergétiques dès que la situation le permet.

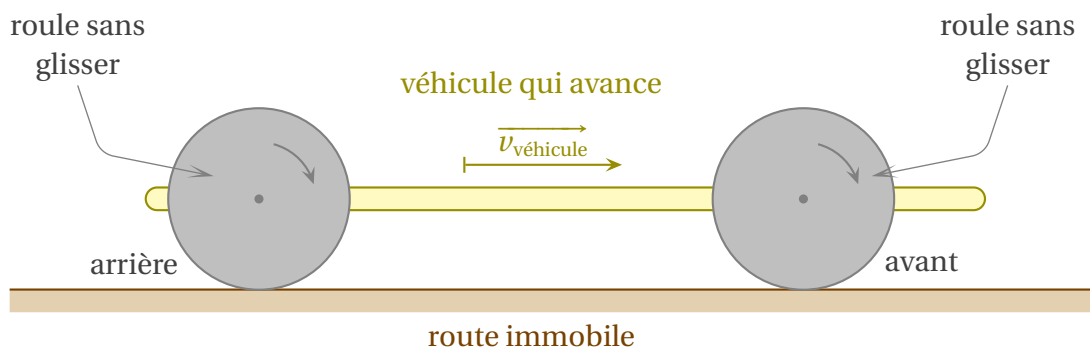
## III-5 – Véhicule à roue

### III-5.i – mise en situation

- ✧ Dans cet exemple, nous allons nous intéresser au déplacement d'un véhicule à roue dans le cas où celui-ci avance avec une vitesse rectiligne uniforme.



- ✧ Le but va être de déterminer entièrement toutes les forces qui s'exercent sur le véhicule et de dégager, notamment, le rôle du moteur.
- ✧ Pour cela, nous allons modéliser un véhicule comme une grosse « planche à roulettes » avec un bâti de masse  $M$  reliées à 4 roues, chacune de masse  $m$ .

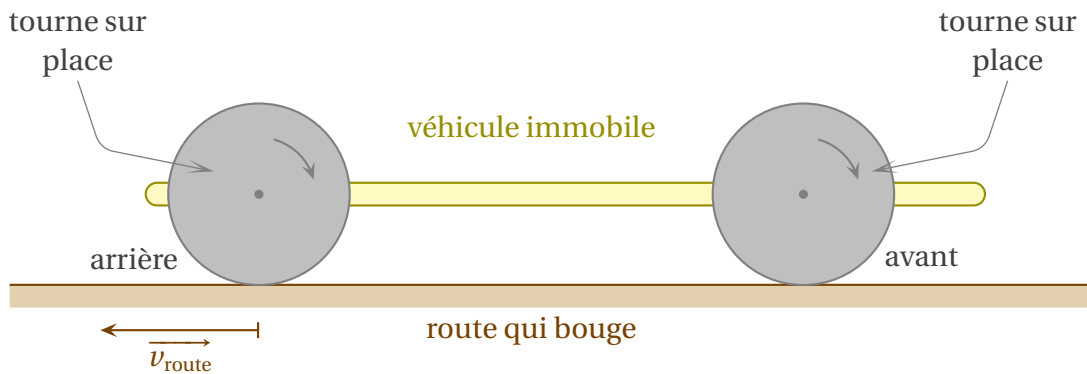


- ✧ Nous avons donc affaire à un véhicule composé de 5 solides articulés.
- ✧ Le véhicule roule sur une route horizontale à vitesse constante et sans glisser.
- ✧ Dans ces conditions, les deux roues avant, d'une part, et les deux roues arrière, d'autre part, jouent des rôles identiques. C'est pourquoi nous ne distinguerons plus dans la suite les côtés droit et gauche.
- ✧ Deux types de frottements existent :
  - des frottements de type fluide exercés par l'air (cf. traînée page 29) que nous noterons  $F$  et qui s'exercent au niveau de l'avant du véhicule ;
  - des frottements de type solide exercés par la route, de coefficient  $f$ .
- ✧ Le but va être de déterminer les caractéristiques des forces que la route exerce sur le véhicule lorsque :
  - le véhicule est tracté ;
  - le véhicule possède une motorisation interne.

### III-5.ii – première analyse

#### ★ analyse physique

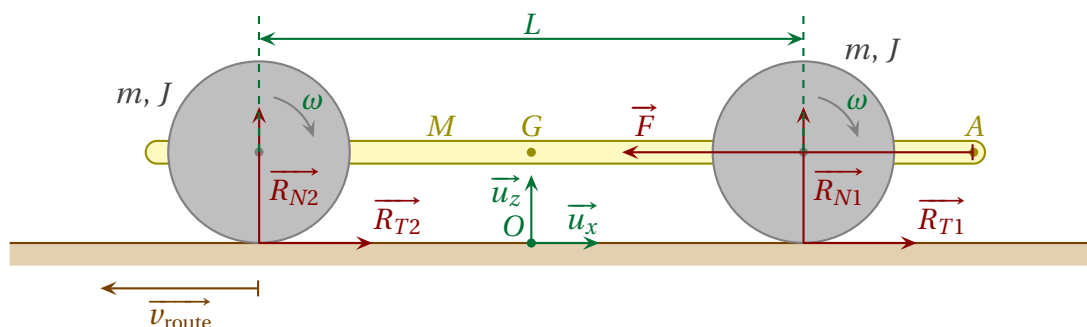
- ✧ Étant donné que le véhicule roule à vitesse *constante*, le plus simple va clairement être de se placer dans le référentiel lié au véhicule, qui a le bon goût d'être galiléen.
- ✧ De la sorte, désormais, le véhicule est globalement *immobile* dans ce référentiel.



- ✧ Il faut bien voir que, dans ce référentiel, *a priori*, la route qui défile en-dessous des roues entraîne ces dernières. Autrement dit l'évolution n'est **pas** libre, qu'il y ait un moteur ou non.
- ✧ Comme il n'y a pas de glissement, l'évolution est bien à un seul degré de description et ce, même s'il y a 4 roues. En effet, **parce qu'il n'y a pas de glissement**, le fait de bloquer une des roues (n'importe laquelle) empêche toutes les autres de tourner.
- ✧ Les grandeurs pertinentes sont :
  - $M, m$  et  $J$  (moment d'inertie d'une roue) pour l'inertie ;
  - $R$ , le rayon de la roue et  $L$ , l'empattement (distance entre les deux essieux) pour la géométrie ;
  - $F, g, f$  pour les actions ;
  - $V$ , la vitesse du véhicule, en tant que contrainte.
- ✧ Nous recherchons la grandeur permettant au véhicule d'avancer à vitesse constante. Il s'agit
  - soit la force de traction  $T$  pour un véhicule non motorisé ;
  - soit le couple moteur  $\Gamma_m$  qui s'exerce sur les roues avant pour un véhicule motorisé.

#### ★ analyse technique

- ✧ Tout d'abord le repérage est naturel :
  - pour les axes, nous allons choisir une base cartésienne ;
  - le sens positif de la rotation est pris dans le sens de rotation des roues.
- ✧ Étant donné qu'il y a une symétrie gauche – droite, nous pouvons dire que les forces qui s'exercent sur les roues de gauches sont les mêmes que celles qui s'exercent sur les roues de droite.

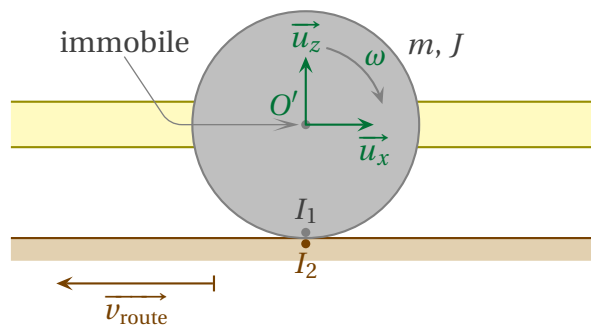


- ✧ Nous avons donc 5 inconnues à déterminer :
  - les deux composantes  $R_{T1}$  et  $R_{N1}$  de la force que la route exerce sur les roues avant ;
  - les deux composantes  $R_{T2}$  et  $R_{N2}$  de la force que la route exerce sur les roues arrière ;
  - l'action motrice ( $T$  ou  $\Gamma_m$  suivant le cas).
- ✧ Il nous faut donc 5 lois. Or nous pouvons :
  - écrire le théorème du centre d'inertie pour le véhicule, en projection sur les axes vertical et horizontal, 2 lois ;
  - écrire un théorème du moment cinétique scalaire pour chacune des roues (avant et arrière), 2 lois ;
  - écrire un théorème du moment cinétique scalaire l'ensemble du véhicule, 1 loi.
- ✧ Le compte est bon.

★ **condition de non glissement**

73

- ✧ Regardons d'un peu plus près une roue.



- ✧ D'une part la roue tourne et, d'autre part, la route « avance » sous elle, mais le tout se fait sans glissement.
- ✧ Cela signifie que les deux points  $I$  représentés ci-dessus, ceux qui sont, à un instant donné, au contact, doivent avoir la même vitesse.
- ✧ Le point  $I_1$ , celui qui appartient à la roue, a une trajectoire circulaire de vitesse de rotation  $\omega$ , ce qui donne

$$\vec{v}_1 = -R\omega \vec{u}_x \tag{III.33}$$

- ✧ Le point  $I_2$ , celui qui appartient à la route, a une vitesse

$$\vec{v}_1 = -V \vec{u}_x \tag{III.34}$$

- ✧ Ces deux vitesses devant être égales, la condition de non glissement impose donc

$$R\omega = V \tag{III.35}$$

**III.5.iii – véhicule non motorisé**

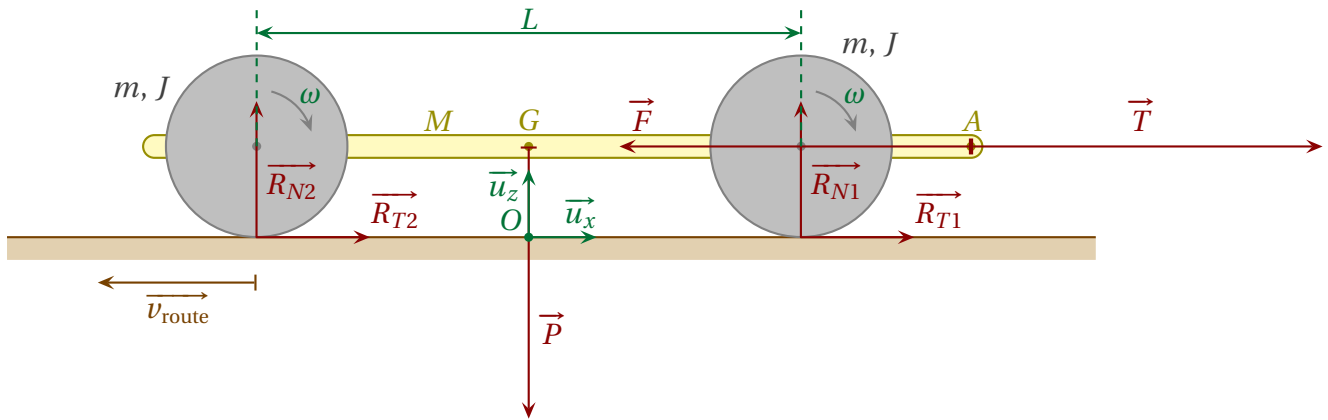
★ **récapitulatif des actions**

- ✧ Prenons comme système  $\mathcal{S}$  { le véhicule dans son ensemble }.
- ✧ Au niveau des actions extérieures, nous avons :
  - le poids total  $\vec{P} = (M + 4m) \vec{g}$  ;
  - les deux forces exercées par la route sur les deux roues avant  $2 \vec{R}_1 = 2 \vec{R}_{N1} + 2 \vec{R}_{T1}$  ;
  - les deux forces exercées par la route sur les deux roues arrière  $2 \vec{R}_2 = 2 \vec{R}_{N2} + 2 \vec{R}_{T2}$  ;
  - la force de frottement exercée par l'air  $\vec{F} = -F \vec{u}_x$  ;

→ la force de traction exercée par l'opérateur  $\vec{T} = T \vec{u}_x$ .

