

Mécanique

Chapitre 4

Description de fluides en mouvement

Table des matières

Biographies succinctes	5
Introduction	7
I Cinématique	8
I-1 Modéliser un fluide	8
I-1·i définition	8
I-1·ii un milieu continu	8
libre parcours moyen	9
propriété d'un milieu continu	10
I-2 Particule de fluide	11
I-2·i échelle d'observation	11
échelle microscopique	11
échelle macroscopique	11
échelle mésoscopique	11
I-2·ii objet d'étude	12
la particule de fluide	12
caractéristique fondamentale	12
I-2·iii équilibre thermodynamique local	13
une hypothèse systématique	13
conséquences concrètes	13
I-3 Représenter un fluide en mouvement	13
I-3·i lignes de courant	13
I-3·ii lignes d'émission	14
I-3·iii trajectoires	15
I-3·iv cas stationnaire	16
I-3·v exemple simple de cas non stationnaire	16
situation	16
première phase	17
deuxième phase	17
I-4 Dérivée particulière	18
I-4·i approche en terme de champ de vitesse	18
voir un champ	18
le pour et le contre	18
I-4·ii dérivée particulière	18
résultat, notation	18
interprétation	19
démonstration	19
dérivée particulière d'une grandeur vectorielle	20
la dérivée particulière et la physique	22
I-5 Conservation de la masse	22
I-5·i vecteur densité de courant de masse	22
expression	22
démonstration	22
I-5·ii débits	24
il en existe plusieurs	24
exemples à utiliser directement	24
fluide incompressible	25

I-5-iii	équation locale de conservation de la masse, version 1D	26
	situation	26
	variation dans le temps	26
	échange à travers la surface	26
	production en volume	27
	rassemblement	27
I-5-iv	équation locale de conservation de la masse, version 3D	28
	énoncé	28
	démonstration	28
I-5-v	autre version de la conservation de la masse en 3D	30
	énoncé	30
	démonstration	30
I-6	Compressibilité et divergence	31
I-6-i	différents type de compressibilité	31
	fluide incompressible	31
	particule de fluide incompressible	31
	écoulement incompressible	32
	un caractère intrinsèque	33
I-6-ii	au niveau local : la divergence	33
	exemple	33
	de manière générale au niveau de la particule de fluide	34
	avec la conservation de la masse	35
II	Premiers écoulements	36
II-1	Rotation des particules de fluide et rotationnel	36
II-1-i	le rotationnel	36
	de manière générale au niveau de la particule de fluide	36
II-1-ii	pause rotationnel	37
	relation fondamentale	37
	interprétation	37
	comment ça marche?	37
	expression en coordonnées cartésiennes	39
	avec nabla	39
	c'est un opérateur différentiel linéaire	40
	cas du rotationnel nul	40
	rotationnel et divergence	40
II-1-iii	lien rotationnel – vecteur rotation de la particule de fluide	41
	exemple	41
	vecteur tourbillon	42
	autre version de l'accélération particulaire	42
II-2	Conditions aux limites naturelles	43
II-2-i	où sont les limites?	43
	milieux confinés	43
	milieux non confinés	43
II-2-ii	loin d'un obstacle	43
II-2-iii	à la surface d'une paroi, d'un obstacle	44
II-2-iv	fluides non miscibles	44
II-3	Écoulements tourbillonnaires	45
II-3-i	origine physique	45
II-3-ii	base de l'analogie	45

II-3·iii	modèle de la tornade	46
	présentation	46
	analogie et résultats	47
	transposition et vision graphique	47
II-4	Écoulements potentiels	48
II-4·i	condition d'obtention	48
	une autre analogie	48
	méthodes de résolution	49
II-4·ii	exemples expérimentaux	49
II-4·iii	un exemple détaillé	49
	situation	49
	analyse du problème	50
	conditions aux limites	51
	interprétation	52
II-5	Morale	53
III	Approche phénoménologique des écoulements	54
III-1	Constatations expérimentales	54
III-1·i	mélanger des liquides	54
III-1·ii	nombre de REYNOLDS	54
	viscosité	55
	calcul du nombre de REYNOLDS	55
	exemples numériques	56
III-2	Force exercée par un fluide	56
III-2·i	ça dépend du nombre de REYNOLDS	56
	le fluide s'entraîne lui-même	56
	le fluide exerce des forces sur les objets	57
III-2·ii	portance et traînée	57
	deux forces de même nature	57
	coefficients de traînée et de portance	58
III-3	Force de traînée	59
III-3·i	expérience type	59
III-3·ii	résultat	59
III-3·iii	frottements fluides	60
	à faible vitesse	61
	à grande vitesse	61
III-4	Couche limite	61
III-4·i	kesako?	62
III-4·ii	couche limite laminaire	62
III-4·iii	couche limite turbulente	63
III-5	Effets célèbres	63
III-5·i	allées de BÉNARD – VON KARMAN	63
III-5·ii	pont de Takoma	64
	Compétences du chapitre	65

Biographies succinctes



Leonhard EULER

(1707 Bâle – 1783 Saint-Pétersbourg)

Fils de pasteur, Leonhard ne rencontre que peu de difficulté scolaire puisqu'il rentre à l'université de Bâle à 14 ans et publie son premier article à 19 ans. Aidé par son professeur, Johann BERNOULLI dont le fils n'est autre que Daniel, il rejoindra ce dernier à l'université de Saint-Pétersbourg pour y effectuer l'essentiel de sa carrière (il passera quelques années à Berlin aussi). Leonhard est à la fois un grand physicien et un des plus grands mathématiciens de l'histoire. Il travaillera entre autre sur l'optique, l'hydrodynamique et la mécanique.



Joseph Louis LAGRANGE

(1736 Turin – 1813 Paris)

D'origine française, Joseph était destiné à travailler au service administratif des ducs de Savoie mais il se détourne de ses études de droit au profit des mathématiques. Joseph écrit un premier article à 17 ans et enseigne dans une école militaire dès 19 ans. Il se fait connaître d'EULER et de d'ALEMBERT et remplacera le premier à Berlin grâce à l'intervention du second. Il enseignera à l'école normale supérieure de Paris et à l'école Polytechnique à partir de 1795. Il est surtout connu pour son traité de *Mécanique analytique*.



George STOKES

(1819 Sligo, Irlande – 1903 Cambridge)

George fait ses études à Cambridge où il obtient son diplôme en 1841 pour y devenir professeur de mathématique en 1849. Son activité de recherche se concentre d'abord sur l'hydrodynamique des fluides visqueux. Il s'intéresse après à la propagation du son et de la lumière. Il explique le phénomène de fluorescence vers 1852. Il est à noter que sa productivité de chercheur a notablement diminué à partir de 1857, année de son mariage.



Osborne REYNOLDS

(1842 Belfast – 1912 Watchet, Grande-Bretagne)

Le père d'Osborne fut, d'après ce dernier, son premier professeur. Directeur d'école et prêtre, il a déposé de nombreux brevets pour améliorer des machines agricoles. Osborne fait ses études à Cambridge et devient quelques temps après l'un des premiers « professeurs en ingénierie » dans une nouvelle école qui deviendra l'université de Manchester. En parallèle de ses cours, il fait des recherches en mécanique des fluides et c'est en 1883 qu'il publie un article dans lequel il introduit le nombre qui porte son nom.

Theodor VON KARMAN

(1881 Budapest – Aachen 1963)



Fils d'un professeur d'université, Theodor suit des études d'ingénieur à Budapest. Il s'intéresse particulièrement à l'aérodynamique et travaille avec PRANDTL. Pendant la première guerre mondiale il travaille à Aachen sur des problèmes d'écoulement autour des ailes d'avion. Juif par sa mère, il fuit la seconde guerre et se réfugie aux États-Unis où il enseignera l'aéronautique, entre autre à Caltech. Après la fin de la guerre il servira d'expert pour l'aviation américaine puis pour l'OTAN.

Description de fluides en mouvement

Jusqu'à présent, en mécanique, nous nous étions intéressé aux corps non déformables, sauf éventuellement par des liaisons mécaniques. Or, une simple observation du monde qui nous entoure montre que de nombreux corps, en particulier les fluides, sont très déformables lors de leurs mouvements. La mécanique des fluides va donc être, par nature, très différente de ce que nous connaissons. En effet, il importe peu de savoir si le centre de masse de l'eau d'une piscine est ici ou là. En revanche, il est bien plus intéressant de se demander si elle va déborder lorsque quelqu'un plonge dedans.

Le chapitre qui suit va donc être essentiellement consacré à une première approche de la mécanique des fluides. Nous commencerons par définir ce qu'est un fluide, la manière de décrire, c'est ainsi que nous nous intéresserons de près à la *particule de fluide*. Dans une deuxième partie, sans avoir vu toutes les lois de la mécanique des fluides, nous pourrons *déjà* trouver et décrire des écoulements. Enfin, dans la dernière partie, nous ferons une approche phénoménologique d'écoulements réels.

I – Cinématique

I.1 – Modéliser un fluide

I.1.i – définition



Définition

Un *fluide* est un milieu continu déformable qui peut s'écouler.

