

Mécanique

Chapitre 3

Premières ondes

Table des matières

Biographies succinctes	6
Introduction	8
I Vers l'équation d'onde	9
I-1 Couplage de deux oscillateurs	9
I-1 <i>·i</i> situation	9
présentation	9
mise en équation	9
I-1 <i>·ii</i> découplage : vers les modes propres	10
de nouvelles inconnues	10
de nouvelles équations	10
interprétation	11
retour sur les oscillateurs couplés	12
I-1 <i>·iii</i> couplage faible	12
expression des pulsations	12
solution	13
un phénomène qui reviendra : les battements	14
I-1 <i>·iv</i> oscillations forcées	14
modification du modèle	14
solutions en complexe	14
résonance et antirésonance	15
couplage faible	16
pour M_2	16
avec frottement	17
I-2 Chaîne d'oscillateurs	17
I-2 <i>·i</i> modèle	17
I-2 <i>·ii</i> équation de couplage	17
I-2 <i>·iii</i> approximation des milieux continus	18
idée	18
transformation de l'équation de couplage	19
équation de D'ALEMBERT	20
I-3 Ondes longitudinales dans un solide	20
I-3 <i>·i</i> effort interne à un solide	20
I-3 <i>·ii</i> son dans un solide	20
modélisation	20
force à l'échelle mésoscopique	21
équation de propagation	21
I-3 <i>·iii</i> expression phénoménologique du module d'YOUNG	22
Approche microscopique	22
célérité des ondes	24
lien microscopique – macroscopique	24
II Solutions de l'équation de D'ALEMBERT	25
II-1 Équation de propagation le long d'une corde	25
II-1 <i>·i</i> pas n'importe quelle corde	25
II-1 <i>·ii</i> mise en équation	25
TCI	25

	projection sur \vec{u}_x	26
	projection sur \vec{u}_y	26
	réécriture du terme d'accélération	27
	couplage géométrique	27
	rassemblement et fin	27
II.2	Solutions en OPP	28
II.2.i	forme des solutions	28
	expression	28
	vérification	28
II.2.ii	image des solutions	29
	une onde	29
	interprétation de $f(x - ct)$	29
	interprétation de $g(x + ct)$	30
	résumé	31
	philosophie de l'onde	31
II.2.iii	quelques applications numériques	31
	propagation dans le fer	31
	corde de guitare	32
II.3	Solutions en OPPM	32
II.3.i	c'est un cas particulier	32
	forme	32
	nouveau vocabulaire	33
	relation de dispersion	34
II.3.ii	intérêt de l'OPPM	34
	c'est un modèle	34
	... et un intermédiaire de calcul	35
II.4	Ondes Stationnaires (OS)	35
II.4.i	c'est encore un cas particulier	35
	définition	35
	OS pour une équation de d'ALEMBERT	35
II.4.ii	visualisation	37
II.5	Changement de description	37
II.5.i	à partir d'une OS	37
	vers OPPM	37
	vers OPP	38
II.5.ii	à partir d'une OPPM	38
	vers OS	38
	vers OPP	38
II.5.iii	à partir d'une OPP	39
II.5.iv	superpositions	39
II.6	L'équation de D'ALEMBERT n'est qu'une équation différentielle	39
III	Tenir compte des conditions aux limites	40
III.1	Équation de propagation dans un câble coaxial	40
III.1.i	présentation	40
	la fin de l'ARQS	40
	le modèle mésoscopique ou le retour de la l'ARQS	40
III.1.ii	équation de propagation	41
	le « circuit »	41
	loi des mailles	41

	loi des nœuds	41
	équations de D'ALEMBERT	42
III-2	Grandeurs duales	43
III-2 <i>i</i>	équations couplées	43
	pour le câble	43
	pour la corde	43
	de manière générale	44
III-2 <i>ii</i>	impédance d'un milieu propagatif	44
	pour le câble coaxial	44
	pour la corde	46
III-3	Réflexion et transmission	47
III-3 <i>i</i>	à l'extrémité d'un milieu propagatif	47
	câble coaxial	47
	application aux TP	50
	traduire les conditions aux limites pour une corde	50
	cas à retenir parmi tous	51
III-3 <i>ii</i>	jonction entre deux milieux propagatifs	51
	situation	51
	une autre forme de solution	52
	conditions aux limites	52
	coefficients de réflexion et transmission	55
III-4	Vibrations d'une corde	55
III-4 <i>i</i>	présentation de la corde de MELDE	55
	dispositif	55
	analyse	56
III-4 <i>ii</i>	modes propres	56
	solution <i>a priori</i>	56
	utilisation des conditions aux limites	56
	résultat à connaître	57
III-4 <i>iii</i>	oscillations forcées	58
	dispositif en TP	58
	solution <i>a priori</i>	58
	conditions aux limites	59
	résonance	59
III-4 <i>iv</i>	solution en régime libre	60
	exemple de la corde pincée	60
	idée de la méthode	60
IV	Dispersion, atténuation	62
IV-1	Câble coaxial résistif	62
IV-1 <i>i</i>	nouveau modèle mésoscopique	62
IV-1 <i>ii</i>	équations de couplage	62
	loi des mailles	62
	loi des nœuds	63
IV-1 <i>iii</i>	équation de propagation	63
	équation en $u(x,t)$	63
	équation en $i(x,t)$	64
	interprétation	64
IV-2	Solutions de l'équation de « propagation »	65
IV-2 <i>i</i>	passage en complexe	65

	méthode	65
	exemple pour $u(x,t)$	65
	bilan	66
IV·2·ii	relation de dispersion	66
IV·2·iii	le vecteur d'onde complexe traduit l'atténuation et la dispersion	66
	solution en notation réelle	66
	dispersion et atténuation	67
	milieu passif ou actif	68
IV·2·iv	câble peu résistif	68
	équation de dispersion – simplification	68
	interprétation	69
IV·2·v	câble coaxial bien choisi	69
IV·3	Paquet d'ondes	70
IV·3·i	superposition discrète d'OPPM	70
	2 OPPM	70
	plein d'OPPM	72
IV·3·ii	superposition continue d'OPPM	72
	onde carrée	72
	onde gaussienne	73
IV·3·iii	évolution temporelle	74
	observation	74
	vitesse de groupe	75
	Compétences du chapitre	77

Biographies succinctes



Robert HOOKE

(1635 Freshwater – 1703 Londres)

Fils de pasteur, Robert montre très tôt des talents pour les mathématiques. Lorsque son père meurt quand il a 13 ans, Robert part à Londres pour étudier. Il devient l'assistant de R. BOYLE et participe à la fabrication d'un appareil qui permit la découverte de la loi éponyme ($P V = C^{te}$ pour un gaz). Son habileté expérimentale lui permettra d'obtenir un poste de démonstrateur à la Royal Society en 1662. Ses travaux portent sur la microscopie, l'optique, la mécanique (avec la loi de HOOKE) et une contribution à la loi de gravitation. Surpassé peu après par NEWTON, le caractère de Robert s'assombrit à la fin de sa vie. Il est à noter que le seul portrait authentifié de Robert a été perdu lors du déménagement de la Royal Society, après sa mort, déménagement imposé par NEWTON suite à leur brouille.

Jean le Rond D'ALEMBERT

(1717 Paris – 1783 Paris)



Enfant illégitime, Jean le Rond est abandonné le lendemain de sa naissance sur les marches d'une chapelle attenante à Notre Dame de Paris, celle qui lui donna son nom, la chapelle Saint Jean le Rond. Bien qu'élevé en nourrice, son père veillera de loin, à ce qu'il puisse accéder à des études. Il obtient le baccalauréat en art mais abandonne ensuite ses études de médecine. Ses travaux le font entrer dès 24 ans dans l'académie des sciences en tant qu'adjoint de la section Astronomie. En 1743 il publie son *Traité de dynamique*. Par la suite il se consacrera essentiellement aux lettres et en particulier à la rédaction de l'encyclopédie avec DIDEROT avec qui il se fâche en 1757. Jusqu'à sa mort il continuera ses travaux scientifiques et les publiera sous forme si peu conventionnelle qu'ils en seront difficiles à lire.

Thomas YOUNG

(1773 Milverton (Somerset) – 1829 Londres)



Véritable esprit universel, Thomas YOUNG parle une dizaine de langues contemporaines, en traduit 5 ou 6 anciennes dont les hiéroglyphes égyptiens et se passionne pour la médecine, la botanique, la philosophie... Même s'il exerce la médecine, il enseigne la physique et travaille essentiellement sur l'optique. Comme il propose en 1807 une expérience (les trous d'YOUNG) pour tester la théorie ondulatoire de la lumière, il est critiqué par la plupart de ses contemporains pour qui la théorie valide est la théorie corpusculaire, celle d'Isaac NEWTON.



Franz MELDE

(1832 – 1901)

Physicien allemand, Franz a été professeur à l'université de Marburg. Il a travaillé notamment sur la météorologie, la mécanique des fluides et l'acoustique. Musicien lui-même il s'est intéressé aux figures de CHLADNI. Il est surtout connu pour l'expérience qui porte son nom et qui visait à montrer l'existence d'ondes stationnaires.

Hermann Amandus SCHWARZ

(1843 Hermsdorf – 1921 Berlin)



Alors qu'il poursuit des études de chimie Hermann se réoriente vers les mathématiques suite aux arguments persuasifs de son professeurs, WEIERSTRASS. Il devient professeur d'université successivement à Halle en 1865, à Zurich en 1867 puis à Göttingen à partir de 1875. Il travaille sur la théorie des fonctions, la géométrie différentielles, le calcul des variations. En 1892 il devient professeur à l'université de Berlin et en même temps membre de l'académie des sciences de Berlin. ZERMELO fut l'un de ses étudiants.

Premières ondes

Cette année nous allons étudier un thème transversal : les ondes. Ces ondes apparaissent en effet dans quasiment tous les domaines de la physique :

- en mécanique avec les ondes le long des cordes ;
- en mécanique des fluides avec les ondes sonores ;
- en optique où le caractère ondulatoire de la lumière engendrera interférence et diffraction ;
- en thermodynamique où nous effleurerons les ondes thermiques ;
- enfin en électromagnétisme avec tout ce qui est « radiation ».

C'est la raison pour laquelle ce chapitre est important puisqu'il fixe les bases de la phénoménologie des ondes et, donc, de la propagation. Pour les mêmes raisons, il est assez lourd et est divisé en quatre parties :

- la première est destinée à aboutir à l'équation régissant les ondes, tout en faisant comprendre les raisons profondes qui sont à l'origine de la propagation ;
- dans la deuxième, nous verrons quelles sont les solutions de l'équation d'onde et leurs interprétations ;
- ensuite, dans la troisième, nous apprendrons comment tenir compte des conditions aux limites et verrons ainsi comment « résoudre » un problème propagatif ;
- enfin, dans la dernière partie, nous verrons ce qui se passe dans la propagation n'est pas parfaite, *i.e.* lorsqu'il existe des phénomènes dits de dispersion ou d'atténuation.

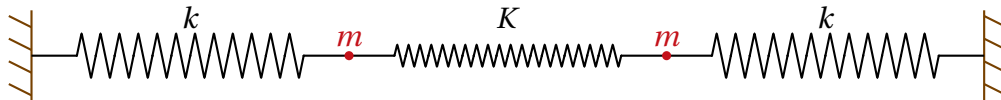
I – Vers l'équation d'onde

I.1 – Couplage de deux oscillateurs

I.1.i – situation

★ présentation

- ✧ Un oscillateur c'est un ensemble { masse + ressort }.
- ✧ Prenons deux oscillateurs et relier-les par un ressort de constante de raideur *a priori* différente.

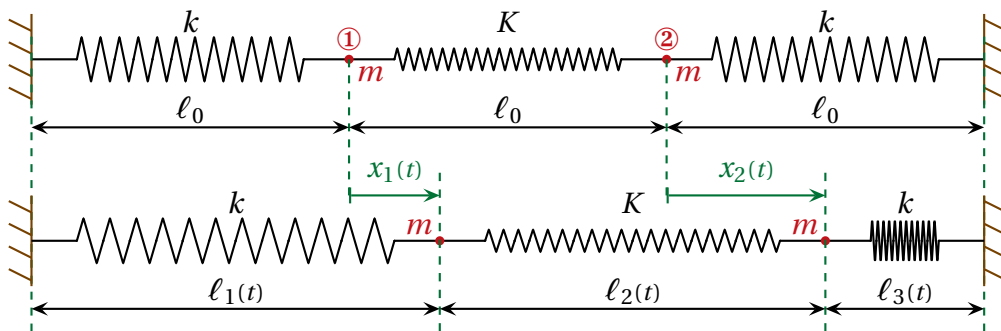


- ✧ Nous obtenons alors deux oscillateurs *couplés* : le mouvement de l'un va influencer le mouvement de l'autre.
- ✧ Regardons cela d'un peu plus près.

★ mise en équation

🕒 analyse

- ✧ Ici nous avons un dispositif à deux degrés de description. Nous allons considérer qu'il n'y a pas de frottement, ce qui fait que l'évolution est libre et conservative.
- ✧ Toutefois nous allons plutôt utiliser une approche en terme de force, de par la présence de deux degrés de description.
- ✧ Commençons par bien mettre en place le repérage.



🕒 PFD sur la première masse

- ✧ Les forces qui s'exercent sur m_1 et qui ont une composante sur \vec{u}_x sont :
 - ➔ la force exercée par le ressort k de gauche : $\vec{f}_1 = -k(\ell_1(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{sort},1g}$;
 - ➔ la force exercée par le ressort K : $\vec{F}_1 = -K(\ell_2(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{sort},1d}$.
- ✧ La projection du PFD donne donc

$$\underbrace{0}_{\text{poids}} + \underbrace{0}_{\text{réaction}} + \underbrace{0}_{\text{frott}} - k(\ell_1(t) - \ell_0)(+1) - K(\ell_2(t) - \ell_0)(-1) = m \ddot{x}_1(t) \tag{I.1}$$

- ✧ Les allongements s'écrivent

$$\ell_1(t) - \ell_0 = +x_1(t) \quad \text{et} \quad \ell_2(t) - \ell_0 = x_2(t) - x_1(t) \tag{I.2}$$

- ✧ Nous arrivons ainsi à

$$-k x_1(t) + K(x_2(t) - x_1(t)) = m \ddot{x}_1(t) \quad \rightsquigarrow \quad m \ddot{x}_1(t) + (k + K) x_1(t) = K x_2(t) \quad (\text{I.3})$$

✧ Nous pouvons vérifier que les signes associés au coefficient de la partie gauche de l'équation différentielle sont tous les mêmes : cela correspond à une évolution stable, ce qui est normal pour un oscillateur.

🌀 PFD sur la deuxième masse

✧ Avec la même technique, nous trouvons

$$0 + 0 + 0 - k(\ell_3(t) - \ell_0) (-1) - K(\ell_2(t) - \ell_0) (+1) = m \ddot{x}_2(t) \quad (\text{I.4})$$

✧ Puis

$$\ell_3(t) - \ell_0 = -x_2(t) \quad \text{et} \quad \ell_2(t) - \ell_0 = x_2(t) - x_1(t) \quad (\text{I.5})$$

✧ Ce qui donne

$$-k x_2(t) + K(x_1(t) - x_2(t)) = m \ddot{x}_2(t) \quad \rightsquigarrow \quad m \ddot{x}_2(t) + (k + K) x_2(t) = K x_1(t) \quad (\text{I.6})$$

✧ Étant donné que les rôles des deux masses sont strictement identiques, il est normal de trouver les mêmes équations différentielles avec $1 \longleftrightarrow 2$. Ce que, d'ailleurs, nous aurions pu dire dès le début.

I.1.ii – découplage : vers les modes propres

✧ Finalement nous nous trouvons face au système d'équations différentielles suivant

$$m \ddot{x}_1(t) + (k + K) x_1(t) = K x_2(t) \quad (\text{I.7})$$

$$m \ddot{x}_2(t) + (k + K) x_2(t) = K x_1(t) \quad (\text{I.8})$$

✧ Il s'agit bien d'un système d'équations différentielles couplées car dans l'équation « de $x_1(t)$ » il y a « du $x_2(t)$ » et réciproquement.

★ de nouvelles inconnues

✧ Introduisons de nouvelles fonctions inconnues et cherchons les équations différentielles auxquelles elles obéissent.

$$\sigma(t) \stackrel{\text{not}}{=} x_1(t) + x_2(t) \quad \text{et} \quad \alpha(t) \stackrel{\text{not}}{=} x_1(t) - x_2(t) \quad (\text{I.9})$$

★ de nouvelles équations

✧ En sommant (I.7) et (I.8) nous obtenons

$$m(\ddot{x}_2(t) + \ddot{x}_1(t)) + (k + K)(x_2(t) + x_1(t)) = K(x_1(t) + x_2(t)) \quad \rightsquigarrow \quad m\ddot{\sigma}(t) + (k + K)\sigma(t) = K\sigma(t) \quad (\text{I.10})$$

✧ Et ainsi

$$m\ddot{\sigma}(t) + k\sigma(t) = 0 \quad (\text{I.11})$$

✧ De même en faisant (I.7) – (I.8)

$$m(\ddot{x}_1(t) - \ddot{x}_2(t)) + (k + K)(x_1(t) - x_2(t)) = K(x_2(t) - x_1(t)) \quad \rightsquigarrow \quad m\ddot{\alpha}(t) + (k + K)\alpha(t) = -K\alpha(t) \quad (\text{I.12})$$

⇨ Et ainsi

$$m\ddot{\alpha}(t) + (k + 2K)\alpha(t) = 0 \quad (\text{I.13})$$

⇨ Nous obtenons ainsi un nouveau système d'équations différentielles *découplées*

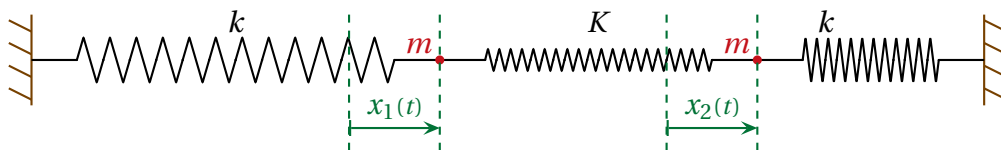
$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\sigma}(t) + \omega_s^2 \sigma(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \ddot{\alpha}(t) + \omega_a^2 \alpha(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k + 2K}{m}} \end{array} \right. \quad (\text{I.14})$$

★ interprétation

🕒 signification de $\sigma(t)$

⇨ Imposons $\alpha(t) = 0$ pour pouvoir interpréter $\sigma(t)$ *seul*.

⇨ Cela implique alors $x_1(t) - x_2(t) = 0$ soit $x_1(t) = x_2(t)$.



⇨ Dans ce cas le ressort de couplage devient « solide », il n'a plus d'influence sur le mouvement, ce qui est confirmé par l'expression de la pulsation de $\sigma(t)$ qui ne fait pas intervenir K .

⇨ Il s'agit là d'un mode *symétrique* : les deux oscillateurs font la même chose.

👉 *Remarque.* Cela explique *a posteriori* la notation σ et l'indice « s » de ω_s .

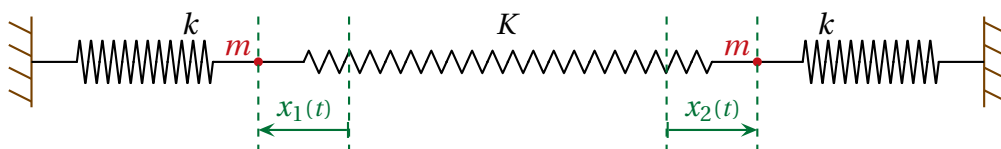
⇨ La solution est alors, puisqu'il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique

$$\sigma(t) = S \cos(\omega_s t + \varphi_s) \quad (\text{I.15})$$

🕒 signification de $\alpha(t)$

⇨ Imposons cette fois $\sigma(t) = 0$ pour pouvoir interpréter $\alpha(t)$ *seul*.

⇨ Cela implique donc $x_1(t) + x_2(t) = 0$ soit $x_1(t) = -x_2(t)$.



⇨ Il s'agit là d'un mode *antisymétrique* : les deux oscillateurs ont des mouvements opposés.

👉 *Remarque.* Cela explique, là aussi, la notation α et l'indice « a » de ω_a .

⇨ La solution est, puisqu'il s'agit également de l'équation d'un oscillateur harmonique

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) \quad (\text{I.16})$$

★ retour sur les oscillateurs couplés

⇨ Une fois les solutions connues pour $\sigma(t)$ et $\alpha(t)$ il est relativement facile de revenir à la solution en $x_1(t)$ et $x_2(t)$

$$\begin{cases} \sigma(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ \alpha(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{\sigma(t) + \alpha(t)}{2} \\ x_2(t) = \frac{\sigma(t) - \alpha(t)}{2} \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

⇨ $\sigma(t)$ et $\alpha(t)$ sont des solutions *indépendantes* pour l'évolution des oscillateurs couplés.

⇨ Nous constatons aussi que les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont des combinaisons linéaires de $\alpha(t)$ et $\sigma(t)$.

⇨ Tout cela revient à dire que $\sigma(t)$ et $\alpha(t)$ sont des modes d'évolutions « naturelles » pour le dispositif : ce sont des *modes propres*.

⇨ Ici il y a *deux* oscillateurs, *deux* degrés de descriptions et *deux* modes propres. Ce n'est pas un hasard du tout. L'algèbre linéaire est passée par là.

⚠ La corde de MELDE a une infinité de degrés de description, il est normal qu'elle ait une infinité de *modes propres*.

I.1.iii – couplage faible

★ expression des pulsations

⇨ Dans le cas d'un couplage faible $K \ll k$ alors

$$\omega_a - \omega_s = \sqrt{\frac{k + 2K}{m}} - \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{I.18})$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m}} \left(\sqrt{\frac{2K + k}{k}} - 1 \right) \quad (\text{I.19})$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m}} \left(\sqrt{1 + \frac{2K}{k}} - 1 \right) \quad (\text{I.20})$$

$$\stackrel{\text{DL}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}} \left(\chi + \frac{K}{k} - \chi \right) \quad (\text{I.21})$$

$$(\text{I.22})$$

⇨ Finalement

$$\omega_a - \omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}} \times \frac{K}{k} \rightsquigarrow \omega_a - \omega_s = \frac{K}{k} \times \omega_s \quad (\text{I.23})$$

⇨ Les deux pulsations sont d'autant plus proches que le couplage est faible.

⇨ Dans ces conditions, au premier ordre, nous pouvons écrire

$$\omega_s + \omega_a = 2\omega_s \quad (\text{I.24})$$

★ solution

✧ Imaginons les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = a; \quad x_2(0) = 0; \quad \dot{x}_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}_2(0) = 0 \quad (\text{I.25})$$

✧ Nous pouvons écrire

$$\sigma(t) = S \cos(\omega_s t) + S' \sin(\omega_s t) \quad (\text{I.26})$$

✧ Les conditions initiales sont

$$\sigma(0) = x_1(0) + x_2(0) = a \quad \text{et} \quad \dot{\sigma}(0) = \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) = 0 \quad (\text{I.27})$$

✧ Ce qui conduit à

$$\sigma(t) = a \cos(\omega_s t) \quad (\text{I.28})$$

✧ De même nous pouvons écrire

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_a t) + A' \sin(\omega_a t) \quad (\text{I.29})$$

✧ Les conditions initiales sont cette fois

$$\alpha(0) = x_1(0) - x_2(0) = a \quad \text{et} \quad \dot{\alpha}(0) = \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) = 0 \quad (\text{I.30})$$

✧ Ce qui conduit là aussi à

$$\alpha(t) = a \cos(\omega_a t) \quad (\text{I.31})$$

✧ Revenons maintenant d'abord à $x_1(t)$

$$x_1(t) = \frac{\sigma(t) + \alpha(t)}{2} \quad (\text{I.32})$$

$$= \frac{1}{2} a (\cos(\omega_s t) + \cos(\omega_a t)) \quad (\text{I.33})$$

$$= \frac{a}{2} \times 2 \cos\left(\frac{\omega_s + \omega_a}{2} t\right) \times \cos\left(\frac{\omega_s - \omega_a}{2} t\right) \quad (\text{I.34})$$

$$\stackrel{\text{DL}}{=} a \cos(\omega_s t) \times \cos\left(\frac{K}{k} \omega_s t\right) \quad (\text{I.35})$$

✧ De même pour $x_2(t)$

$$x_2(t) = \frac{\sigma(t) - \alpha(t)}{2} \quad (\text{I.36})$$

$$= \frac{1}{2} a (\cos(\omega_s t) - \cos(\omega_a t)) \quad (\text{I.37})$$

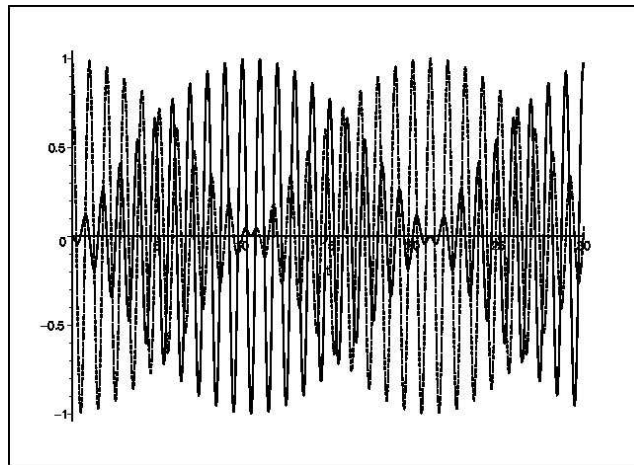
$$= \frac{a}{2} \times 2 \sin\left(\frac{\omega_s + \omega_a}{2} t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_s - \omega_a}{2} t\right) \quad (\text{I.38})$$

$$\stackrel{\text{DL}}{=} a \sin(\omega_s t) \times \sin\left(\frac{K}{k} \omega_s t\right) \quad (\text{I.39})$$

★ un phénomène qui reviendra : les battements

⇨ Nous obtenons ainsi des oscillations qui vont se « transmettre » d'un oscillateur à l'autre.