✧ Au niveau des interactions intérieures, nous avons :

- un roulement sans frottement des roues avant autour de leur axe ;
- un roulement sans frottement des roues arrière autour de leur axe.



☞ *Remarque.* Sur le schéma précédent, nous avons dessiné les forces de sens inconnus  $\vec{R}_{T1}$  et  $\vec{R}_{N2}$  avec des composantes positives sur l'axe  $\vec{u}_x$  afin de faciliter l'écriture des lois.

★ **théorème du centre d'inertie**

74

✧ Le centre de masse de  $\mathcal{S}$  est immobile dans le référentiel considéré. Donc

$$\vec{0} = \vec{P} + 2\vec{R}_1 + 2\vec{R}_2 + \vec{F} + \vec{T} \tag{III.36}$$

✧ Ce qui donne, en projection sur  $\vec{u}_x$ ,

$$0 + 2R_{T1} + 2R_{T2} - F + T = 0 \tag{III.37}$$

✧ Et en projection sur  $\vec{u}_z$

$$-(M + 4m)g + 2R_{N1} + 2R_{N2} + 0 + 0 = 0 \tag{III.38}$$

★ **théorèmes du moment cinétique**

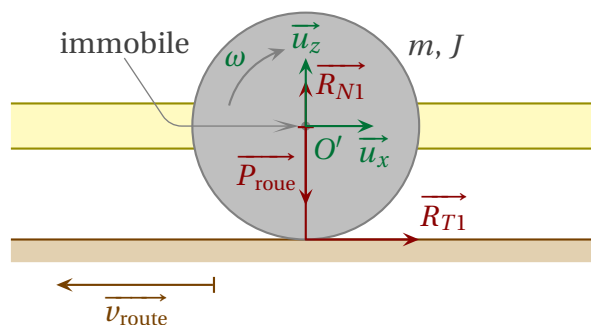
74

🌀 **roue avant**

✧ Écrivons un théorème du moment cinétique scalaire, pour *une* roue avant, et par rapport à son axe de rotation (qui est bien fixe dans le référentiel utilisé).

✧ La liste des actions *extérieures* qui s'exercent est :

- son poids  $\vec{P}_1 = m \vec{g}$  ;
- la force exercée par la route  $\vec{R}_1 = R_{N1} \vec{u}_y + R_{T1} \vec{u}_x$  ;
- l'action de l'axe, de moment nul puisqu'il n'y a pas de frottement.



- ✧ La condition de non glissement (cf. III.35) impose que la vitesse de rotation est constante puisque la vitesse  $V$  de la voiture est constante.
- ✧ Dans ces conditions, le moment cinétique de la roue, qui est un solide, est constant et, donc, le théorème du moment cinétique scalaire s'écrit, en notant  $\Delta$  l'axe de rotation de la roue,

$$0 = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}_1) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}_{N1}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}_{T1}) + \underbrace{0}_{\text{axe}} \quad (\text{III.39})$$

- ✧ Comme le poids  $\vec{P}_1$  et la réaction normale  $\vec{R}_{N1}$  ont des droites d'action passant par  $\Delta$ , nous avons

$$0 = 0 + 0 + R_{T1} \times R \quad (\text{III.40})$$

- ✧ Nous en déduisons aussitôt

$$R_{T1} = 0 \quad (\text{III.41})$$

### 🔴 roue arrière

- ✧ Une étude strictement analogue sur la roue arrière permet d'obtenir

$$R_{T2} = 0 \quad (\text{III.42})$$

- ✧ Avec ce résultat et le précédent, nous pouvons déduire de la projection sur  $\vec{u}_x$  du théorème du centre d'inertie (cf. III.37)

$$T = F \quad (\text{III.43})$$

### 🔴 véhicule

- ✧ Pour écrire le théorème du moment cinétique pour l'ensemble du véhicule, nous ne devons prendre en compte que les forces *extérieures*.
- ✧ Ici nous allons choisir, comme axe de rotation, l'axe  $\Delta'$  passant par  $G$  et de direction  $\vec{u}_y$ .
- ✧ Le moment cinétique de l'ensemble s'écrit, par extensivité,

$$\sigma_{\Delta'}(\mathcal{S}) = \sigma_{\Delta'}(\text{bâti}) + 2\sigma_{\Delta'}(\text{roue avant}) + 2\sigma_{\Delta'}(\text{roue arrière}) \quad (\text{III.44})$$

- ✧ Or, chacun de ces sous-système possède un moment cinétique constant puisque :

- le bâti ne bouge pas dans le référentiel considéré ;
- les 4 roues ont, chacune, un mouvement stationnaire.

- ✧ Dans ces conditions nous avons

$$\sigma_{\Delta'}(\mathcal{S}) = C^{\text{te}} \quad (\text{III.45})$$

- ✧ Et, ainsi, le théorème du moment cinétique scalaire s'écrit, en tenant compte de la nullité des actions tangentielles exercées par la route

$$0 = \mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{F}) + \mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{T}) + \mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{P}) + 2\mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{R}_{N1}) + 2\mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{R}_{N2}) \quad (\text{III.46})$$

- ✧ Or, les trois forces  $\vec{F}$ ,  $\vec{T}$  et  $\vec{P}$  ont des droites d'action qui passent par l'axe de rotation, ce qui donne

$$0 = 0 + 0 + 0 - \frac{L}{2} \times R_{N1} + \frac{L}{2} \times R_{N2} \quad (\text{III.47})$$

- ✧ Nous en concluons

$$R_{N1} = R_{N2} \tag{III.48}$$

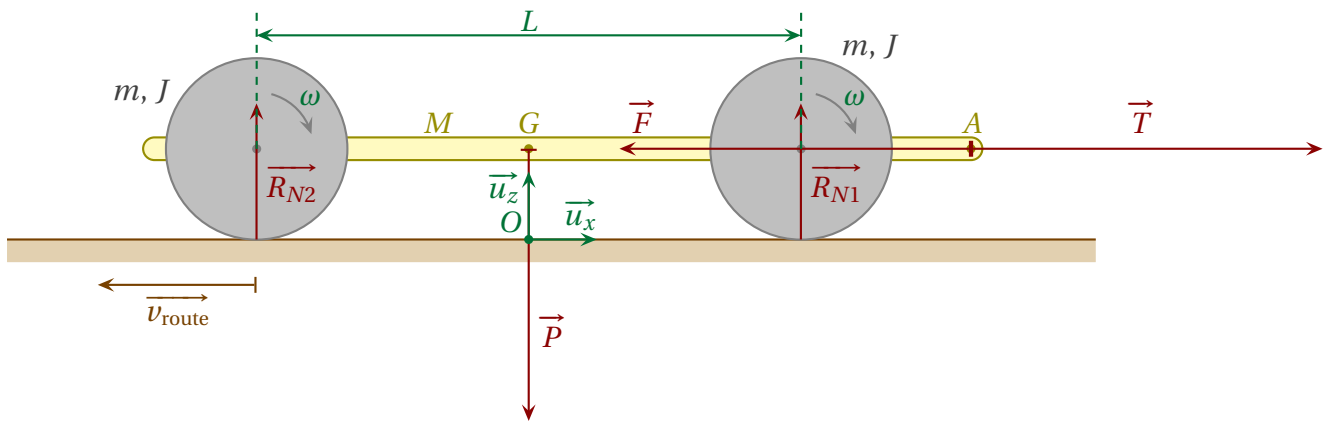
✧ Soit, avec la projection sur  $\vec{u}_z$  du théorème du centre d'inertie (cf. III.38)

$$R_{N1} = R_{N2} = \frac{M + 4m}{4} \times g \tag{III.49}$$

★ **interprétation**

🕒 **représentation des forces**

✧ Représentons les forces.



✧ Nous constatons donc que, bien qu'ils existent, *tout se passe comme s'il n'y avait pas de frottement* au niveau de la route puisque la force exercée par cette dernière est uniquement normale.

✧ En d'autres termes, cela signifie que, sur une route totalement glissante (par exemple une énorme plaque de givre), un véhicule tracté de la sorte peut avancer. 75

🕒 **bilan énergétique dans le référentiel terrestre**

✧ Rappelons d'abord le théorème de la puissance cinétique appliqué au véhicule dans le référentiel terrestre 74

$$\frac{dE_m(\mathcal{S})}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{nc,ext}) + \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{int}) \tag{III.50}$$

✧ Ici, de manière évidente, nous avons

$$\frac{dE_m(\mathcal{S})}{dt} = 0 \tag{III.51}$$

✧ De plus, comme le véhicule (qui est un système déformable), est constitué de solides liés entre eux par des liaisons sans frottement, nous avons

$$\sum \mathcal{P}(\vec{f}_{int}) = 0 \tag{III.52}$$

✧ Rappelons que la puissance fournie par une force s'écrit

$$\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v}_{\text{du point qui subit la force}} \tag{III.53}$$

✧ Ici, c'est le point A qui subit la force de frottement donc



$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(A) \quad (\text{III.54})$$

$$= -F \times V \quad (\text{III.55})$$

✧ De même, c'est le point  $A$  qui subit la force de traction, donc

$$\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(A) \quad (\text{III.56})$$

$$= T \times V \quad (\text{III.57})$$

✧ Enfin, il y a la puissance fournie par la route. En regardant ce qui se passe pour une roue avant, cela donne

$$\mathcal{P}(\vec{R}_1) = \vec{R}_1 \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(I_{\text{roue}}) \quad (\text{III.58})$$

✧ Étant donné que  $I_{\text{roue}}$  est un point de la roue qui avance et qui tourne en même temps, cela ne semble pas simple de trouver sa vitesse<sup>9</sup>. Mais nous savons, parce qu'il n'y a pas de glissement, que ce point a la même vitesse que le point  $I_{\text{route}}$ .

✧ Et comme, de manière évidente,  $I_{\text{route}}$  est immobile dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ , nous avons  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(I_{\text{roue}}) = \vec{0}$  et, donc,

$$\mathcal{P}(\vec{R}_1) = 0 \quad (\text{III.59})$$

✧ Il en est de même pour les roues arrière.

✧ Insistons : le fait, ici, qu'il y ait, ou non, une réaction tangentielle – c'est à dire des frottements – n'a **rien à voir** dans le fait que la puissance fournie est nulle.

✧ Physiquement, cela se comprend très bien : ce n'est pas la route qui apporte l'énergie nécessaire au roulement.