- ✧ Quelques exemples de fluides « classiques » :
 - l'eau, l'huile, le savon, le miel ;
 - l'air, la « fumée » ;
 - ...
- ✧ Mais il existe aussi tout un tas d'autres fluides, bien moins classiques, mais néanmoins usuels :
 - dentifrice (qui ne s'écoule que lorsqu'il est pressé) ;
 - l'encre (qui doit s'écouler dans le stylo mais pas sur la feuille) ;
 - le mélange eau maïzena (qui se rigidifie lorsqu'il est maltraité) ;
 - la peinture (qui doit être liquide mais ne pas couler une fois au plafond) ;
 - les sables mouvants ;
 - ...
- ✧ Et puis il y a aussi tous ces matériaux qui peuvent être considérés, ou non, comme des fluides suivant l'échelle spatiale ou temporelle utilisée :
 - des petits graviers (considéré comme un fluide pour la manutention et comme des solides à l'échelle d'une fourmi) ;
 - le manteau terrestre (indubitablement solide pour nous, liquide pour les géophysiciens).
- ✧ Dans toute la suite, et sauf précision contraire, nous parlerons uniquement des fluides usuels, ceux qui ont un comportement « normal » comme l'eau ou l'air.



Définition

Les fluides usuels sont appelés *fluides newtoniens*.

- ✧ Nous préciserons dans le chapitre suivant ce qu'est un fluide newtonien.

I.1.ii – un milieu continu

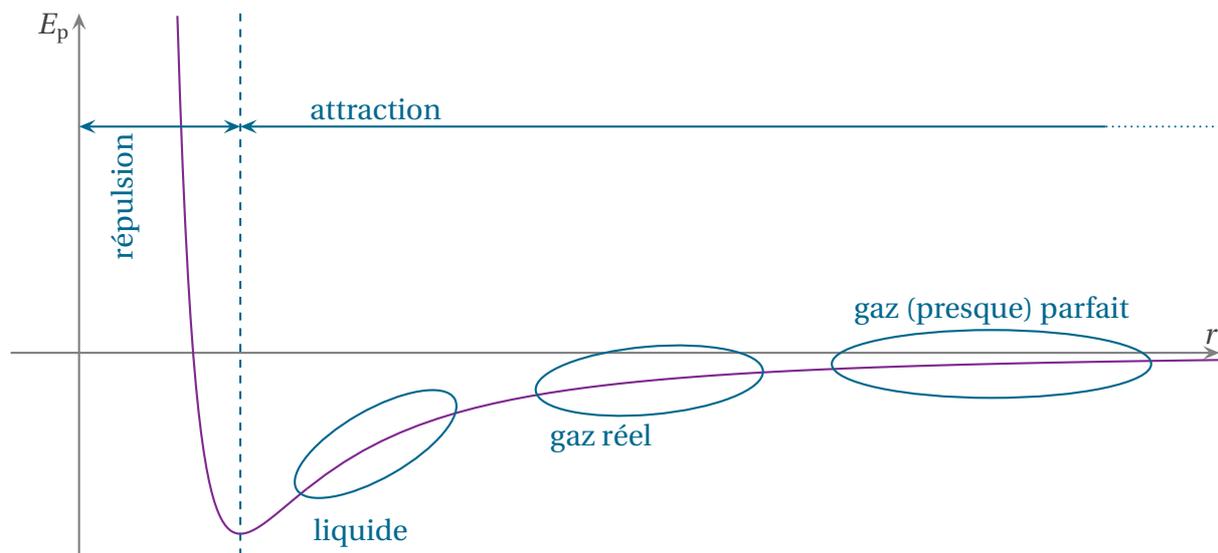
- ✧ Un phénomène remarquable est le suivant.



Bon à retenir

À l'échelle atomique, les molécules s'attirent.

- ✧ En effet, si nous représentons l'allure de l'énergie potentielle d'interaction entre deux molécules en fonction de leur distance, cela donne quelque chose comme



- ✧ Nous pouvons voir que lorsque la distance moyenne est grande (cas des gaz), la force entre deux molécules est peu attractive.
- ✧ En revanche, pour les liquides, la force est très attractive.
- ✧ Une preuve de l'aspect « grégaire » des molécules au sein d'un liquide est le calcul de la pression cinétique.

$$P_{\text{cin}} = \frac{1}{3} m n^* u^2 \quad \text{avec} \quad (\text{I.1})$$

- m la masse d'une molécule ;
- n^* la densité particulaire ;
- u la vitesse quadratique moyenne.

- ✧ Pour l'eau liquide ou l'eau gaz, m est le même.
- ✧ Pour l'eau liquide et l'eau gaz, la vitesse quadratique est la même car elle est liée à la température.
- ✧ En revanche, pour un liquide, nous avons environ $n_{\text{liquide}}^* \sim 1000 n_{\text{gaz}}^*$. Cela implique, pour des températures et pressions usuelles

$$P_{\text{cin,gaz}} \sim 1 \text{ bar} \quad \text{et} \quad P_{\text{cin,liq}} \sim 1000 \text{ bar} \quad (\text{I.2})$$

- ✧ Autrement dit, de l'eau dans un simple verre de cantine devrait exercer une pression de 1000 bar sur celui-ci... qui ne pourrait bien évidemment pas le supporter.
- ✧ Tel n'est, en fait, pas le cas car les molécules sont *freinées* par l'attraction de leurs congénères¹.

★ libre parcours moyen



Définition

Le *libre parcours moyen* (l.p.m.), noté $\bar{\ell}$, est la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux « chocs » (ou interaction) successifs.

- ✧ Rappelons que l'agitation thermique implique que toutes les molécules vont tout le temps dans tous les sens.
- ✧ Pour un électron dans un métal, le libre parcours moyen est donné par la relation $\bar{\ell} = u \tau$ où τ est la durée entre deux « chocs » successifs (cf. modèle de DRÛDE) et u la vitesse quadratique moyenne donnée par la définition de la température.
- ✧ Nous trouvons, pour cet électron

1. Voir à ce propos, le chapitre 1 de thermodynamique de première année, programme 2002.

$$\bar{\ell} \sim 10^{-9} \text{ m} \quad (\text{I.3})$$

- ✧ Pour un fluide, le libre parcours moyen sera assimilé à la distance moyenne entre les particules.
 ✧ Ainsi, à 1 bar et 300 K

$$\bar{\ell}_{\text{gaz}} = \left(\frac{RT}{P \mathcal{N}_A} \right)^{1/3} \sim 3 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad (\text{I.4})$$

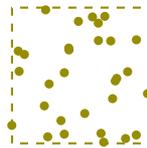
★ propriété d'un milieu continu



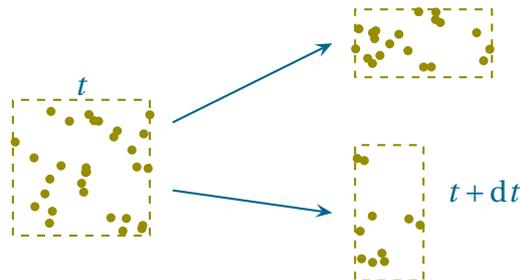
Définition

Un milieu est dit *continu* si toutes les particules du plus petit système définissable ont toutes un comportement similaire.

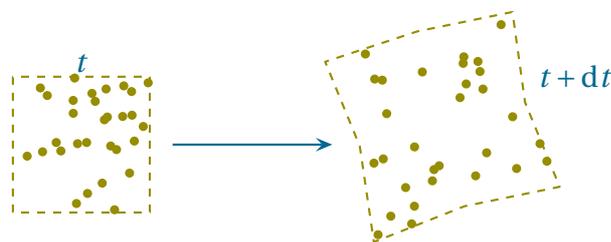
- ✧ Considérons ainsi un ensemble de particules initialement réparties dans un cube.



- ✧ Si, un instant après les particules se sont « séparées », nous ne pourrions pas qualifier de « continu » ce que nous étudions.



- ✧ En revanche, si les particules restent relativement groupées, le milieu sera dit « continu ».



- ✧ Comme nous savons que les particules évoluent à des échelles de l'ordre de $\bar{\ell}$, si nous regardons à cette échelle, nous constaterons de grandes différences entre les particules. En revanche, en regardant à des échelles plus grandes, les particules auront réalisé plusieurs (voire de très nombreuses) interactions et, donc, auront adopté un comportement *moyen*.



Bon à retenir

Pour pouvoir étudier un ensemble de particule comme un milieu continu, il faut le regarder à des échelles bien supérieures à $\bar{\ell}$.

I-2 – Particule de fluide

STOP Une *particule de fluide* n'est **pas** une des particules qui constituent le fluide.

✧ Souvent, dans la littérature, le vocable « particule fluide », plus ambigu, est utilisé en lieu et place de « particule *de* fluide ».

I-2.i – échelle d'observation

★ échelle microscopique

✧ À cette échelle, chaque molécule qui constitue le fluide, est étudiée individuellement dans son mouvement.

✧ Physiquement, à cette échelle, interviennent deux grands phénomènes :

→ l'agitation thermique ;

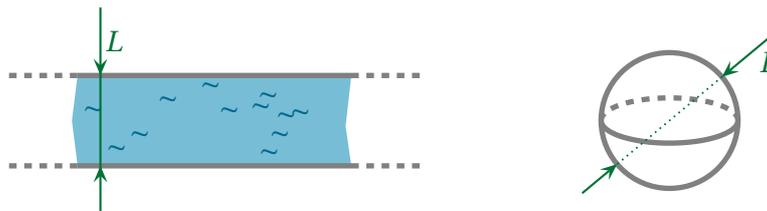
→ l'interaction de VAN DER WAALS entre particules.

✧ La distance caractéristique de cette échelle est $\bar{\ell}$.

✧ Bien sûr, il n'est pas concevable d'étudier plus que quelques centaines voire quelques milliers de molécules, ce qui ne représente même pas une particule de fluide.

★ échelle macroscopique

✧ À cette échelle, la distance caractéristique L est le diamètre d'une canalisation, celui d'une sphère...