Graphique 10

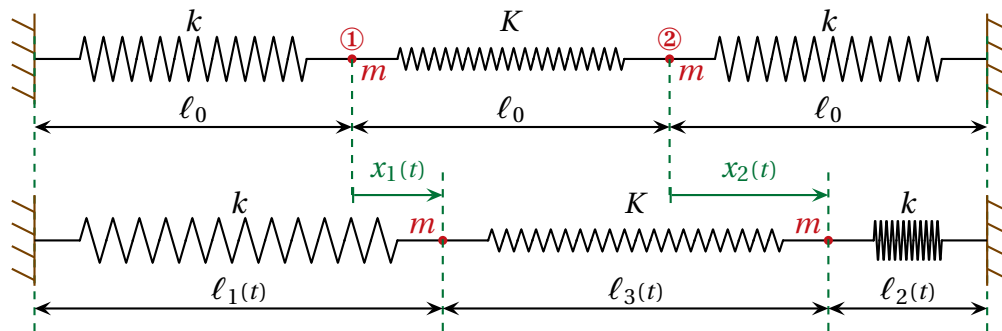


- ⇨ Sur le graphe précédent, nous avons représenté $x_1(t)$ et $x_2(t)$: nous voyons bien que lorsque l'un bouge, l'autre est plutôt immobile.
- ⇨ En fait, les deux oscillateurs *s'échangent* sans arrêt de l'énergie.
- ⇨ C'est ce phénomène qui est à la base de la propagation : l'énergie peut se transmettre par couplage d'oscillations.

I.1.iv – oscillations forcées

★ modification du modèle

⇨ Reprenons le dispositif.



- ⇨ Sans préjuger de l'origine physique de la force excitatrice, supposons que la masse M_1 , et uniquement celle-là, soit soumise à une force supplémentaire de type sinusoïdal.
- ⇨ Alors les PFD sur M_1 et M_2 sont modifiés de la manière suivante

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1(t) + (k + K) x_1(t) - K x_2(t) = F_0 \cos(\omega t) \\ m \ddot{x}_2(t) + (k + K) x_2(t) - K x_1(t) = 0 \end{cases} \quad (I.40)$$

★ solutions en complexe

⇨ Cherchons une solution particulière, la solution en régime forcée sous la forme

$$\underline{x}_1(t) = \underline{X}_{m1} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{x}_2(t) = \underline{X}_{m2} e^{j\omega t} \quad (I.41)$$

👉 *Remarque.* La pulsation intervenant dans la recherche des solutions est la même que celle intervenant dans l'excitation, grâce au caractère *linéaire* du dispositif.

⇨ En remplaçant dans les équations différentielles et en simplifiant par $e^{j\omega t}$

$$\begin{cases} -m\omega^2 \underline{X}_{m1} + (k+K) \underline{X}_{m1} - K \underline{X}_{m2} = F_0 \\ -m\omega^2 \underline{X}_{m2} + (k+K) \underline{X}_{m2} - K \underline{X}_{m1} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

⇨ Il s'agit là d'un système qui se réécrit

$$\begin{cases} \left((K+k) - m\omega^2 \right) \times \underline{X}_{m1} + (-K) \times \underline{X}_{m2} = F_0 \\ (-K) \times \underline{X}_{m1} + \left((k+K) - m\omega^2 \right) \times \underline{X}_{m2} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.43})$$

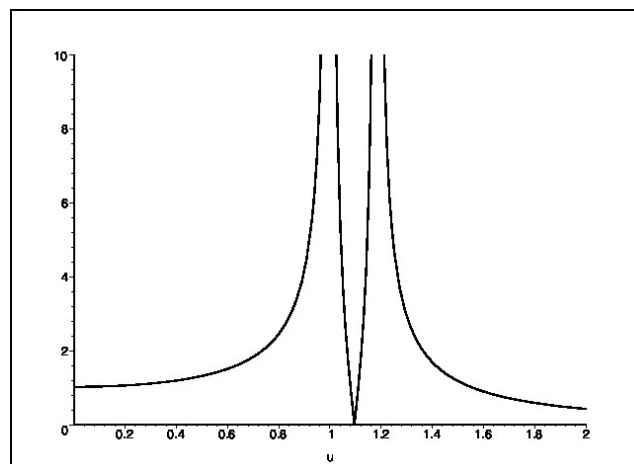
⇨ Les solutions sont

$$\underline{X}_{m1} = \frac{\left((k+K) - m\omega^2 \right) F_0}{\left((k+K) - m\omega^2 \right)^2 - K^2} \quad \text{et} \quad \underline{X}_{m2} = \frac{K F_0}{\left((k+K) - m\omega^2 \right)^2 - K^2} \quad (\text{I.44})$$

★ résonance et antirésonance

⇨ Commençons par représenter $|\underline{X}_{m1}|$ en fonction de la pulsation.

Graphique 11



⇨ Nous constatons qu'il y a deux valeurs de ω pour lesquelles l'amplitude devient infinie : il s'agit là de phénomènes de *résonance*.

⇨ Mais nous voyons aussi qu'il y a une valeur de ω pour laquelle l'amplitude est nulle ! C'est le phénomène d'*antirésonance*. À cette pulsation et bien qu'elle soit excitée, la masse M_1 reste immobile.

🕒 pulsation de résonance


⇨ Il s'agit des pulsations pour lesquelles le dénominateur est nul.

⇨ Nous avons ainsi

$$\left((k+K) - m\omega^2 \right)^2 - K^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \left((k+K) - m\omega^2 \right)^2 = K^2 \quad \rightsquigarrow \quad (k+K) - m\omega^2 = \pm K \quad (\text{I.45})$$

⇨ Cela nous conduit à

$$m\omega^2 = K + k \mp K \quad \rightsquigarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m} = \omega_s^2 \quad \text{ou} \quad \omega^2 = \frac{2K+k}{m} = \omega_a^2 \quad (\text{I.46})$$



Bon à retenir

*Il y a résonance quand la pulsation extérieure est égale à la pulsation propre **quand il n'y a pas de frottement.***

🕒 pulsation d'antirésonance

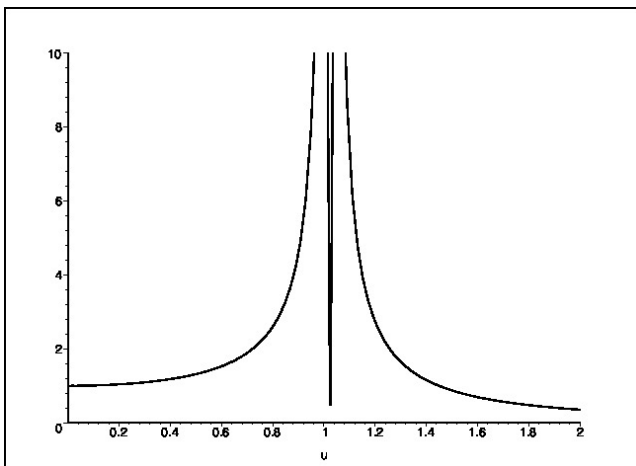
⇨ C'est lorsque $|X_{m1}| = 0$ ce qui donne

$$m\omega^2 = K + k \quad \rightsquigarrow \quad \omega_{\text{anti}}^2 = \frac{K + k}{m} \tag{I.47}$$

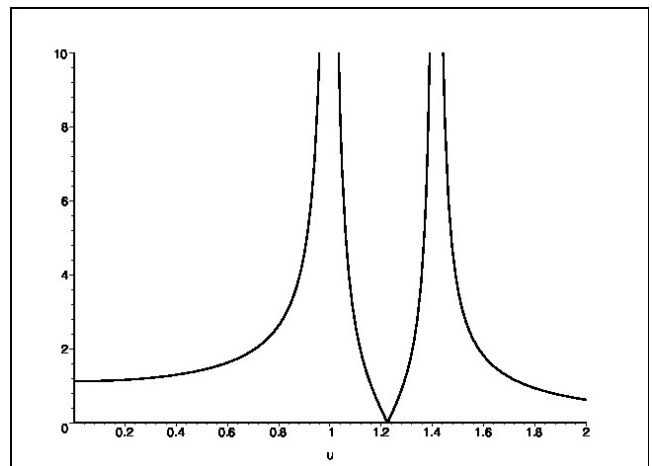
★ couplage faible

⇨ Sur les graphiques 12 et 13 nous avons représenté $|X_{m1}|$ pour, respectivement, un couplage plus faible puis un couplage plus fort que celui du graphique 11.

Graphique 12



Graphique 13

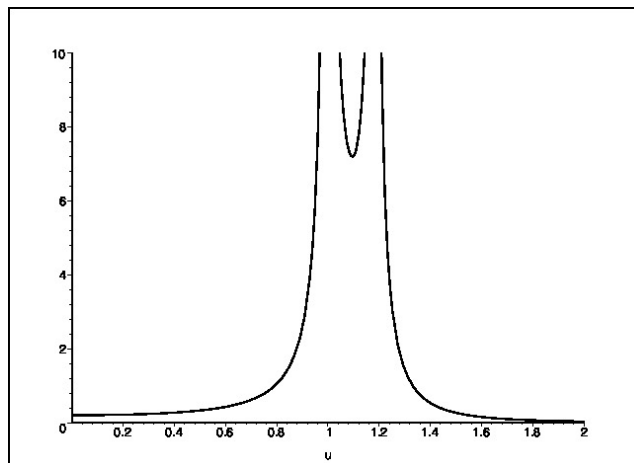


- ⇨ Nous constatons que les résonances sont les plus proches lorsque le couplage est faible.
- ⇨ À la limite, les deux pulsations de résonances sont égales lorsque le couplage est nul, ce qui est tout à fait normal : quand le ressort du milieu n'est plus là, nous avons deux oscillateurs identiques.

★ pour M_2

⇨ Traçons $|X_{m2}|$ dans le cas sans frottement.

Graphique 14



⇨ Nous pouvons constater que pour M_2 il n'y a pas de phénomène d'antirésonance mais il reste le phénomène de résonance.

Bon à retenir

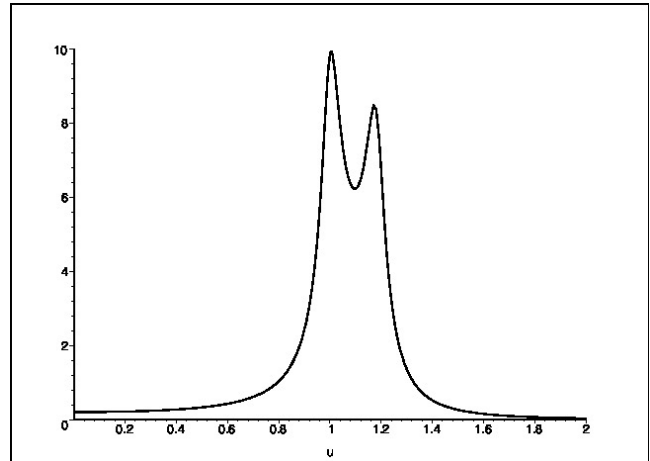
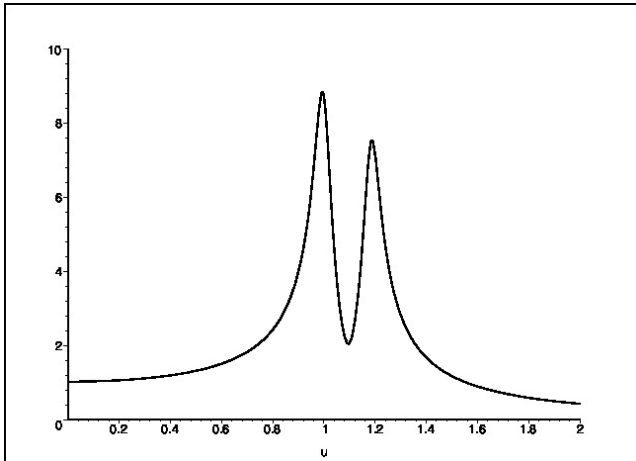
La résonance est intrinsèque au dispositif alors que l'antirésonance dépend de la manière d'exciter un dispositif.

★ avec frottement

- ✧ Pour en tenir compte, il suffit d'introduire une force en $-\lambda \vec{v}$ dans le PFD.
- ✧ Sur les graphiques suivants nous avons tracé $|X_{m1}|$ et $|X_{m2}|$ en fonction de la pulsation.

Graphique 15

Graphique 16

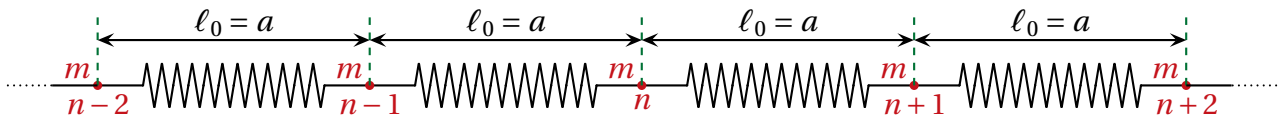


- ✧ Nous pouvons constater que nous voyons apparaître les mêmes phénomènes que lorsqu'il n'y a pas frottement à savoir la présence de résonances et d'une antirésonance.
- ✧ De manière qualitative nous voyons aussi que les résonances ne sont plus infinies et que l'antirésonance n'est plus vraiment nulle.
- ✧ En fait ce qui change, c'est la *qualité* de la résonance et de l'antirésonance.
- ✧ Techniquement, cela s'explique par le terme de frottement qui, une fois traduit en complexe, engendre des termes en $\lambda j\omega$ qui empêchent le dénominateur d'être nul.
- ✧ Remarquons enfin que, même si un dispositif réel présente des frottements faibles, le modéliser sans frottement est pertinent :
 - pour trouver les zones de résonances ;
 - pour trouver les solutions dans des zones « loin » des résonances.

I.2 – Chaîne d'oscillateurs

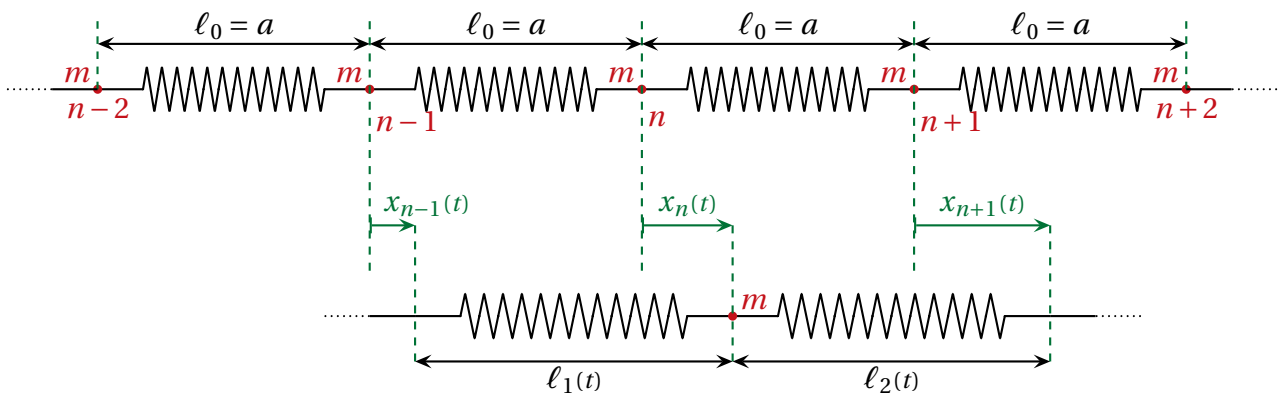
I.2.i – modèle

- ✧ Considérons cette fois une chaîne infinie d'oscillateurs identiques.



I.2.ii – équation de couplage

- ✧ L'idée est toujours la même : écrire un PFD sur une masse.
- ✧ Considérons la masse n .



⇨ En projetant le PFD appliqué à la masse \$n\$ et en négligeant les frottements nous obtenons

$$m \ddot{x}_n(t) = 0 + 0 + 0 - k(\ell_1(t) - \ell_0)(+1) - k(\ell_2(t) - \ell_0)(-1) \quad \text{avec :} \quad (I.48)$$

$$\rightarrow \ell_1(t) - \ell_0 = x_n(t) - x_{n-1}(t);$$

$$\rightarrow \ell_2(t) - \ell_0 = x_{n+1}(t) - x_n(t).$$

⇨ Finalement

$$m \ddot{x}_n(t) = k(x_{n+1}(t) + x_{n-1}(t) - 2x_n(t)) \quad (I.49)$$

⇨ Pour résoudre, il faudrait écrire \$N\$ équations différentielles et toutes les résoudre ce qui est non concevable.

⇨ Il va falloir faire autrement.

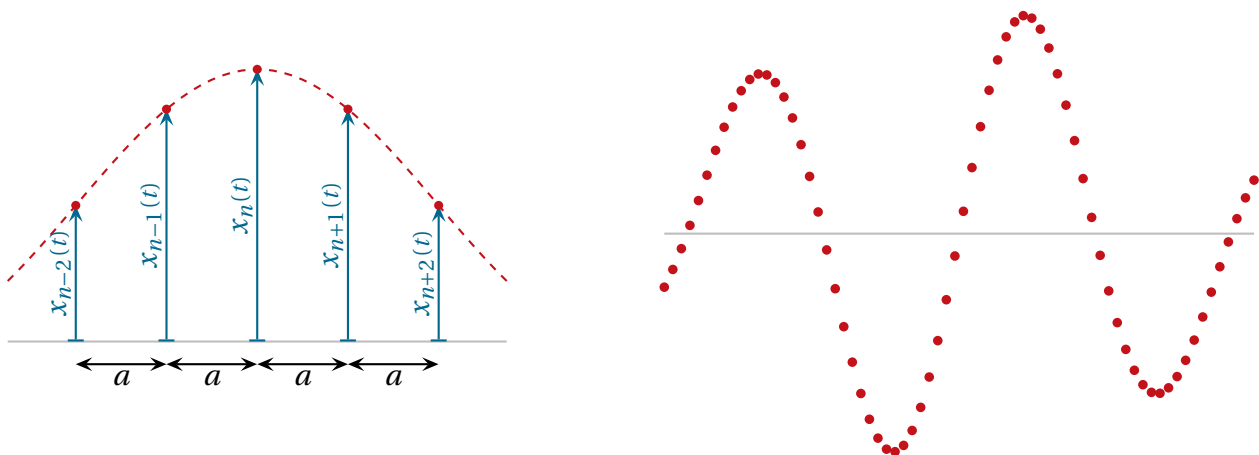
I·2·iii – approximation des milieux continus

★ idée

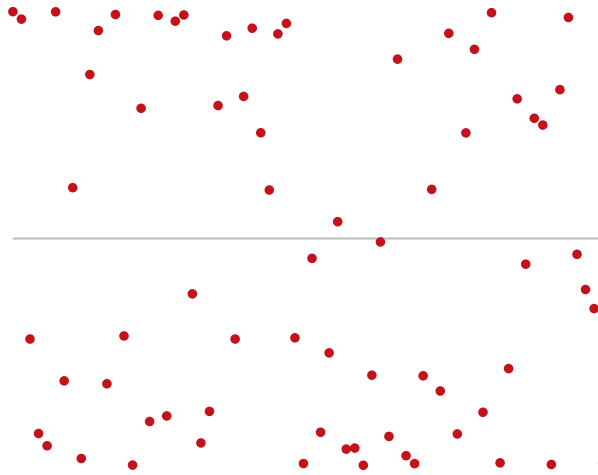
⇨ Regardons les choses de loin.

⇨ Vu de loin la distance \$a\$ entre les oscillateurs devient « invisible ».

⇨ De la sorte, nous pouvons approcher toutes les fonctions \$x_n(t)\$ par une fonction \$X(x,t)\$.



⇨ En fait cette approximation fonctionne dès lors que les \$x_n(t)\$ ne varient pas trop de l'un à l'autre. Cela revient à dire que la fonction \$X(x,t)\$ ne doit pas trop varier à l'échelle de \$a\$ sinon voilà ce que cela donne.



⇨ C'est un véritable changement de point de vue : au lieu d'avoir N fonctions $x_n(t)$ du temps (donc à *une* variable) par **une** fonction $X(x, t)$ de la position et du temps (donc à *deux* variables).

★ transformation de l'équation de couplage

⇨ Nous avons ainsi

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(na, t) \quad (\text{I.50})$$

⇨ Maintenant que a est considéré comme petit nous pouvons faire un développement limité.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) \quad (\text{I.51})$$

⇨ Et comme $x_{n+1}(t) = X((n+1)a, t) = X(na + a, t)$ nous avons

$$X(na + a, t) = X(na, t) + a \times \frac{\partial X}{\partial x}(na, t) + \frac{a^2}{2} \times \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(na, t) \quad (\text{I.52})$$

⇨ De même

$$X(na - a, t) = X(na, t) - a \times \frac{\partial X}{\partial x}(na, t) + \frac{(-a)^2}{2} \times \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(na, t) \quad (\text{I.53})$$

⇨ Enfin, de manière toute simple

$$-2x_n(t) = -2X(na, t) \quad (\text{I.54})$$

⇨ Sommons le tout

$$x_{n+1}(t) + x_{n-1}(t) - 2x_n(t) = 0 + 0 + a^2 \times \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(na, t) \quad (\text{I.55})$$

⇨ Remplaçons le tout dans l'équation de couplage

$$m \times \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(na, t) = k a^2 \times \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(na, t) \quad (\text{I.56})$$

⇨ C'est une relation vraie pour tout n donc posons $x = na$.

⇨ Finalement

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(x, t) = \frac{m}{k a^2} \times \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(x, t) \quad (\text{I.57})$$

★ **équation de D'ALEMBERT****Définition**

Nous appellerons *équation de D'ALEMBERT* ou *équation de propagation* ou *équation d'onde*, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \times \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(x,t) \quad \text{où :}$$

c , appelée la *célérité*, est homogène à une vitesse.

✧ L'équation de D'ALEMBERT est une équation :

- aux dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à t ;
- aux dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x .

✧ Cette équation aux dérivées partielles mélange le x et le t , *i.e.* le spatial et le temporel : nous allons obtenir des phénomènes spatio-temporels.

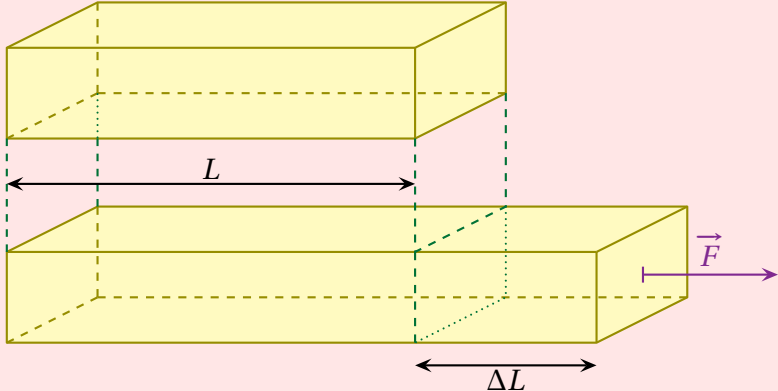
19

I.3 – Ondes longitudinales dans un solide**I.3.i – effort interne à un solide**

✧ Ici nous allons étudier un solide au sens usuel mais pas au sens mécanique : le solide va être déformable.

Loi
LOI DE HOOKE

La force nécessaire pour allonger un solide de la longueur ΔL s'écrit



$$\frac{\Delta L}{L} \triangleq \frac{1}{E} \times \frac{F}{S} \quad \text{où :}$$

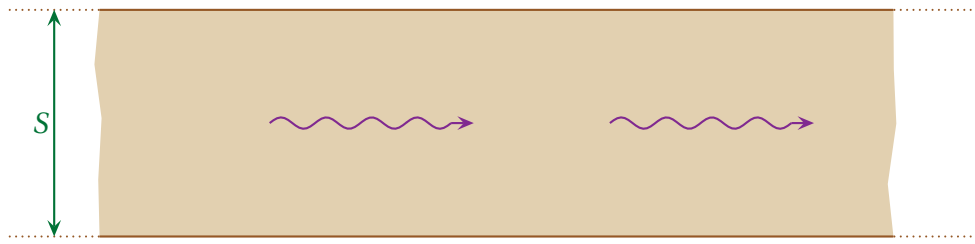
E est le *module d'YOUNG* du matériau et S la section du solide.

✧ Quelques valeurs

$$E_{\text{fer}} = 1,9 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad E_{\text{diamant}} = 1,0 \cdot 10^{12} \text{ Pa} \quad (\text{I.58})$$

I.3.ii – son dans un solide★ **modélisation**

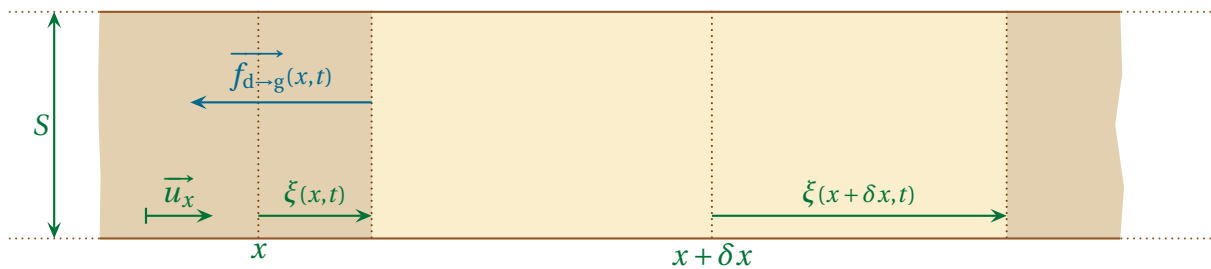
✧ Considérons un solide de section constante ainsi qu'une onde longitudinale qui s'y propage.