✧ En tout état de cause, il reste, finalement,

$$0 = -FV + TV \quad (\text{III.60})$$

✧ Relation qui est bien vérifiée puisque  $F = T$ .

✧ Physiquement, cela signifie que toute la puissance dissipée par les frottement doit être compensée par la puissance fournie par la force de traction. 75

✧ Cela semble assez logique.

### 🔗 bilan énergétique dans le référentiel lié au véhicule 74

✧ Dans le référentiel lié au véhicule, les choses se passent de manière un peu différente.

✧ Tout d'abord l'énergie mécanique est, là aussi, constante, ce qui implique

$$\frac{dE_m}{dt}(\mathcal{S}) = 0 \quad (\text{III.61})$$

✧ En revanche, cette fois, le point  $A$  a une vitesse nulle, ce qui implique

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = 0 \quad (\text{III.62})$$

$$\mathcal{P}(\vec{T}) = 0 \quad (\text{III.63})$$

9. Nous verrons comment faire dans le prochain chapitre

✧ Il reste la puissance fournie par la route aux roues. Regardons la roue avant

$$\mathcal{P}(\vec{R}_1) = \vec{R}_1 \cdot \vec{v}(I_{\text{roue}}) \tag{III.64}$$

✧ Cette fois, nous connaissons la vitesse de  $I_{\text{roue}}$  puisque ce point a une trajectoire circulaire uniforme de vitesse angulaire  $\omega$

$$\vec{v}(I_{\text{roue}}) = -R\omega \vec{u}_x \tag{III.65}$$

✧ Et ainsi, avec l'action de la route qui se réduit à une composante normale

$$\mathcal{P}(\vec{R}_1) = (R_{N1} \vec{u}_z) \cdot (-R\omega \vec{u}_x) \tag{III.66}$$

$$= 0 \tag{III.67}$$

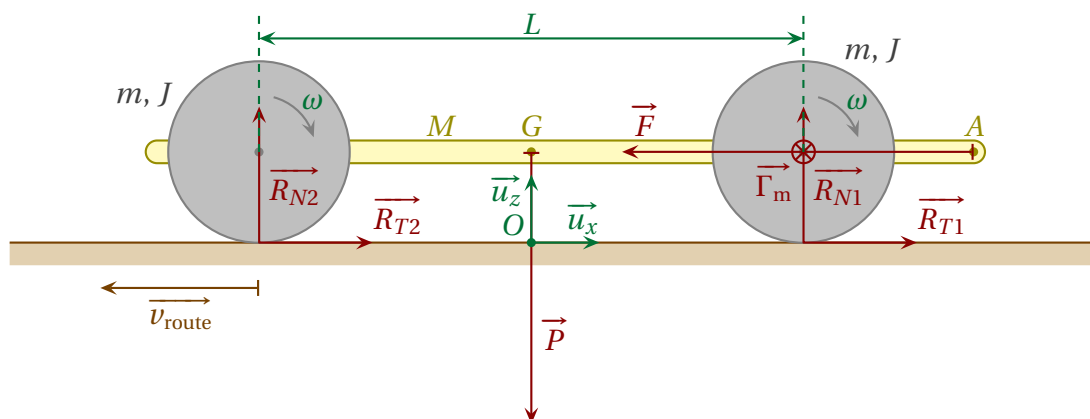
- ✧ Une fois de plus nous pouvons constater que le théorème de l'énergie mécanique est bien vérifié (ouf), mais qu'il ne s'interprète pas du tout de la même manière.
- ✧ Dans ce référentiel, il n'y a **aucun** transfert énergétique!
- ✧ Cela ne paraît pas naturel et pourtant c'est **vrai**. Ou, du moins, c'est **aussi vrai** que l'interprétation précédente dans le référentiel terrestre.
- ✧ Cela montre que les transferts énergétiques sont relatifs (*i.e.* qu'ils dépendent du référentiel choisi) et que, dans ces conditions, il convient d'être extrêmement prudent lors de raisonnements énergétiques dans plusieurs référentiels différents.

### III-5.iv – Véhicule motorisé

✧ Nous allons reprendre exactement la même démarche que pour le véhicule non motorisé.

#### ★ récapitulatif des actions

- ✧ Prenons comme système  $\mathcal{S}$  { le véhicule dans son ensemble }.
- ✧ Au niveau des actions extérieures, nous avons :
  - le poids total  $\vec{P} = (M + 4m) \vec{g}$  ;
  - les deux forces exercées par la route sur les deux roues avant  $2\vec{R}_1 = 2\vec{R}_{N1} + 2\vec{R}_{T1}$  ;
  - les deux forces exercées par la route sur les deux roues arrière  $2\vec{R}_2 = 2\vec{R}_{N2} + 2\vec{R}_{T2}$  ;
  - la force de frottement exercée par l'air  $\vec{F} = -F\vec{u}_x$ .
- ✧ Au niveau des interactions intérieures, nous avons :
  - un couple d'interaction  $\vec{\Gamma}_m$  entre le moteur et l'essieu avant ;
  - un roulement sans frottement des roues arrière autour de leur axe.



☞ *Remarque.* Comme précédemment, nous avons dessiné les forces de sens inconnus  $\vec{R}_{T1}$  et  $\vec{R}_{N2}$  avec des composantes positives sur l'axe  $\vec{u}_x$  afin de faciliter l'écriture des lois.

★ **théorème du centre d'inertie**

74

✧ Le centre de masse de  $\mathcal{S}$  est immobile dans le référentiel considéré. Donc

$$\vec{0} = \vec{P} + 2\vec{R}_1 + 2\vec{R}_2 + \vec{F} \tag{III.68}$$

✧ Ce qui donne, en projection sur  $\vec{u}_x$ ,

$$0 + 2R_{T1} + 2R_{T2} - F = 0 \tag{III.69}$$

✧ Et en projection sur  $\vec{u}_z$

$$-(M + 4m)g + 2R_{N1} + 2R_{N2} + 0 + 0 = 0 \tag{III.70}$$

★ **théorèmes du moment cinétique**

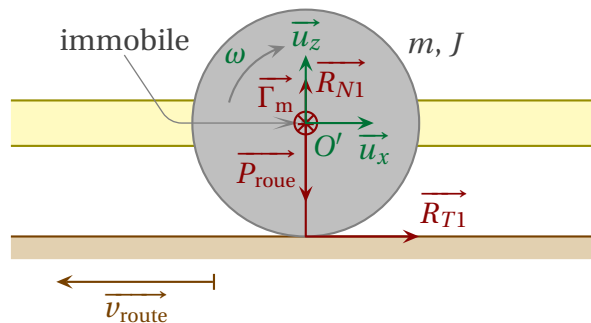
74

🌀 **roue avant**

✧ Écrivons un théorème du moment cinétique scalaire, pour *une* roue avant, et par rapport à son axe de rotation (qui est bien fixe dans le référentiel utilisé).

✧ La liste des actions *extérieures* qui s'exercent est :

- ➔ son poids  $\vec{P}_1 = m \vec{g}$  ;
- ➔ la force exercée par la route  $\vec{R}_1 = R_{N1} \vec{u}_y + R_{T1} \vec{u}_x$  ;
- ➔ l'action de l'axe, de moment  $\Gamma_m/2$  où  $\Gamma_m$  est le moment total exercé par le moteur sur les deux roues.



✧ Le moment cinétique de la roue, est toujours constant et, donc, le théorème du moment cinétique scalaire s'écrit, en notant  $\Delta$  l'axe de rotation de la roue,

$$0 = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_1) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_{N1}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_{T1}) + \underbrace{0}_{\text{axe}} + \frac{\Gamma_m}{2} \tag{III.71}$$

✧ Comme le poids  $\vec{P}_1$  et la réaction normale  $\vec{R}_{N1}$  ont des droites d'action passant par  $\Delta$ , nous avons

$$0 = 0 + 0 - R_{T1} \times R + \frac{\Gamma_m}{2} \tag{III.72}$$

✧ Nous en déduisons aussitôt

$$R_{T1} = + \frac{\Gamma_m}{2R} \tag{III.73}$$

### 🌀 roue arrière

✧ Une étude analogue sur la roue arrière permet d'obtenir, puisqu'il n'y pas de couple moteur sur les roues arrières,

$$R_{T2} = 0 \quad (\text{III.74})$$

✧ Avec ce résultat et le précédent, nous pouvons déduire de la projection sur  $\vec{u}_x$  du théorème du centre d'inertie (cf. III.69)

$$\Gamma_m = F \times R \quad (\text{III.75})$$

$$R_{T1} = \frac{F}{2} \quad (\text{III.76})$$

### 🌀 véhicule

✧ Pour écrire le théorème du moment cinétique pour l'ensemble du véhicule, nous ne devons prendre en compte que les forces *extérieures*.

✧ Ici nous allons choisir, comme axe de rotation, l'axe  $\Delta'$  passant par  $G$  et de direction  $\vec{u}_y$ .

✧ Pour les mêmes raisons que pour le véhicule non motorisé, nous avons

$$\sigma_{\Delta'(\mathcal{S})} = C^{\text{te}} \quad (\text{III.77})$$

✧ Et, ainsi, le théorème du moment cinétique scalaire s'écrit, en tenant compte de la nullité des actions tangentielles exercées par la route sur les roues arrières,

$$0 = \mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{F}) + \mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{P}) + 2 \mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{R}_{N1}) + 2 \mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{R}_{T1}) + 2 \mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{R}_{N2}) \quad (\text{III.78})$$

✧ Or, les forces  $\vec{F}$  et  $\vec{P}$  ont des droites d'action qui passent par l'axe de rotation, ce qui donne

$$0 = 0 + 0 - \frac{L}{2} \times R_{N1} - 2 \times R \times \frac{F}{2} + \frac{L}{2} \times R_{N2} \quad (\text{III.79})$$

✧ Nous obtenons ainsi un système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} R_{N1} + R_{N2} = \frac{P}{2} \\ R_{N1} - R_{N2} = -\frac{RF}{L} \end{cases} \quad (\text{III.80})$$

✧ De solution

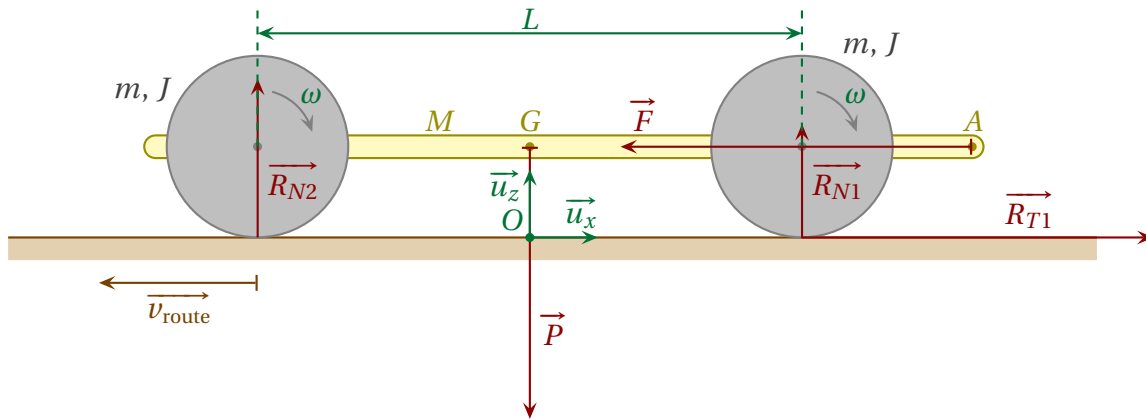
$$R_{N1} = \frac{P}{4} - \frac{RF}{2L} \quad (\text{III.81})$$

$$R_{N2} = \frac{P}{4} + \frac{RF}{2L} \quad (\text{III.82})$$

### ☆ interprétation

### 🌀 représentation des forces

✧ Représentons les forces.