✧ L'évolution globale du fluide, à cette échelle est, pour ainsi dire, impossible à décrire, sauf dans quelques cas très particuliers.

✧ En revanche, il est possible de caractériser de manière globale des écoulements, comme nous le verrons dans la 2^e partie.

★ échelle mésoscopique

✧ C'est à cette échelle que se situe la particule de fluide.

✧ Typiquement, en notant d la distance caractéristique à l'échelle mésoscopique, nous avons

$$d \sim 10^{-6} \text{ m} \quad (\text{I.5})$$

✧ De la sorte, nous avons

$$\bar{\ell} \ll d \ll L \quad \text{avec} \quad \ell \sim 10^{-9} \text{ m} \quad \text{et} \quad L \sim 10^{-3} \text{ m} \quad (\text{I.6})$$

✧ Bien sûr, $L \sim 1 \text{ mm}$ représente une sorte de minimum pour l'échelle macroscopique pour les situations usuelles².

2. Quand il s'agit de modéliser les gaz dans l'espace interstellaire voire intergalactique, les distances de l'ordre du mètre sont considérées comme microscopiques puisqu'il n'y a que quelques unités à quelques milliers de molécules par mètre cube.

I-2-ii – objet d'étude

★ la particule de fluide

Définition



La *particule de fluide* est l'ensemble des molécules contenues dans un volume $d\tau$ isolé par la pensée du reste du fluide.

- ✧ Cette notion a déjà été utilisée en 1^{re} année lors de l'établissement de la relation fondamentale de la statique des fluides.
- ✧ Considérons une particule de fluide de $1 \mu\text{m}$ de côté, et déterminons le nombre de particules contenues à l'intérieur pour un gaz dans des conditions usuelles (donc se comportant comme un gaz parfait).
- ✧ Nous avons

$$N = n \times \mathcal{N}_A = \frac{pV}{RT} \times \mathcal{N}_A \quad \rightsquigarrow \quad N = \frac{10^5 \times (10^{-6})^3}{8,314 \times 300} \times 6,02 \cdot 10^{23} \sim 3 \cdot 10^7 \quad (\text{I.7})$$

- ✧ Nous pouvons donc constater que même un volume de $1 \mu\text{m}$ de côté contient suffisamment de molécules pour pouvoir faire des statistiques et, donc, pouvoir en parler comme d'une entité sans avoir besoin de regarder chaque molécule individuellement.

★ caractéristique fondamentale

- ✧ Il existe des différences fondamentales entre un simple point matériel et une particule de fluide :

- une particule de fluide peut se déformer ;
- une particule de fluide peut se dilater ;
- une particule de fluide peut tourner sur elle-même.

- ✧ Visuellement, la déformation correspond à



- ✧ Pour la dilatation



- ✧ Et pour la rotation



- ✧ Bien entendu, une particule de fluide peut *à la fois* se déformer, se dilater et tourner sur elle-même.

I-2-iii – équilibre thermodynamique local

★ une hypothèse systématique



Loi

Des les situations usuelles, chaque particule de fluide peut être considérée comme étant à l'équilibre thermodynamique en tant que système thermodynamique. C'est *l'équilibre thermodynamique local*.

- ✧ L'équilibre thermodynamique local sous-entend quelque chose d'extrêmement intuitif, à savoir qu'il est possible de définir température et pression pour chaque particule de fluide, *i.e.* en chaque « point » du fluide.
- ✧ Nous avons *déjà* fait cette hypothèse, sans la nommer, dans le chapitre sur la diffusion. En effet, dans le cas du barreau dont les extrémités sont maintenues à des températures différentes :
 - le système { barreau } n'est pas à l'équilibre ;
 - chaque tranche (infinitésimale) est suffisamment à l'équilibre interne pour pouvoir se voir associer une température définie.

★ conséquences concrètes

- ✧ Concrètement, en parlant de la i -ème particule de fluide, il est possible de lui associer :
 - une température $T_i(t)$;
 - une pression $P_i(t)$.
- ✧ En première année, lors de l'établissement de la relation fondamentale de la statique des fluides, c'est l'équilibre thermodynamique local qui avait permis d'écrire, pour une particule de fluide,

$$P \times d\mathcal{V} = dn \times RT \quad (\text{I.8})$$

- ✧ Notons, enfin, que, sauf dans les cas extrêmes comme les explosions³, l'équilibre thermodynamique local est toujours vérifié.

I-3 – Représenter un fluide en mouvement

I-3-i – lignes de courant



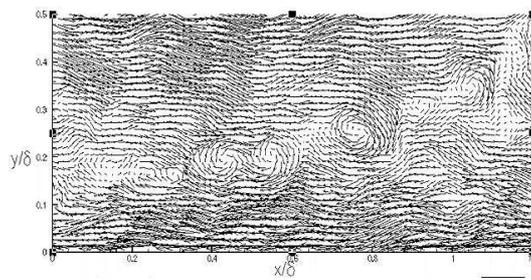
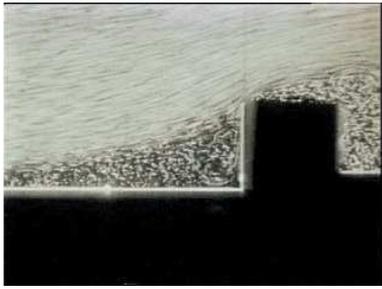
Définition

Une *ligne de courant* est une ligne qui, à t fixé, est tangente en chacun de ses points, à la vitesse des particules de fluide.

- ✧ Il s'agit bien là d'une vision **instantanée**.
- ✧ Une manière expérimentale pour visualiser les lignes de courant consiste à :
 - mettre « plein » de particules dans un fluide ;
 - lors de l'écoulement, faire une photo avec une durée de pose courte.
- ✧ La photo qui suit, et toutes les autres, sont extraites du superbe CDROM Fluids Mechanic⁴.

3. Et uniquement à « l'instant » de l'explosion.

4. Pour ceux qui possèderaient ce CDROM (ou qui le trouveraient dans une BU), il est possible de retrouver les vidéos ou les photos décrites avec le chemin indiqué.



Montrer des lignes de courants.

Cinématique – ligne d'écoulement, visualisation – l'ONERA et la visualisation – 3^e onglet
 Cinématique – ligne d'écoulement, visualisation – visualisation des écoulements – 2^e onglet

I-3-ii – lignes d'émission



Définition

Une *ligne d'émission* est l'ensemble des particules de fluide qui sont passées (voire qui passeront) par un endroit précis.

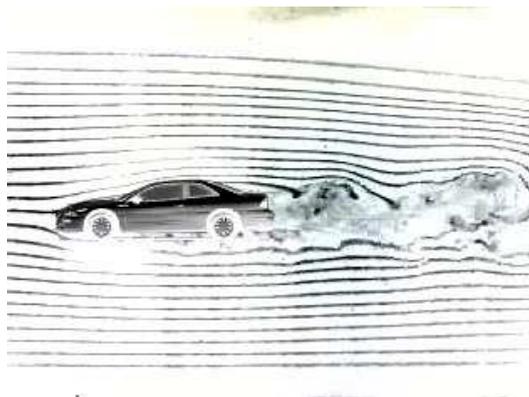
- ✧ Si la ligne d'émission est intéressante, c'est parce qu'elle est très facile à faire expérimentalement. Il suffit, en effet, d'injecter dans le fluide un marqueur.
- ✧ La fumée qui sort d'une cheminée n'est autre qu'une ligne d'émission.



Montrer quelques lignes d'émission.

Cinématique – ligne d'émission – ligne d'écoulement en écoulement instationnaire

- ✧ L'exemple le plus classique est celui du canal à fumée.



Montrer quelques exemples dans le canal à fumée.

Cinématique – ligne d'écoulement et visualisation – visualisation dans un canal à fumée

✧ Le problème, avec ces lignes d'émission, est d'ordre technique, car il est difficile de les relier aux phénomènes physiques.

I.3.iii – trajectoires

Définition

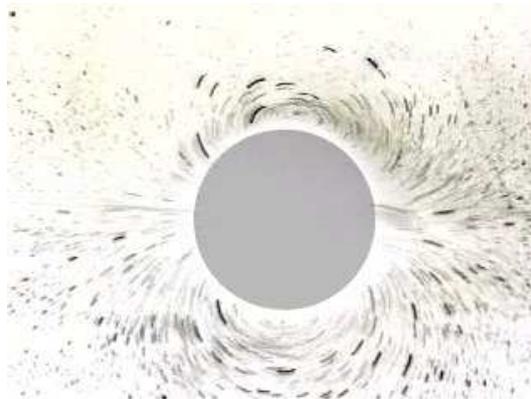


La *trajectoire* n'est autre que la trajectoire, en tant que point matériel, d'une particule de fluide.

✧ Visualiser les trajectoires est difficile à faire car il y a *beaucoup* de particules de fluide.

✧ Expérimentalement, il est possible de procéder de la manière suivante :

- mettre peu de particules dans un fluide ;
- lors de l'écoulement, faire une photo avec une durée de pose long.



Montrer le film permettant d'obtenir les trajectoires.

Cinématique – trajectoire particulaire – trajectoire particulaire dans un écoulement stationnaire ou instationnaire – 2° ongles

✧ Un autre exemple typique des trajectoires est celui des photos faites de nuit avec les « traces » des phares des voitures. Ces traces ne sont autres que les trajectoires⁵ :



5. Source : <http://images.4ever.eu/transport/rond-point-pendant-la-nuit-180029>

I.3.iv – cas stationnaire

✧ C'est un cas intéressant pour la raison suivante.