✧ Compte-tenu des efforts internes décrits par le module d'YOUNG, quelle est la célérité du son ?

★ **force à l'échelle mésoscopique**

✧ Commençons par traduire à l'échelle mésoscopique la force qu'exerce une portion mésoscopique sur la portion située à sa gauche.



✧ Par simple principe des actions réciproques, la force qu'il exerce est celle qu'il subit. Et il subit

$$\ll F = E \times S \times \frac{\Delta L}{L} \gg \tag{I.59}$$

✧ Sa longueur initiale s'écrit tout de suite δx .

✧ Sa variation de longueur vaut, elle,

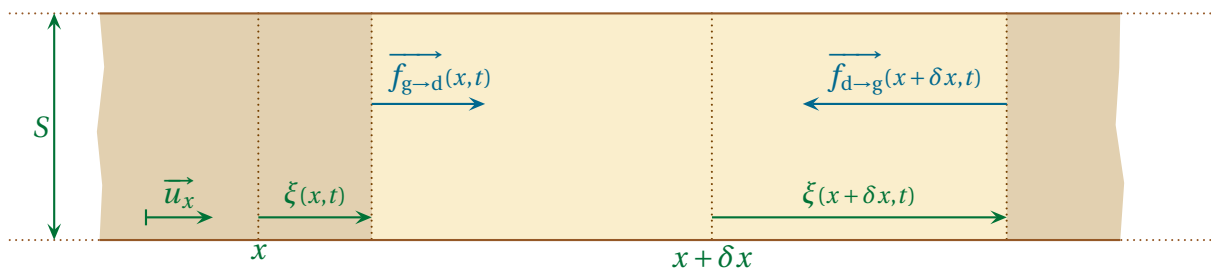
$$\Delta L = (x + \delta x + \xi(x + \delta x, t) - x - \xi(x, t)) - \delta x \rightsquigarrow \Delta L = \xi(x + \delta x, t) - \xi(x, t) \tag{I.60}$$

✧ Et donc, en faisant tendre δx vers 0

$$F_{d \rightarrow g}(x, t) = E S \times \frac{\xi(x + \delta x, t) - \xi(x, t)}{\delta x} \rightsquigarrow F_{d \rightarrow g}(x, t) = E S \times \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \tag{I.61}$$

★ **équation de propagation**

✧ Écrivons simplement le PFD pour le système (mésoscopique) situé initialement entre x et $x + \delta x$ tout projetant sur \vec{u}_x .



✧ Introduisons le centre de masse G dont nous ne savons pas exactement où il se trouve, si ce n'est que $x_G = x + \alpha \delta x$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$.

$$\delta m \times \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x_G, t) = F_{g \rightarrow d}(x, t) + F_{d \rightarrow g}(x + \delta x, t) \quad (\text{I.62})$$

✧ Utilisons le principe des actions réciproque

$$\delta m \times \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x_G, t) = -F_{d \rightarrow g}(x, t) + F_{d \rightarrow g}(x + \delta x, t) \quad (\text{I.63})$$

✧ Remplaçons par l'expression des forces internes

$$\delta m \times \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x_G, t) = -E S \times \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) + E S \times \frac{\partial \xi}{\partial x}(x + \delta x, t) \quad (\text{I.64})$$

✧ La masse δm s'écrit, comme elle est constante, $\delta m = S \rho \delta x$, ce qui donne

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x_G, t) = \frac{E}{\rho} \times \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}(x + \delta x, t) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)}{\delta x} \quad (\text{I.65})$$

✧ En faisant tendre δx vers 0, nous avons

$$x_g \longrightarrow x \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}(x + \delta x, t) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)}{\delta x} \longrightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t) \quad (\text{I.66})$$

✧ Nous arrivons ainsi à

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) = \frac{E}{\rho} \times \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t) \quad (\text{I.67})$$

✧ Il s'agit bien d'une équation de propagation telle que nous l'avons définie, avec

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{I.68})$$

✧ Nous pouvons aisément vérifier la dimension de ce résultat, mais nous pouvons aussi aller un peu plus loin. En effet :

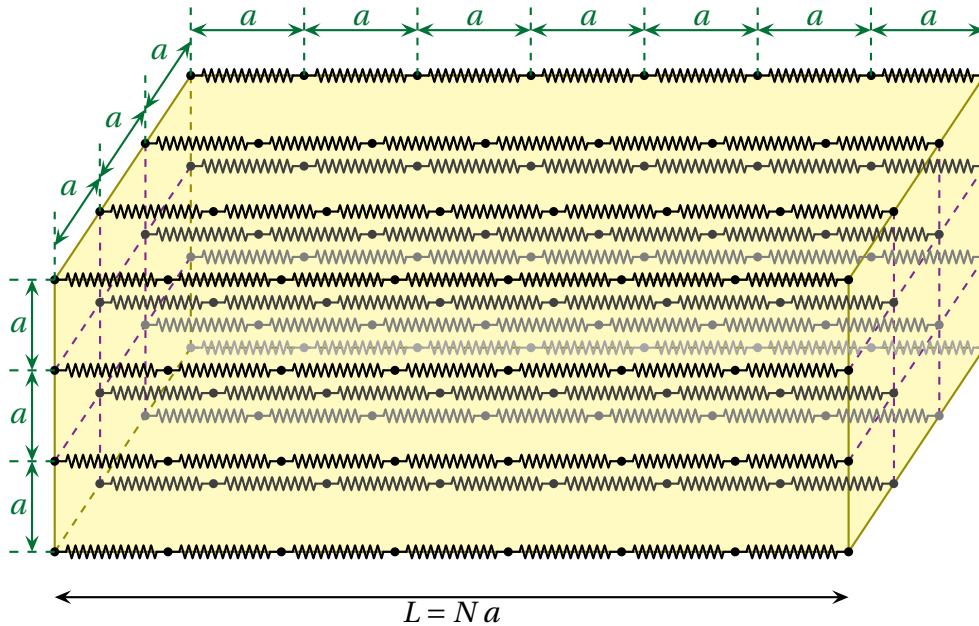
20

- ➔ la présence au numérateur de E est normale : plus E est grand, plus le couplage entre les différentes tranches de solides sont intenses, *i.e.* plus les interactions sont grandes, donc plus l'accélération des tranches sera grande et plus la propagation sera rapide ;
- ➔ la présence de ρ au dénominateur est normale : plus ρ est grand, plus l'inertie du dispositif est grande, plus les tranches de solides se mettent en mouvement lentement, plus la célérité des ondes est faible.

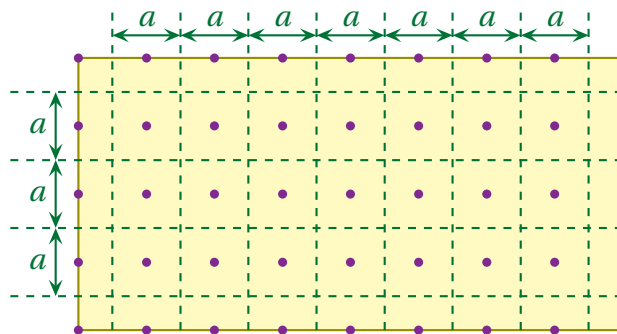
I.3·iii – expression phénoménologique du module d'YOUNG

★ Approche microscopique

✧ Modélisons un solide par un ensemble de chaînes d'oscillateurs.



- ✧ Le solide est de longueur $L = N a$ au repos.
- ✧ Imaginons un allongement de ΔL suite à la force F .
- ✧ Cet allongement est réparti sur l'ensemble des ressorts ce qui fait que chacun s'allonge de $\Delta \ell = \frac{\Delta L}{N}$.
- ✧ En notant n_0 le nombre de chaînes différentes, chaque chaîne subit la force $f = \frac{F}{n_0}$ (extensité des forces).
- ✧ Pour déterminer n_0 , nous pouvons compter le nombre de chaînes coupées dans une section.



- ✧ Nous voyons, grâce au schéma ci-dessus, que chaque chaîne occupe la surface « propre » a^2 . Si la section est S , nous avons alors $n_0 = \frac{S}{a^2}$ et ce en mettant de côté le nombre totalement négligeable de chaînes « juste au bord » de la section.
- ✧ En regardant le dernier ressort d'une chaîne quelconque nous pouvons écrire $f = k \Delta \ell$.
- ✧ De plus, comme tous les ressorts sont identiques, nous pouvons écrire

$$f = \frac{F}{n_0} \quad \text{et} \quad \Delta \ell = \frac{\Delta L}{N} \tag{I.69}$$

- ✧ En ce qui concerne le comptage, nous avons

$$N = \frac{L}{a} \quad \text{et} \quad n_0 = \frac{S}{a^2} \tag{I.70}$$

- ✧ Ce qui nous conduit, finalement, à

$$k \times \frac{\Delta L}{L/a} = \frac{F}{S/a^2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{S} \times \frac{a}{k} \tag{I.71}$$

✧ Enfin, par identification,

$$E = \frac{k}{a} \quad (\text{I.72})$$

★ célérité des ondes

✧ Avec la chaîne d'oscillateurs, nous avons trouvé

$$\frac{1}{c^2} = \frac{m}{k a^2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{c^2} = \frac{m}{E a^3} \quad (\text{I.73})$$

✧ Or $\rho = \frac{m}{a^3}$ ce qui donne

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{E} \quad (\text{I.74})$$

★ lien microscopique – macroscopique

17

✧ À partir d'une approche dimensionnelle, nous allons voir que nous pouvons relier l'énergie de liaison et le module d'YOUNG.

✧ Au niveau atomique, l'énergie nécessaire E_ℓ pour séparer deux atomes est de l'ordre de 5 eV.

✧ Nous pouvons relier cette énergie à l'énergie contenu dans l'oscillateur, avec a une distance caractéristique.

$$E_\ell \sim \frac{1}{2} k a^2 \quad (\text{I.75})$$

✧ Connaissant la distance interatomique ($a \sim 2 \times 10^{-10}$ m), nous pouvons en déduire la valeur de k

$$k \sim \frac{2 E_\ell}{a^2} \sim 4 \times 10^1 \text{ N.m}^{-1} \quad (\text{I.76})$$

✧ Et, avec le modèle précédent, trouver le module d'YOUNG

$$E = \frac{k}{a} \sim 2 \times 10^{11} \text{ Pa} \quad (\text{I.77})$$

✧ Ce qui correspond bien aux ordres de grandeurs vus en (I.58).

II – Solutions de l'équation de D'ALEMBERT

✧ Dans cette partie, nous allons nous intéresser tout particulièrement aux types de solutions générales qui existent pour l'équation de d'ALEMBERT.

II.1 – Équation de propagation le long d'une corde

✧ Nous allons commencer par retrouver l'équation de d'ALEMBERT dans un cas particulier fréquent, celui de l'ébranlement d'une corde.

II.1.i – pas n'importe quelle corde

✧ Nous allons considérer une corde :

- filiforme ;
- infiniment souple ;
- sans mouvement longitudinal ;
- pour laquelle la pesanteur est négligeable ;
- dont l'ébranlement est faible.

✧ Rien que faire le dessin implique de respecter l'hypothèse « filiforme ».



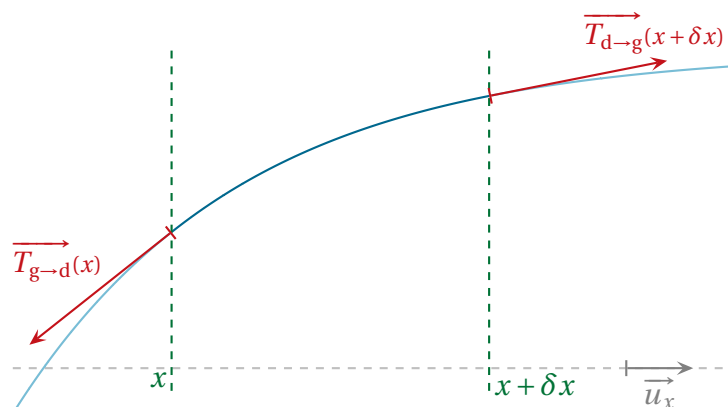
II.1.ii – mise en équation

✧ Comme souvent lorsqu'il s'agira de traiter un dispositif continu, nous allons faire une approche *méso-scopique*.

⚠ C'est comme en diffusion !

★ TCI

✧ Commençons par zoomer sur un élément de corde compris entre x et $x + \delta x$.



✧ Comme la corde est infiniment souple, les tensions exercées par la partie droite sur la partie gauche $\vec{T}_{d \rightarrow g}$ et par la partie gauche sur la partie droite $\vec{T}_{g \rightarrow d}$ sont *tangentes* au fil.

✧ La pesanteur étant négligée, nous allons poser $\vec{g} = \vec{0}$.



Attention !

Nous négligeons la pesanteur, surtout pas la *masse* car la masse reste en tant que masse inertielle.

✧ Ici le système \mathcal{S} { bout de corde entre x et $x + \delta x$ } a une évolution forcée (par ses « voisins ») donc bien qu'il ait une évolution à un seul degré de description $y_{\mathcal{S}}(t)$, nous allons utiliser une approche en terme de force.

✧ Le TCI s'écrit

$$dm \times \vec{a}_G(t) = \vec{T}_{g \rightarrow d}(x) + \vec{T}_{d \rightarrow g}(x + \delta x) \quad (\text{II.1})$$

✧ Nous avons négligé les frottements.

✧ La 3^e loi de NEWTON permet d'écrire

$$dm \times \vec{a}_G(t) = -\vec{T}_{d \rightarrow g}(x) + \vec{T}_{d \rightarrow g}(x + \delta x) \quad (\text{II.2})$$

★ projection sur \vec{u}_x

✧ Comme il n'y a pas de mouvement longitudinal, l'accélération sur \vec{u}_x est nulle et donc

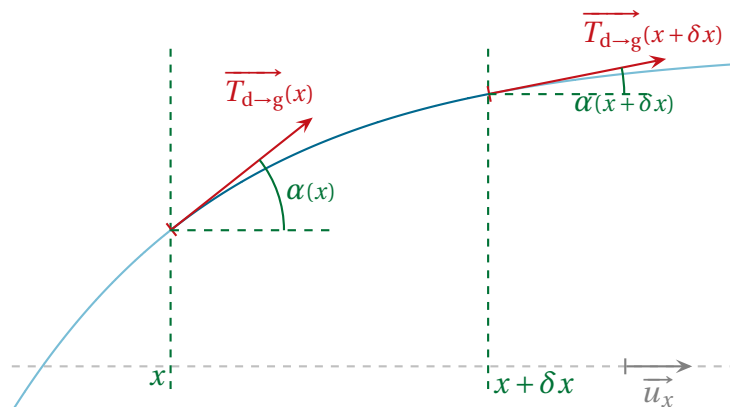
$$0 = -T_{d \rightarrow g,x}(x) + T_{d \rightarrow g,x}(x + \delta x) \quad \rightsquigarrow \quad T_{d \rightarrow g,x}(x) = T_{d \rightarrow g,x}(x + \delta x) \quad (\text{II.3})$$

✧ Cela implique que la *composante sur \vec{u}_x* de la tension est uniforme ¹

$$T_x(x) = C^{\text{te}} \stackrel{\text{not}}{=} T_0 \quad (\text{II.4})$$

★ projection sur \vec{u}_y

✧ Redessinons le schéma en introduisant des angles judicieux.



✧ Comme T_0 est la composante sur \vec{u}_x de la force, nous avons

$$dm \ddot{y}_G(t) = +T_0 \tan \alpha(x + \delta x) - T_0 \tan \alpha(x) \quad (\text{II.5})$$

1. En réalité, la relation montre que la tension est fonction du temps uniquement, mais nous, en plus de la prendre uniforme, nous prendrons cette tension *constante*.

★ réécriture du terme d'accélération

⇨ Et comme G est situé *entre* x et $x + \delta x$, nous avons

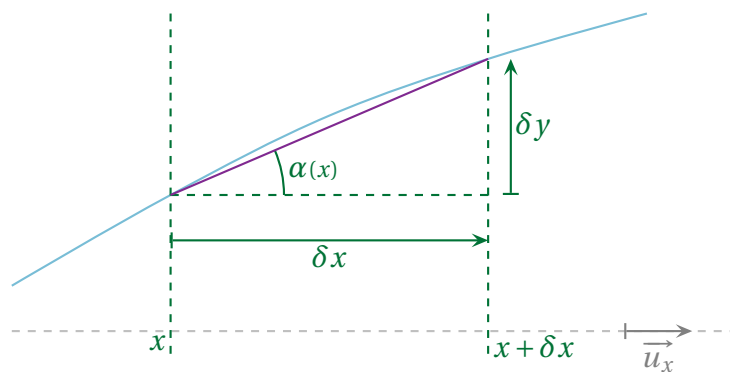
$$y_G(t) = y(x + \beta \delta x, t) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{y}_G(t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x + \beta \delta x, t) \quad (\text{II.6})$$

⇨ De plus, la corde étant filiforme, en notant μ sa masse linéique et en considérant la situation au repos, nous avons

$$dm = \mu \delta x \quad (\text{II.7})$$

★ couplage géométrique

⇨ Comme la tension est tangente à la corde (hypothèse de fil infiniment souple), une photo (donc un dessin à t fixé) donne



⇨ Cela conduit à

$$\tan \alpha = \frac{\delta y}{\delta x} \quad (\text{II.8})$$

⇨ Or δy est la variation de la cote quand x augmente de δx à t fixé. Traduit techniquement cela donne

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \times \delta x \quad (\text{II.9})$$

⇨ Et ainsi

$$\tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (\text{II.10})$$

⇨ Nous retrouvons là une caractéristique bien connue de la tangente à une courbe : « La pente de la droite tangente à une courbe n'est autre que la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'axe des abscisses. »

★ rassemblement et fin

⇨ Nous obtenons ainsi, en injectant (II.10) dans (II.5)

$$\mu \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x + \beta \delta x, t) = +T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(x + \delta x) - T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(x) \quad (\text{II.11})$$

⇨ En divisant par δx , cela donne

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x + \beta \delta x, t) = +T_0 \times \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x + \delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x)}{\delta x} \quad (\text{II.12})$$

⇨ En faisant tendre $\delta x \rightarrow 0$ nous voyons apparaître un taux d'accroissement à droite alors que le terme à gauche se simplifie et

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = +T_0 \times \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \quad (\text{II.13})$$

⇨ Il s'agit bien d'une équation de d'ALEMBERT avec

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{T_0} \quad \rightsquigarrow \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad (\text{II.14})$$

⇨ Pour exactement les mêmes raisons que celles vues en I-3·ii (page 22) :

20

- la présence de la tension au numérateur est cohérent avec le fait que, plus le couplage entre portions mésoscopiques de corde est intense, plus la célérité est grande ;
- la présence de la masse (inertielle) au dénominateur est cohérent avec le fait que, plus l'inertie est grande, plus la célérité est faible.



Loi

Pour une corde infiniment fine et souple, sans mouvement longitudinal et pour laquelle pesanteur et frottements sont négligeables, les petits ébranlements obéissent à l'équation de d'ALEMBERT

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

II-2 – Solutions en Ondes Planes Progressives (OPP)

II-2·i – forme des solutions

★ expression



Loi

Toutes les solutions de l'équation de d'ALEMBERT $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$ s'écrivent sous la forme

$$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \quad \text{avec } f \text{ et } g \text{ quelconques.}$$

1

21

⇨ Le « quelconque » est bien sûr à prendre au sens physique du terme car, mathématiquement, il faut quand même des fonctions suffisamment régulières pour être dérivées deux fois.

★ vérification

⇨ Posons $y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ et calculons simplement les dérivées.

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = f'(x-ct) + g'(x+ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = f''(x-ct) + g''(x+ct) \quad (\text{II.15})$$

⇨ De même

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = -c f'(x-ct) + c g'(x+ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = +c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct) \quad (\text{II.16})$$

⇨ Et là nous constatons facilement que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \tag{II.17}$$

⇨ Nous venons de prouver que la forme $y(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ est *une* solution de l'équation de d'A-LEMBERT et nous admettrons que *toute* solution peut s'écrire sous cette forme.

II.2.ii – image des solutions

3

★ une onde

⇨ L'équation de d'A-LEMBERT étant dite l'équation d'onde, ses solutions représenteront physiquement une onde.

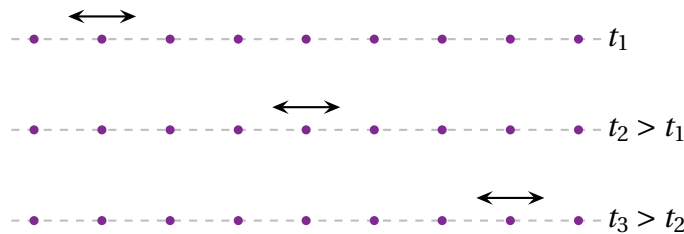
Définition

Une grandeur a un caractère *ondulatoire* si elle obéit à l'équation de d'A-LEMBERT.

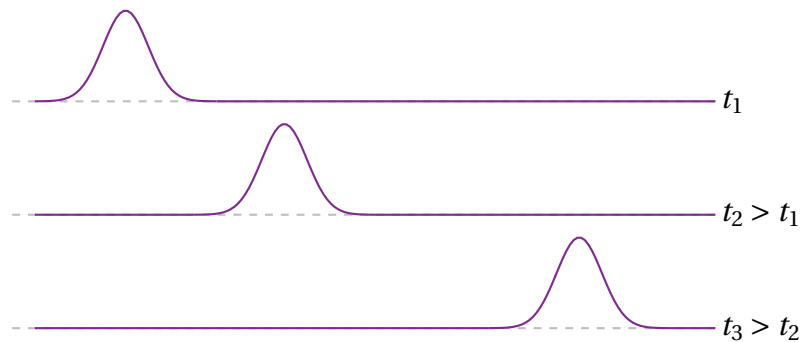
⇨ Il s'agit certes là d'une définition autoréférente, mais il est difficile de faire mieux.

⇨ Dans le cas d'une onde mécanique la grandeur intéressante est souvent un ébranlement, *i.e.* un léger écart par rapport à la position au repos.

⇨ Pour la chaîne d'oscillateurs

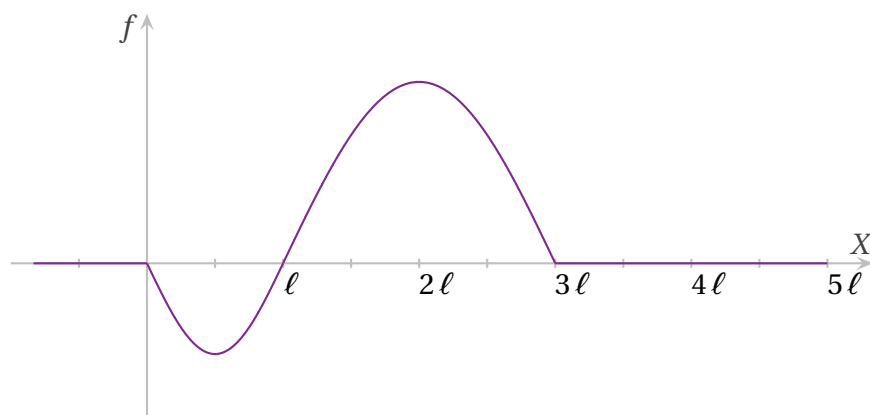


⇨ Pour une corde

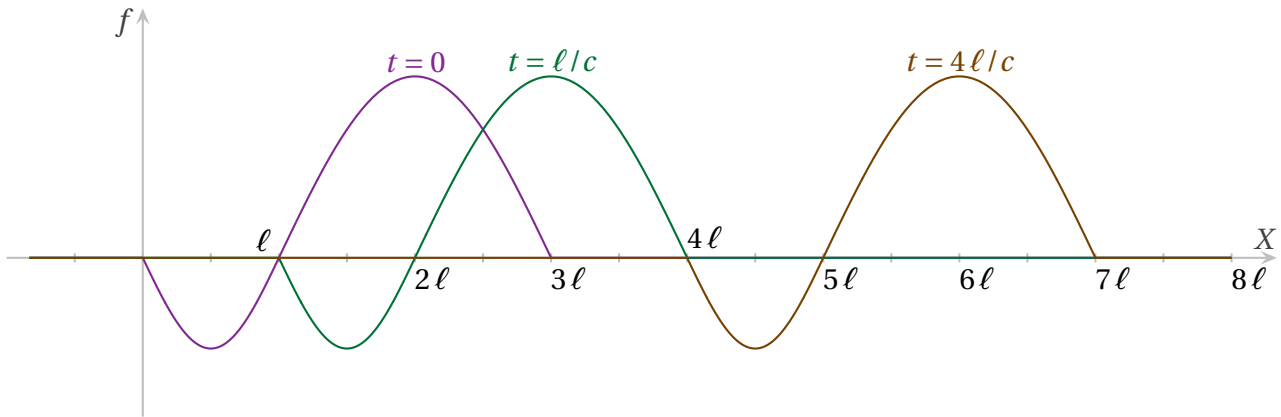


★ interprétation de $f(x - ct)$

⇨ Prenons une fonction $f(X)$ quelconque et représentons-la.



- ✧ À quelle onde correspond $f(x - ct)$?
- ✧ Il faut tout d'abord bien comprendre qu'il n'est pas simple de *dessiner* une telle solution puisque qu'*intrinsèquement* la solution est une fonction du temps.
- ✧ Il faudrait alors dessiner un film ce qui n'est pas possible².
- ✧ Nous nous contenterons d'une « bande-dessinée » car nous ne pouvons faire mieux, mais il ne faudra pas oublier que ce n'est qu'une bande-dessinée.
- ✧ Examinons ce qu'il en est pour les instants $t = 0$, $t = \ell/c$ et $t = 4\ell/c$
 - $y(x,0) = f(x)$ (en violet) ;
 - $y(x,\ell/c) = f(x - c(\ell/c)) = f(x - \ell)$ (en vert) ;
 - $y(x,3\ell/c) = f(x - c3(\ell/c)) = f(x - 4\ell)$ (en marron).