- ✧ Cette fois nous constatons que actions tangentielles exercées par la route, autrement dit les frottements, sont **indispensables** au mouvement de la voiture.
- ✧ Physiquement, cela signifie qu'une voiture telle que le contact pneu / sol soit glissant aurait beaucoup de mal à avancer.
- ✧ Et, effectivement, nous pouvons constater que lorsque la route est couverte de verglas, la conduite est bien plus délicate...

75

**bilan énergétique dans le référentiel terrestre**

74

- ✧ Le théorème de la puissance cinétique appliqué au véhicule dans le référentiel terrestre s'écrit toujours

$$\frac{dE_m(\mathcal{S})}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{nc,ext}) + \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{int}) \tag{III.83}$$

- ✧ Puisque le véhicule roule à vitesse constante, nous avons encore

$$\frac{dE_m}{dt}(\mathcal{S}) = 0 \tag{III.84}$$

- ✧ Cette fois, en revanche, la puissance fournie par les interactions intérieures n'est pas nulle. Notons-la  $\mathcal{P}_m$ .

$$\sum \mathcal{P}(\vec{f}_{ext}) = \mathcal{P}_m \tag{III.85}$$

- ✧ Le point A qui subit la force de frottement donc

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}_{|Z}(A) \tag{III.86}$$

$$= -F \times V \tag{III.87}$$

- ✧ Pour les mêmes raisons que pour le véhicule non motorisé, puisque les points des roues qui sont au contact de la route ont une vitesse nulle (parce qu'il n'y a pas de glissement), la puissance qu'ils reçoivent de la force exercée par la route est nulle.

$$\mathcal{P}(\vec{R}_1) = \vec{R}_1 \cdot \vec{v}_{|Z}(I_{roue}) \tag{III.88}$$

$$= 0 \tag{III.89}$$

- ✧ Il en est de même pour les quatre roues.
- ✧ Il reste, finalement,

$$0 = -FV + \mathcal{P}_m \quad (\text{III.90})$$

✧ Avec l'expression de la réaction tangentielle (III.73) et la condition de non glissement (III.35), nous trouvons

$$\mathcal{P}_m = \Gamma_m \times \omega \quad (\text{III.91})$$

✧ Physiquement, cela signifie que toute la puissance dissipée par les frottement doit être compensée par la puissance fournie par le moteur.

✧ Cela semble assez logique.

✧ Il n'en demeure pas moins que, même si c'est le moteur qui apporte l'énergie, c'est la route qui fournit la force. Ainsi une twingo avec de bons pneus sur route sèche ira certainement plus vite qu'une ferrari sur du verglas recouvert d'une fine couche de neige fondante.

75

### 🔗 bilan énergétique dans le référentiel lié au véhicule

✧ Dans le référentiel lié au véhicule, les choses se passent de manière un peu différente.

✧ L'énergie mécanique est toujours constante

$$\frac{dE_m}{dt}(\mathcal{S}) = 0 \quad (\text{III.92})$$

✧ Le point  $A$  a une vitesse nulle,

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = 0 \quad (\text{III.93})$$

✧ Et ensuite les roues. Regardons la roue avant

$$\mathcal{P}(\vec{R}_1) = \vec{R}_1 \cdot \vec{v}_{(I_{\text{roue}})} \quad (\text{III.94})$$

✧ La vitesse de  $I_{\text{roue}}$  est connue (trajectoire circulaire uniforme de vitesse angulaire  $\omega$ )

$$\vec{v}_{(I_{\text{roue}})} = -R\omega \vec{u}_x \quad (\text{III.95})$$

✧ Et donc, avec III.76

$$\mathcal{P}(\vec{R}_1) = (R_{N1} \vec{u}_z + R_{T1} \vec{u}_x) \cdot (-R\omega \vec{u}_x) \quad (\text{III.96})$$

$$= -R\omega R_{T1} \quad (\text{III.97})$$

$$= -R\omega \frac{F}{2} \quad (\text{III.98})$$

✧ Comme il y a deux roues avant, la puissance totale reçue s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = -R\omega F \quad (\text{III.99})$$

✧ Ici, il y a bien une puissance transférée au roue *via* la réaction tangentielle.

✧ Pour les roues arrière, en revanche, la puissance reçue est nulle, puisque la réaction tangentielle l'est aussi.

✧ Enfin, il ne faut pas oublier la puissance fournie par le moteur qui, *a priori* est différente,

$$\mathcal{P}(\vec{f}_{\text{in}}) = \mathcal{P}'_m \quad (\text{III.100})$$

✧ Cependant, nous retrouvons le résultat précédent, à savoir

$$\mathcal{P}'_m = FV = \mathcal{P}_m \quad (\text{III.101})$$

✧ Nous admettrons la généralisation de ce résultat.



### Bon à retenir

La puissance (ou le travail) fournie par des interactions intérieures à un système est indépendante du référentiel dans lequel est fait le calcul.

- ✧ Cela fait de cette puissance, une grandeur *intrinsèque*, i.e. une grandeur physique qui possède une signification forte, contrairement aux *échanges* énergétiques qui sont des grandeurs *relatives* pour lesquelles il faut, donc, être prudent au niveau de l'interprétation.
- ✧ C'est ainsi que, contrairement au véhicule non motorisé, cette fois, il y a des transferts énergétiques dans le référentiel lié à la voiture.
- ✧ Dans ce référentiel, la puissance fournie par le moteur n'est pas là pour compenser les pertes induites par les frottements de l'air (comme dans le référentiel terrestre) mais pour compenser la puissance perdue par les roues avant qui sont *freinées* par la route.
- ✧ Oui, dans ce référentiel, les roues avant sont *freinées*. Alors même que c'est grâce à elles que s'exercent les forces tangentielles dont nous savons qu'elles sont motrices... dans le référentiel terrestre.
- ✧ Une fois de plus nous constatons que, suivant que nous raisonnons dans un référentiel ou dans un autre, l'interprétation énergétique n'est pas du tout la même.

## III.5.v – retour sur le modèle

### ★ le rôle des frottements

- ✧ Si nous avons bien vu l'importance des frottements dans le cas du véhicule motorisé, il ne faut pas oublier que ceux-ci sont aussi très importants dans le cas du véhicule non motorisé pour faire *tourner* les roues.
- ✧ En effet, un théorème du moment cinétique sur une roue qui ne subit aucun couple de frottement, soumise uniquement à son poids et à une réaction normale de la part de la route verrait la résultante des moments subis nulle. Donc elle aurait un moment cinétique constant. Donc elle ne tournerait jamais...
- ✧ De même, nous avons complètement négligé les frottements au niveau de l'axe de rotation.
- ✧ Quiconque a déjà changé une roue sait que lorsqu'une voiture est « roue en l'air », quand nous cherchons à en faire tourner une à la main, elle s'arrête très vite, bien plus vite que pour une roue de vélo.
- ✧ C'est, bien évidemment, dû aux frottements qui s'exercent sur la roue au niveau de l'axe, frottements que nous avons négligés.
- ✧ Pour vérifier qu'ils sont bien négligeable, il faudrait comparer la puissance perdue par ces frottements de roulement avec la puissance dissipée par les frottements exercés par l'air.
- ✧ Un autre point criticable est la modélisation des forces de frottement.
- ✧ En représentant le bâti par une simple planche et avec des forces de frottement s'exerçant en un point à l'horizontale, nous avons trouvé qu'ils avaient un moment nul pour la voiture.
- ✧ En pratique, ce n'est pas aussi simple et une modélisation plus correcte consisterait à faire « comme si » les frottements s'exerçaient en un point *B* un peu au dessus de *A*.
- ✧ Enfin, il est important de savoir que, pour de nombreuses voitures, les frottements exercés par l'air sont *utilisés* pour aller plus vite ou, du moins, pour accélérer davantage.
- ✧ En effet, grâce au profil aérodynamique de la voiture, notamment grâce à des « ailerons » à l'arrière, il est possible de faire en sorte que les frottements, en plus d'une composante horizontale, aient une composante verticale.

- ✧ Tout se passe ainsi comme si les frottements « appuyaient » sur la voiture augmentant, d'une certaine manière, le « poids effectif ».
- ✧ Avec un poids apparent plus grand, la réaction normale de la route doit être plus grande et, par voie de conséquence, les réactions tangentielles peuvent l'être aussi.
- ✧ Or ce sont les réactions tangentielles qui font accélérer la voiture.

### ★ approche numérique

- ✧ Regardons quelques données sur la Ferrari 458<sup>10</sup> :



puissance maximale	570 ch (420 kW) à 9000 tr/min
couple maximal	540 Nm à 6000 tr/min
poids (!!!) à vide	1380 kg
vitesse maximale	325 km/h
accélération	0 à 100 km/h en 3,4 s
coefficient de traînée	0,33
largeur	1937 mm
hauteur	1213 mm
empattement	2650 mm
transmission	propulsion

- ✧ Avec la photographie de droite, nous pouvons facilement déterminer la taille des roues. Nous trouvons un diamètre de

$$2R = 70 \text{ cm} \quad (\text{III.102})$$

- ✧ Analysons ces chiffres sachant que le coefficient de frottement des pneus est de l'ordre de 0,8 sur route sèche.

- ✧ Rappelons que la force de frottement s'écrit, en norme,  $f_x = \frac{1}{2} \rho C_x S v^2$  (cf. II-1-iii) avec :

- $\rho$ , la masse volumique de l'air ;
- $C_x$ , le coefficient de frottement ;
- $S$  la surface projetée.
- $v$ , la vitesse.

- ✧  $\rho$  est facilement déterminable,  $C_x$  est donnée,  $S$  est calculable (au moins avec une bonne approximation) et  $v_{\max}$  est connu.

- ✧ Commençons par calculer la valeur de la force de frottement à vitesse maximale.

10. Données et photo de droite : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Ferrari\\_458](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ferrari_458)

Photo de gauche : <http://hdwallpapercorner.com/gallery/1175-ferrari-458-italia-800x600.jpg>



$$F_{\max} = \frac{1}{2} \rho C_x S v_{\max}^2 = 3,8 \times 10^3 \text{ N} \quad (\text{III.103})$$

✧ À partir de là, calculons la puissance maximale dissipée par les frottements

$$\mathcal{P}_{\max} = F_{\max} \times v_{\max} = 3,4 \times 10^5 \text{ W} \quad (\text{III.104})$$

✧ Cette valeur est tout à fait compatible avec la valeur de la puissance maximale.

✧ Calculons la puissance que fournit le moteur lorsqu'il exerce son couple maximal, *i.e.* à 6000 tr/min

$$\mathcal{P}_{\max} = \Gamma_{\max} \times \omega = 3,4 \times 10^5 \text{ W} \quad (\text{III.105})$$

✧ C'est la même valeur ! Nous voilà rassuré sur la cohérence des données et la validité du modèle.