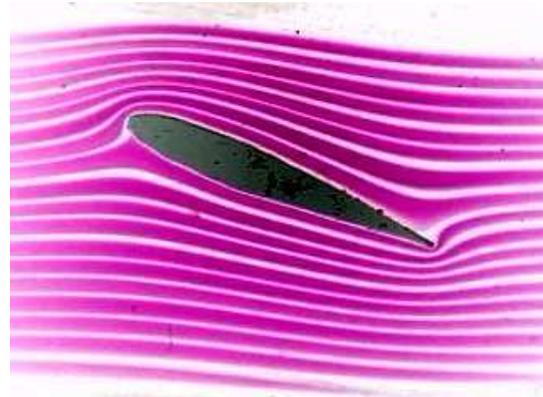
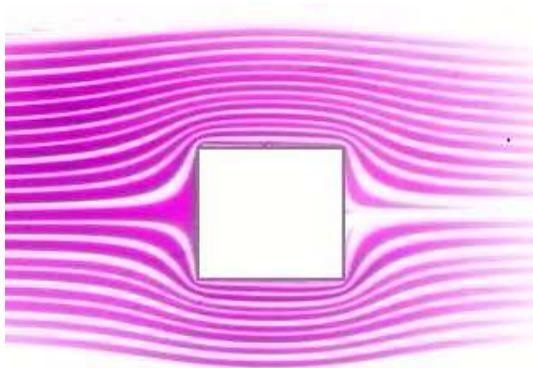


Loi

Pour un écoulement stationnaire, les lignes de courants, les trajectoires et les lignes d'émissions sont identiques.

✧ En visualisant la situation ci-dessous, il n'est pas très difficile de voir que les lignes en rose (qui sont, techniquement, des lignes d'émission) sont aussi :

- des trajectoires puisque les particules de fluide « marquées » vont passer au même endroit que les autres ;
- des lignes de courant puisqu'en tant que trajectoire, en chaque point la vitesse est tangente à la ligne.



Montrer des écoulements stationnaires.

Cinématique – ligne d'écoulement et visualisation – cellule HELE - SHAW et écoulement potentiel – 3°

onglet



Bon à retenir

§ *Le caractère « stationnaire » dépend du référentiel.*

2

✧ L'exemple le plus emblématique est l'aile d'avion :

- dans le référentiel lié à l'aile, l'écoulement est stationnaire ;
- dans le référentiel terrestre, l'écoulement n'est **pas** stationnaire.

I.3.v – exemple simple de cas non stationnaire

★ situation

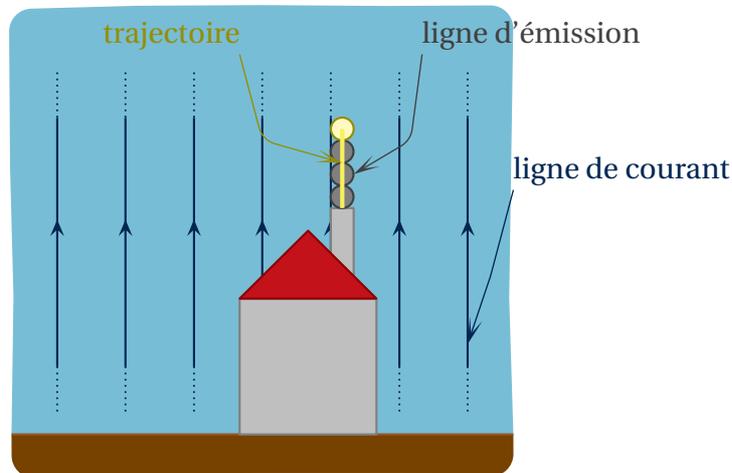
✧ Imaginons la situation (simplifiée) suivante :

- une cheminée crache de la fumée et provoque ainsi une ligne d'émission ;
- entre l'instant initial t_0 et t_1 , l'ensemble de l'air a un mouvement vertical vers le haut ;
- entre t_1 et t_2 , l'ensemble de l'air a un mouvement horizontal vers la droite.

✧ Quelles sont les lignes de courant à chaque instant ? Quelle est la ligne d'émission créée par la cheminée ? Quelle est la trajectoire du bout de la fumée ?

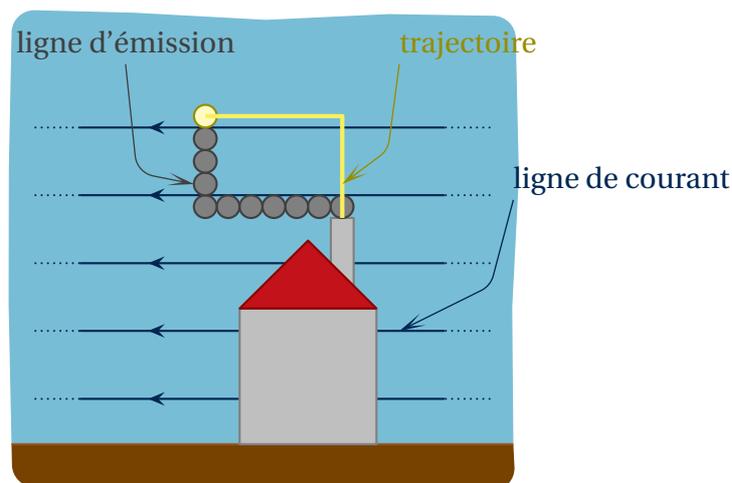
★ première phase

- ✧ Entre t_0 et t_1 , toutes les particules vont vers le haut donc les lignes de courant sont des lignes verticales, parallèles entre elles, vers le haut.
- ✧ Pendant ce temps la fumée monte tranquillement créant une ligne d'émission verticale.
- ✧ Et le bout de la fumée (particularisé en jaune) trace tranquillement son début de trajectoire vertical aussi.



★ deuxième phase

- ✧ À partir de t_1 , toutes les particules de fluide vont vers la gauche.
- ✧ Donc nous pouvons dire immédiatement que les lignes de courant sont des lignes horizontales parallèles entre elles et vers la gauche.
- ✧ La portion de fumée verticale est, comme un seul bloc, translatée vers la gauche, ce qui fait une ligne d'émission en L.
- ✧ En revanche, le bout de la fumée va maintenant, lui-aussi, vers la gauche et trace donc la fin de sa trajectoire à partir du haut qui forme, maintenant, un L tourné de 180 degrés.



- ✧ Nous voyons sur cet exemple simple que :
 - pendant la phase stationnaire (entre t_0 et t_1), ligne de courant, ligne d'émission et trajectoire se superposent ;
 - dès que l'écoulement n'est plus stationnaire, ces trois tracés diffèrent notablement.

I.4 – Dérivée particulaire

I.4.i – approche en terme de champ de vitesse

★ voir un champ

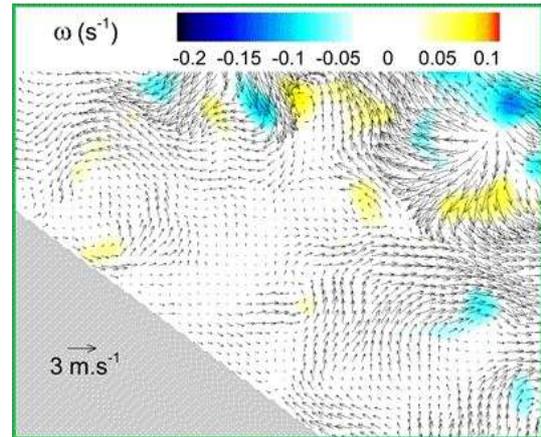
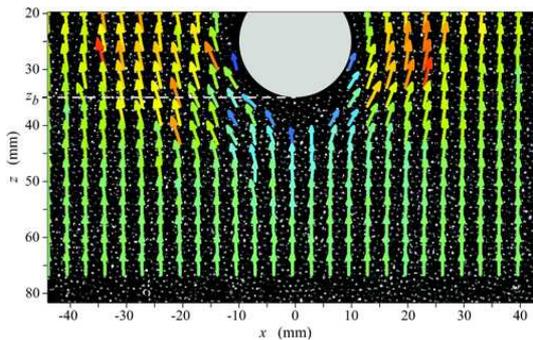
1



Définition

La *vision eulérienne* consiste à voir le fluide comme un champ de vitesse.

- En d'autres termes, à chaque instant, le fluide est représenté par un champ de vecteurs, les particules de fluide étant complètement oubliées.



- Voici deux exemples trouvés sur internet de calculs de champs de vitesses⁶
- En chaque endroit, à chaque instant, la vitesse représentée est, bien évidemment, celle de la particule de fluide qui s'y trouve. Mais, insistons : ce que devient cette particule de fluide là, tout le monde en général, et la vision eulérienne en particulier, s'en moque !

★ le pour et le contre

- Cette approche est vraiment utile pour la mécanique des fluides puisqu'elle permet de regarder en un endroit précis ce qui s'y passe.
- L'inconvénient est énorme puisque regarder un endroit précis revient à considérer un système ouvert, *i.e.* un système sur lequel il n'est pas possible de faire de la physique⁷.

I.4.ii – dérivée particulaire

★ résultat, notation



Définition

La *dérivée particulaire* est la dérivée d'une grandeur pour une particule de fluide choisie.

- Cette dérivée est intéressante puisque, comme la particule de fluide est suivie dans son mouvement, elle représente quelque chose de physiquement pertinent.

6. Sources :

- www.cnrs.fr/insis/recherche/docs-actualites/2011/Deplacement-sable1.jpg
- www.onera.fr/sites/default/files/actualites/breves/2011-0516-s19_folki-spiv_cu_border-1.gif

7. L'auteur a bien conscience qu'il existe des lois pour les systèmes ouverts *mais* ces lois sont trouvées à partir de lois sur des systèmes fermés. En fait, toutes les lois de base de la physique sont pour des systèmes fermés.