✧ Nous voyons que le sommet de la bosse se déplace avec le temps.

Montrer la vidéo de l'OPP ➡

- ✧ Notons $x_b(t)$ l'abscisse de la bosse.
- ✧ Nous savons que $X_b = 2\ell$ donc

$$x_b - ct = X_b \quad \rightsquigarrow \quad x_b(t) = X_b + ct \tag{II.18}$$

Définition
 | La *célérité* est la vitesse de propagation d'une onde.

- ✧ Il est préférable de dire « célérité d'une onde » en lieu et place de « vitesse d'une onde » car le mot « vitesse » peut être ambigu. Il peut, en effet, faire aussi référence à la vitesse $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ du support matériel.

★ **interprétation de $g(x + ct)$**

- ✧ Avec la même fonction $f(X)$ que juste avant, considérons $y(x,t) = f(x + ct)$

Montrer la vidéo de l'OPP ◀

- ✧ Cette fois l'onde va vers les x décroissant, « vers la gauche ».
- ✧ Nous aurions ainsi, toujours en considérant l'abscisse de la bosse $X_b = 2\ell$

$$X_b = x_b + ct \quad \rightsquigarrow \quad x_b = X_b - ct \quad \rightsquigarrow \quad x_b = 2\ell - ct \tag{II.19}$$

- ✧ Nous retrouvons bien la le fait que cette abscisse se « déplace » vers les x décroissant.

2. Dans Harry Potter, les photos sont animées, cela serait drôlement pratique pour nous.

★ **résumé**

- ✧ Pour f et g deux fonctions quelconques d'une variable
- $f(x - ct)$ représente une onde progressive vers les x croissant à la célérité c ;
 - $g(x + ct)$ représente une onde progressive vers les x décroissant à la célérité c .

**Bon à retenir**

Mettre sous la forme $y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ une solution de l'équation de d'ALEMBERT consiste à écrire cette solution sous la forme d'une **Onde Plane Progressive** :

- **onde** parce que solution de l'équation de d'ALEMBERT ;
- **plane** par opposition aux ondes sphériques ;
- **progressives** parce qu'elles avancent.

**Définition**

Nous distinguons :

- les OPP \rightarrow qui est une OPP qui va vers les x (ou les z !) croissant ;
- les OPP \leftarrow qui est une OPP qui va vers les x (ou les z !) décroissant, ces ondes étant parfois appelées *Ondes Planes Régressives*.

★ **philosophie de l'onde**

- ✧ Ne pas oublier qu'*in fine* le fait que l'onde aille vers les x croissant ou décroissant n'a que peu de réalité physique et que ce qui compte vraiment c'est

**Bon à retenir**

La philosophie d'une onde est
« Je suis ici et maintenant ce que j'étais là-bas tout à l'heure. »

- ✧ Par exemple, si nous considérons les points O d'abscisse nulle et le point M d'abscisse x_0 , nous pouvons dire que l'onde en M est la même que celle en O **mais retardée de la durée qu'il a fallu à l'onde pour voyager entre O et M .**
- ✧ Et comme entre O et M il y a la distance c et que l'onde avance à la célérité c , cela donne un retard $t_0 = \frac{x_0}{c}$.
- ✧ La philosophie de l'onde implique donc que

$$y(x_0, t) = y(0, t - t_0) \quad \rightsquigarrow \quad y(x_0, t) = y(0, t - x_0/c) \quad (\text{II.20})$$

- ✧ Or, pour une onde progressive, nous avons $y(x, t) = f(x - ct)$ donc il faut vérifier

$$f(x_0 - ct) = f(0 - c(t - x_0/c)) \quad (\text{II.21})$$

- ✧ En développant la parenthèse, nous pouvons vérifier l'exactitude de la relation.

II.2.iii – quelques applications numériques★ **propagation dans le fer**

- ✧ Avec

$$E = 1,9 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad \text{et} \quad \rho_{\text{fer}} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad (\text{II.22})$$

- ✧ Nous trouvons

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5,0 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1} \quad (\text{II.23})$$

✧ Cette valeur explique le comportement des indiens dans les films de cow-boys. S'ils collaient leurs oreilles aux rails c'est non seulement pour entendre le train en avance (puisque le son dans les rails avançait bien plus vite que le train lui-même) mais aussi pour l'entendre de loin car le son, en ne s'échappant pas des rails, pouvait se propager à grande distance.

★ corde de guitare

✧ Prenons une corde de guitare en fer, tendue sous une tension de $T_0 = 100 \text{ N}$

$$\rho_{\text{fer}} \quad \text{et} \quad \varnothing = 0,3 \text{ mm} \quad \rightsquigarrow \quad \mu_{\text{fer}} = \rho_{\text{fer}} \times \frac{\pi \varnothing^2}{4} \quad (\text{II.24})$$

✧ Et ainsi

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1} \quad (\text{II.25})$$

✧ Rappelons que les deux valeurs ne sont pas intrinsèquement comparables puisque l'une consiste à la célérité d'ondes longitudinales, des ondes de *compression* du fer, alors que l'autre correspond à des ondes transversales.

II.3 – Solutions en Ondes Planes Progressives Monochromatiques (OPPM)

II.3.i – c'est un cas particulier

✧ Insistons : c'est un cas particulier au sens où toutes les solutions ne pourront pas forcément s'écrire sous la forme d'une OPPM.

Définition

Une **OPPM** est une **Onde Plane Progressive Monochromatique**.
Nous dirons aussi parfois OPPH pour **Onde Plane Progressive Harmonique**.

✧ OPPM et OPPH sont deux notions techniquement identiques. La seule différence est que « monochromatique » étant plus souvent associé à des ondes lumineuses, son emploi peut paraître déplacé dans le cas d'ondes non lumineuses.

★ forme

✧ Il s'agit d'une OPP usuelle $y(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ pour laquelle $f(X)$ et $g(X)$ sont des fonctions sinusoïdales.

✧ Ainsi pour une OPP \rightsquigarrow


$$f(X) = A \cos(kX - \varphi) \quad \rightsquigarrow \quad y(x,t) = f(x-ct) = A \cos(k(x-ct) - \varphi) = A \cos(kx - kct - \varphi) \quad (\text{II.26})$$



Une OPPM \rightsquigarrow s'écrit

$$y(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Bon à retenir



Une OPPM \leftarrow s'écrit

Bon à retenir

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + kx + \psi)$$

Montrer les vidéos sur les OPPM \rightarrow et OPPM \leftarrow .

✧ Insistons les points bougent de haut en bas uniquement.



Attention !

La superposition de deux OPPM n'est pas une OPPM.

✧ Sauf si, par hasard, elles ont le même ω , le même k et qu'elles vont dans le même sens. Sauf qu'alors nous ne parlerons pas de deux ondes mais d'une seule.

✧ Considérons en effet la solution « générale »


$$y(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi) + B \cos(\omega t + kx + \psi) \tag{II.27}$$

✧ Cette solution **ne peut pas** s'écrire sous la forme

$$y(x,t) = A' \cos(\omega' t - k' c + \varphi') \quad \text{ou} \quad y(x,t) = B' \cos(\omega' t + k' c + \psi') \tag{II.28}$$

★ **nouveau vocabulaire**

✧ L'image de l'OPPM nous montre immédiatement une double périodicité.



Définition

Le *vecteur d'onde* d'une OPPM est le vecteur :


- de norme k ;
- de direction la direction de propagation ;
- de sens le sens de propagation.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{k} = +k \vec{u}_x & \text{pour une OPPM } \rightarrow \\ \vec{k} = -k \vec{u}_x & \text{pour une OPPM } \leftarrow \end{array} \right.$$



Attention !

Il n'y a **pas** de vecteur d'onde pour les OPP « tout court ».



Loi

Double périodicité d'une OPPM

vision temporelle	vision spatiale
pulsation ω	vecteur d'onde k
fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$	nombre d'onde $\sigma = \frac{k}{2\pi}$
période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$	longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{\sigma}$

★ relation de dispersion



Définition

La *relation de dispersion* est la relation (*i.e.* l'équation) entre les périodes spatiales et temporelle d'une OPPM.

- ✧ De manière plus prosaïque c'est l'équation entre ω et k . Mais de manière plus profonde, la relation de dispersion est très importante puisque



Bon à retenir

✧ La relation de dispersion caractérise le couplage spatio-temporel pour une OPPM.

- ✧ Tout comme k n'est défini que pour une OPPM, la relation de dispersion n'existe que pour une OPPM.
- 🔊 Ici comme ailleurs, comme toujours en fait, pour trouver une relation de dispersion nous allons utiliser l'équation de d'ALEMBERT.
- ✧ Pour savoir comment se couplent les aspects spatiaux-temporels, il est normal d'utiliser l'équation, la loi, qui les relie : l'équation de d'ALEMBERT.
- ✧ Nous avons

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \quad \text{avec} \quad y(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (\text{II.29})$$

- ✧ Cela donne, en dérivant deux fois

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = -k^2 A \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{et} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \times (-\omega^2 A \cos(\omega t - kx + \varphi)) \quad (\text{II.30})$$

- ✧ Cela donne

$$-k^2 \cancel{A \cos(\omega t - kx + \varphi)} = -\frac{1}{c^2} \times \omega^2 \cancel{A \cos(\omega t - kx + \varphi)} \quad \rightsquigarrow \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (\text{II.31})$$

- ✧ Nous aurions obtenu la même chose avec une OPPM \blacktriangleleft .



Loi

La relation de dispersion pour l'équation de d'ALEMBERT s'écrit

$$\omega^2 = k^2 c^2$$

II.3.ii – intérêt de l'OPPM

★ c'est un modèle ...

- ✧ Soyons clair : une OPPM, ça n'existe pas.
- ✧ En effet, comme la fonction $\cos(X)$ est définie pour tout X , l'écriture d'une OPPM implique :
 - ➔ $-\infty < x < +\infty$, *i.e.* que l'onde occupe tout l'espace ;
 - ➔ $-\infty < t < +\infty$, *i.e.* que l'onde a toujours existé et qu'elle existera toujours.
- ✧ Malgré son inexistence « réelle », nous l'utiliserons énormément dans les dispositifs où la propagation obéit à des lois linéaires, car alors nous utiliserons une technique « à la FOURIER » : en superposant des OPPM qui n'existent pas nous arriverons à représenter, à traiter, à étudier une onde qui existe.

★ ... et un intermédiaire de calcul

- ✧ L'énorme avantage des OPPM c'est qu'elles permettent l'utilisation de la notation complexe qui va nous faciliter grandement les calculs.
- ✧ Considérons la solution

$$y(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi) + B \cos(\omega t + kx + \psi) \quad (\text{II.32})$$

- ✧ Passons-la en notation complexe

$$\underline{y}(x,t) = A e^{j(\omega t - kx + \varphi)} + B e^{j(\omega t + kx + \psi)} \quad (\text{II.33})$$



Bon à retenir

Une solution en OPPM \rightarrow et OPPM \leftarrow s'écrit, en notation complexe

$$\underline{y}(x,t) = \underline{A} e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B} e^{j(\omega t + kx)}$$

- ✧ C'est *a priori* la forme que nous utiliserons systématiquement lorsque nous chercherons des solutions sous la forme de superposition d'OPPM.

II-4 – Ondes Stationnaires (OS)

II-4.i – c'est encore un cas particulier

- ✧ Insistons : c'est *encore* un cas particulier au sens où toutes les solutions ne pourront pas forcément s'écrire sous la forme d'une onde stationnaire.



Définition

Une **OS** est une **Onde Stationnaire**.

★ définition



Définition

Une *solution stationnaire* d'une équation est une solution qui peut s'écrire sous la forme

$$y(x,t) = f(x) \times g(t)$$

- ✧ Remarquons que la définition vaut aussi pour les équations qui ne sont pas des équations d'onde.



Définition

Une *onde stationnaire* est une solution stationnaire de l'équation d'onde.

- ✧ Cela paraît évident, mais le but est d'insister sur le fait qu'il peut y avoir des solutions « non onde » mais stationnaires.

★ OS pour une équation de d'ALEMBERT

🔧 expression



Loi

Une onde stationnaire d'une équation de d'ALEMBERT s'écrit

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \times \cos(kx + \psi)$$

21

21

✧ C'est une expression que nous pourrions utiliser *directement* dans le cas de l'équation de d'ALEMBERT car il n'est pas utile de repasser systématiquement par la démonstration qui suit.

🔗 démonstration

✧ Cherchons une solution de l'équation de d'ALEMBERT sous la forme

$$y(x,t) = f(x) \times g(t) \quad (\text{II.34})$$

✧ Injectons cette solution dans l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \quad (\text{II.35})$$

✧ Nous avons immédiatement

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = f''(x) \times g(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = f(x) \times g''(t) \quad (\text{II.36})$$

✧ Ce qui conduit à

$$f''(x) \times g(t) = \frac{1}{c^2} \times f(x) \times g''(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} \quad (\text{II.37})$$

✧ Nous pouvons réécrire cette relation sous la forme

$$F(x) = G(t) \quad \text{où} \quad F(x) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{f''(x)}{f(x)} \quad \text{et} \quad G(t) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} \quad (\text{II.38})$$

✧ Cette relation est vraie **pour tout x et tout t** .

✧ En particulier en faisant $t = 0$, nous avons **pour tout x**

$$F(x) = G(0) = C^{\text{te}} \quad (\text{II.39})$$

✧ Nous pouvons alors en déduire

$$F(x) = G(t) = C^{\text{te}} \stackrel{\text{not}}{=} K \quad (\text{II.40})$$

✧ $g(t)$ obéit alors à l'équation

$$G(t) = \frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = K \quad \rightsquigarrow \quad g''(t) - K c^2 g(t) = 0 \quad (\text{II.41})$$

✧ Deux types de solutions sont possibles :

➔ soit $-c^2 K > 0$ alors $g(t) = D \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{-c^2 K}$;

➔ soit $-c^2 K < 0$ alors $g(t) = D \cosh(\omega t) + \sinh(\omega t)$ qui est une solution qui diverge ce qui n'est pas possible avec un milieu *passif*.

✧ La seule solution physiquement possible est donc

$$g(t) = D \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad -c^2 K = \omega^2 \quad (\text{II.42})$$

✧ Pour l'équation en $f(x)$

$$F(x) = \frac{f''(x)}{f(x)} = K = -\frac{\omega^2}{c^2} \quad \rightsquigarrow \quad f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0 \quad (\text{II.43})$$

✧ La solution est alors immédiate

$$f(x) = E \cos(\omega x/c + \psi) \stackrel{\text{not}}{=} E \cos(kx + \psi) \quad (\text{II.44})$$

✧ D'où le résultat.

II.4.ii – visualisation

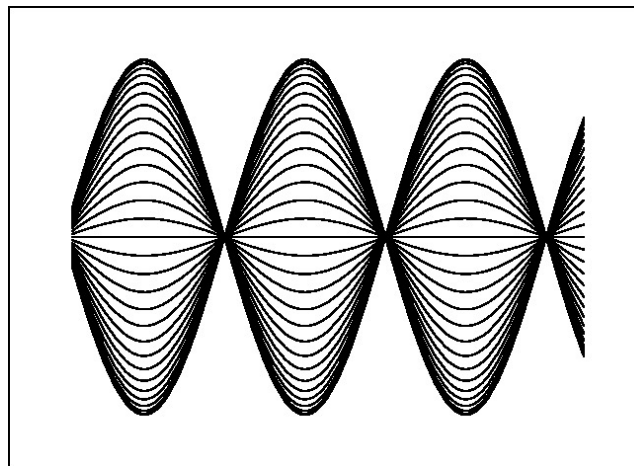
Montrer la vidéo d'une OS.

✧ Nous pouvons voir la solution sous la forme

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) = \text{amplitude}(x) \times \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{II.45})$$

✧ En représentant sur un même schéma $y(x,t)$ à différents instants cela donne le graphe 17 suivant.

Graphique 17



Définition

Pour une onde stationnaire :

- un *nœud de vibration* est une zone où les vibrations sont d'amplitude nulle ;
- un *ventre de vibration* est une zone où les vibrations sont d'amplitude maximale.

II.5 – Changement de description

✧ La question est maintenant de savoir s'il est possible techniquement et intéressant physiquement de passer d'une représentation à une autre.

II.5.i – à partir d'une OS

★ vers OPPM

✧ Nous pouvons nous baser sur la relation trigonométrique

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \quad (\text{II.46})$$

✧ Cela donne

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \quad (\text{II.47})$$

$$= \frac{A}{2} \cos(\omega t + kx + \varphi + \psi) + \frac{A}{2} \cos(\omega t - kx + \varphi - \psi) \quad (\text{II.48})$$

$$= \text{OPPM} \leftarrow + \text{OPPM} \rightarrow \quad (\text{II.49})$$



Bon à retenir

Une onde stationnaire pour l'équation de d'ALEMBERT peut être vue comme la superposition de deux OPPM de même amplitude, l'une allant vers les x croissant et l'autre allant vers les x décroissant.

★ vers OPP

✧ Une OPPM étant une OPP, le résultat est immédiat.



Bon à retenir

Une onde stationnaire pour l'équation de d'ALEMBERT peut être vue comme la superposition de deux OPP, l'une allant vers les x croissant et l'autre allant vers les x décroissant.

II-5-ii – à partir d'une OPPM

★ vers OS

✧ Considérons une OPPM avec $\varphi = 0$

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx) = A \cos(\omega t) \cos(kx) - A \sin(\omega t) \sin(kx) \neq f(x) \times g(t) \quad (\text{II.50})$$

✧ Visiblement il ne peut pas s'agir d'une OS.

✧ En superposant cette fois une OPPM d'amplitude A et une OPPM d'amplitude $B \stackrel{\text{not}}{=} A + \delta A$ nous obtenons

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx) + B \cos(\omega t + kx) \quad (\text{II.51})$$

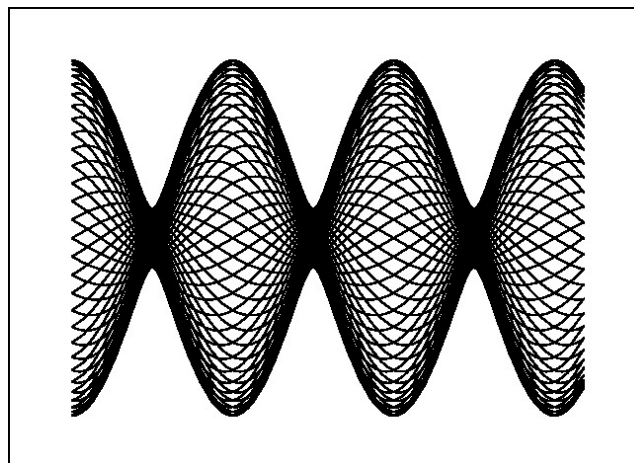
$$= A (\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) + \delta A \cos(\omega t + kx) \quad (\text{II.52})$$

$$= 2A \cos(\omega t) \times \cos(kx) + \delta A \cos(\omega t + kx) \quad (\text{II.53})$$

✧ Et ce n'est pas une onde stationnaire.

✧ Représentons une telle onde à différents instants.

Graphique 18



Montrer la vidéo d'une superposition de deux OPPM.

★ vers OPP

✧ C'est une traduction inutile puisqu'une OPPM est déjà une OPP.

II-5-iii – à partir d'une OPP

- ✧ Nous pouvons écrire une OPP sous la forme d'une somme d'OPPM avec une technique « à la FOURIER » :
 - soit l'OPP est périodique et la superposition donne une somme discrète dite « série de FOURIER » ;
 - soit l'OPP n'est pas périodique et la superposition donne une somme continue dite « transformée de FOURIER ».

II-5-iv – superpositions

- ✧ N'oublions pas quelques interprétations qualitatives.

Bon à retenir

⋈ Une superposition d'OPP n'est pas forcément une OPP.

- ✧ En effet

$$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \neq h(x-ct) \tag{II.54}$$

Bon à retenir

⋈ Une superposition d'OPP \Rightarrow (resp. d'OPP \Leftarrow) est une OPP \Rightarrow (resp. OPP \Leftarrow).

- ✧ Le résultat est immédiat :

$$y(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x-ct) = F(x-ct) \quad \text{avec} \quad F(x) = f_1(x) + f_2(x) \tag{II.55}$$

Bon à retenir

⋈ Une superposition d'OPPM n'est pas forcément une OPMP.

- ✧ Les raisons sont les mêmes que pour les OPP.

Bon à retenir

⋈ Une superposition d'OS n'est pas forcément une OS.

- ✧ En effet

$$y(x,t) = f_1(x) \times g_1(t) + f_2(x) \times g_2(t) \neq f(x) \times g(t) \tag{II.56}$$

II-6 – L'équation de D'ALEMBERT n'est qu'une équation différentielle

- ✧ Il ne faut pas oublier que malgré son apparente complexité, l'équation de d'ALEMBERT est analogue à une EDL usuelle.

EDL 1	équation de d'ALEMBERT
$\frac{dy}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} y(t) = 0$	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$
$y(t) = \lambda e^{-t/\tau}$	$y = \begin{cases} f(x-ct) + g(x+ct) \\ \underline{A}e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B}e^{j(\omega t + kx)} \\ A \cos(\omega t + \varphi) \times \cos(kx + \psi) \end{cases}$
constante d'intégration : λ	constantes d'intégration : $\underline{A}, \underline{B}, A, \varphi, \psi$

III – Tenir compte des conditions aux limites

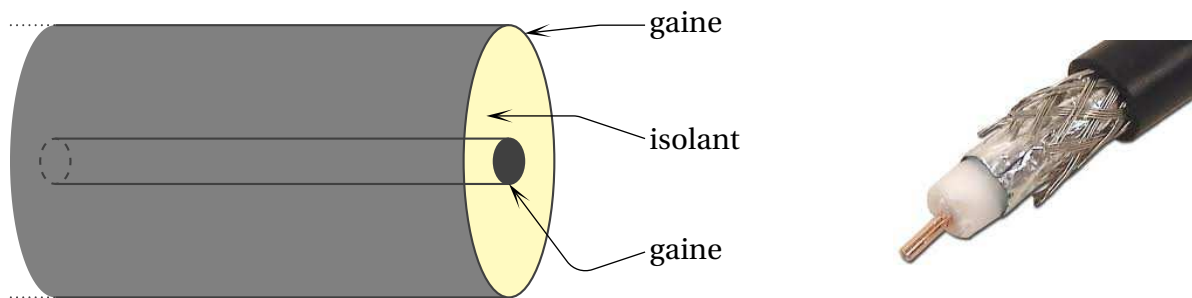
✧ Nous allons « résoudre » deux problèmes particuliers de propagation d'onde et, pour le premier, nous allons mettre en équation un dispositif propagatif classique : le câble coaxial.

III.1 – Équation de propagation dans un câble coaxial

III.1.i – présentation

★ la fin de l'ARQS

- ✧ Le câble coaxial se compose de deux conducteurs coaxiaux (d'où le nom) :
 - l'âme, qui est le conducteur au centre ;
 - la gaine qui est le conducteur autour de l'âme et qui est en général reliée à la masse.
- ✧ Entre les deux il y a évidemment un isolant pour éviter tout contact entre les deux conducteurs.



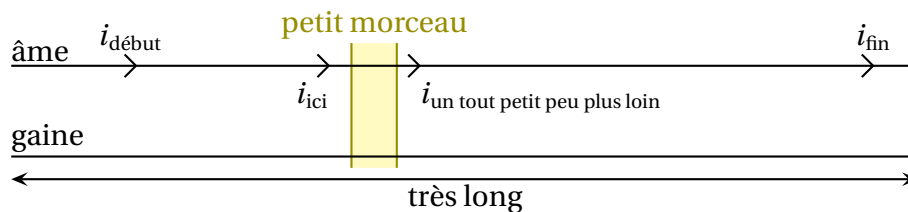
- ✧ Outre en TP d'électrocinétique, ces câbles sont utilisés couramment pour la transmission des ondes reçues par satellite ou par des antennes jusqu'à un décodeur ou une télévision.
- ✧ Le fait est que ces câbles peuvent devenir longs et que, dans ces conditions, nous n'avons pas $\ell \ll cT$.



Bon à retenir

§ Un câble coaxial pris dans sa globalité ne fonctionne pas dans l'ARQS.

- ✧ En représentant la partie électrocinétique d'un câble par les deux fils qui les composent, nous avons, dans le dessin suivant $i_{\text{début}} \neq i_{\text{fin}}$



- ✧ En revanche, nous pouvons toujours observer des « tranches » de câble et ces tranches (de quelques centimètres par exemple) tombent, elles, sous le coup de l'ARQS et là nous avons

$$i_{\text{ici}} = i_{\text{un tout petit peu plus loin}} \quad (\text{III.1})$$

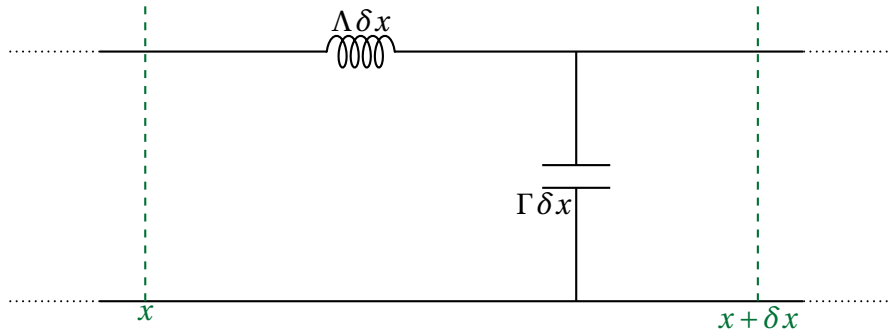
★ le modèle mésoscopique ou le retour de la l'ARQS

- ✧ Le fait que deux conducteurs soient très proches l'un de l'autre implique un certain effet capacitif, puisqu'un condensateur n'est autre qu'un ensemble de deux conducteurs espacés par un isolant.
- ✧ De plus, le fait que deux conducteurs soient très proches va impliquer un effet inductif car le courant qui circule dans l'un va influencer le courant qui circule dans l'autre par l'intermédiaire du champ \vec{B} créé. C'est le phénomène d'induction vu en première année.