✧ Nous pouvons aussi vérifier la valeur du couple nécessaire avec la relation III.75

$$\Gamma_{\max} = f_x \times R = 1,23 \times 10^3 \text{ Nm} \quad (\text{III.106})$$

✧ C'est plus de deux fois la valeur maximale donnée ! Mais la contradiction n'est qu'apparente. En effet, le couple maximal tabulé est le couple exercé par le moteur alors que, dans le modèle que nous avons utilisé,  $\Gamma_m$  est le couple subi par les roues. Non, ce n'est pas le même car, entre le moteur et les roues, il y a la boîte de vitesse.

✧ Sans entrer dans les détails du fonctionnement d'une boîte de vitesse, nous pouvons la voir comme une boîte (noire) dont le rôle est de changer la vitesse de rotation entre l'entrée (ici, le moteur) et la sortie (ici, l'essieu). Et, pour faire simple, faisons comme si la boîte fonctionnait de manière parfaite, ici sans perdre aucune puissance. Alors nous avons, avec des notations naturelles

$$\Gamma_{\text{entree}} \times \omega_{\text{entree}} = \Gamma_{\text{sortie}} \times \omega_{\text{sortie}} \quad (\text{III.107})$$

✧ Nous venons donc de calculer  $\Gamma_{\text{sortie,max}} = 1,23 \times 10^3 \text{ Nm}$ . Cherchons  $\omega_{\text{sortie}}$ . Connaissant la vitesse maximale et le rayon de la roue, cela ne pose aucune difficulté

$$\omega_{\text{sortie}} = \frac{v_{\max}}{R} = 2,7 \times 10^3 \text{ tr.min}^{-1} \quad (\text{III.108})$$

✧ Enfin, nous pouvons calculer les forces tangentielle et normale s'exerçant sur chacune des roues avant d'après les relations III.81 et III.76

$$R_{T1} = 1,9 \times 10^3 \text{ N} \quad (\text{III.109})$$

$$R_{N1} = 3,1 \times 10^3 \text{ N} \quad (\text{III.110})$$

✧ Et en déduire le coefficient de frottement roue / sol nécessaire

$$f = \frac{R_{T1}}{R_{N1}} = 0,6 \quad (\text{III.111})$$

✧ C'est une valeur tout à fait plausible pour des pneus sur sol sec pour lesquels le coefficient atteint, pour voitures de formule 1, des valeurs de l'ordre de 0,8.

## IV – Mouvement dans un champ de force central

### IV.1 – Description de la situation étudiée



#### Définition

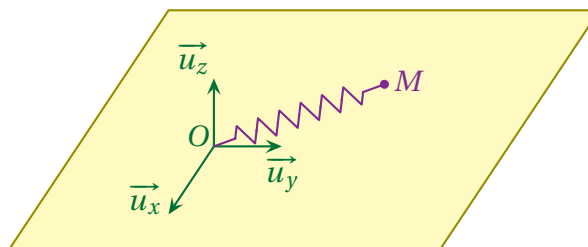
Soit  $M$  un point matériel soumis à une  $\vec{f}$  (force unique ou résultante) telle que la droite d'action de  $\vec{f}$  passe par un point fixe du référentiel  $\mathcal{R}$ . Alors  $M$  est dit soumis à une *force centrale*.

✧ Remarque :

- cette définition implique qu'une force n'est pas intrinsèquement centrale ;
- il faut faire **extrêmement** attention aux changements de référentiels avec les forces centrales.

✧ Exemple de forces centrales :

- la force de gravitation entre deux points matériels dans leur référentiel barycentrique ;
- l'exemple ci-dessous, pourvu qu'il n'y ait pas de frottements.



✧ Bien qu'un pendule simple soit soumis à  $\vec{T}$ , la tension exercée par le fil, qui passe toujours par un point fixe, nous ne dirons pas du pendule simple qu'il est soumis à une force centrale car ce n'est pas la *seule* force à laquelle il est soumis.

### IV.2 – Lois de conservation

#### IV.2.i – moment cinétique



#### Loi

Un point soumis à une force centrale possède un moment cinétique constant.



#### Loi

Si un point matériel a un moment cinétique constant, alors :

- le mouvement est plan ;
- il obéit à la loi des aires.

62

#### IV.2.ii – énergie mécanique

✧ La plupart du temps, les forces centrales sont des forces à distance donc conservatives.



#### Loi

Un point soumis à une force centrale possède une énergie mécanique constante.

## IV.3 – Énergie potentielle effective

### IV.3.i – expression

63

✧ En notant  $E_p(r)$  l'énergie potentielle associée à la force centrale, nous avons successivement

$$E_m = E_c + E_p(r) \quad (\text{IV.1})$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r) \quad (\text{IV.2})$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + E_p(r) \quad (\text{IV.3})$$

✧ Or, le moment cinétique est constant, ce qui implique

$$\sigma = m r^2 \dot{\theta} \quad \rightsquigarrow \quad \dot{\theta} = \frac{\sigma}{m r^2} \quad (\text{IV.4})$$

✧ Et ainsi

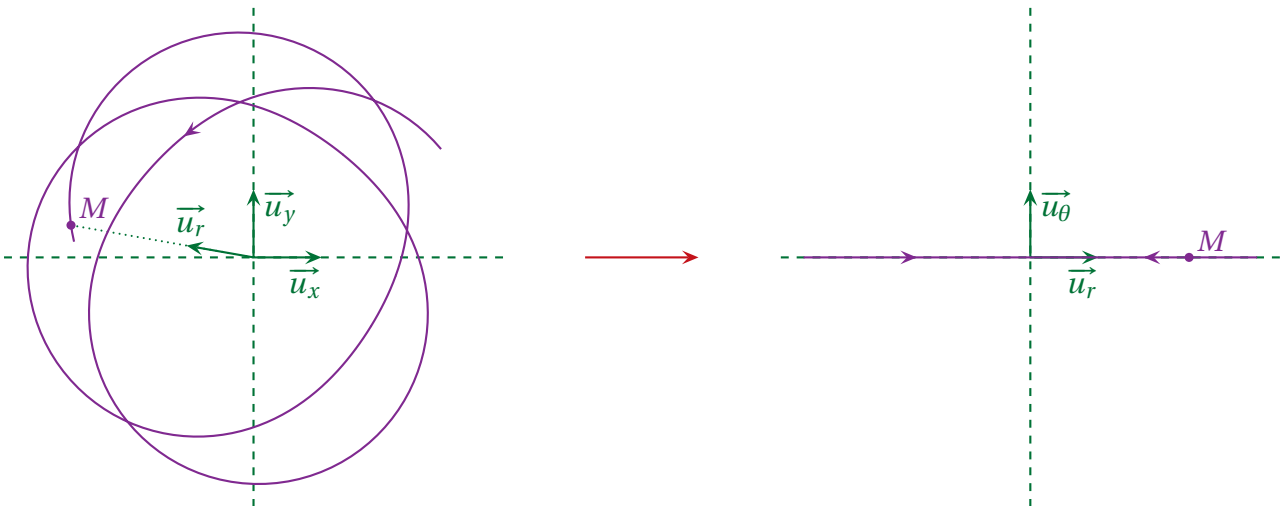
$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2 m r^2} + E_p(r) \quad (\text{IV.5})$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r) \quad (\text{IV.6})$$

✧ Nous avons ainsi réduit le problème initialement à deux degrés de description  $(r, \theta)$  à un seul  $(r)$ .

✧ Tout se passe donc *comme si* le point matériel ne se déplaçait que sur l'axe  $\vec{u}_r$ .

64



✧ Autrement dit, tout se passe comme si nous avions *changé de référentiel*, comme si la « référence immobile » était cet axe  $(Ox)$ .

✧ Nous pouvons donc voir l'énergie potentielle effective  $E_{p,\text{eff}}(r)$  comme l'énergie potentielle qui existe dans le référentiel *non galiléen* en rotation à la vitesse  $\dot{\theta} \neq C^{\text{te}}$ . Celle-ci est composée de deux parties :

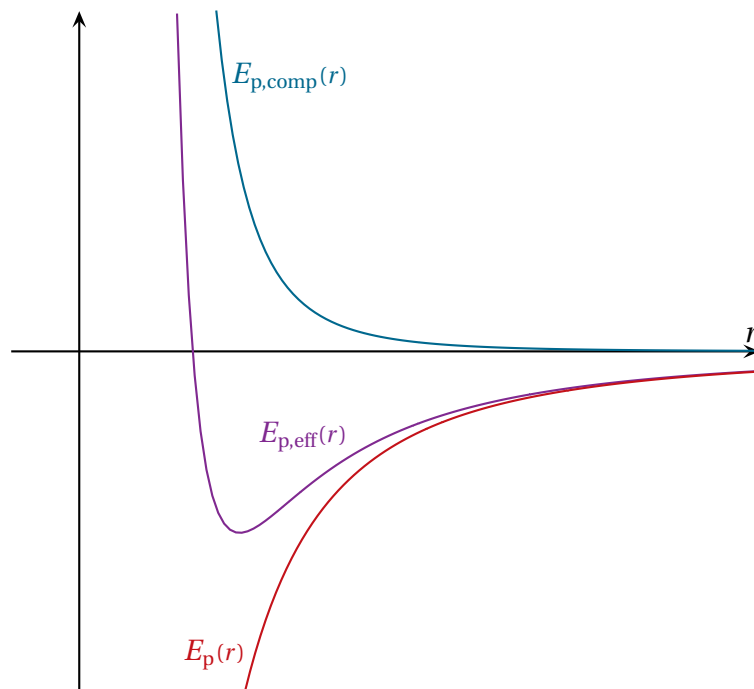
→  $E_p(r)$  est l'énergie potentielle associée à la force centrale « physique » ;

→  $E_{p,\text{comp}} = \frac{\sigma^2}{2 m r^2}$  est l'énergie potentielle due à l'effet de rotation et est associée à la force appelée couramment « force centrifuge ».

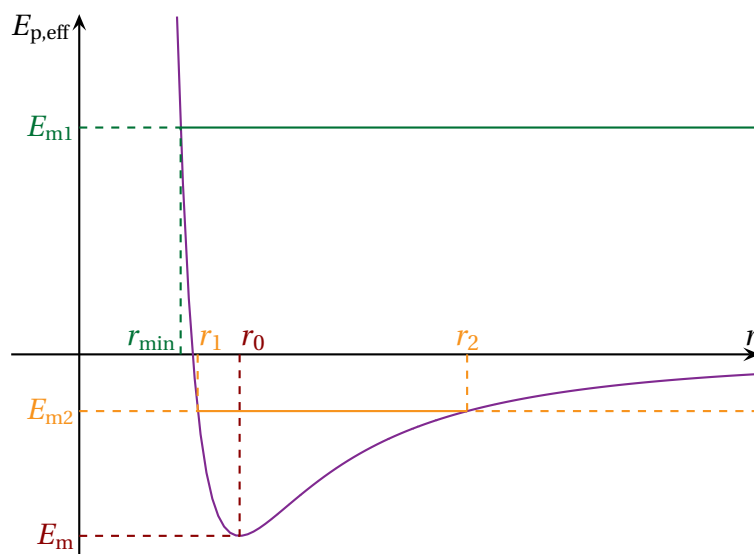
👉 *Remarque.* Il est normal que l'énergie potentielle associée à la force centrifuge n'ait pas l'expression que nous apprendrons dans le chapitre suivant car, ici, la rotation du référentiel non galiléen n'est **pas** uniforme.