**Loi**

En terme de champ de vitesse, la dérivée particulaire s'écrit

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T \stackrel{\text{not}}{=} \frac{DT}{Dt}$$

- ✧ Remarquons que (très) souvent, dans la littérature, les dérivées particulaires sont écrites avec des grands d droits de manière à insister sur le fait que la dérivée se fait « à particule de fluide fixée ».

★ **interprétation**

- ✧ Nous constatons que, dans l'expression de la dérivée particulaire, il y a deux termes.

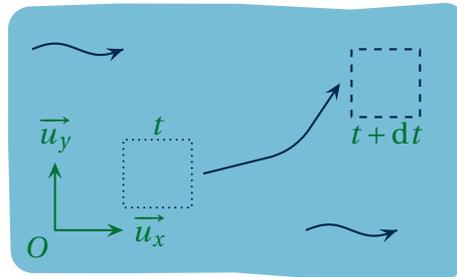
**Définition**

La partie en $\frac{\partial T}{\partial t}$ de la dérivée particulaire s'appelle la *dérivée locale* et correspond aux variations locales (à position fixée) de la température.

**Définition**

La partie en $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T$ de la dérivée particulaire s'appelle la *dérivée convective* et correspond aux changements de température dus au mouvement de la particule de fluide.

- ✧ Cette dernière variation est importante.
- ✧ Quand nous nous intéressons à la température d'une particule de fluide (définition de la variation particulaire), il faut regarder sa température à t et à $t + dt$.
- ✧ Or cette particule de fluide bouge (sinon, c'est beaucoup moins drôle). Et comme elle bouge, cela nous impose de la chercher à t et à $t + dt$ à des endroits différents.



- ✧ La variation convective, c'est ça, c'est le fait de devoir chercher ici, puis ailleurs, la particule de fluide qui nous intéresse. Et cela dépend, bien évidemment, de sa vitesse. L'expression $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T$ en témoigne.

★ **démonstration**

- ✧ Cherchons la dérivée, à particule de fluide fixée, de la température.
- ✧ Pour cela, pour éviter les confusions de notation, notons $\vec{r}_0(t)$ la position de la particule de fluide qui est, à l'instant t , en \vec{r} , *i.e.* là où nous cherchons la dérivée. Autrement dit, en prenant bien conscience que \vec{r} et t sont « constantes » et sont des grandeurs fixées, nous avons

$$\vec{r}_0(t) = \vec{r} \quad (\text{I.9})$$

- ✧ Et nous cherchons

$$\frac{dT}{dt}(\vec{r}, t) = \frac{T(\vec{r}_0(t+dt), t+dt) - T(\vec{r}_0(t), t)}{dt} \quad (\text{I.10})$$

- ✧ La grandeur $T(\vec{r}_0(t+dt), t+dt)$ représente la température de la particule de fluide à l'instant $t+dt$ car il ne faut pas oublier qu'elle a bougé et qu'elle est en $\vec{r}_0(t+dt)$.
- ✧ Réécrivons la variation de température

$$dT = T(\vec{r}_0(t+dt), t+dt) - T(\vec{r}_0(t), t) \quad (\text{I.11})$$

$$= T(\vec{r}_0(t+dt), t+dt) - T(\vec{r}_0(t+dt), t) + T(\vec{r}_0(t+dt), t) - T(\vec{r}_0(t), t) \quad (\text{I.12})$$

- ✧ Les deux premiers termes font apparaître une variation à *position fixée*. Il s'agit donc d'une variation dans le temps, *i.e.* une variation temporelle.
- ✧ De manière analogue, les deux derniers termes font apparaître une variation à *instant fixé*, c'est une variation spatiale.
- ✧ Nous pouvons donc écrire

$$dT = dT_{\text{temporel}} + dT_{\text{spatial}} \quad (\text{I.13})$$

- ✧ Or, comme T est un champ scalaire usuel, la variation temporelle s'écrit simplement

$$dT_{\text{temporel}} = \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (\text{I.14})$$

- ✧ En ce qui concerne la variation spatiale, cela dépend, évidemment, de l'écart entre les deux points entre lesquels nous cherchons, justement, cette variation.
- ✧ Quels sont ces deux points? Il s'agit des positions $\vec{r}_0(t+dt)$ et $\vec{r}_0(t)$. Autrement dit, il s'agit du petit déplacement $d\vec{r}$ de la particule de fluide.
- ✧ Nous pouvons alors écrire, d'après la définition du gradient,

$$dT_{\text{spatial}} = \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot d\vec{r} \quad (\text{I.15})$$

- ✧ Nous arrivons ainsi à

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \vec{v} \quad (\text{I.16})$$

- ✧ Et cela nous conduit au résultat énoncé

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (\text{I.17})$$

★ dérivée particulière d'une grandeur vectorielle

- ✧ Nous admettons le résultat suivant⁸.



Loi

Pour une grandeur vectorielle \vec{A} quelconque, la dérivée particulière s'écrit

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{A}$$

- ✧ Nous reconnaissons là aussi une dérivée locale et une dérivée convective.

 Attention à la place des parenthèses dans le terme de variation convective. $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{A}$ signifie quelque chose alors que $\vec{v} \cdot \left(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{A} \right)$ n'a aucune signification, puisqu'il n'est pas possible de prendre le gradient d'une grandeur vectorielle.

8. Le lecteur curieux pourra aisément le démontrer en coordonnées cartésiennes.

✧ En plus de cela, la grandeur vectorielle dont nous chercherons la dérivée le plus souvent est la vitesse et c'est un cas particulier.

8

**Loi**

La dérivée particulière d'un champ de vitesse s'écrit

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}$$

✧ Dans la 2^e partie, nous verrons une autre manière d'écrire cette accélération particulière (cf. page 42).

✧ Rappelons la méthode pour calculer, en pratique, $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}$ **en coordonnées cartésiennes** :

- ① écrire les composantes de \vec{v} et les simplifier tout de suite (car il y a souvent des composantes nulles) ;
- ② écrire les composantes de $\overrightarrow{\text{grad}}$ et les simplifier tout de suite aussi (car il y a souvent aussi des composantes nulles pour cause d'invariance) ;
- ③ faire le produit scalaire $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$ **dans cet ordre** (la vitesse à gauche, le gradient à droite) ;
- ④ appliquer l'opérateur obtenu à chacune des composantes de \vec{v} .

✧ Faisons le, par exemple, pour un champ de vitesse du type $\vec{v} = v(x,y) \vec{u}_x$.

✧ Étape ①

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.18})$$

✧ Étape ②

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.19})$$

✧ Étape ③

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} = v_x \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{I.20})$$

✧ Étape ④

$$\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \vec{u}_x \quad (\text{I.21})$$

★ la dérivée particulaire et la physique

- ✧ La dérivée particulaire étant la dérivée d'une grandeur pour une particule de fluide, ce n'est autre que la dérivée pour un système *fermé*.
- ✧ Toute la physique va donc s'écrire avec des dérivée particulaire.
- ✧ Par exemple, le PFD, pour une particule de fluide va s'écrire

$$m_{\text{part}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \overrightarrow{f_{\text{distance}}} + \sum \overrightarrow{f_{\text{contact}}} \quad (\text{I.22})$$

- ✧ Ou encore, avec la dérivée particulaire

$$m_{\text{part}} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = \sum \overrightarrow{f_{\text{distance}}} + \sum \overrightarrow{f_{\text{contact}}} \quad (\text{I.23})$$

⚠ En fait, les équations d'EULER et de NAVIER – STOKES ne sont que des PFD...

I-5 – Conservation de la masse

I-5.i – vecteur densité de courant de masse

★ expression

- ✧ Comment décrire, par quelle grandeur décrire, que de la masse est en mouvement ?
- ✧ Comme « d'habitude », par un champ de vecteur de type « courant de masse ».



Définition

Le vecteur *densité surfacique de courant de masse en volume* \vec{J}_m s'écrit, avec μ la masse volumique

$$\vec{J}_m = \mu \vec{v}$$

- ✧ Nous avons donc immédiatement



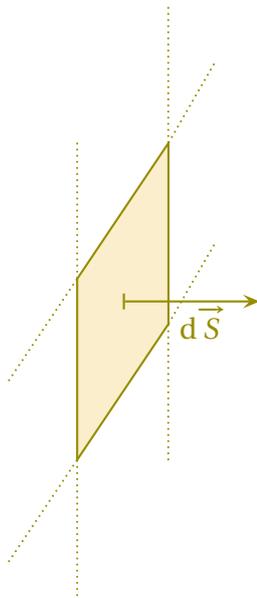
Loi

Durant dt , la masse dm qui traverse la surface $d\vec{S}$ s'écrit

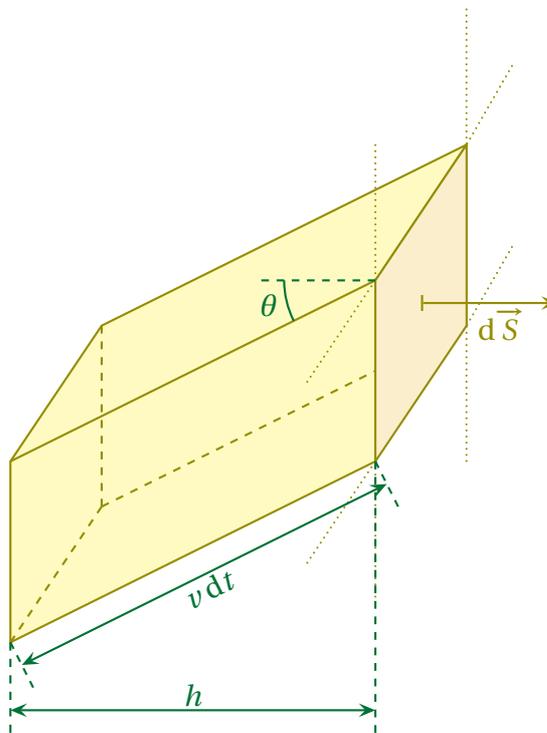
$$dm = \vec{J}_m \cdot d\vec{S} dt$$

★ démonstration

- ✧ La démonstration est classique.
- ✧ Considérons une surface dS caractérisé par le vecteur surface $d\vec{S}$



- ✧ Déterminons la masse dm du fluide qui traverse dS durant dt .
- ✧ Comme, localement, le fluide a la vitesse \vec{v} , la situation est la suivante.