⇨ Finalement, la portion de câble coaxial située entre x et $x + \delta x$ peut se modéliser par une association de deux composants :

- une bobine d'inductance $L = \Lambda \delta x$, avec Λ l'inductance *linéique* (donc en $\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$);
- un condensateur de capacité $C = \Gamma \delta x$, avec Γ la capacité *linéique* (donc en $\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$).

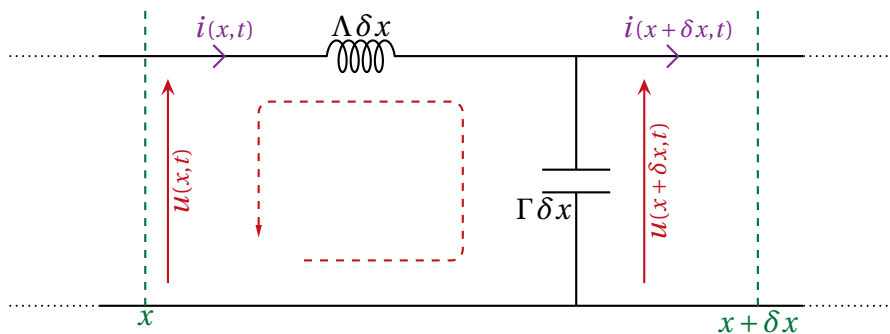
⇨ Le schéma équivalent pour une portion de câble est donc



III.1.ii – équation de propagation

★ le « circuit »

⇨ Regardons d'un peu plus près ce qui se passe entre x et $x + \delta x$. Pour cela introduisons les deux grandeurs pertinentes de l'électrocinétique : le courant et la tension.



★ loi des mailles

⇨ Écrivons la loi des mailles dans la maille représentée et manipulons

$$u(x + \delta x, t) + \Lambda \delta x \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) - u(x, t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{u(x + \delta x, t) - u(x, t)}{\delta x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \quad (\text{III.2})$$

⇨ En faisant tendre $\delta x \rightarrow 0$ nous voyons apparaître un taux d'accroissement

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \quad (\text{III.3})$$

⇨ Il s'agit là de la première relation de couplage.

★ loi des nœuds

⇨ Écrivons la loi des nœuds pour le seul nœud du circuit

$$i(x, t) = i(x + \delta x, t) + \Gamma \delta x \frac{\partial u}{\partial t}(x + \delta x, t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{i(x + \delta x, t) - i(x, t)}{\delta x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x + \delta x, t) \quad (\text{III.4})$$

✧ En faisant tendre $\delta x \rightarrow 0$ nous voyons apparaître une dérivée partielle à gauche et une simplification à droite

$$\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \quad (\text{III.5})$$

✧ C'est la deuxième relation de couplage.

★ équations de D'ALEMBERT


🔗 pour $u(x,t)$

✧ Dérivons (III.3) par rapport à x et (III.5) par rapport à t . Cela donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}(x,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}(x,t) = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \quad (\text{III.6})$$

✧ Attention au sens d'écriture : la première dérivée effectuée est celle écrite à droite

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) \right) \quad (\text{III.7})$$



Loi
THÉORÈME DE SCHWARZ

Pour une fonction $f(x,y)$ suffisamment régulière

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,t) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right)$$

✧ En physique, toutes les fonctions sont suffisamment régulières donc nous pouvons remplacer $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}(x,t)$ par son expression et nous obtenons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\Lambda \left(-\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \right) \quad (\text{III.8})$$

✧ Et finalement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \Lambda}} \quad (\text{III.9})$$

✧ Il s'agit bien d'une équation de D'ALEMBERT.

🔗 pour $i(x,t)$

✧ Pour trouver l'équation « en $i(x,t)$ » nous allons éliminer les $u(x,t)$ et pour cela faire apparaître la double dérivée croisée de $u(x,t)$.

✧ Dérivons (III.3) par rapport à t et (III.5) par rapport à x . Cela donne

$$-\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t) = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t) \quad (\text{III.10})$$

✧ Nous obtenons ainsi

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t) = -\Gamma \left(-\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t) \right) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t) \quad (\text{III.11})$$

- ✧ Remarquons que non seulement $i(x,t)$ obéit aussi à une équation de D'ALEMBERT mais qu'en plus c'est la même équation que celle vérifiée par $u(x,t)$.

III.2 – Grandeurs duales

III.2.i – équations couplées

★ pour le câble

- ✧ Reprenons les équations de couplage c'est-à-dire (III.3) et (III.5)

$$-\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad \text{et} \quad -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial i}{\partial x}(x,t) \quad (\text{III.12})$$

- ✧ Nous pouvons constater qu'elles sont similaires puisqu'elles s'écrivent toutes les deux sous la forme

$$-C^{\text{te}} \times \frac{\partial \text{qqch}}{\partial t} = \frac{\partial \text{truc}}{\partial x} \quad (\text{III.13})$$



Définition

Des *grandeurs duales* sont des grandeurs qui obéissent à des équations couplées, en général symétriques.



Bon à retenir

Pour qu'il y ait propagation il est nécessaire d'avoir des échanges énergétiques entre les grandeurs duales.

- ✧ Pour le câble coaxial, les grandeurs duales sont $u(x,t)$ et $i(x,t)$ et comme nous le verrons en exercice, les énergies associées sont l'énergie électrique en $u^2(x,t)$ et l'énergie magnétique en $i^2(x,t)$.

★ pour la corde

- ✧ Bien que cela ne se voit pas spontanément, il y a des équations de couplage pour la propagation le long d'une corde. Essayons de les retrouver.

🌀 PFD

- ✧ Le PFD nous avait mené à

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \quad (\text{III.14})$$

- ✧ Nous pouvons réécrire cette expression sous la forme

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0 \times \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \right) \quad (\text{III.15})$$

- ✧ En remarquant que $T_0 \times \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = T_0 \times \alpha(x,t) = T_y(x,t)$

$$\mu \frac{\partial v_y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial T_y}{\partial x}(x,t) \quad \rightsquigarrow \quad -\mu \frac{\partial v_y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial(-T_y)}{\partial x}(x,t) \quad (\text{III.16})$$

- ✧ Il s'agit bien d'une équation de couplage entre v_y et $(-T_y)$.

🕒 relation géométrique

✧ Lors de la mise en équation, nous avons vu que

$$\alpha(x,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \quad \text{et} \quad T_y(x,t) = T_0 \alpha(x,t) \quad \rightsquigarrow \quad T_y(x,t) = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \quad (\text{III.17})$$

✧ En dérivant la relation précédente par rapport au temps nous obtenons

$$\frac{\partial T_y}{\partial t}(x,t) = T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \right) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial T_y}{\partial t}(x,t) = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) \right) \quad (\text{III.18})$$

✧ Et comme $v_y(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$

$$\frac{\partial T_y}{\partial t}(x,t) = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}(x,t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial(-T_y)}{\partial t}(x,t) = -T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}(x,t) \quad (\text{III.19})$$

✧ Nous obtenons donc une 2^e équation de couplage, qui confirme que les grandeurs duales sont v_y et $(-T_y)$.

✧ Le signe « - » de $(-T_y)$ se comprend par le fait que $(-T_y)$ est la force qu'exerce un bout de corde sur la portion à droite, *i.e.* dans le sens de \vec{u}_x , *i.e.* dans le sens « naturel » de propagation.

✧ Comme T_y faisait référence à la force que la droite exerçait sur la gauche, nous noterons $T_y^+ \stackrel{\text{not}}{=} -T_y$ la force qui s'exerce dans le sens de $+\vec{u}_x$ *i.e.* de la gauche sur la droite.

★ de manière générale

✧ Les grandeurs duales sont souvent choisies de sorte que leur produit soit homogène à une puissance.

✧ C'est bien le cas ici puisque

$$u \times i \equiv \mathcal{P} \quad \text{et} \quad v_y \times T_y^+ \equiv \mathcal{P} \quad (\text{III.20})$$

✧ Finalement nous pouvons dire que les grandeurs duales caractérisent l'état d'une portion mésoscopique du milieu propagatif.

III.2.ii – impédance d'un milieu propagatif

✧ Comme nous allons le voir, il est possible de relier directement les expressions des grandeurs duales.

★ pour le câble coaxial

🕒 OPP se dirigeant vers les x croissants

Bon à retenir

Si une onde de courant le long d'un câble coaxial est une OPP \blacktriangleright , alors l'onde en tension est une OPP \blacktriangleright qui lui est proportionnelle

$$u(x,t) = +Z_c i(x,t) \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

✧ Pour le démontrer, partons de l'expression générale d'une OPP \blacktriangleright pour l'onde en courant

$$i(x,t) = f(x - ct) \quad (\text{III.21})$$

✧ Injectons cette solution dans l'équation de couplage (III.3)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t} (f(x-ct)) \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = +\Lambda c f'(x-ct) \quad (\text{III.22})$$

✧ Intégrons par rapport à x .

$$u(x,t) = c \Lambda f(x-ct) + h(t) \quad (\text{III.23})$$

✧ La « constante » qui apparaît n'est une constante que par rapport à x , c'est donc bien une fonction du temps.

✧ Toutefois, en tant que fonction du temps *seule*, cela ne peut pas être une solution *ondulatoire* de l'équation de D'ALEMBERT car ces dernières font intervenir des phénomènes spatiaux *et* temporels.

✧ Étant donné que $h(t)$ ne représente pas une solution propagative **et** que l'équation de D'ALEMBERT est linéaire, nous pouvons nous permettre de ne pas la prendre en compte sans même chercher à la déterminer.

✧ Dès lors il reste

$$u(x,t) = c \Lambda f(x-ct) \rightsquigarrow u(x,t) = Z_c i(x,t) \quad \text{avec} \quad Z_c = \Lambda c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \quad (\text{III.24})$$

🔦 OPP se dirigeant vers les x décroissants



Bon à retenir

Si une onde de courant le long d'un câble coaxial est une OPP \blacktriangleleft , alors l'onde en tension est une OPP \blacktriangleleft qui lui est proportionnelle

$$u(x,t) = -Z_c i(x,t) \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

✧ Pour le démontrer, utilisons le même raisonnement que celui qui précède et partons de l'expression générale d'une OPP \blacktriangleleft pour l'onde en courant

$$i(x,t) = g(x+ct) \quad (\text{III.25})$$

✧ Injectons cette solution dans l'équation de couplage (III.3)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t} (g(x+ct)) \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\Lambda c g'(x+ct) \quad (\text{III.26})$$

✧ Intégrons par rapport à x .

$$u(x,t) = -c \Lambda g(x+ct) + h(t) \quad (\text{III.27})$$

✧ Encore une fois nous voyons apparaître un terme non propagatif que nous pouvons mettre de côté et il reste

$$u(x,t) = -c \Lambda g(x+ct) \rightsquigarrow u(x,t) = -Z_c i(x,t) \quad \text{avec} \quad Z_c = \Lambda c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \quad (\text{III.28})$$

 **cas général**



Bon à retenir

Si une onde de courant le long d'un câble coaxial est une somme d'OPP notées $i(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$, alors l'onde en tension est aussi une somme OPP

$$u(x,t) = +Z_c (f(x-ct) - g(x+ct)) \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

Z_c est appelée **impédance caractéristique**.



Bon à retenir

⌘ Dans le cas du câble coaxial, l'impédance caractéristique est homogène à une résistance.

⌘ Cela se voit très bien à partir de l'expression du facteur de qualité d'un circuit RLC

$$\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \equiv \sqrt{\frac{L/\ell}{C/\ell}} \equiv \sqrt{\frac{L}{C}} \equiv QR \equiv R \quad (\text{III.29})$$

⌘ En TP les câbles coaxiaux ont une impédance caractéristique de 50Ω comme c'est parfois écrit dessus. Que 50Ω soit précisément l'impédance d'entrée des GBF n'est pas une coïncidence comme nous le verrons dans la suite.

⌘ Attention de ne pas confondre : les câbles coaxiaux en TP ont une résistance très faible. L'impédance caractéristique de 50Ω renvoie à des caractéristiques électrocinétiques propagatives et non à des caractéristiques statiques.

⌘ Pour les câbles antenne, l'impédance caractéristique est de 75Ω .

★ **pour la corde**

⌘ Pour trouver l'impédance caractéristique, *i.e.* le facteur de proportionnalité entre les grandeurs duales, nous allons faire comme pour le câble à savoir partir d'une équation de couplage.

⌘ Supposons que $v_y(x,t)$ soit une OPP de la forme $v_y(x,t) = f(x-ct)$.

⌘ Écrivons la relation de couplage

$$-\mu \frac{\partial v_y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial T_y^+}{\partial x} \quad \rightsquigarrow \quad -\mu \frac{\partial f(x-ct)}{\partial t} = \frac{\partial T_y^+}{\partial x} \quad (\text{III.30})$$

⌘ Et ainsi

$$\mu c f'(x-ct) = \frac{\partial T_y^+}{\partial x} \quad (\text{III.31})$$

⌘ En primitivant par rapport à x et en mettant de côté le terme non propagatif, nous arrivons à

$$T_y^+ = \mu c f(x-ct) + h(t) \quad \rightsquigarrow \quad T_y^+ = Z_c v_y(x,t) \quad \text{avec} \quad Z_c = \mu c \quad (\text{III.32})$$



Bon à retenir

⌘ Pour une corde obéissant à l'équation de D'ALEMBERT, si $v_y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ alors

$$T_y^+(x,t) = Z_c (f(x-ct) - g(x+ct)) \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{\mu T_0}$$

⌘ Un moyen **purement mnémotechnique** pour se souvenir que dans le cas de la corde $T = Z v$ est de se souvenir que $u = Z i$ (facile) et que

- T est une force, qu'une force peut dériver d'une énergie *potentielle* et donc que c'est analogue à u qui est une différence de *potentiels*;
- v est une *vitesse* donc c'est analogue à i dont la densité surfacique $j = \rho v$ fait intervenir la *vitesse* des porteurs de charge.

✧ En ce qui concerne l'homogénéité, en prenant les unités en lieu et place des dimensions

$$Z_c = \mu c \equiv \sqrt{\text{kg.m}^{-1} \times \text{kg.m.s}^{-2}} \equiv \text{kg.s}^{-1} \neq \Omega \quad (\text{III.33})$$

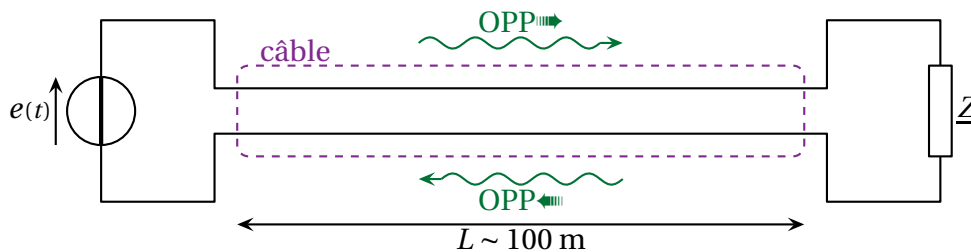
III.3 – Réflexion et transmission

III.3.i – à l'extrémité d'un milieu propagatif

★ câble coaxial

🕒 situation

✧ Considérons la situation simple suivante où un câble coaxial est relié à un GBF *idéal* et à une impédance quelconque.



✧ Analyse physique :

- nous avons affaire à une propagation dans un milieu unidimensionnel donc *a priori* nous aurons deux ondes : une $\text{OPP} \rightarrow$ et une $\text{OPP} \leftarrow$;
- comme la source énergétique est le GBF et que celui-ci va naturellement être considéré comme sinusoïdal, nous pouvons dire que les ondes seront des OPPM ;
- en terme de grandeurs pertinentes nous avons : Z_c (caractéristique du milieu), c (célérité), L (géométrie), ω , E et Z (contraintes).

✧ Analyse technique :

- OPPM ? notation complexe !
- nous avons deux ondes donc pour les déterminer *entièrement* il nous faut deux conditions aux limites. Cela tombe bien, il y a deux extrémités au câble ;
- en terme de repérage, nous avons le choix pour la position du $x = 0$. Le plus naturel est de placer $x = 0$ au niveau de la source ;
- nous avons le choix de résoudre en courant ou en tension. Comme nous savons que les OPP sont proportionnelles, mieux vaut choisir les ondes en courant comme inconnues de manière à faire apparaître des produits avec Z_c pour les ondes en tension.

🕒 solution

✧ Comme nous savons qu'il s'agit d'OPPM, nous pouvons écrire

$$\underline{i}(x,t) = \underline{I}_+ e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_- e^{j(\omega t + kx)} \quad (\text{III.34})$$

✧ Les deux grandeurs à déterminer, les deux « inconnues » sont donc \underline{I}_+ et \underline{I}_- .

✧ Nous pouvons donc écrire tout de suite³

$$\underline{u}(x,t) = Z_c \underline{I}_+ e^{j(\omega t - kx)} - Z_c \underline{I}_- e^{j(\omega t + kx)} \quad (\text{III.35})$$

🔗 conditions aux limites

✧ Tout d'abord en $x = 0$, la tension au bout du câble n'est autre que celle imposée par le GBF. Cela donne

$$u(0,t) = e(t) \rightsquigarrow \underline{u}(0,t) = E e^{j\omega t} \quad (\text{III.36})$$

✧ Et ainsi

$$Z_c \underline{I}_+ e^{j\omega t} - Z_c \underline{I}_- e^{j\omega t} = E e^{j\omega t} \rightsquigarrow Z_c \underline{I}_+ - Z_c \underline{I}_- = E \quad (\text{III.37})$$

✧ Traduisons maintenant l'autre condition aux limites, celle en $x = L$.

✧ En $x = L$, le courant $i(L,t)$ qui sort du câble traverse l'impédance et le câble impose sa tension ce qui implique

$$\underline{u}(L,t) = \underline{Z} \underline{i}(L,t) \quad (\text{III.38})$$

✧ Cela donne, avec les expressions de $\underline{u}(x,t)$ et $\underline{i}(x,t)$

$$Z_c \underline{I}_+ e^{j(\omega t - kL)} - Z_c \underline{I}_- e^{j(\omega t + kL)} = \underline{Z} \underline{I}_+ e^{j(\omega t - kL)} + \underline{Z} \underline{I}_- e^{j(\omega t + kL)} \quad (\text{III.39})$$

✧ Cela conduit à

$$(Z_c - \underline{Z}) \underline{I}_+ e^{-jkL} - (Z_c + \underline{Z}) \underline{I}_- e^{jkL} = 0 \quad (\text{III.40})$$

🔗 solutions

✧ Les deux conditions aux limites aboutissent donc au système

$$\begin{cases} Z_c \underline{I}_+ - \underline{Z} \underline{I}_- = E \\ (Z_c - \underline{Z}) \underline{I}_+ e^{-jkL} - (Z_c + \underline{Z}) \underline{I}_- e^{jkL} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.41})$$

✧ Les solutions sont

$$\underline{I}_+ = \frac{-(Z_c + \underline{Z}) E e^{jkL}}{Z_c (Z_c - \underline{Z}) e^{-jkL} - Z_c (Z_c + \underline{Z}) e^{jkL}} \quad \text{et} \quad \underline{I}_- = \frac{-(Z_c - \underline{Z}) E e^{-jkL}}{-Z_c (Z_c + \underline{Z}) e^{jkL} + Z_c (Z_c - \underline{Z}) e^{-jkL}} \quad (\text{III.42})$$

✧ Le résultat, et surtout son expression, n'est pas en soi intéressant. Mais nous allons le commenter.

🔗 coefficient de réflexion

Définition

Un *coefficient de réflexion* est défini en une extrémité d'un milieu propagatif par

$$r = \frac{\text{amplitude de la grandeur réfléchie}}{\text{amplitude de la grandeur incidente}}$$

3. Autant, à l'oral, il est possible de proposer tout de suite l'écriture duale, autant, à l'écrit, les questions amèneront souvent à retrouver l'écriture duale à partir des équations de couplage.

**Loi**

Pour les milieux linéaires, le coefficient de réflexion est indépendant de l'amplitude de la grandeur incidente.

**Attention !**

Lorsque nous parlerons de « coefficient de réflexion » il faudra bien préciser de *quelle* grandeur duale nous parlons.

✧ Ici nous pouvons aisément trouver l'expression du coefficient de réflexion en intensité au point $x = L$

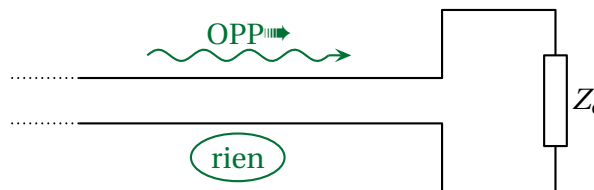
$$r_i = \frac{\underline{I}_- e^{jkL}}{\underline{I}_+ e^{-jkL}} = \frac{(Z_c - \underline{Z}) E}{(\underline{Z} + Z_c) E} \rightsquigarrow r_i = \frac{Z_c - \underline{Z}}{\underline{Z} + Z_c} \quad (\text{III.43})$$

✧ Nous voyons aussi quelque chose de très important : lorsque $\underline{Z} = Z_c$ alors il n'y a plus d'onde réfléchie !

**Loi**

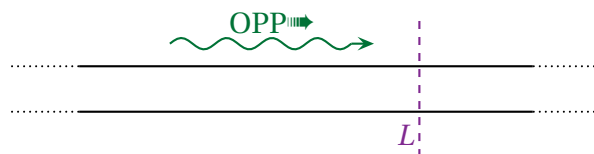
Lorsqu'un milieu propagatif est fermé sur son impédance caractéristique, cela implique qu'il n'y a pas d'onde réfléchie.

✧ Regardons la situation « réelle » en $x = L$: une onde arrive et « rien » ne revient.



✧ Mettons-nous à la place de l'onde qui arrive en $x = L$:

- quand nous arrivons, nous « voyons » une impédance Z_c **exactement comme si** c'était une portion de câble ;
- nous, en tant qu'onde, « entrons » dans cette impédance mais n'avons aucune raison d'en « sortir » tout comme nous n'avons pas de raison, en tant qu'onde, de revenir sur nos pas en plein milieu d'une zone propagative.

**Bon à retenir**

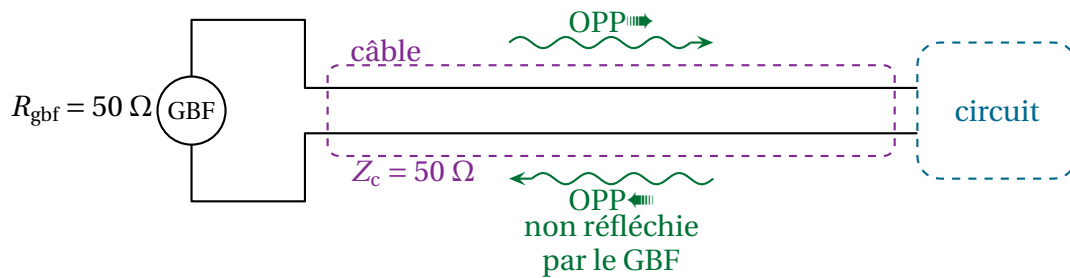
§ Une impédance caractéristique permet de simuler l'infini propagatif.

✧ Donc les fois où nous rencontrerons un exercice parlant de milieu « infini », cela ne sera absolument pas une approximation grossière de la réalité, mais une *autre* traduction du fait que le milieu est fermé sur son impédance caractéristique.

✧ Remarquons qu'en optique aussi, nous pouvons accéder de manière rigoureuse à l'infini : avec le plan focal d'une lentille convergente.

★ **application aux TP**

⇨ Le fait qu'une onde ne se réfléchisse pas lorsqu'en bout de milieu propagatif elle rencontre son impédance caractéristique, explique pourquoi un GBF possède une résistance interne de 50 Ω.



⇨ En reliant le GBF à un circuit *a priori* quelconque, il va y avoir des phénomènes de réflexion et une onde risque de « revenir » vers le GBF.

⇨ Pour éviter que l'onde qui revient soit à nouveau renvoyée dans le circuit au risque de créer un phénomène de résonance potentiellement destructif, une résistance équivalente de 50 Ω est placée dans le GBF de manière à absorber l'onde retour.

★ **traduire les conditions aux limites pour une corde**

⇨ Il y a quelques cas à connaître dont le plus classique est le premier.

Loi

Pour une corde fixée à une extrémité

$y(\text{extrémité}, t) = 0$ ou $v_y(\text{extrémité}, t) = 0$

⇨ Parfois nous rencontrons une autre condition, plus difficile à réaliser en pratique.

Bon à retenir

Pour une corde fixée à un anneau sans masse coulissant sans frottement

$T_y(\text{extrémité}, t) = 0$

⇨ L'explication est immédiate.

⇨ Écrivons le PFD pour l'anneau sans masse

$$\underbrace{0}_m \times \vec{a} = \underbrace{\vec{0}}_{\text{poids}} + \overrightarrow{R_{\text{tige} \rightarrow \text{anneau}}} + \underbrace{(-\vec{T})}_{\text{gauche sur droite}} \tag{III.44}$$

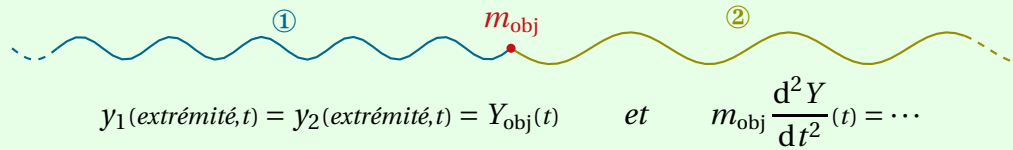
⇨ En projetant sur \vec{u}_y et sachant que la réaction anneau / tige se fait sans frottement, nous obtenons

$$0 = 0 - T_y(\text{extrémité}, t) \tag{III.45}$$



Bon à retenir

Lorsqu'une corde est accrochée à quelque chose (ressort, masse...) une condition aux limites est donnée par la continuité de la corde et l'autre est donnée par le PFD sur l'objet accroché.