### IV.3.ii – représentation graphique

⇨ En décomposant en bleu la partie  $E_{p,comp}$  et en rouge la partie  $E_p(r)$ , l'énergie potentielle effective (en violet) a l'allure suivante, dans le cas d'une force attractive.



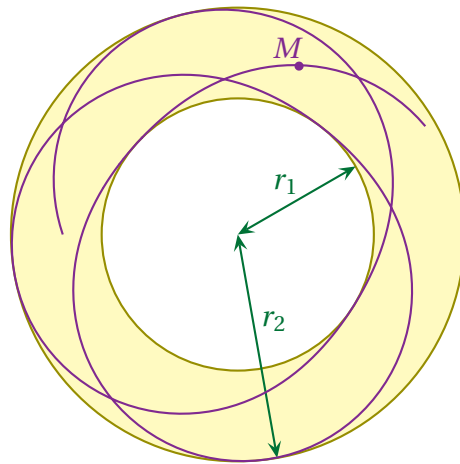
⇨ Suivant les valeurs de l'énergie mécanique, il y a différents types de mouvement possibles.



⇨ Dans l'exemple précédent :

- pour  $E_m = E_{m0}$ , une seule valeur de  $r$  est possible, c'est une trajectoire circulaire ;
- pour  $E_m = E_{m1}$ ,  $r$  est non bornée et admet une valeur minimale  $r_{min}$ , c'est un état de diffusion ;
- pour  $E_m = E_{m2}$ ,  $r$  est bornée par  $r_1$  et  $r_2$ , c'est un état lié.

**Attention!** « état lié entre  $r_1$  et  $r_2$  » n'implique certainement pas « trajectoire fermée » et encore moins « ellipse » mais « dans une couronne de rayon intérieur  $r_1$  et de rayon extérieur  $r_2$  », un peu comme dans la représentation ci-dessous.



## IV.4 – Cas particulier du mouvement newtonien

### IV.4.i – qui cela concerne-t-il ?

✧ Cela concerne deux forces fondamentales :

- la force de gravitation, qui est toujours attractive ;
- l'interaction coulombienne entre charges (avec l'exemple classique de l'expérience de RUTHERFORD<sup>11</sup>).



#### Définition

Une force est dite *newtonienne* lorsqu'elle peut s'écrire

$$\vec{f} = -k \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$$

✧ Nous avons donc :

- $k = G m_1 m_2$  pour l'attraction gravitationnelle ;
- $k = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0}$  pour la force coulombienne.



#### Loi

L'énergie potentielle associée à une force newtonienne s'écrit

$$E_p = -\frac{k}{r}$$

### IV.4.ii – types de trajectoire



#### Bon à retenir

*La trajectoire d'un point matériel soumis à une force centrale newtonienne est une conique.*

#### ☆ états liés

#### 🌀 géométriquement

✧ Il y a deux coniques correspondant à un état lié :

- le cercle, cas (très) particulier de conique ;

11. Cet exemple est approfondi dans le chapitre 7 de mécanique de première année, programme 2002.

→ l'ellipse.



### Loi

Dans le cas particulier d'un mouvement à force centrale (et en particulier pour une interaction newtonienne), si la trajectoire est circulaire, alors le mouvement est uniforme.

✧ Ce résultat tombe immédiatement avec la loi de conservation de l'énergie

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{r} \quad (\text{IV.7})$$

✧ Comme l'énergie mécanique est constante, si  $r$  l'est, alors  $v$  l'est aussi.

### 🔗 lien avec l'énergie



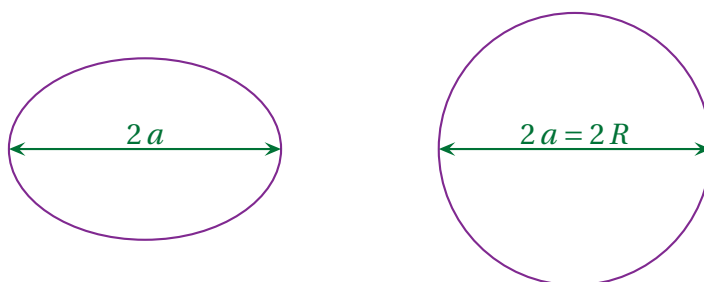
### Loi

L'énergie mécanique d'un point matériel soumis à une force newtonienne et dans un état lié est strictement négative et s'écrit

$$E_m = -\frac{k}{2a} \quad \text{où :}$$

$a$  est le demi-grand axe de la trajectoire

✧ Si la trajectoire est circulaire, le demi-grand axe n'est autre que le rayon.



✧ Ce petit résultat est très utile.

### 🔗 démonstration pour une trajectoire circulaire

✧ Pour le démontrer, repartons de l'expression de l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{r} \quad (\text{IV.8})$$

✧ Le PFD appliqué à la masse en rotation donne, en projection sur  $\vec{u}_r$ ,

$$-m \frac{v^2}{r} = -\frac{k}{r^2} \quad \rightsquigarrow \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{k}{2r} \quad (\text{IV.9})$$

✧ Ce qui donne, en remplaçant,

$$E_m = \frac{r}{2r} - \frac{k}{r} = -\frac{k}{2r} \quad (\text{IV.10})$$

✧ Ce qui est bien le même résultat compte-tenu du fait que le rayon  $r$  d'un cercle est équivalent au demi-grand axe<sup>12</sup>  $a$  d'une ellipse.

### 🕒 démonstration pour une trajectoire elliptique

✧ Pour le démontrer, repartons de l'expression de l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2 m r^2} - \frac{k}{r} \quad (\text{IV.11})$$

✧ Pour une ellipse, état lié, il existe des valeurs  $r_1$  et  $r_2$  de  $r$  telles que  $\dot{r} = 0$  : ce sont les valeurs maximale et minimale du rayon.

✧ Pour ces deux points, **et uniquement pour ces deux points**, l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$E_m = \frac{\sigma^2}{2 m r^2} - \frac{k}{r} \rightsquigarrow r^2 E_m + k r - \frac{\sigma^2}{2 m} = 0 \rightsquigarrow r^2 + \frac{k}{E_m} r - \frac{\sigma^2}{2 E_m m} = 0 \quad (\text{IV.12})$$

✧ Il s'agit d'un trinôme dont les solutions sont  $r_1$  et  $r_2$  ; nous avons donc  $r^2 - (r_1 + r_2) r + r_1 r_2 = 0$ , ce qui donne, en identifiant :

$$r_1 + r_2 = -\frac{k}{E_m} \quad \text{et} \quad r_1 + r_2 = 2 a \rightsquigarrow E_m = -\frac{k}{2 a} \quad (\text{IV.13})$$

### ★ états de diffusion

✧ Il y a deux types d'état de diffusion.

✧ Il y a tout d'abord la trajectoire parabolique pour laquelle :

- l'énergie mécanique totale est nulle ;
- la vitesse à l'infini est nulle.

✧ Comme la condition pour avoir une parabole est une condition d'égalité, aucune trajectoire *réelle* n'est parabolique.

👉 *Remarque.* Le fait que la trajectoire soit « parabolique » ne signifie pas qu'elle se superpose aux trajectoires obtenues dans le cas d'un mouvement en chute libre, mais qu'elle a la même structure mathématique que ces dernières.

✧ Il y a ensuite l'hyperbole pour laquelle :

- l'énergie mécanique totale est strictement positive ;
- à l'infini, la trajectoire est rectiligne ;
- la vitesse à l'infini est non nulle.

### ★ force attractive ou répulsive

✧ Pour les forces newtoniennes attractives (donc en particulier pour la gravitation), les trajectoires peuvent être circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

✧ Pour les forces newtoniennes répulsives, la seule trajectoire possible est la trajectoire hyperbolique.

## IV.4.iii – les lois de KÉPLER

### ★ rappel historique

✧ Les lois de KÉPLER concerne le système solaire.

✧ Ces lois ont été trouvées au début du XVII<sup>e</sup> siècle (1608 et 1618) et ont été trouvées sans calculatrice et sans aucune théorie sous jacente puisque les lois de NEWTON datent de fin XVII<sup>e</sup> siècle (1687).

12. Et aussi au demi petit axe puisqu'ils sont égaux!

## ★ première loi

✧ Nous admettrons le résultat suivant.

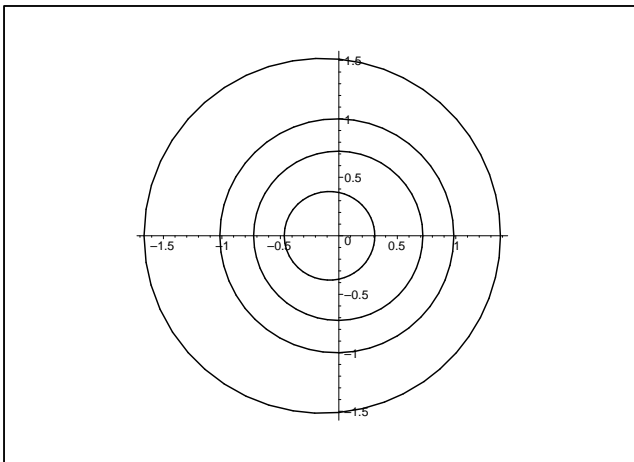
**Loi**

Les planètes tournent sur une trajectoire plane elliptique dont le Soleil occupe l'un des foyers.

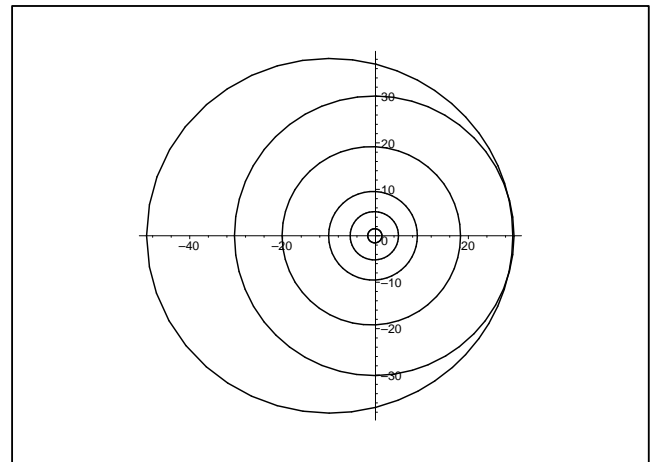
✧ C'est une description géométrique des trajectoires.

✧ Les trajectoires des planètes, Pluton compris, sont représentées sur les graphiques suivants. Les axes sont gradués en U.A.

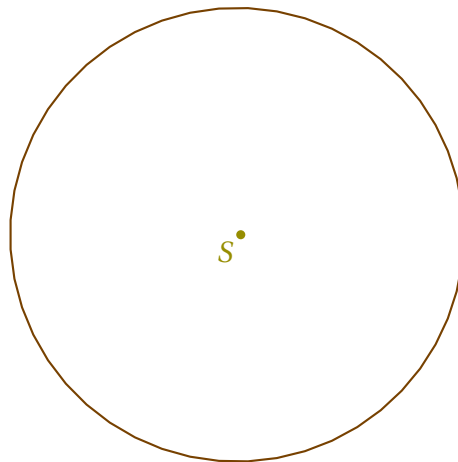
Graphique 1



Graphique 2



✧ Voici ce à quoi ressemble, « vue de dessus », la trajectoire de la Terre, S étant le Soleil.