- ✧ Seul le fluide contenu dans le volume représenté passera à travers dS et ce volume s'écrit

$$d\tau = dS \times h \quad \text{et} \quad h = v dt \cos\theta \quad \rightsquigarrow \quad d\tau = dS \times v dt \cos\theta \quad (\text{I.24})$$

- ✧ Dans ce volume, la masse s'écrit

$$dm = \mu d\tau \quad \rightsquigarrow \quad dm = \mu dS v dt \cos\theta \quad (\text{I.25})$$

- ✧ Soit, en notation vectorielle

$$dm = \mu \vec{v} \cdot d\vec{S} dt \quad (\text{I.26})$$

- ✧ Et par identification avec la définition de \vec{J}_m nous avons

$$dm = \vec{J}_m \cdot d\vec{S} dt \quad \rightsquigarrow \quad \vec{J}_m = \mu \vec{v} \quad (\text{I.27})$$

I-5-ii – débits

★ il en existe plusieurs



Définition

Le *débit massique* à travers une surface est la masse totale qui passe, par unité de temps, à travers cette surface.



Loi

Le débit massique s'exprime en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

✧ Par simple extensivité de la relation précédente, nous avons



Loi

Le débit massique à travers une surface \mathcal{S} s'écrit

$$D_m = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}_m(P) \cdot d\vec{S}_P$$

✧ Nous pouvons faire de même pour le débit volumique.



Définition

Le *débit volumique* à travers une surface est le volume totale qui passe, par unité de temps, à travers cette surface.



Loi

Le débit volumique s'exprime en $\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$.

✧ Par analogie, nous avons



Loi

Le débit volumique à travers une surface \mathcal{S} s'écrit

$$D_v = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}_v(P) \cdot d\vec{S}_P$$

✧ Reste à déterminer \vec{j}_v . Le lecteur pourra s'inspirer de la démonstration précédente pour montrer que



Loi

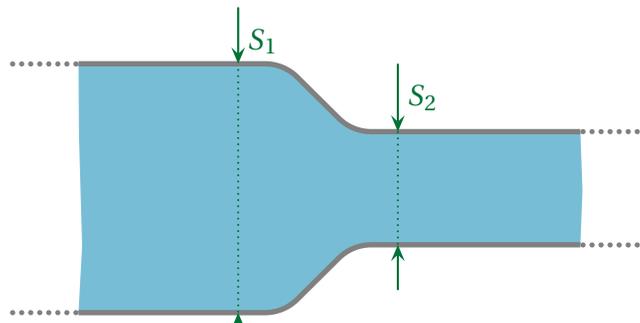
La *densité surfacique de courant de volume en volume* \vec{j}_v s'écrit

$$\vec{j}_v = \vec{v}$$

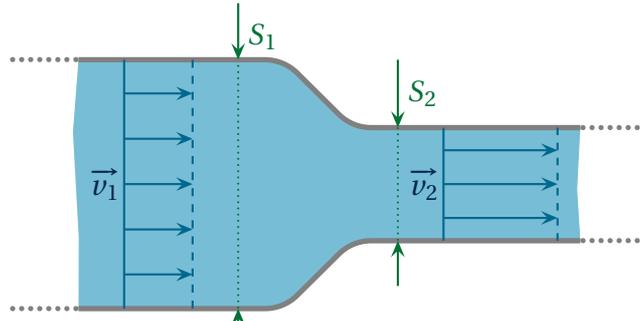
✧ Oui, « densité surfacique de courant de volume en volume » est un nom plus qu'étrange. Mais, tout comme la nomenclature en chimie, la rigueur nécessaire entraîne parfois, à la marge, quelques situations cocasses.

★ exemples à utiliser directement

✧ Imaginons un cas classique d'une canalisation pour laquelle la section diminue.



✧ Imaginons aussi que sur chaque section la vitesse du fluide soit uniforme, ce que nous représenterons ainsi



✧ Alors, quand il s'agira d'écrire les débits massique et volumique en ① et ②, nous ne la calculerons pas par sommation (avec « l'intégrale »), mais écrirons simplement

$$D_{v1} = v_1 S_1; \quad D_{m1} = \mu_1 v_1 S_1; \quad D_{v2} = v_2 S_2 \quad \text{et} \quad D_{m2} = \mu_2 v_2 S_2 \quad (\text{I.28})$$

✧ De plus, nous pourrions écrire très très souvent (à chaque fois que le régime sera stationnaire) la conservation du débit massique

$$D_{m1} = D_{m2} \quad \rightsquigarrow \quad \mu_1 v_1 S_1 = \mu_2 v_2 S_2 \quad (\text{I.29})$$

✧ Enfin, nous aurons très souvent aussi la conservation du débit volumique

$$D_{v1} = D_{v2} \quad \rightsquigarrow \quad v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (\text{I.30})$$

★ **fluide incompressible**

Définition
 Un fluide est dit *incompressible* lorsque sa masse volumique est la même partout et tout le temps.

Il ne faudra pas confondre *écoulement* incompressible et *fluide* incompressible, comme nous le verons plus tard.

✧ En pratique, nous ferons la simplification (justifiée) suivante.

Bon à retenir
En première et bonne approximation, tous les liquides sont considérés comme des fluides incompressibles.

✧ De plus, il y a une propriété simple pour les fluides incompressibles.

Bon à retenir
Pour un fluide incompressible, nous avons

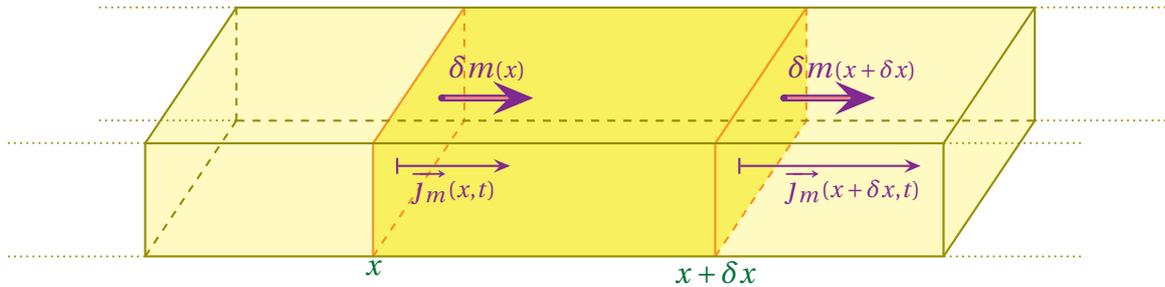
$$D_m = \mu D_v$$

I-5-iii – équation locale de conservation de la masse, version 1D

4

★ situation

- ✧ Imaginons un tuyau (ci-dessous de section rectangulaire) dans lequel s'écoule un fluide.
- ✧ Supposons que l'écoulement est homogène et que la vitesse des particules de fluide ne dépend pas de sa position.⁹
- ✧ Pour faire un bilan de masse nous allons utiliser une approche mésoscopique.
- ✧ Commençons par zoomer.



- ✧ Nous allons faire un bilan de masse sur \mathcal{S} { la tranche entre x et $x + \delta x$ } entre t et $t + \delta t$.
- ✧ Comme tout bilan, le bilan de masse sur \mathcal{S} peut se résumer sous la forme

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} + \text{CRÉATION EN VOLUME} \quad (\text{I.31})$$

★ variation dans le temps

- ✧ Il s'agit là de la variation du nombre de particules intéressantes contenues dans \mathcal{S} .
- ✧ En notant $m(t)$ la masse dans \mathcal{S} à l'instant t nous avons tout de suite, par définition de la masse volumique

$$m(x, t) = \mu(x, t) \, d\tau \quad (\text{I.32})$$

- ✧ Ce qui donne

$$\delta m_{\text{var}} = m(x, t + \delta t) - m(x, t) \quad \rightsquigarrow \quad \delta m_{\text{var}} = (\mu(x, t + \delta t) - \mu(x, t)) \, d\tau \quad (\text{I.33})$$

- ✧ Avec un développement limité à l'ordre 1 de $\mu(x, t + \delta t)$ nous avons

$$\mu(x, t + \delta t) = \mu(x, t) + \delta t \times \frac{\partial \mu}{\partial t}(x, t) \quad (\text{I.34})$$

- ✧ Ce qui donne finalement

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \frac{\partial \mu}{\partial t}(x, t) \, d\tau \, \delta t \quad (\text{I.35})$$

★ échange à travers la surface

- ✧ Dans l'exemple choisi le fluide ne peut entrer et sortir de \mathcal{S} qu'à deux endroits.
- ✧ Le terme d'échange se réduit donc à la somme de deux termes

$$\delta m_{\text{éch}} = \delta m_{\text{qui rentre en } x} + \delta m_{\text{qui rentre en } x + \delta x} \quad (\text{I.36})$$

9. Pour que l'hypothèse, il faut que la couche limite soit de taille négligeable ou, cela revient au même, que le fluide soit très peu visqueux. Nous y reviendrons dans un chapitre ultérieur.