★ cas à retenir parmi tous

✧ Et n'oublions pas la condition que nous utiliserons régulièrement



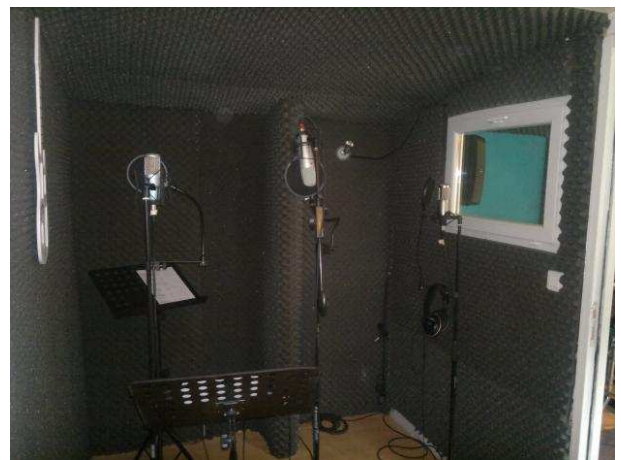
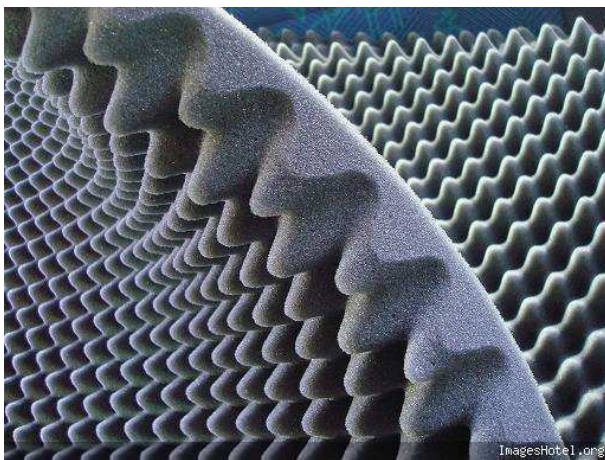
Bon à retenir

Lorsqu'une corde est fermée sur son impédance caractéristique, il n'y a pas d'onde réfléchie.

✧ Nous ne savons pas trop ce qu'est cette « impédance caractéristique » sans aucun doute un mélange de ressort et d'amortisseur.

✧ Peu importe ce qu'est, ou non, cette « impédance caractéristique », cette condition se traduit immédiatement par la suppression d'une onde, donc d'une « inconnue ».

☞ *Remarque.* Dans les studios d'enregistrement, des « impédances caractéristiques » d'ondes sonores sont plaquées contre les murs de sorte qu'il n'y ait pas de réflexion / d'écho lors de l'enregistrement (ici le studio d'enregistrement 44 à Bouguenais, près de Nantes⁴).



III-3-ii – jonction entre deux milieux propagatifs

★ situation

✧ Considérons deux cordes différentes (*i.e.* de masses linéiques différentes), semi-infinies et attachées ensemble.

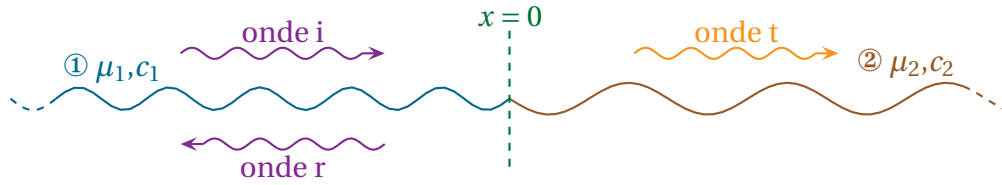


✧ Regardons ce qui se passe lorsqu'une onde arrive au niveau de la jonction.

✧ Analyse physique :

4. Ce n'est pas que l'auteur fait de la publicité pour ce studio, c'est surtout que l'auteur n'a trouvé que cette photo sur internet où les murs étaient aussi visibles.

- une onde arrive sur une discontinuité entre deux milieux propagatifs, il y a donc *a priori* une onde réfléchie et une onde transmise ;
- nous savons que la propagation et les milieux sont linéaires donc nous pouvons dire que **toutes** les grandeurs seront proportionnelles ;
- comme les milieux propagatifs sont différents, les célérités sont elles aussi *a priori* différentes ;
- ici rien n'impose que l'onde incidente soit une OPPM.



✧ Analyse technique :

- en considérant l'onde incidente comme « contrainte », les ondes « réfléchie » et « transmise » sont donc les deux inconnues ;
- deux inconnues donc deux conditions aux limites : la continuité de la position et un PFD sur le point de jonction ;
- nous allons chercher des solutions sous la forme d'une OPP car rien n'impose une OPPM ;
- comme ici **un seul** point nous intéresse, *i.e.* nous n'avons pas de vision globale de l'onde et des milieux propagatifs, nous allons utiliser une vision temporelle des ondes.

★ une autre forme de solution

Loi

Les solutions de l'équation de D'ALEMBERT s'écrivent, au choix

- soit sous forme spatiale $y(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$;
- soit sous forme temporelle $y(x,t) = F(t - x/c) + G(t + x/c)$.

2

1

✧ La démonstration est très simple :

$$f(x - ct) = f(-c(t - x/c)) = F(t - x/c) \quad \text{et} \quad g(x + ct) = g(c(t + x/c)) = G(t + x/c) \quad \text{(III.46)}$$

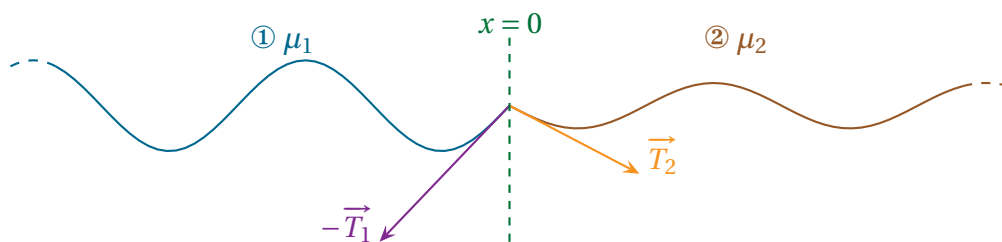
✧ Nous écrivons donc :

- $F(t - x/c_1)$ l'onde incidente, considérée comme connue ;
- $G(t + x/c_1)$ l'onde réfléchie, inconnue ;
- $H(t - x/c_2)$ l'onde réfléchie, inconnue.

★ conditions aux limites

🕒 la jonction

✧ Faisons un dessin.



✧ L'onde « à gauche », celle dans le milieu ①, s'écrit

$$y_1(x, t) = F(t - x/c_1) + G(t + x/c_1) \quad (\text{III.47})$$

✧ L'onde « à droite », celle dans le milieu ②, s'écrit

$$y_2(x, t) = H(t - x/c_2) \quad (\text{III.48})$$

🔗 continuité de la corde

✧ Comme les deux cordes sont attachées en $x = 0$, nous pouvons écrire

$$y_1(0^-, t) = y_2(0^+, t) \quad \rightsquigarrow \quad F(t) + G(t) = H(t) \quad (\text{III.49})$$

🔗 le PFD

✧ Écrivons le PFD pour le point matériel *entre* les deux cordes. Ce point matériel est un point de masse nulle.

✧ Commençons par la projection sur \vec{u}_x

$$0 \times \ddot{x}(t) = -T_1 + T_2 \quad (\text{III.50})$$

✧ Sachant que la composante horizontale de la tension est une constante T_1 sur la portion gauche et est une constante T_2 sur la portion à droite, nous trouvons

$$T_1 = T_2 \stackrel{\text{not}}{=} T_0 \quad (\text{III.51})$$

✧ En projetant le PFD sur ce même point de masse nulle sur \vec{u}_y , nous obtenons

$$0 \times \ddot{y}(t) = -T_1 y(0^-, t) + T_2 y(0^+, t) \quad (\text{III.52})$$

✧ N'oublions pas que nous avons défini $T(x, t)$ comme la force exercée par la droite sur la gauche. C'est ce qui explique la présence du signe « - ».

✧ Avec l'expression de $T(x, t)$ pour une corde, nous obtenons

$$-T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}(0^-, t) + T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}(0^+, t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial y_1}{\partial x}(0^-, t) = \frac{\partial y_2}{\partial x}(0^+, t) \quad (\text{III.53})$$

🔗 autre vision du PFD

✧ La démonstration (et donc le résultat) précédent est juste. Malgré tout il est possible de raffiner la démonstration.

✧ Écrivons le PFD à un morceau mésoscopique de corde compris entre 0 et $+\delta x$.

✧ Comme l'ensemble de ce petit bout de corde est « à droite » sa masse vaut $\mu_2 \delta x$.

✧ La force exercée par la portion à gauche est la force exercée par la corde ① donc sa composante sur \vec{u}_y s'écrit

$$T_g = -T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}(0, t) \quad (\text{III.54})$$

✧ De même la composante sur \vec{u}_y de la force exercée par la portion droite s'écrit

$$T_d = +T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}(\delta x, t) \quad (\text{III.55})$$

✧ Finalement le PFD donne

$$\mu_2 \delta x \ddot{Y}(t) = -T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}(0,t) + T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}(\delta x,t) \quad (\text{III.56})$$

✧ Comme $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$ sont deux fonctions différentes, il n'est pas question de faire un développement de TAYLOR comme lors de la mise en équation d'une corde.

✧ En faisant tendre $\delta x \rightarrow 0$ nous retrouvons bien le résultat.

🔗 dernière méthode pour retrouver le PFD

✧ Le plus facile à s'imaginer et à écrire reste encore peut-être d'introduire une vraie masse m entre les deux cordes.

✧ De là nous pouvons écrire le PFD ce qui, en négligeant la pesanteur, conduit à⁵

$$m \ddot{Y}(t) = -T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}(0,t) + T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}(0,t) \quad (\text{III.57})$$

✧ Et il ne reste plus qu'à faire $m = 0$.

🔗 traduction du PFD

✧ N'oublions que nous cherchons les ondes réfléchies et transmises. Il nous faut donc traduire « en F , G et H » la condition trouvée.

✧ Exprimons $\frac{\partial y_1}{\partial x}(0,t)$ et pour cela commençons par $\frac{\partial y_1}{\partial x}(x,t)$:

$$y_1(x,t) = F(t-x/c_1) + G(t+x/c_1) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial y_1}{\partial x}(x,t) = -\frac{1}{c_1} F'(t-x/c_1) + \frac{1}{c_1} G'(t+x/c_1) \quad (\text{III.58})$$

✧ Et donc, en $x = 0$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}(0,t) = -\frac{1}{c_1} F'(t) + \frac{1}{c_1} G'(t) \quad (\text{III.59})$$

✧ De même pour $\frac{\partial y_2}{\partial x}(0,t)$:

$$y_2(x,t) = H(t-x/c_2) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial y_2}{\partial x}(x,t) = -\frac{1}{c_2} H'(t-x/c_2) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial y_2}{\partial x}(0,t) = -\frac{1}{c_2} H'(t) \quad (\text{III.60})$$

✧ Et ainsi nous obtenons

$$-\frac{1}{c_1} F'(t) + \frac{1}{c_1} G'(t) = -\frac{1}{c_2} H'(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{c_1} F'(t) - \frac{1}{c_1} G'(t) = \frac{1}{c_2} H'(t) \quad (\text{III.61})$$

✧ En primitivant

$$\frac{1}{c_1} F(t) - \frac{1}{c_1} G(t) = \frac{1}{c_2} H(t) + \text{termes non propagatifs} \quad (\text{III.62})$$

✧ Encore une fois, grâce à la linéarité du milieu, nous pouvons mettre de côté les termes non propagatifs.

5. Le lecteur vérifiera

★ coefficients de réflexion et transmission

✧ Finalement les deux conditions aux limites permettent d'obtenir un système 2×2 assez simple

$$\begin{cases} F(t) + G(t) = H(t) \\ \frac{1}{c_1} F(t) - \frac{1}{c_1} G(t) = \frac{1}{c_2} H(t) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} -G(t) + H(t) = F(t) \\ +c_2 G(t) + c_1 H(t) = c_2 F(t) \end{cases} \quad (\text{III.63})$$

✧ Les solutions sont

$$G(t) = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} \times F(t) \quad \text{et} \quad H(t) = \frac{2c_2}{c_2 + c_1} \times F(t) \quad (\text{III.64})$$

✧ Finalement les coefficients de réflexion et de transmission de l'ébranlement sont

$$r = \frac{G(t)}{F(t)} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} \quad \text{et} \quad t = \frac{H(t)}{F(t)} = \frac{2c_2}{c_2 + c_1} \quad (\text{III.65})$$

✧ Nous pouvons remarquer que si $c_1 = c_2$ alors $r = 0$ et $t = 1$.

✧ Cela peut paraître surprenant mais avoir $c_1 = c_2$ implique

$$\sqrt{\frac{T_0}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_2}} \rightsquigarrow \mu_1 = \mu_2 \quad (\text{III.66})$$

✧ Autrement dit, pour qu'il n'y ait pas de réflexion, il faut relier deux cordes identiques ensemble, puisqu'alors les deux cordes semi-infinies forment une seule et unique corde infinie.

🔗 cas particulier

✧ Si $\mu_2 > \mu_1$ alors $c_2 < c_1$.

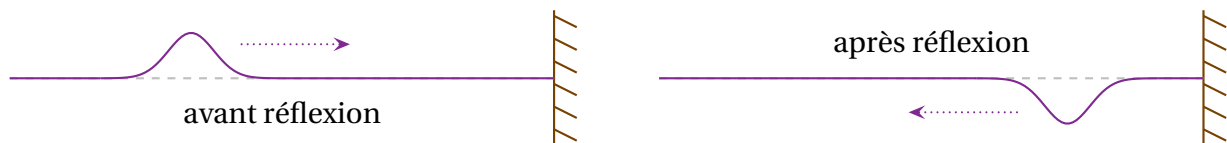
✧ À la limite, si la 2^e corde devient excessivement inertielle⁶ alors la célérité c_2 devient nulle.

✧ Et une corde excessivement inertielle n'est autre qu'un point fixe.



Bon à retenir

Une onde, sur une corde, se réfléchit en son opposée lorsqu'elle arrive sur une extrémité fixe.



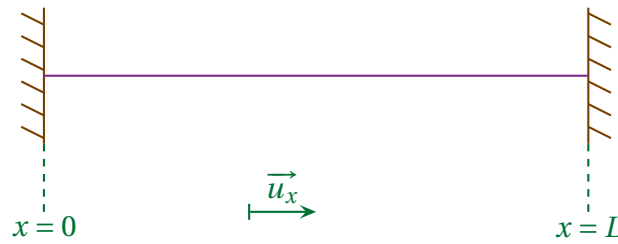
III.4 – Vibrations d'une corde

III.4.i – présentation de la corde de MELDE

★ dispositif

✧ Le dispositif est très simple : il s'agit d'une corde de longueur L tendue et fixée à ses deux extrémités.

6. Malheureusement, nous ne pouvons pas dire « lourde » ici car le poids est négligé.



★ analyse

✧ Analyse physique :

- ici nous avons un seul milieu propagatif ;
- les deux conditions aux limites sont des conditions de nullité : il va y avoir des nœuds de vibration ;
- les grandeurs pertinentes sont μ et T_0 (caractéristique milieu propagatif), L (géométrie) et... c'est tout.

✧ Analyse technique :

- comme il y a au moins un nœud de vibration, nous allons chercher une solution en OS ;
- ici le régime n'est pas forcé, nous pouvons nous contenter d'une notation réelle.



Bon à retenir

Quand, dans un milieu propagatif, au moins un nœud de vibration est imposé, il est pratique de rechercher une solution en onde stationnaire.

III-4-ii – modes propres

★ solution a priori

✧ Cherchons donc une solution sous la forme d'onde stationnaire *i.e.* sous la forme $y(x,t) = f(x)g(t)$.

✧ Comme il s'agit d'un milieu obéissant à l'équation de D'ALEMBERT, nous pouvons écrire tout de suite

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \quad \text{avec} \quad \omega = kc \quad (\text{III.67})$$

★ utilisation des conditions aux limites

🕒 condition en $x = 0$

✧ L'immobilité de la corde en $x = 0$ se traduit par

$$y(0,t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad A \cos(\omega t + \varphi) \cos(\psi) = 0 \quad (\text{III.68})$$

✧ Cette relation étant vraie quel que soit l'instant t , cela impose

$$\cos \psi = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \psi = \frac{\pi}{2} + p\pi \quad \text{avec} \quad p \text{ entier} \quad (\text{III.69})$$

🕒 condition en $x = L$

✧ L'immobilité de la corde en $x = L$ se traduit par

$$y(L,t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kL + \psi) = 0 \quad (\text{III.70})$$

✧ Avec l'expression de ψ

$$A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kL + \pi/2 + p\pi) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad A(-1)^p \cos(\omega t + \varphi) (-\sin(kL)) = 0 \quad (\text{III.71})$$

✧ Et puisque cette relation est valable **pour tout** t , nous arrivons à la relation

$$\sin(kL) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad kL = n\pi \quad \text{avec } n \text{ entier} \quad \text{(III.72)}$$

★ **résultat à connaître**

Loi

Les vecteurs d’ondes des modes propres de la corde de MELDE ne peuvent prendre que quelques valeurs dépendant d’un entier. Ces modes sont dits *quantifiés*.

✧ Oui, « quantifiés » comme en mécanique « quantique ». Ce n’est pas un hasard.

✧ Réécrivons les résultats et utilisons la relation de dispersion valable pour l’équation de D’ALEMBERT

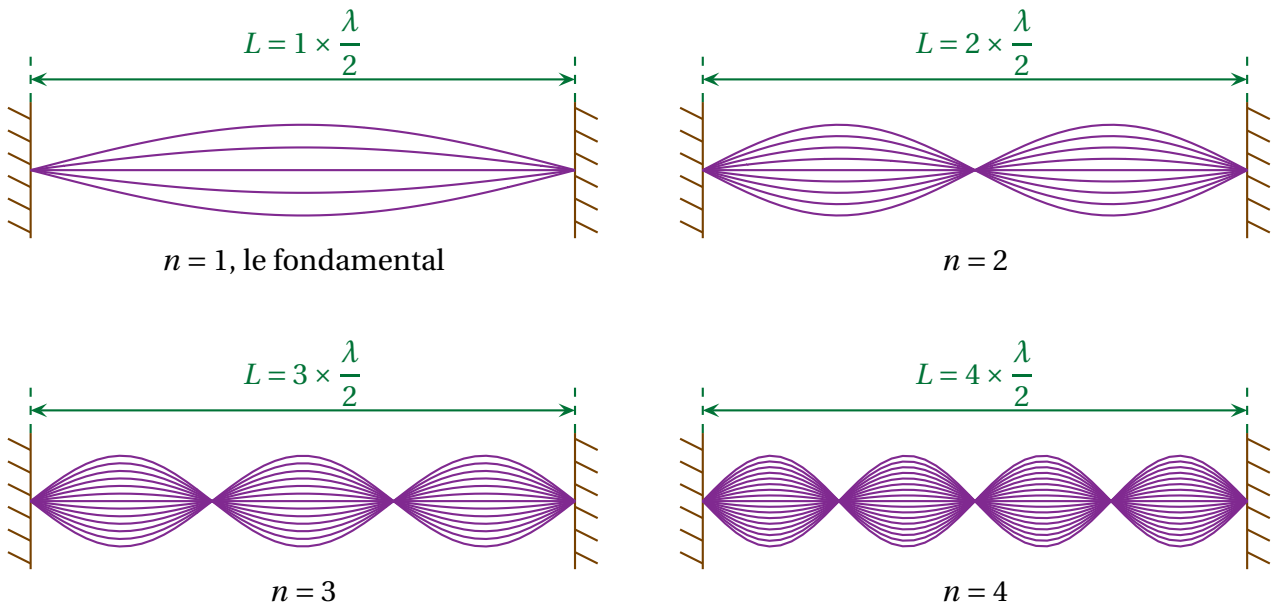
$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad \text{(III.73)}$$

Loi

Les modes propres de la corde de MELDE sont tels que L soit un nombre entier de fois la demi-longueur d’onde du mode propre considéré.

$$L = n \times \frac{\lambda}{2}$$

✧ Les modes propres ressemblent aux représentations ci-dessous.



Définition

Les points de la corde dont l’amplitude d’oscillation est maximale (resp. minimale) sont appelés *ventres* (resp. *nœuds*) de vibration.
L’espace entre deux nœuds est appelé un *fuseau*.

✧ Dans les représentations ci-dessus, il ne faut pas oublier que, plus il y a de fuseaux, plus le mode est élevée et plus la fréquence associée est grande. Autrement dit : plus il y a de fuseaux, plus ça bouge vite.

Loi

Dans le cas d’un système oscillant, le mode propre associé à la fréquence la plus basse est appelé *fondamental*. Les autres sont appelés *harmoniques*.



Loi

Dans le cas de la corde de MELDE, les fréquences propres des harmoniques sont des multiples entiers de la fréquence propre du fondamental.

✧ Cela se voit immédiatement

$$\omega_n = \frac{n \pi c}{L} = n \times \frac{\pi c}{L} = n \omega_1 \quad (\text{III.74})$$



Attention !

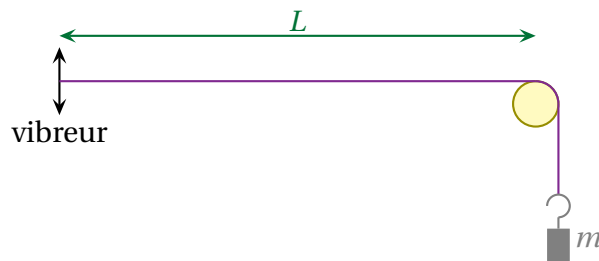
Le fait que les fréquences propres suivent une progression arithmétique n'est pas une loi générale de la physique. C'est en particulier faux pour tous les systèmes oscillants soit n'obéissant pas à l'équation de D'ALEMBERT soit n'étant pas unidimensionnels.

III.4.iii – oscillations forcées

- ✧ Remarquons tout d'abord que, si une seule des extrémités est fixée, ce n'est plus *tout à fait* une corde de MELDE.
- ✧ Toutefois, par abus de langage, nous continuerons à parler de la corde de MELDE en régime forcé.
- ✧ Cette approximation de langage n'est pas pire que « oscillateur harmonique amorti ». ☺

★ dispositif en TP

✧ Voilà comment nous procéderons en TP.



✧ Un PFD appliqué à la masse donne

$$m \ddot{Y}(t) = T_0 - m g \quad (\text{III.75})$$

✧ Si la masse reste immobile alors

$$\ddot{Y}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad T_0 = m g \quad (\text{III.76})$$

✧ Modifier la masse m permet donc de modifier la tension du fil et donc la célérité des ondes dans le milieu.

★ solution a priori

- ✧ Ici nous avons un et un seul nœud (celui en L) donc nous allons chercher la solution sous la forme d'une onde stationnaire.
- ✧ De plus, comme l'oscillation est forcée, nous utiliserons la notation complexe

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{y}(x, t) = \underline{A} e^{j\omega t} \cos(kx + \psi) \quad (\text{III.77})$$

★ **conditions aux limites**

🕒 **condition en $x = 0$**

✧ Le vibreur impose, en $x = 0$ l'oscillation

$$y(0, t) = a \cos(\omega t) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{y}(0, t) = a e^{j\omega t} \quad (\text{III.78})$$

✧ En utilisant l'expression en OS de $y(x, t)$

$$\underline{A} e^{j\omega t} \cos(\psi) = a e^{j\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{A} \cos(\psi) = a \quad (\text{III.79})$$

🕒 **condition en $x = L$**

✧ L'immobilité en $x = L$ impose

$$\underline{y}(L, t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{A} e^{j\omega t} \cos(kL + \psi) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \cos(kL + \psi) = 0 \quad (\text{III.80})$$

✧ Nous avons donc

$$kL + \psi = \frac{\pi}{2} + p\pi \quad \rightsquigarrow \quad \psi = \frac{\pi}{2} + p\pi - kL \quad (\text{III.81})$$

🕒 **rassemblement**

✧ Simplifions $\cos \psi$

$$\cos \psi = \cos(\pi/2 + p\pi - kL) = (-1)^p \cos(\pi/2 - kL) = (-1)^p \sin(kL) \quad (\text{III.82})$$

✧ Ainsi

$$\underline{A} \cos(\psi) = a \quad \rightsquigarrow \quad \underline{A} = \frac{a}{(-1)^p \sin(kL)} \quad (\text{III.83})$$

✧ Et en remplaçant

$$\underline{y}(x, t) = \frac{a e^{j\omega t}}{(-1)^p \sin(kL)} \times \cos\left(kx + \frac{\pi}{2} + p\pi - kL\right) \quad (\text{III.84})$$

$$= \frac{a e^{j\omega t}}{(-1)^p \sin(kL)} \times (-1)^p (-\sin(kx - kL)) \quad (\text{III.85})$$

$$= -\frac{a}{\sin(kL)} \times \sin(k(x - L)) e^{j\omega t} \quad (\text{III.86})$$

✧ Et en réel

$$y(x, t) = \frac{a}{\sin(kL)} \times \sin(k(L - x)) \cos(\omega t) \quad (\text{III.87})$$

★ **résonance**



Loi

La corde de MELDE résonne lorsque l'excitation correspond à la fréquence d'un mode propre.