✧ Numériquement, l'écart relatif entre la distance minimale au Soleil et la distance maximale vaut  $\frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max}} \simeq \frac{1}{7000}$  !

✧ Il est donc (très) difficile de voir à l'œil nu que la trajectoire n'est pas circulaire.

✧ Toutefois, en regardant la trajectoire sur le graphe possédant les axes, il est possible de constater que la trajectoire « circulaire » de la Terre n'est pas centrée sur le Soleil.

✧ En d'autres termes, la non circularité de la trajectoire terrestre n'est pas due à la forme mais au décalage entre son centre géométrique et son centre de force.



★ deuxième loi

**Loi**

Le rayon vecteur d'une planète balaye des surfaces égales en des durées égales.

- ✧ C'est une vision dynamique du mouvement sur chaque trajectoire : c'est un invariant par trajectoire.
- ✧ Nous avons déjà démontré cette loi puisqu'en fait ce n'est que la restriction au système solaire de la constante de la vitesse aréolaire pour un mouvement dans un champ de force central.

★ troisième loi

🗨 énoncé

- ✧ C'est une vision globale de toutes les trajectoires : c'est un invariant du système solaire

**Loi**

Dans le système solaire, le carré de la période d'une astre est proportionnel au cube du demi grand axe de sa trajectoire elliptique.

- ✧ Autrement dit  $T^2 = \alpha a^3$ , avec  $\alpha$  une grandeur ne dépendant pas de la planète ni de sa trajectoire.
- ✧ Cette loi concerne tous les astres tournant autour du soleil avec une trajectoire elliptique : planètes (évidemment) mais aussi comètes et astéroïdes.
- ✧ Ceci étant, cette loi est tout à fait transposable à un autre centre de force. Par exemple, nous pourrions dire : « Autour de la Terre, le carré de la période d'un satellite (artificiel ou naturel) est proportionnel au cube du demi grand axe de sa trajectoire elliptique. »

66

🗨 démonstration

- ✧ Supposons que la grandeur soit invariante, déterminons l'expression de la constante. Pour cela considérons la trajectoire elliptique la plus simple : la trajectoire circulaire.
- ✧ En projetant le PFD appliqué à une planète de masse  $m$ , nous trouvons :

$$-m \frac{v^2}{r} = -G \frac{m M_S}{r^2} \quad \rightsquigarrow \quad v^2 = \frac{G M_S}{r} \quad \rightsquigarrow \quad v = \sqrt{\frac{G M_S}{r}} \quad \text{(IV.14)}$$

- ✧ Comme le mouvement est uniforme (c'est une trajectoire circulaire), nous pouvons écrire la période  $T$  de révolution sous la forme :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{G M_S}} \quad \rightsquigarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{G M_S} r^3 \quad \text{(IV.15)}$$

- ✧ Ce qui prouve bien que le carré de la période est proportionnel au cube du demi grand-axe et donne, en même temps, l'expression de la constante.

68

67

## IV.4.iv – méthode

### ★ l'analyse physique

- ✧ La première chose à faire est de déterminer dans la mesure du possible la nature de la trajectoire, notamment à partir de considérations physiques.
- ✧ Le mouvement sera la plupart du temps libre et conservatif, sauf dans deux cas plus ou moins fréquents :
  - avec une fusée capable de produire de l'énergie pour modifier sa trajectoire ;
  - dans le cas d'un problème à trois corps où l'étude se fait dans un référentiel où la force n'est plus centrale.
- ✧ Les grandeurs caractéristiques du problème seront les conditions initiales ainsi que quelques points particuliers de la trajectoire.

### ★ l'analyse technique

- ✧ En ce qui concerne le repérage, s'il n'est pas imposé, il faut le prendre tel que le centre de force soit au centre du référentiel. Et si ce n'est pas possible parce que le centre de force bouge dans le référentiel d'étude, alors il faut changer de référentiel pour pouvoir appliquer les résultats de ce chapitre.
- ✧ Les lois à utiliser sont d'abord les deux lois de conservation : conservation de l'énergie et conservation du moment cinétique.

## IV.4.v – exemples

### ★ satellite géostationnaire

- ✧ Cherchons le rayon  $R_{\text{géo}}$  de la trajectoire d'un satellite géostationnaire.

69



#### Définition

Un satellite *géostationnaire* est un satellite qui reste immobile dans le référentiel terrestre.

- ✧ Ces satellites sont très utiles comme relais de communications.
- ✧ Tout d'abord, un tel satellite ne peut avoir qu'une trajectoire circulaire dont le centre est confondu avec le centre de la Terre.
- ✧ Remarquons qu'un satellite géostationnaire ne peut être que dans le plan équatorial. Sans cela, comme sa trajectoire est plane, si celle-ci n'est pas dans le plan de l'équateur, le satellite sera parfois dans l'hémisphère nord et, parfois, dans l'hémisphère sud. Ce qui est en contradiction avec son caractère géostationnaire.
- ✧ Pour trouver le rayon de sa trajectoire, projettons le PFD, appliqué au satellite dans le référentiel terrestre, sur  $\vec{u}_r$

$$m \vec{a} = -\frac{k}{R_{\text{géo}}^2} \vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad -m R_{\text{géo}} \dot{\theta}^2 = -G \times \frac{m M_{\text{T}}}{R_{\text{géo}}^2} \quad (\text{IV.16})$$

- ✧ Or la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est connu : c'est ni plus ni moins que la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même, rotation dont la période est un jour sidéral  $T_{\text{sid}} = 86\,164$  s.
- ✧ Cela donne

$$R_{\text{géo}} = \left( \frac{G M_{\text{T}} T_{\text{sid}}^2}{4 \pi^2} \right)^{1/3} = 42,3 \times 10^3 \text{ km} \quad (\text{IV.17})$$

- ✧ Ce qui correspond à une altitude de

$$h_{\text{géo}} = R_{\text{géo}} - R_{\text{T}} = 36 \times 10^3 \text{ km} \quad (\text{IV.18})$$

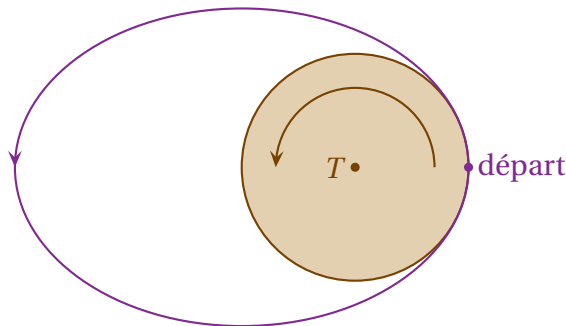
## ★ vitesse de satellisation

72

**Définition**

La *vitesse de satellisation*, ou *première vitesse cosmique*, est la vitesse minimale à communiquer à un satellite par rapport au référentiel géocentrique au niveau de la surface de la Terre pour qu'il puisse être satellisé.

- ✧ Une fois le satellite satellisé, nous connaissons un point de sa trajectoire : un point à la distance  $R_T$  du centre de la Terre.
- ✧ Sur cette trajectoire, l'énergie est constante. Donc si la vitesse est la plus faible possible en ce point, cela signifie que l'énergie doit être la plus faible possible permettant une telle trajectoire.
- ✧ Or l'énergie sur une trajectoire elliptique vaut  $E_m = -\frac{k}{2a}$ . Pour que  $E_m$  soit le plus petit possible, il faut  $a$  le plus petit possible.



- ✧ De toutes les trajectoires possible, c'est la trajectoire circulaire de rayon  $R_T$  qui correspond aux critères recherchés.
- ✧ Sur cette trajectoire, nous avons, au point de départ

$$E_m = -\frac{k}{2R_T} = \frac{1}{2} m v_{\text{sat}}^2 - \frac{k}{R_T} \quad \text{où} \quad k = G m M_T \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{2} v_{\text{sat}}^2 = \frac{G M_T}{2 R_T} \quad (\text{IV.19})$$

- ✧ En négligeant la différence entre champ de pesanteur et champ gravitationnel, nous pouvons écrire  $g_0 = \frac{G M_T}{R_T^2}$ , ce qui donne

$$v_{\text{sat}}^2 = g_0 R_T \quad \rightsquigarrow \quad v_{\text{sat}} = \sqrt{g_0 R_T} = 7,9 \text{ km.s}^{-1} \quad (\text{IV.20})$$

**Bon à retenir**

Pour la Terre, l'intensité du champ de pesanteur se réduit, en première approximation, à l'intensité du champ de gravitation à sa surface

$$g = \frac{G M_T}{R_T^2}$$

- ✧ Nous utiliserons de manière quasi-systématique cette relation pour « remplacer »  $G M_T$  par des grandeurs aux valeurs mieux connues  $g R_T^2$ .

## ★ vitesse de libération

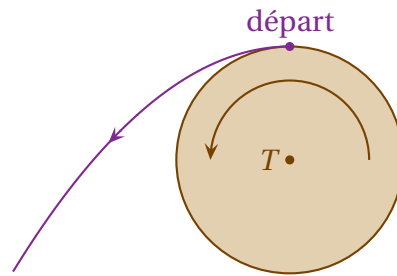
72

**Définition**

La *vitesse de libération*, ou *deuxième vitesse cosmique*, est la vitesse minimale à communiquer à un satellite par rapport au référentiel géocentrique au niveau de la surface de la Terre pour qu'il puisse s'éloigner à l'infini de la Terre.

- ✧ Au niveau de la surface de la Terre, si la vitesse est minimale, alors l'énergie l'est aussi.

- ✧ Et la trajectoire permettant un éloignement infini et d'énergie la plus faible possible est la trajectoire parabolique.



- ✧ Sur cette trajectoire, l'énergie totale est nulle, en particulier au point de départ

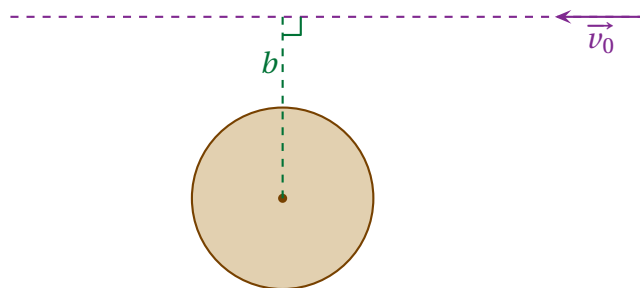
$$0 = \frac{1}{2} m v_{\text{lib}}^2 - \frac{G m M_T}{R_T} \quad \text{où} \quad G M_T = g_0 R_T^2 \quad \rightsquigarrow \quad v_{\text{lib}} = \sqrt{2 g_0 R_T} = 11,2 \text{ km.s}^{-1} \quad (\text{IV.21})$$

- ✧ Cette vitesse est à peine 40 % supérieure à celle de satellisation. Autrement dit, entre un satellite à peine en orbite et un satellite perdu, il y a 40 % de marge. Il faut bien viser !