- ✧ En notant S la section du tube, la notion de densité surfacique de courant de masse en volume nous permet d'arriver à (attention aux signes)

$$\delta m_{\text{qui rentre en } x} = +j_m(x,t) S \delta t \quad \text{et} \quad \delta m_{\text{qui rentre en } x + \delta x} = -j_m(x + \delta x, t) S \delta t \quad (\text{I.37})$$

- ✧ En rassemblant nous arrivons à

$$\delta m_{\text{éch}} = j_m(x,t) S \delta t - j_m(x + \delta x, t) S \delta t \quad (\text{I.38})$$

- ✧ Avec un développement limité à l'ordre 1 de $j_m(x + \delta x, t)$ nous avons

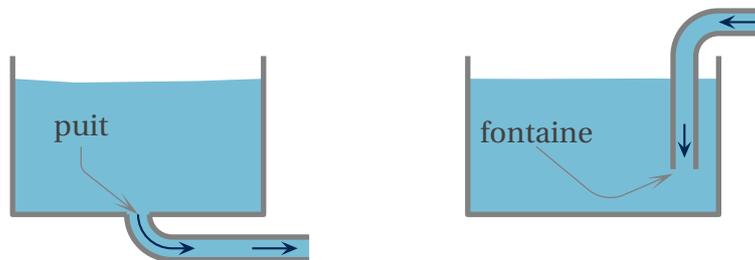
$$j_m(x + \delta x, t) = j_m(x, t) + \delta x \times \frac{\partial j_m}{\partial x}(x, t) \quad (\text{I.39})$$

- ✧ Ce qui conduit à

$$\text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} = -\frac{\partial j_m}{\partial x}(x, t) \times S \delta x \delta t \quad (\text{I.40})$$

★ production en volume

- ✧ Peut-on produire de la masse ? Oui et non.
 ✧ Non car, en mettant de côté les effets (négligeables) de la radioactivité, la masse est une grandeur qui, intrinsèquement, se conserve. Il n'est pas possible de la produire.
 ✧ Mais en fait, dans un domaine restreint de l'espace, il est possible d'imaginer des dispositifs qui absorbent du fluide (un « puit ») ou qui en injectent (une « fontaine »).
 ✧ Par exemple, si nous cherchons l'écoulement dans un lac, et uniquement dans ce cas, le ou les lieux où arrivent les rivières représentent des fontaines, un *apport* de masse, alors que le trop plein, ou l'ouverture dans le barrage, représente un puit, là où de la masse est perdue (et ne reviendra pas).
 ✧ De manière plus simple, en TP, une « bonde » est un puit et un tuyau qui apporte de l'eau est une fontaine.



- ✧ Dans ces conditions, la partie création s'écrit, en notant σ le taux de création de masse

$$\text{CRÉATION EN VOLUME} = \sigma(x, t) d\tau \delta t \quad (\text{I.41})$$

★ rassemblement

- ✧ En rassemblant les trois termes de variation, échange et création nous avons déjà

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(x, t) d\tau \delta t = -\frac{\partial j_m}{\partial x}(x, t) \times S \delta x \delta t + \sigma(x, t) d\tau \delta t \quad (\text{I.42})$$

- ✧ En remarquant que $d\tau = S \delta x$ nous avons

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(x, t) d\tau = -\frac{\partial j_m}{\partial x}(x, t) d\tau + \sigma(x, t) d\tau \quad (\text{I.43})$$

- ✧ Et donc finalement

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial j_m}{\partial x}(x,t) = \sigma(x,t) \quad (\text{I.44})$$



Loi

La loi de conservation de la masse, appelée aussi *équation de continuité* s'écrit, dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial j_m}{\partial x}(x,t) = \sigma(x,t)$$

✧ Nous reconnaissons là une équation de conservation avec :

- un couplage des variations spatio-temporelles ;
- une dérivée simple en temps et en espace.

I-5-iv – équation locale de conservation de la masse, version 3D

5

★ énoncé



Loi

La loi locale de conservation de la masse s'écrit, en notant σ le taux de production volumique

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div} \vec{J}_m = \sigma \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div} (\mu \vec{v}) = \sigma$$

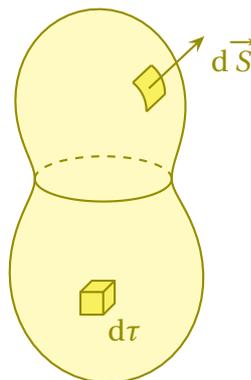
✧ Il s'agit là, somme toute, de la forme usuelle d'une loi de conservation.

★ démonstration

✧ La démonstration de la loi usuelle est usuelle elle aussi.

🕒 situation

✧ Considérons un volume \mathcal{V} quelconque mais fixe dans le temps.



✧ Faisons un bilan de masse pour ce volume \mathcal{V} entre les instants t et $t + dt$.

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} + \text{CRÉATION EN VOLUME} \quad (\text{I.45})$$

🕒 variation dans le temps

✧ À un instant t quelconque, la masse totale $m(t)$ contenue dans le volume \mathcal{V} s'écrit, par extensivité

$$m(t) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} dm_P \quad \rightsquigarrow \quad m(t) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \mu(P,t) d\tau_P \quad (\text{I.46})$$

✧ La variation de la masse s'écrit donc, en utilisant un développement limité

$$\delta m_{\text{var}} = m(t+dt) - m(t) \quad \text{et} \quad m(t+dt) = m(t) + dt \times \frac{dm}{dt}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \delta m_{\text{var}} = \frac{dm}{dt}(t) dt \quad (\text{I.47})$$

✧ Avec l'expression de $m(t)$ cela donne

$$\frac{dm}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{P \in \mathcal{V}} \mu(P,t) d\tau_P \right) \quad (\text{I.48})$$

✧ Et comme le domaine d'intégration \mathcal{V} ne dépend pas du temps, il est possible de « rentrer » la dérivée sous le signe somme ce qui donne

$$\delta m_{\text{var}} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t}(P,t) d\tau_P dt \quad (\text{I.49})$$

✧ Et finalement

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t}(P,t) d\tau_P dt \quad (\text{I.50})$$

🕒 échange à travers la surface

✧ Comme d'habitude, par extensivité, la masse totale qui passe à travers la surface est la somme des masses élémentaires qui passent à travers les surfaces élémentaires.

$$\delta m_{\text{éch}} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \delta^2 m_{\text{éch},P} \quad (\text{I.51})$$

✧ En faisant attention au sens conventionnel du vecteur surface, nous avons

$$\delta^2 m_{\text{éch},P} = -\vec{J}_m(P,t) \cdot d\vec{S} dt \quad \rightsquigarrow \quad \delta m_{\text{éch}} = -\iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{J}_m(P,t) \cdot d\vec{S} dt \quad (\text{I.52})$$

✧ Au tour de GREEN – OSTROGRADSKI de rentrer dans la danse

$$\delta m_{\text{éch}} = -\iiint_{P \in \mathcal{V}} \text{div} \vec{J}_m(P,t) d\tau_P dt \quad (\text{I.53})$$

✧ Ce qui donne, sans surprise

$$\text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} = -\iiint_{P \in \mathcal{V}} \text{div} \vec{J}_m(P,t) d\tau_P dt \quad (\text{I.54})$$

🕒 production en volume

✧ Une fois les sources (fontaines et puits) connues, en utilisant l'extensivité de la production, nous avons

$$\delta m_{\text{créé}} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \delta^2 m_{\text{créé},P} \quad \rightsquigarrow \quad \delta m_{\text{créé}} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \sigma(P,t) d\tau_P dt \quad (\text{I.55})$$

✧ Ce qui conduit à

$$\text{CRÉATION EN VOLUME} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \sigma(P,t) d\tau_P dt \quad (\text{I.56})$$

🔗 rassemblement

✧ Nous avons d'abord

$$\iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t}(P,t) d\tau_P dt = - \iiint_{P \in \mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{J}_m(P,t) d\tau_P dt + \iiint_{P \in \mathcal{V}} \sigma(P,t) d\tau_P dt \quad (\text{I.57})$$

✧ Comme le volume \mathcal{V} est le même pour les trois sommes, nous pouvons les regrouper en une seule

$$\iiint_{P \in \mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mu}{\partial t}(P,t) + \operatorname{div} \vec{J}_m(P,t) - \sigma(P,t) \right) d\tau_P dt = 0 \quad (\text{I.58})$$

✧ Et comme ce résultat est nul **quel que soit** le volume \mathcal{V} c'est que l'intégrande est nul donc

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_m - \sigma = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_m = \sigma \quad (\text{I.59})$$

✧ Ce qui est bien le résultat attendu.

I-5.v – autre version de la conservation de la masse en 3D

★ énoncé

✧ La grosse particularité de la mécanique des fluides est que la loi de conservation de la masse s'écrit d'une autre manière.



Bon à retenir

La loi locale de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu \operatorname{div} \vec{v} = \sigma$$

3

✧ Ici, le $\frac{d\mu}{dt}$ est bien la dérivée particulière, ce qui en fait une grandeur totalement différente de $\frac{\partial \mu}{\partial t}$.

✧ Cette version sera plus pratique pour tout ce qui concerne l'interprétation physique des phénomènes puisqu'elle parle de la dérivée *particulière*.