✧ En effet si l'excitation se fait sur un mode propre, alors $\sin(kL) = 0$ et l'amplitude diverge.

✧ En réalité l'amplitude ne peut pas diverger et sera limitée par des effets dissipatifs ou non linéaires.

- ✧ Tout se passe exactement comme dans le cas des oscillations forcées de deux masses, pour lesquelles nous avons vu que la résonance se faisait au niveau des modes propres, lorsqu'il y avait peu de frottements (voir I-1·iv).

III-4·iv – solution en régime libre

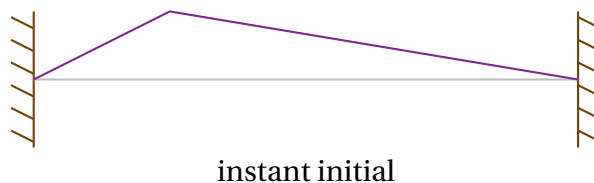
13

- ✧ La corde de MELDE constitue un premier modèle simple et réaliste des cordes des instruments à cordes.

★ exemple de la corde pincée

🕒 situation

- ✧ Une corde pincée est une corde écartée de sa position initiale et lâchée sans vitesse initiale.



- ✧ À $t = 0$, la déformation est telle que $y(x,0) = a(x)$.

🕒 forme de la solution

- ✧ Ici nous allons utiliser le principe de superposition et dire que l'évolution pour $t > 0$ est une superposition de modes propres.
- ✧ Autrement dit nous avons

22

$$y(x,t) = \sum_n \left(C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x + \psi_n) \right) \quad (\text{III.88})$$

- ✧ En reprenant les résultats vus précédemment pour $k_n x + \psi_n$ et en développant le $\cos(\omega_n t + \varphi_n)$ nous obtenons

$$y(x,t) = \sum_n \left((A_n \cos(n \omega_1 t) + B_n \sin(n \omega_1 t)) \sin(k_n(L-x)) \right) \quad (\text{III.89})$$

★ idée de la méthode

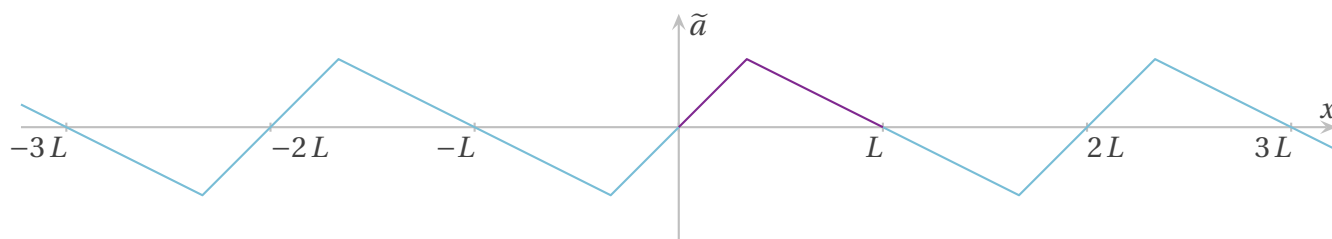
- ✧ Regardons la condition initiale

$$y(x,0) = a(x) \quad \rightsquigarrow \quad \sum_n (A_n \sin(k_n(L-x))) = a(x) \quad (\text{III.90})$$

- ✧ Or $\sum_n (A_n \sin(k_n(L-x)))$ est le développement en série de FOURIER d'une fonction *de l'espace* :
- impaire ;
 - dont le fondamental est de période $2L$.

- ✧ Pour trouver les A_n nous devons donc trouver le développement en série de FOURIER de la fonction $\tilde{a}(x)$ impaire et $2L$ -périodique qui coïncide avec $a(x)$ entre $x = 0$ et $x = L$.

- ✧ Dessinons cette fonction.



✧ Pour trouver les B_n , nous ferions exactement la même chose mais pour la vitesse :

- calculer $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$;
- exprimer $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)$ et reconnaître une série de FOURIER ;
- écrire $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = v_y(x)$ (pour la corde pincée, $v_y(x) = 0$) ;
- trouver la fonction $\tilde{v}_y(x)$ qui correspond au développement de la série de FOURIER ;
- mélanger le tout pour trouver les B_n .

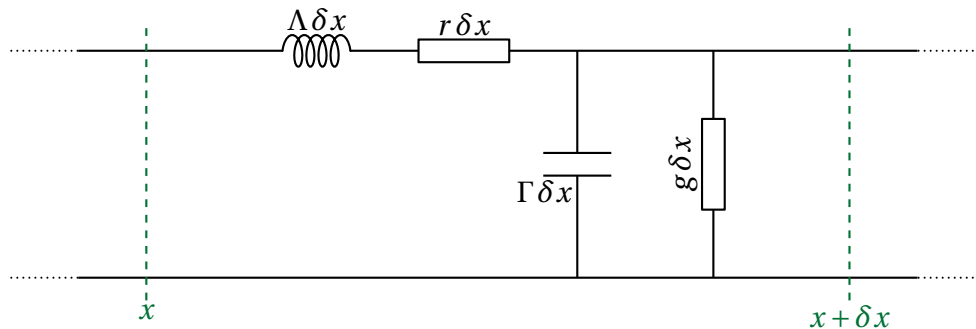
IV – Dispersion, atténuation

⇨ Dans cette partie nous allons voir ce qui se passe quand la propagation n'est pas parfaite, *i.e.* quand l'équation régissant l'évolution n'est pas une équation de D'ALEMBERT, mais *presque*.

IV.1 – Câble coaxial résistif

IV.1.i – nouveau modèle mésoscopique

⇨ Reprenons le câble coaxial, mais en tenant compte cette fois des pertes énergétiques aussi bien en terme de résistances des câbles « en série » avec la bobine que des résistances de fuite « en parallèle » du condensateur.



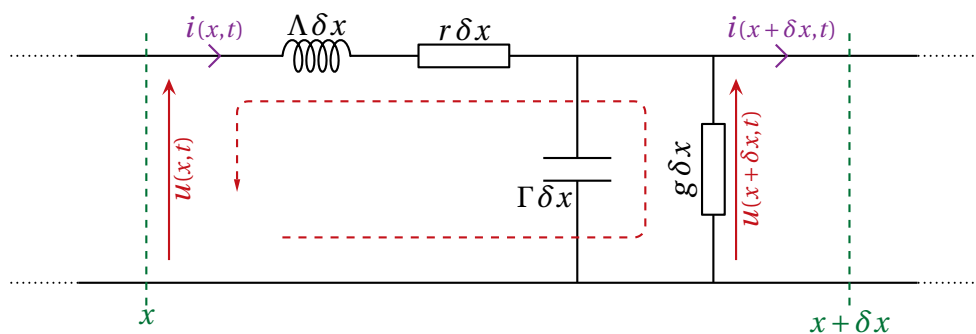
⇨ Les phénomènes dissipatifs sont pris en compte avec l'existence :
 → d'une résistance linéique r de valeur nulle dans le cas idéal ;
 → d'une conductance linéique g , elle aussi de valeur nulle dans le cas idéal.

IV.1.ii – équations de couplage

⇨ Pas de surprise ici, sur une portion mésoscopique de câble nous pouvons toujours utiliser l'ARQS et ainsi...

★ loi des mailles

⇨ Comme à l'échelle mésoscopique nous sommes toujours dans l'ARQS, nous pouvons écrire la loi des mailles dans la maille représentée.



⇨ Cela donne

$$u(x + \delta x, t) + r \delta x i(x, t) + \Lambda \delta x \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) - u(x, t) = 0 \quad (\text{IV.1})$$

✧ Et avec un développement limité au premier ordre de $u(x + \delta x, t)$

$$u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \delta x - u(x, t) = -r \delta x i(x, t) - \Lambda \delta x \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \quad (\text{IV.2})$$

✧ Et ainsi la première équation de couplage est

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -r i(x, t) - \Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \quad (\text{IV.3})$$

★ loi des nœuds

✧ La loi des nœuds s'écrit (cf. schéma précédent)

$$i(x, t) = \Gamma \delta x \frac{\partial u}{\partial t}(x + \delta x, t) + g \delta x u(x + \delta x, t) + i(x + \delta x, t) \quad (\text{IV.4})$$

✧ Faisons des développements limités des grandeurs évaluées en $x + \delta x$

$$i(x, t) = \Gamma \delta x \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x, t) \right) + g \delta x \left(u(x, t) + \delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + i(x, t) + \delta x \frac{\partial i}{\partial x}(x, t) \quad (\text{IV.5})$$

$$= \Gamma \delta x \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \cancel{(\delta x)^2 \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x, t)} + g \delta x u(x, t) + \cancel{g (\delta x)^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)} + i(x, t) + \delta x \frac{\partial i}{\partial x}(x, t) \quad (\text{IV.6})$$

✧ En simplifiant les termes d'ordre 2 ci-dessus puis les $i(x, t)$ de chaque côté, nous arrivons à l'équation de couplage après avoir divisé par δx

$$\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) = -g u(x, t) - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad (\text{IV.7})$$

✧ Pour trouver cette équation de couplage, il était aussi possible de faire apparaître des taux d'accroissement, comme précédemment dans le chapitre, et de faire tendre δx vers 0.

✧ Nous pouvons déjà remarquer que les équations de couplage

→ se ressemblent ;

→ ne sont pas identiques à celles obtenues conduisant à l'équation de D'ALEMBERT.

IV.1.iii – équation de propagation

✧ La technique pour obtenir les équations « de propagation » est la même que précédemment : faire apparaître une dérivée croisée de deux manières différentes et les éгалer.

★ équation en $u(x, t)$

✧ Puisque nous cherchons une équation en $u(x, t)$, il faut éliminer $i(x, t)$.

✧ Calculons $\frac{\partial(\text{IV.3})}{\partial x}$ et $\frac{\partial(\text{IV.3})}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -r \frac{\partial i}{\partial x}(x, t) - \Lambda \underbrace{\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}(x, t)} \quad \text{et} \quad \underbrace{\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}(x, t)} = -g \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad (\text{IV.8})$$

✧ Le théorème de SCHWARZ nous assure que les deux termes dans les accolades sont les mêmes et ainsi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -r \frac{\partial i}{\partial x}(x, t) + \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \Lambda g \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad (\text{IV.9})$$

✧ Nous pouvons isoler $\frac{\partial i}{\partial x}(x,t)$ de (IV.7) et ainsi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -r \left(-\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - g u(x,t) \right) + \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \Lambda g \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \quad (\text{IV.10})$$

✧ Et finalement nous avons l'équation de « propagation »

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + (\Lambda g + \Gamma r) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + r g u(x,t) \quad (\text{IV.11})$$

★ équation en $i(x,t)$

✧ Faisons de même pour l'équation en $u(x,t)$.

✧ La dérivée par rapport à t de (IV.3) donne

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}}(x,t) = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t) - r \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) \quad (\text{IV.12})$$

✧ La dérivée par rapport à x de (IV.7) donne

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t) = -\Gamma \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}}(x,t) - g \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad (\text{IV.13})$$

✧ Comme les dérivées croisées sont égales, cela conduit à

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t) = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t) + \Lambda r \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) - g \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad (\text{IV.14})$$

✧ Puis en remplaçant $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ grâce à (IV.3) nous obtenons l'équation de « propagation »

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t) = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t) + (\Lambda g + \Gamma r) \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) + r g i(x,t) \quad (\text{IV.15})$$

★ interprétation

✧ La première chose à noter est que ni $u(x,t)$ ni $i(x,t)$ ne vérifient des équations de D'ALEMBERT.

✧ Dans ces conditions, parler de propagation ne peut être qu'approximatif.

✧ Nous continuerons malgré tout à parler de propagation pour insister sur le fait que dans le cas idéal ($r = 0$ et $g = 0$) nous retrouvons une équation de D'ALEMBERT et c'est pourquoi nous noterons l'équation sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + (\Lambda g + \Gamma r) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + r g u(x,t) \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{1}{\Lambda \Gamma} \quad (\text{IV.16})$$

✧ Insistons : $i(x,t)$ et $u(x,t)$ ne sont pas vraiment des ondes au sens littéral du terme.

✧ Toutefois si l'équation à laquelle ils obéissent est *presque* une équation d'onde alors nous pouvons penser que la solution sera *presque* une onde.

✧ Remarquons aussi que $i(x,t)$ et $u(x,t)$ vérifient la même équation de « propagation » ce qui n'est en rien obligatoire.

IV.2 – Solutions de l'équation de « propagation »

- ✧ Comme l'équation à laquelle nous sommes confrontés n'est pas une équation d'onde nous ne pouvons pas utiliser les solutions que nous avons vu précédemment.
- ✧ Toutefois il s'agit là d'une équation aux dérivées partielles **linéaire** et en tant que telle il existe une méthode générale pour trouver des solutions : la notation complexe.
- ✧ C'est une méthode que nous réutiliserons, même pour des équations qui ne sont pas des équations de D'ALEMBERT.
- ▲ Nous utiliserons la même technique pour l'équation de diffusion.

IV.2.i – passage en complexe

★ méthode

- ✧ L'idée consiste, puisque l'équation aux dérivées partielles est linéaire, à n'étudier qu'une seule des composantes de FOURIER en ω pour pouvoir après, par superposition, étudier ou obtenir une solution complète.
- ✧ Nous allons donc chercher

$$u(x,t) = \Re(\underline{u}(x,t)) \quad \text{avec} \quad \underline{u}(x,t) = \underline{U}(x) e^{j\omega t} \quad (\text{IV.17})$$

★ exemple pour $u(x,t)$

- ✧ Reprenons l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $u(x,t)$ et « passons-la » en complexe.

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2}(x,t) = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}(x,t) + (\Lambda g + \Gamma r) \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}(x,t) + r g \underline{u}(x,t) \quad (\text{IV.18})$$

- ✧ Les dérivées partielles par rapport au temps font apparaître du $j\omega$ d'où

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2}(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} \underline{U}(x) + j\omega (\Lambda g + \Gamma r) \underline{U}(x) + r g \underline{U}(x) \quad (\text{IV.19})$$

- ✧ Et en réorganisant

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2}(x) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - j\omega (\Lambda g + \Gamma r) - r g \right) \underline{U}(x) = 0 \quad (\text{IV.20})$$

- ✧ Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants. Nous la noterons

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2}(x) - (\underline{k})^2 \underline{U}(x) = 0 \quad (\text{IV.21})$$

- ✧ Les solutions s'écrivent alors sous la forme

$$\underline{U}(x) = \underline{\alpha} e^{-j\underline{k}x} \quad \text{avec} \quad \underline{k} \text{ complexe} \quad (\text{IV.22})$$

- ✧ La forme de l'exponentielle avec le « $-j$ » permet simplement d'obtenir une solution complète qui s'écrit sous une forme qui ressemble beaucoup à celle d'une OPPM

$$\underline{u}(x,t) = \underline{\alpha} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \quad (\text{IV.23})$$



Bon à retenir

Parce que, justement, \underline{k} est complexe, nous ne pouvons pas dire que cette onde est une OPPM!

Définition

Nous appellerons *Presque Onde Plane Progressive Monochromatique* (POPPM) une solution qui s'écrit formellement comme une OPPM mais avec un « vecteur d'onde » complexe.

- ✧ Rappelons qu'avec les définitions que nous avons adoptées pour « onde » et « OPPM », nous ne pouvons pas qualifier ces solutions ni d'onde ni d'OPPM ce qui fait qu'il n'est pas possible, en toute rigueur, de parler de vecteur d'onde.
- ✧ L'auteur tient aussi à faire remarquer que, à sa connaissance, le vocable POPPM ne se rencontre pas ailleurs dans la littérature.

★ bilan

- ✧ En fait, désormais, quand nous serons confrontés à une équation aux dérivées partielles **linéaire** qui n'est pas une équation de D'ALEMBERT nous pourrons tout de suite chercher des solutions sous la forme de POPPM

$$\underline{u}(x,t) = \underline{\alpha} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \quad (\text{IV.24})$$

- ✧ Il sera inutile de distinguer les cas POPPM \rightarrow et POPPM \leftarrow car le sens de propagation sera contenu dans le \underline{k} .

IV.2.ii – relation de dispersion

- ✧ Comme pour les OPPM « classiques » nous appellerons *relation de dispersion* l'équation reliant les aspects spatiaux et temporels, *i.e.* l'équation en \underline{k} et ω .
- ✧ Reprenons l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\underline{u}(x,t)$

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}(x,t) + (\Lambda g + \Gamma r) \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}(x,t) + r g \underline{u}(x,t) \quad (\text{IV.25})$$

- ✧ Les dérivées partielles par rapport à t et x donnent

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega \times \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} = -j\underline{k} \quad (\text{IV.26})$$

- ✧ Nous obtenons ainsi

$$-\underline{k}^2 \underline{u}(x,t) = -\frac{\omega^2}{c^2} \underline{u}(x,t) + j\omega (\Lambda g + \Gamma r) \underline{u}(x,t) + r g \underline{u}(x,t) \quad (\text{IV.27})$$

- ✧ Puis, en réorganisant

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega (\Lambda g + \Gamma r) - r g \quad (\text{IV.28})$$

- ✧ La solution en \underline{k} à ω fixé est un nombre complexe à partie imaginaire non nulle.

IV.2.iii – le vecteur d'onde complexe traduit l'atténuation et la dispersion

★ solution en notation réelle

- ✧ Sans résoudre explicitement l'équation en \underline{k} provenant de la relation de dispersion, nous pouvons écrire la solution sous la forme

$$\underline{k} = k'(\omega) + j k''(\omega) \quad \text{avec} \quad k'(\omega) = \Re(\underline{k}) \quad \text{et} \quad k''(\omega) = \Im(\underline{k}) \quad (\text{IV.29})$$

- ✧ L'intérêt de cette notation est que k' et k'' sont des nombres réels.

- ✧ Reprenons l'expression de $\underline{u}(x,t)$ et cherchons la solution réelle $u(x,t)$.
 ✧ Commençons par remplacer \underline{k}

$$\underline{u}(x,t) = \underline{\alpha} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \rightsquigarrow \underline{u}(x,t) = \underline{\alpha} e^{j(\omega t - k'x - j k''x)} \quad (\text{IV.30})$$

- ✧ En développant l'exponentielle nous obtenons

$$\underline{u}(x,t) = \underline{\alpha} e^{j(\omega t - k'x)} e^{k''x} \quad (\text{IV.31})$$

- ✧ Puis en notant $\underline{\alpha} = A e^{j\varphi}$ nous arrivons à

$$\underline{u}(x,t) = A e^{j(\omega t - k'x + \varphi)} e^{k''x} \quad (\text{IV.32})$$

- ✧ Il ne reste plus qu'à prendre la partie réelle

$$u(x,t) = A e^{k''x} \cos(\omega t - k'x + \varphi) \quad (\text{IV.33})$$

- ✧ Nous pouvons tout de suite constater qu'effectivement, ce n'est pas une OPPM, puisque nous ne pouvons pas réécrire la solution sous la forme $f(\omega t - kx)$;

★ dispersion et atténuation

- ✧ Dans la solution, nous voyons toutefois apparaître un terme en $\cos(\omega t - k'x + \varphi)$ qui est clairement un terme propagatif, *i.e.* un terme correspondant à « quelque chose » qui se propage à la célérité $\frac{\omega}{k'}$.



Définition

La *vitesse de phase* est la célérité associée au terme de phase, *i.e.* au terme en $\cos()$.



Loi

Dans le cas d'une POPPM en $e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ avec $\underline{k} = k' + j k''$ la vitesse de phase s'écrit

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k})}$$



Définition

La *dispersion* est associée à une propagation telle que la vitesse de phase v_φ dépende de la pulsation ω .



Loi

Il n'y a pas de dispersion dans un milieu obéissant à l'équation de D'ALEMBERT.

- ✧ En effet

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c = C^{\text{te}} \quad (\text{IV.34})$$



Définition

L'*atténuation* est le fait que l'amplitude d'une « onde » diminue avec la propagation.



Définition

L'*absorption* est le fait qu'une « onde » cède de l'énergie au milieu dans lequel elle se propage.

- ✧ Nous comprenons assez aisément pourquoi « absorption » implique atténuation, mais ne faisons pas d'amalgame : il y a des cas pour lesquels il y a atténuation sans absorption comme par exemple la chaîne de pendules simples obéissant à l'équation de KLEIN - GORDON (cf. TD)

★ milieu passif ou actif

Définition

Un milieu est dit :

- *passif* s'il ne peut **que** absorber de l'énergie à l'onde ;
- *actif* s'il a été conçu pour augmenter l'énergie d'une onde (cas du LASER).

- ✧ La quasi-totalité des milieux naturels sont des milieux passifs.
 ✧ Un milieu actif très connu : le LASER.
 ✧ En pratique, lorsque nous serons confrontés à un milieu il sera aisé de voir s'il est actif ou passif. Pour être actif, il faut **obligatoirement** une source d'énergie « autre ».
 ✧ Ici le câble coaxial étudié est passif. Reprenons la solution en notation réelle.

$$u(x,t) = A e^{k'' x} \cos(\omega t - k' x + \varphi) \quad (\text{IV.35})$$

- ✧ Il y a deux cas possibles :

→ soit il s'agit d'une POPPM \rightarrow qui va vers les $+\vec{u}_x$ ($k' > 0$) et alors nous **devons** avoir

$$u(x,t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \rightsquigarrow \quad k'' < 0 \quad (\text{IV.36})$$

→ soit il s'agit d'une POPPM \leftarrow qui va vers les $-\vec{u}_x$ ($k' < 0$) et alors nous **devons** avoir

$$u(x,t) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \quad \rightsquigarrow \quad k'' > 0 \quad (\text{IV.37})$$

- ✧ Finalement, **ici**, avec les conventions adoptées, la passivité et donc l'atténuation du milieu se traduit par $k' k'' < 0$.



Attention !

Il ne faut surtout pas retenir ce résultat car il dépend de la manière dont la POPPM est écrite.

IV.2.iv – câble peu résistif

★ équation de dispersion – simplification

- ✧ Nous allons considérer que r et g sont suffisamment faibles pour pouvoir faire des développements limités.
 ✧ Reprenons l'équation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega(r\Gamma + g\Lambda) - rg \quad (\text{IV.38})$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} - j \underbrace{\Lambda\Gamma}_{=1/c^2} \left(\frac{r}{\Lambda} + \frac{g}{\Gamma} \right) \omega - \Lambda\Gamma \times \frac{rg}{\Lambda\Gamma} \quad (\text{IV.39})$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{j}{\omega} \left(\frac{r}{\Lambda} + \frac{g}{\Gamma} \right) - \underbrace{\frac{rg}{\Lambda\Gamma\omega^2}}_{\text{ordre 2}} \right) \quad (\text{IV.40})$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{j}{\omega} \left(\frac{r}{\Lambda} + \frac{g}{\Gamma} \right) \right) \quad (\text{IV.41})$$

✧ En prenant la puissance 1/2 nous pouvons trouver \underline{k}

$$\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{j}{\omega} \left(\frac{r}{\Lambda} + \frac{g}{\Gamma} \right) \right)^{1/2} \quad (\text{IV.42})$$

$$\stackrel{\text{DL}}{=} \pm \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{j}{2\omega} \left(\frac{r}{\Lambda} + \frac{g}{\Gamma} \right) \right) \quad (\text{IV.43})$$

✧ Nous obtenons ainsi

$$k' = \Re(\underline{k}) \quad \rightsquigarrow \quad k' = \varepsilon \frac{\omega}{c} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (\text{IV.44})$$

✧ Puis

$$k'' = \Im(\underline{k}) \quad \rightsquigarrow \quad k'' = -\varepsilon \frac{1}{2\omega} \left(\frac{r}{\Lambda} + \frac{g}{\Gamma} \right) \quad (\text{IV.45})$$

★ interprétation

✧ Nous retrouvons bien le fait que $k' k'' < 0$ ce qui montre bien que le câble est un milieu atténuatif.

✧ Nous constatons aussi que

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = c = C^{\text{te}} \quad (\text{IV.46})$$

✧ Autrement dit nous voyons que le câble coaxial peu résistif n'est *pas* dispersif.

IV.2.v – câble coaxial bien choisi

✧ Reprenons l'équation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - j \left(\frac{r}{\omega\Lambda} + \frac{g}{\omega\Gamma} \right) - \frac{rg}{\Lambda\Gamma\omega^2} \right) \quad (\text{IV.47})$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - j \frac{r}{\omega\Lambda} \right) \left(1 - j \frac{g}{\omega\Gamma} \right) \quad (\text{IV.48})$$

✧ Faisons en sorte, en fabriquant le câble, d'avoir $\frac{r}{\Lambda} = \frac{g}{\Gamma}$. Alors

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - j \frac{r}{\omega \Lambda} \right)^2 \quad (\text{IV.49})$$

✧ Ce qui nous amène immédiatement à

$$\underline{k} = \varepsilon \frac{\omega}{c} \left(1 - j \frac{r}{\omega \Lambda} \right) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (\text{IV.50})$$

✧ Nous avons donc

$$k' = \text{Re}(\underline{k}) = \varepsilon \frac{\omega}{c} \quad \rightsquigarrow \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = c \quad (\text{IV.51})$$

✧ Dans ce cas également, le câble coaxial n'est pas dispersif ! Et, cette fois, c'est plutôt une surprise puisque le câble peut être « très » atténuatif.

✧ Nous constatons aussi que nous avons toujours $k' k'' < 0$, typique des milieux atténuatifs (avec nos conventions).

IV.3 – Paquet d'ondes

✧ Nous allons maintenant regarder ce qui se passe lorsque plusieurs ondes type OPPM se superposent.

✧ Pour cela, nous allons considérer que le milieu est linéaire et que ce qui se propage sont des OPPM, *i.e.* que le milieu est non atténuatif ou suffisamment peu pour pouvoir négliger l'atténuation.

▲ Un paquet d'ondes n'est autre que ce que nous appelons « train d'ondes » en optique.