### ★ distance minimale d'approche

- ✧ Considérons la situation suivante.

- ✧ Une météorite arrive en direction de la Terre avec un paramètre d'impact  $b$ , *i.e.* passerait à la distance  $b$  du centre de la Terre si elle n'était pas déviée. Sachant que sa vitesse à l'infini est  $v_0$ , à quelle distance passera-t-elle de la Terre ?



- ✧ Analyse physique :

- Ici il s'agit bien d'un point matériel dans un champ de forces central newtonien car nous nous plaçons dans le référentiel géocentrique ;
- Vu que la météorite a une vitesse non nulle à une distance infinie de la Terre, la trajectoire sera hyperbolique ;
- les grandeurs pertinentes vont être  $m$  (inertie de la comète),  $b$  (géométrie),  $G$ ,  $M_T$  (action la Terre) et  $v_0$  (condition initiale).

- ✧ Analyse technique : nous connaissons un point de la trajectoire avec sa vitesse, nous connaissons donc toute la trajectoire. Seule la distance au centre de force est intéressant, nous n'allons donc pas poser de repère précisément, mais utiliser une vision radiale.

- ✧ L'énergie mécanique s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (r\dot{\theta})^2 - \frac{G m M_T}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2 m r^2} - \frac{G m M_T}{r} \quad (\text{IV.22})$$

- ✧ Au point de distance minimale, nous avons donc

$$E_m = \frac{\sigma^2}{2 m r_{\min}^2} - \frac{G m M_T}{r_{\min}} \quad (\text{IV.23})$$

✧ Or, avec les conditions initiales, nous trouvons

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{et} \quad \sigma = m b v_0 \quad (\text{IV.24})$$

✧ Nous arrivons ainsi à l'équation

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{m b^2 v_0^2}{2 r_{\min}^2} - \frac{G m M_T}{r_{\min}} \quad \rightsquigarrow \quad v_0^2 r_{\min}^2 + 2 G M_T r_{\min} - b^2 v_0^2 = 0 \quad (\text{IV.25})$$

✧ C'est une équation du second degré de discriminant  $4 G^2 M_T^2 + 4 v_0^4 b^2 > 0$ . En ne gardant que la solution positive, nous trouvons

$$r_{\min} = \frac{-G M_T + \sqrt{G^2 M_T^2 + v_0^4 b^2}}{v_0^2} \quad (\text{IV.26})$$

👉 *Remarque.* En notant  $r_0$  le rayon de la trajectoire circulaire sur laquelle la vitesse serait  $v_0$ , la distance minimale d'approche s'écrit en fait  $r_{\min} = \sqrt{b^2 + r_0^2} - r_0$ .

## Compétences du chapitre

Les compétences à vocation essentiellement expérimentale sont indiquées en italique.

### Première année

#### Signaux – 1. Oscillateur harmonique

✧ Mouvement horizontal sans frottement d'une masse accrochée à un ressort linéaire sans masse. Position d'équilibre.

- 1 Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique. La résoudre compte-tenu des conditions initiales.
- 2 Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
- 3 Contrôler la cohérence de la solution obtenue avec la conservation de l'énergie mécanique, l'expression de l'énergie potentielle élastique étant ici affirmée.

#### Mécanique – 1.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point

✧ Espace et temps classiques. Référentiel d'observation. Caractère relatif du mouvement. Description d'un mouvement. Vecteur-position, vecteur-vitesse, vecteur-accélération.

- 4 *Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.*

✧ Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

- 5 Établir les expressions des composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération dans le seul cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques. [9,11,11,11,13,14]
- 6 Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire les composantes du vecteur-vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. [10,13]
- 7 Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.

✧ Exemple 1 : mouvement de vecteur-accélération constant.

- 8 Exprimer la vitesse et la position en fonction du temps. Obtenir la trajectoire en coordonnées cartésiennes. [22]

✧ Exemple 2 : mouvement circulaire uniforme et non uniforme.

- 9 Exprimer les composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération en coordonnées polaires planes. [23]
- 10 Identifier les liens entre les composantes du vecteur-accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur-vitesse et sa variation temporelle. Situer qualitativement la direction du vecteur-accélération dans la concavité d'une trajectoire plane.

#### Mécanique – 1.2 Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers

✧ Définition d'un solide.

- 11 Différencier un solide d'un système déformable. [19]

✧ Translation.

12 Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire.

✧ Rotation autour d'un axe fixe.

13 Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.

## Mécanique – 2.1 Loi de la quantité de mouvement

✧ Forces. Principe des actions réciproques.

14 Établir un bilan des forces sur un système, ou plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur une figure.

15 *Proposer un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force.*

✧ Quantité de mouvement d'un point et d'un système de points. Lien avec la vitesse du centre d'inertie d'un système fermé.

16 Établir l'expression de la quantité de mouvement d'un système restreint au cas de deux points sous la forme  $\vec{p} = m \vec{v}_{(G)}$ . [18]

✧ Référentiel galiléen. Principe de l'inertie.

17 Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.

✧ Loi de la quantité de mouvement dans un référentiel galiléen.

18 Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre d'inertie d'un système fermé.

✧ Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.

19 Mettre en équation le mouvement sans frottement et le caractériser comme un mouvement à vecteur-accélération constant.

✧ Influence de la résistance de l'air.

20 Approche numérique : Prendre en compte la traînée pour modéliser une situation réelle.

21 Approche numérique : Exploiter une équation différentielle sans la résoudre analytiquement : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats fournis par un logiciel d'intégration numérique.

22 *Proposer un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.*

✧ Pendule simple.

23 Établir l'équation du mouvement du pendule simple.

24 Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

25 Établir l'équation du portrait de phase (intégrale première) dans ce cadre et le tracer.

✧ Lois de COULOMB du frottement de glissement dans le seul cas d'un solide en translation.

26 Exploiter les lois de COULOMB fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage.

27 Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.

## Mécanique – 2.2 Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

✧ Puissance et travail d'une force.

**28** Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force. Savoir que la puissance dépend du référentiel. [37]

✧ Loi de l'énergie cinétique et loi de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen.

**29** Utiliser la loi appropriée en fonction du contexte. [38,45,55]

✧ Énergie potentielle. Énergie mécanique.

**30** Établir et connaître les expressions des énergies potentielles de pesanteur (champ uniforme), énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), énergie potentielle élastique, énergie électrostatique (champ uniforme et champ créé par une charge ponctuelle). [25,25,26,28,56]

✧ Mouvement conservatif.

**31** Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales. [41,55]

✧ Mouvement conservatif à une dimension.

**32** Dédire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.

**33** Expliquer qualitativement le lien entre le profil d'énergie potentielle et le portrait de phase.

✧ Positions d'équilibre. Stabilité.

**34** Dédire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre, et la nature stable ou instable de ces positions. [43]

✧ Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.

**35** Identifier cette situation au modèle de l'oscillateur harmonique.

**36** Approche numérique : utiliser les résultats fournis par une méthode numérique pour mettre en évidence des effets non linéaires.

**37** Barrière de potentiel. Évaluer l'énergie minimale nécessaire pour franchir la barrière.

## Mécanique – 4.1 Loi du moment cinétique

✧ Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.

**38** Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.

✧ Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté.

**39** Maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire. [34]

✧ Généralisation au cas du solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.

**40** Exploiter la relation pour le solide entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni. [20,51,53]

**41** Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses. [21]

✧ Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.

**42** Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier. [33,51]

✧ Couple.

**43** Définir un couple. [36]



✧ Liaison pivot.

44 Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire. [36]

✧ Notions simples sur les moteurs ou freins dans les dispositifs rotatifs.

45 Savoir qu'un moteur ou un frein contient nécessairement un stator pour qu'un couple puisse s'exercer sur le rotor. [35]

✧ Loi du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen.

46 Reconnaître les cas de conservation du moment cinétique.

✧ Loi scalaire du moment cinétique appliquée au solide en rotation autour d'un axe fixe orienté dans un référentiel galiléen.

✧ Pendule de torsion.

47 Établir l'équation du mouvement.

48 Expliquer l'analogie avec l'équation de l'oscillateur harmonique.

49 Établir une intégrale première du mouvement.

✧ Pendule pesant.

50 Établir l'équation du mouvement. [50]

51 Expliquer l'analogie avec l'équation de l'oscillateur harmonique.

52 Établir une intégrale première du mouvement.

53 Lire et interpréter le portrait de phase : bifurcation entre un mouvement pendulaire et un mouvement révolitif. [46]

54 Approche numérique : Utiliser les résultats fournis par un logiciel de résolution numérique ou des simulations pour mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.

55 Réaliser l'acquisition expérimentale du portrait de phase d'un pendule pesant. Mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique.

## Mécanique – 4.2 Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen

✧ Énergie cinétique d'un solide en rotation.

56 Utiliser la relation  $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ , l'expression de  $J_\Delta$  étant fournie. [20,56]

✧ Loi de l'énergie cinétique pour un solide.

57 Établir l'équivalence dans ce cas entre la loi scalaire du moment cinétique et celle de l'énergie cinétique.

## Mécanique – 4.3 Loi de l'énergie cinétique pour un système déformable

✧ Loi de l'énergie cinétique pour un système déformable.

58 Bilan énergétique du tabouret d'inertie.

59 Prendre en compte le travail des forces intérieures. [37]

60 Utiliser sa nullité dans le cas d'un solide. [38,55]

## Mécanique – 5. Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

✧ Point matériel soumis à un seul champ de force centrale.

61 Déduire de la loi du moment cinétique la conservation du moment cinétique.

62 Connaître les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires. [74]

✧ Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.

63 Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective. [75]

64 Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné à la valeur de l'énergie mécanique. [75,76]

65 Approche documentaire : Relier l'échelle spatiale sondée à l'énergie mise en jeu lors d'une collision en s'appuyant sur l'expérience de RUTHERFORD.

✧ Champ newtonien. Lois de KEPLER.

66 Énoncer les lois de KEPLER pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres. [79,81]

✧ Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.

67 Montrer que le mouvement est uniforme et savoir calculer sa période. [81]

68 Établir la troisième loi de KEPLER dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique. [81]

✧ Satellite géostationnaire.

69 Calculer l'altitude du satellite et justifier sa localisation dans le plan équatorial. [82]

✧ Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire puis dans le cas du mouvement elliptique.

70 Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire. [78]

71 Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe. [79]

✧ Vitesses cosmiques : vitesse en orbite basse et vitesse de libération.

72 Exprimer ces vitesses et connaître leur ordre de grandeur en dynamique terrestre. [83,83]

## Deuxième année

### Mécanique – 1.3 Approche descriptive du fonctionnement d'un véhicule à roues

✧ Mouvement rectiligne uniforme d'un véhicule à roues dans un référentiel galiléen en l'absence de glissement :

- a) véhicule tracté par une force extérieure  $F$
- b) véhicule muni de roues motrices.

73 Exprimer la condition de non-glissement des roues. [61]

74 Appliquer la loi de la quantité de mouvement et la loi de l'énergie cinétique au véhicule. Appliquer la loi du moment cinétique aux roues dans le référentiel du véhicule. [62,62,64,65,67,67,69,70]

75 Expliquer qualitativement les rôles respectifs du moteur et des actions de contact exercées par la route selon qu'on envisage un bilan énergétique global ou un bilan de quantité de mouvement global. [64,65,69,70]