IV.3.i – superposition discrète d'OPPM

★ 2 OPPM

✧ Commençons par le cas le plus simple de propagation qui ne soit pas *une* onde : la superposition de deux ondes.

🌀 superposition

✧ Considérons deux ondes de même amplitude avec des phases nulles à l'origine, histoire d'alléger les notations

$$u_1(x, t) = U_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{et} \quad u_2(x, t) = U_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad (\text{IV.52})$$

✧ La superposition de ces deux ondes donne

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) \quad (\text{IV.53})$$

$$= U_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + U_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad (\text{IV.54})$$

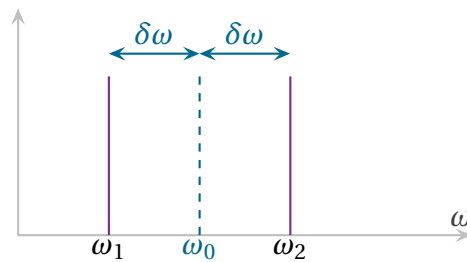
$$= 2 U_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \times \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \quad (\text{IV.55})$$

✧ Notons

$$\omega_0 \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \delta\omega \quad (\text{IV.56})$$

✧ Nous avons ainsi

$$\omega_1 = \omega_0 + \delta\omega \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 - \delta\omega \quad (\text{IV.57})$$



⇨ En ce qui concerne le vecteur d'onde

$$k_1 = k(\omega_1) \quad (\text{IV.58})$$

$$\stackrel{\text{DL}}{\equiv} k(\omega_0) + \delta\omega \times \frac{dk}{d\omega}(\omega_0) \quad (\text{IV.59})$$

$$\stackrel{\text{not}}{\equiv} k_0 + \delta k \quad (\text{IV.60})$$

⇨ De même nous trouvons

$$k_2 = k_0 - \delta k \quad (\text{IV.61})$$

⇨ Finalement la superposition se réécrit

$$u(x,t) = 2 U_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x) \times \cos(\delta\omega t - \delta k x) \quad (\text{IV.62})$$

⇨ En fixant $x = x_0$ nous obtenons

$$u(x_0,t) = 2 U_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \times \cos(\delta\omega t - \psi_0) \quad \text{avec} \quad \varphi_0 = k_0 x_0 \quad \text{et} \quad \psi_0 = \delta k x_0 \quad (\text{IV.63})$$

⇨ Nous voyons alors deux termes :

- $\cos(\omega_0 t - \varphi_0)$ est un terme d'évolution rapide, nous l'associerons aux oscillations de l'onde ;
- $\cos(\delta\omega t - \psi_0)$ est un terme d'évolution lente, nous l'associerons à l'amplitude.

⇨ En chaque point quelconque de l'espace, nous avons donc une onde qui passe mais dont l'amplitude varie.

🌀 enveloppe

⇨ Compte-tenu de l'interprétation précédente, nous pouvons réécrire $u(x,t)$ sous la forme

$$u(x,t) = U(x,t) \times \cos(\omega_0 t - k_0 x) \quad \text{avec} \quad U(x,t) = 2 U_0 \cos(\delta\omega t - \delta k x) \quad (\text{IV.64})$$

⇨ Nous avons donc affaire à une onde en $\cos(\omega_0 t - k_0 x)$ dont l'amplitude $U(x,t) = 2 U_0 \cos(\delta\omega t - \delta k x)$ est elle-même propagative à la célérité

$$\frac{\delta\omega}{\delta k} \stackrel{\text{a priori}}{\neq} \frac{\omega_0}{k_0} \quad (\text{IV.65})$$

Montrer la simulation de la superposition de deux ondes.

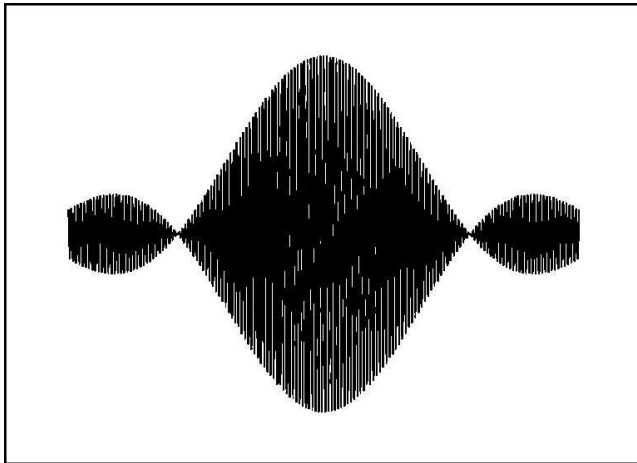
★ **plein d’OPPM**

⇨ Considérons une « onde » formée par la superposition de n OPPM

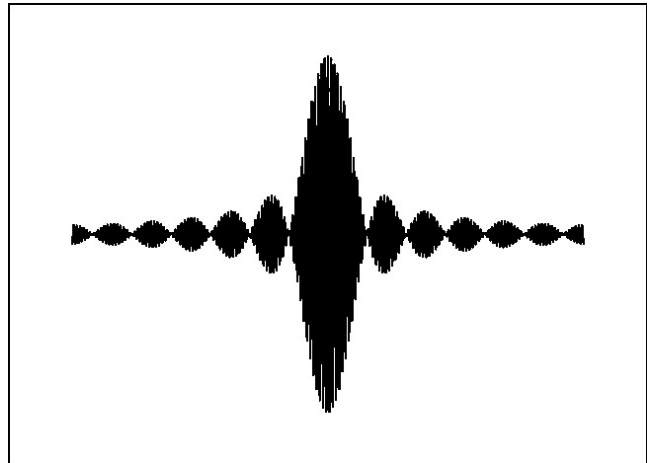
$$u(x,t) = \sum_n U_0 \cos(\omega_n t - k_n x) \quad \text{avec} \quad \omega_n = \omega_0 + n \delta\omega \quad \text{(IV.66)}$$

⇨ Regardons ce que cela donne pour $n = 5$ et $n = 20$ à t fixé

Graphique 23



Graphique 24



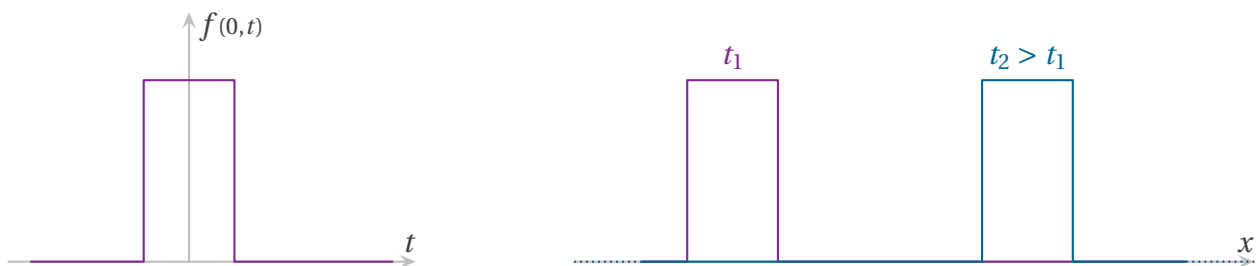
⇨ Nous pouvons constater que plus il y a d’ondes qui se superposent, plus l’enveloppe centrale s’affine.
 ⇨ Il s’agit là d’un résultat très fort et très important.

IV.3.ii – superposition continue d’OPPM

★ **onde carrée**

🕒 **description**

⇨ Imaginons une onde à profil carré.



⇨ En généralisant à des pulsations négatives pour des raisons de praticité théorique, nous pouvons écrire que l’onde ci-dessus n’est autre que la superposition d’une infinité d’ondes

$$\underline{y}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega) e^{j(\omega t - k(\omega)x)} d\omega \quad \text{(IV.67)}$$

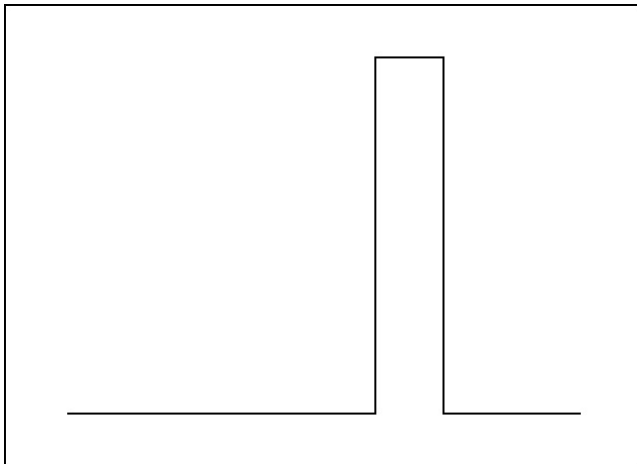
⇨ L’amplitude complexe $\underline{A}(\omega)$ de chaque onde se calcule à l’aide de la *transformée de FOURIER*

$$\underline{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y(0,t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{(IV.68)}$$

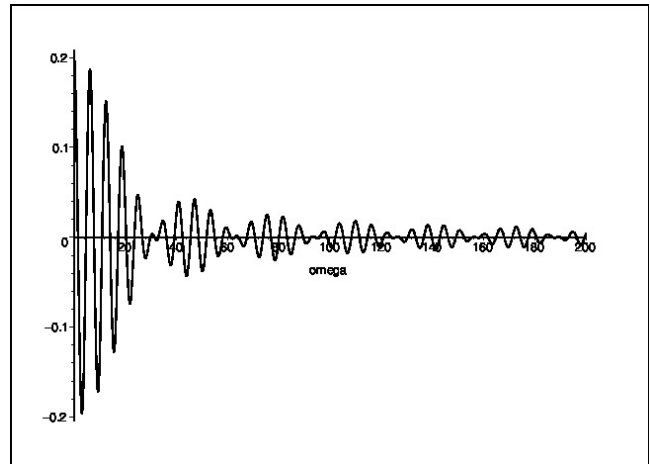
spectre

✧ Regardons une onde rectangulaire et son spectre associé limité à $\omega > 0$. Notons au passage qu’une amplitude négative signifie un déphasage de π .

Graphique 25

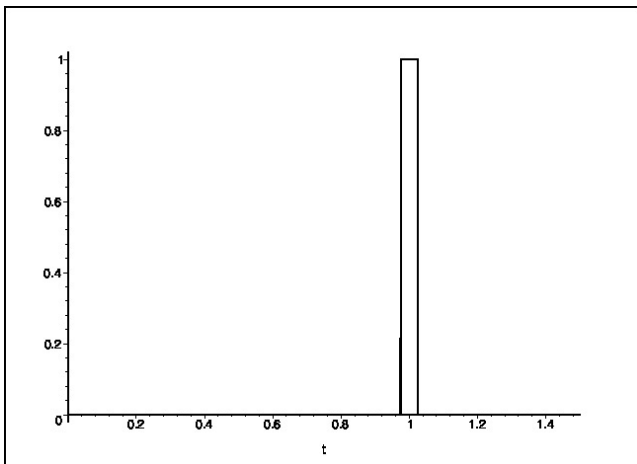


Graphique 26

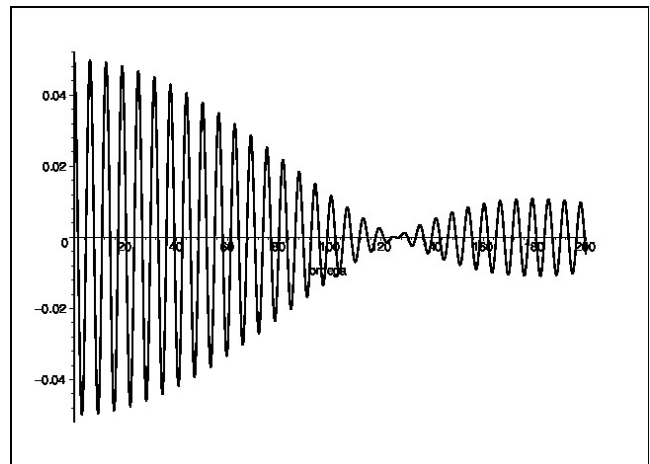


✧ Regardons maintenant une onde ayant le même profil mais plus « fine » temporellement.

Graphique 27



Graphique 28



✧ Nous pouvons constater que le spectre est plus riche puisque l’amplitude est non négligeable pour des pulsations plus élevées.

★ onde gaussienne

✧ Considérons maintenant une onde de profil gaussien.

Définition

Une fonction est dite *gaussienne* si elle est de la forme

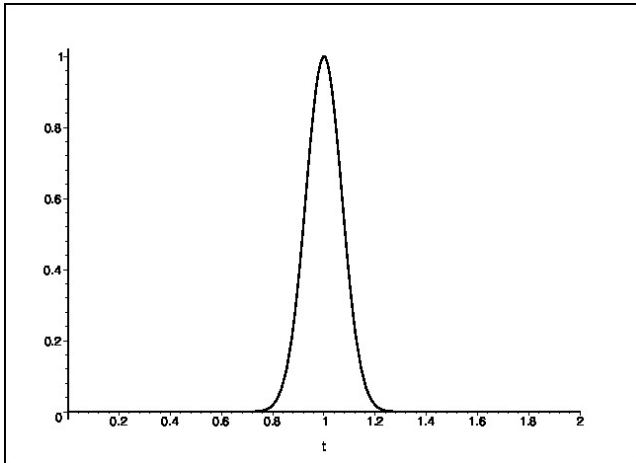
$$e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

où :

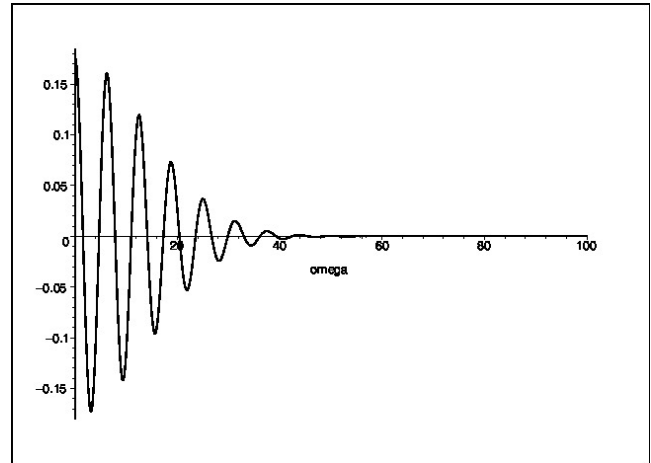
- x_0 est la valeur moyenne ;
- σ est l’écart-type.

✧ Sur les représentations qui suivent nous pouvons aussi constater que plus l’onde est tassée temporellement, plus son spectre est large.

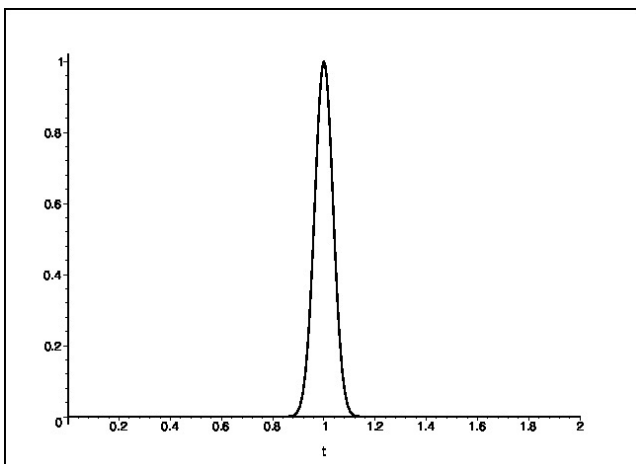
Graphique 29



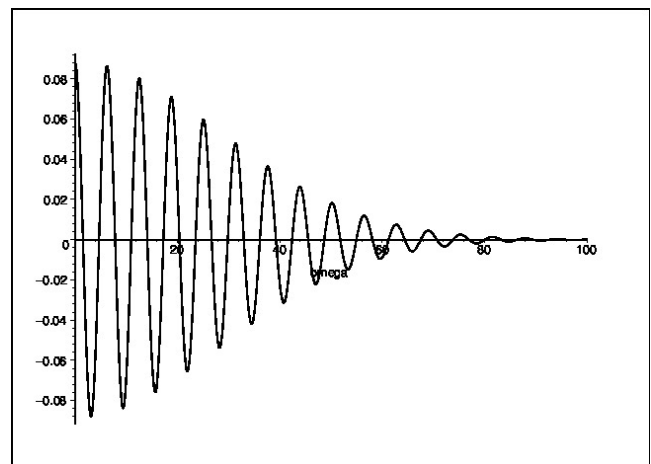
Graphique 30



Graphique 31



Graphique 32



✧ Nous admettons le résultat général suivant,



Loi

Entre une onde d’extension temporelle δt et son spectre d’extension $\delta \omega$ nous pouvons écrire

$$\delta t \times \delta \omega \sim 1$$

IV.3.iii – évolution temporelle

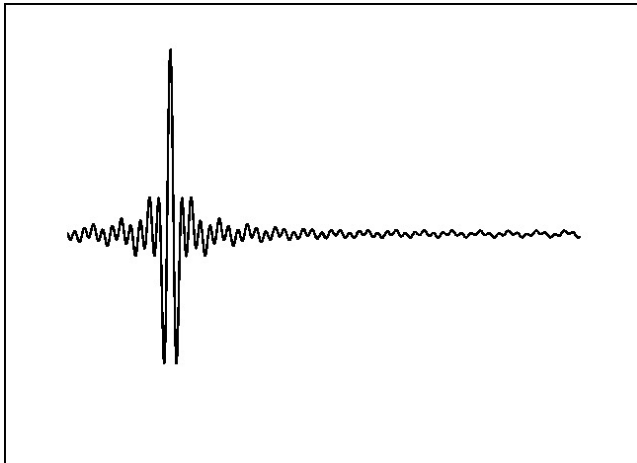
★ **observation**

✧ Regardons la manière dont évolue un paquet d’ondes dans un milieu non dispersif.

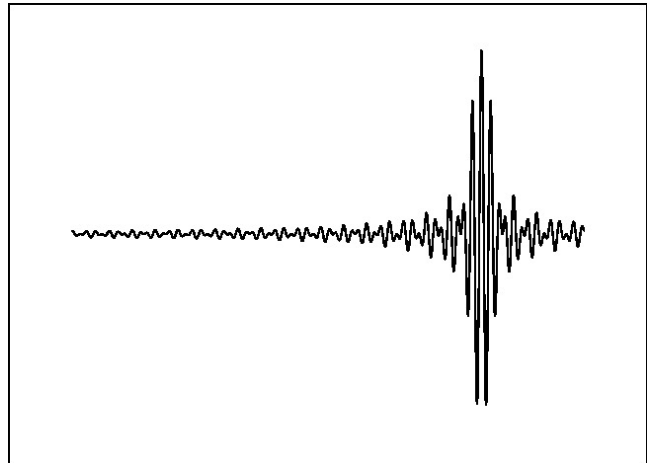
Montrer l’animations du paquet d’onde dans le milieu non dispersif.

✧ Comme chaque onde élémentaire a la même célérité, nous avons l’impression que tout se déplace d’un bloc.

Graphique 33



Graphique 34

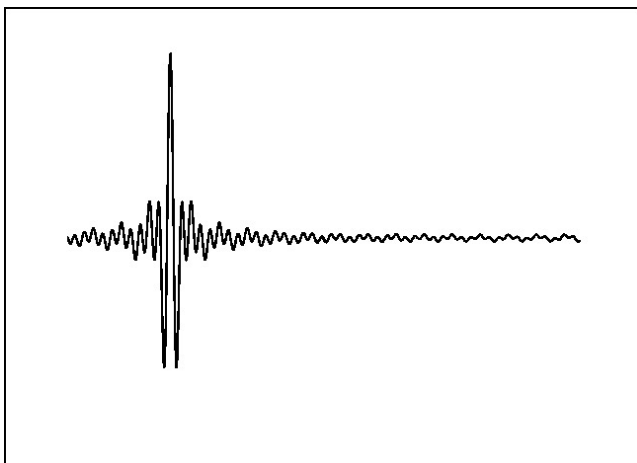


⇨ Dans le cas dispersif, en revanche, c’est différent.

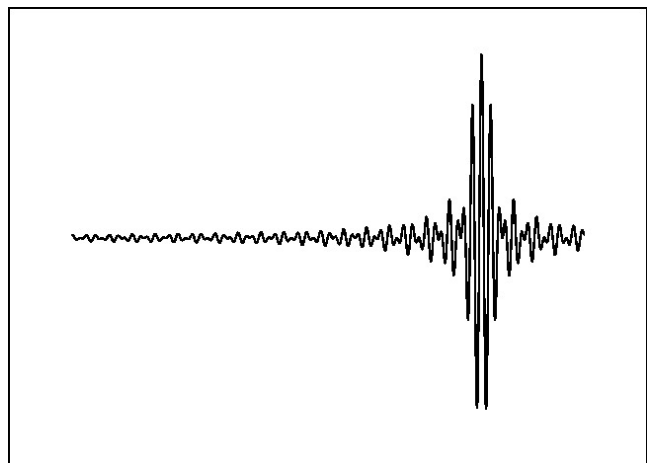
Montrer l’animations du paquet d’onde dans le milieu dispersif.

⇨ Ici, alors que l’ensemble avance, nous voyons que le paquet se déforme et s’étale. Aucune énergie n’est perdue ! Il n’y a **pas** d’atténuation mais juste un « étalement » de l’onde.

Graphique 33



Graphique 34



★ **vitesse de groupe**

⇨ En reprenant le résultat pour deux ondes, nous pouvons constater que l’enveloppe se déplace à la célérité

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \tag{IV.69}$$

⇨ Nous admettrons (provisoirement) la généralisation ⁷.

25

Loi

Pour un paquet d’ondes, *la vitesse de groupe* est la vitesse de l’enveloppe et s’écrit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{ou} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk'}$$

⇨ En pratique, nous calculerons :

7. Nous montrerons ce résultat général dans le chapitre de la mécanique quantique, mécanique que nous aborderons sous l’angle ondulatoire.

- $k'(\omega)$ avec la relation de dispersion ;
- $\frac{dk'}{d\omega}$;
- $v_g = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}}$.

Compétences du chapitre

Les compétences à vocation essentiellement expérimentale sont indiquées en italique.

Première année

Signaux – 2. Propagation d'un signal

- ✧ Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle linéaire non dispersive. Célérité, retard temporel.
 - 1 Écrire les signaux sous la forme $f(x - ct)$ ou $g(x + ct)$. [28,52]
 - 2 Écrire les signaux sous la forme $f(t - x/c)$ ou $g(t + x/c)$. [52]
 - 3 Prévoir dans le cas d'une onde progressive pure l'évolution temporelle à position fixée, et prévoir la forme à différents instants. [29]
- ✧ Onde progressive sinusoïdale : déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.
 - 4 Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la célérité. [33]
 - 5 *Mesurer la célérité, la longueur d'onde et le déphasage dû à la propagation d'un phénomène ondulatoire.*
- ✧ Interférences entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence.
 - 6 *Mettre en oeuvre un dispositif expérimental pour visualiser le phénomène d'interférences de deux ondes.*
 - 7 Utiliser la représentation de FRESNEL pour déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage.
 - 8 Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives.
- ✧ Battements.
 - 9 *Déterminer une différence relative de fréquence à partir d'enregistrements de battements ou d'observation sensorielle directe.*
- ✧ Ondes stationnaires mécaniques.
 - 10 *Décrire une onde stationnaire observée par stroboscopie sur la corde de MELDE.*
 - 11 Caractériser une onde stationnaire par l'existence de nœuds et de ventres. [57]
 - 12 Exprimer les fréquences des modes propres connaissant la célérité et la longueur de la corde. [57,58]
 - 13 Savoir qu'une vibration quelconque d'une corde accrochée entre deux extrémités fixes se décompose en modes propres. [60]
 - 14 Faire le lien avec le vocabulaire de la musique et savoir que le spectre émis par un instrument est en réalité plus complexe.
 - 15 *Mettre en oeuvre un dispositif expérimental permettant d'analyser le spectre du signal acoustique produit par une corde vibrante.*

Deuxième année

Physique des ondes

★ 1. Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de D'ALEMBERT

🕒 1.1. Ondes mécaniques unidimensionnelles dans les solides déformables

✧ Équation d'onde pour des ondes transversales sur une corde vibrante infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements transverses.

16 Établir l'équation d'onde en utilisant un système infinitésimal. [25]

✧ Modèle microscopique de solide élastique unidimensionnel (chaîne d'atomes élastiquement liés) : loi de HOOKE.

17 Relier la raideur des ressorts fictifs à l'énergie de liaison et évaluer l'ordre de grandeur du module d'YOUNG. [24]

✧ Ondes acoustiques longitudinales dans une tige solide dans l'approximation des milieux continus.

18 Établir l'équation d'onde en utilisant un système infinitésimal. [21]

✧ Équation de D'ALEMBERT ; célérité.

19 Reconnaître une équation de D'ALEMBERT. [20]

20 Associer qualitativement la célérité d'ondes mécaniques, la raideur et l'inertie du milieu support. [22,28]

✧ Exemples de solutions de l'équation de D'ALEMBERT :

→ ondes progressives harmoniques

→ ondes stationnaires harmoniques

21 Différencier une onde stationnaire d'une onde progressive par la forme de leur représentation réelle. [28,35,35]

22 Utiliser qualitativement l'analyse de FOURIER pour décrire une onde non harmonique. [60,72]

✧ Applications :

→ régime libre : modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités

→ régime forcé : résonances sur la corde de MELDE.

23 Décrire les modes propres. [57]

24 En négligeant l'amortissement, associer mode propre et résonance en régime forcé. [59]

★ 2. Phénomènes de propagation linéaires

🕒 2.2 Paquets d'ondes

✧ Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non absorbant et faiblement dispersif : vitesse de phase et vitesse de groupe.

25 Déterminer la vitesse de groupe à partir de la relation de dispersion. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes. [75]