★ démonstration

✧ La démonstration est immédiate et ne comporte aucune subtilité.

✧ Les lois de composition des opérateurs vectoriels nous dit que

$$\operatorname{div} (\mu \vec{v}) = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mu + \mu \operatorname{div} \vec{v} \quad (\text{I.60})$$

✧ En remplaçant dans la loi de conservation de la masse nous avons donc

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mu + \mu \operatorname{div} \vec{v} = \sigma \quad (\text{I.61})$$

✧ Et nous reconnaissons alors la dérivée particulière

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mu = \frac{d\mu}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\mu}{dt} + \mu \operatorname{div} \vec{v} = \sigma \quad (\text{I.62})$$

I-6 – Compressibilité et divergence

I-6.i – différents type de compressibilité

★ fluide incompressible

- ✧ Rappelons que nous avons défini un fluide incompressible comme un fluide dont la masse volumique est la même partout et tout le temps et que les liquides, sauf indication explicite contraire, seront considérés comme incompressibles.
- ✧ Il s'agit là, certes, d'une approximation, mais d'une approximation tout à fait valable car ils sont, environ, 10^5 fois moins compressibles que les gaz.
- ✧ Rappelons la différence entre compressibilité et dilatabilité.
- ✧ La *compression* est le phénomène qui relie la variation de volume à la variation de pression. Le *coefficient de compressibilité isotherme* χ_T est défini par

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T \quad (\text{I.63})$$

- ✧ La *dilatation* est le phénomène qui relie la variation de volume à la variation de température. Le *coefficient de dilatation isobare* α est défini par

$$\alpha = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P \quad (\text{I.64})$$

- ✧ En toute rigueur, nous admettrons le résultat suivant



Bon à retenir

§ Un corps est dilatable si et seulement s'il est compressible.

- ✧ En revanche, dans les cas usuels que nous rencontrerons :
 - nous négligerons la compressibilité ;
 - le fluide sera à une température homogène donc la dilatabilité ne jouera aucun rôle, il sera inutile de la négliger.

★ particule de fluide incompressible

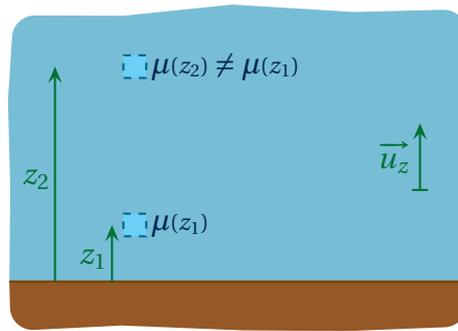


Définition

Une particule de fluide est *incompressible* si sa masse volumique reste constante

$$\frac{d\mu}{dt} = 0$$

- ☞ *Remarque.* Il s'agit bien là de la dérivée particulaire.
- ✧ Et c'est là toute la différence avec *fluide* incompressible : rien n'oblige les particules de fluide à avoir la même masse volumique.
- ✧ L'exemple canonique de mécanique des fluide avec des particules de fluide qui n'ont pas la même masse volumique est l'atmosphère isotherme.



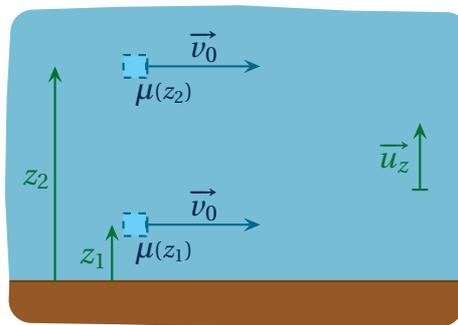
- ✧ Nous voyons bien, sur l'exemple ci-dessus, qu'une particule de fluide au sol et une particule de fluide en l'air n'ont pas la même masse volumique.
- ✧ Et même si, dans le cas présent, chaque particule est immobile, il n'en demeure pas moins que c'est de la *mécanique des fluides*.

★ **écoulement incompressible**

🕒 **définition**

Définition
 Un écoulement est dit *incompressible* lorsque toutes les particules de fluide de cet écoulement sont incompressibles.

- ✧ Comme nous pouvons le voir dans le cas de l'atmosphère isotherme avec un vent horizontal (toutes les particules de fluide ont la même vitesse \vec{v}_0), cela n'implique *pas* que le fluide soit incompressible.



Loi
 Un écoulement incompressible, en dehors des sources, se traduit par

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

3

6

- ✧ C'est immédiat à partir de la 2^e forme de la loi de conservation de la masse

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu \text{div } \vec{v} = \sigma \tag{I.65}$$

- ✧ Si l'écoulement est incompressible, cela signifie que, quelle que soit la particule de fluide nous avons $\frac{d\mu}{dt} = 0$ (c'est la dérivée particulaire, rappelons-le) et, en dehors des sources, nous pouvons naturellement écrire $\sigma = 0$. Cela conduit à

$$\mu \text{div } \vec{v} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{div } \vec{v} = 0 \tag{I.66}$$

- ✧ Nous avons, de manière presque évidente

**Bon à retenir**

§ *Un fluide incompressible donne lieu à des écoulements incompressibles.*

une approximation fréquente

✧ Nous montrerons plus tard la loi suivante.

**Bon à retenir**

§ *Un écoulement peut être considéré comme incompressible lorsque la vitesse des particules de fluide est très inférieure à celle du son dans ce fluide.*

$$v \ll c_{\text{son}}$$

✧ C'est la raison pour laquelle, en première approximation, tant que nous n'étudions pas des mouvements d'air autour d'une aile d'avion supersonique, nous pouvons raisonnablement considérer l'écoulement comme incompressible.

loin des sources**Bon à retenir**

§ *Dans un écoulement incompressible, en dehors des zones de sources, quand les lignes de courant se ressèrent, la vitesse augmente.*

- ✧ C'est un résultat analogue à celui utilisé pour interpréter les cartes de lignes de champ en électromagnétisme.
- ✧ La démonstration est la même dans les deux cas et tient à la conservation du flux de vitesse, *i.e.* du flux de *volume*.
- ✧ L'expérience usuelle, que tout le monde a déjà faite, est celle qui consiste à boucher en partie la sortie d'un tuyau d'arrosage. Comme le débit est fixé par le robinet, celui-ci reste constant mais la section de sortie diminue d'où une vitesse qui augmente.
- ✧ La conséquence est bien celle recherchée : l'eau sortant du tuyau va plus vite, plus loin et permet ainsi d'arroser celui qui a eu la malchance de passer par là, un bel après-midi d'été.

un caractère intrinsèque

✧ Parce que la compressibilité d'une particule de fluide dépend d'une grandeur scalaire, nous pouvons dire que

**Loi**

Le caractère incompressible d'une particule de fluide, d'un fluide ou d'un écoulement ne dépend pas du référentiel d'étude.

3

I-6-ii – au niveau local : la divergence**exemple**

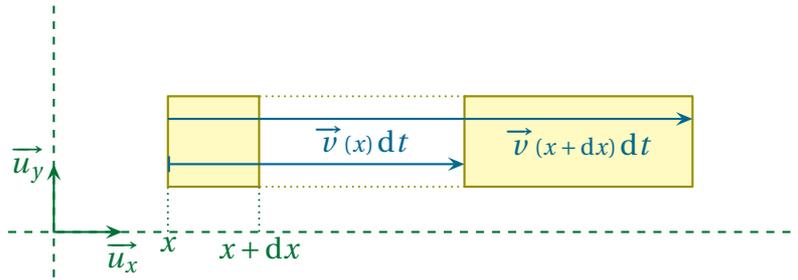
✧ Considérons le champ de vitesse suivant

$$\vec{v}(M) = (a + bx) \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad a = C^{\text{te}} \quad \text{et} \quad b = C^{\text{te}} \quad (\text{I.67})$$

✧ Nous pouvons vérifier rapidement que

$$\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{v} = b \neq 0 \tag{I.68}$$

⇨ Représentons ce qu'il advient d'une particule de fluide située entre x et $x + dx$ durant dt .



⇨ Comme nous pouvons le voir, le côté gauche avance un peu, mais le côté droit, initialement en $x + dx$ va aller plus vite donc plus loin.

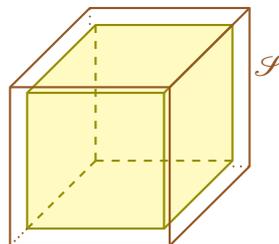
⇨ La « nouvelle » particule de fluide est plus grande, elle s'est dilatée.

Bon à retenir

Dans une zone de l'espace vide de source où il y a $\text{div} \vec{v} \neq 0$, les particules de fluide changent de volume.

★ de manière générale au niveau de la particule de fluide

⇨ Zoomons sur une particule de fluide située en un point tel que $\text{div} \vec{v} \neq 0$.



⇨ Choisissons, comme surface de contrôle, la surface **fixe** qui, à l'instant t , entoure exactement la particule de fluide.

⇨ Le volume qui passe à travers cette surface s'écrit

$$\delta \mathcal{V} = \oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}_v(P) \cdot d\vec{S}_P \tag{I.69}$$

⇨ Or le courant de volume s'écrit $\vec{j}_v = \vec{v}$, ce qui donne, avec GREEN – OSTROGRADSKI

$$\delta \mathcal{V} = \oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{v}(P) \cdot d\vec{S}_P dt \quad \rightsquigarrow \quad \delta \mathcal{V} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \text{div} \vec{v}(P) d\tau_P \tag{I.70}$$

⇨ Et comme ici nous avons $\text{div} \vec{v} \neq 0$, cela prouve que $\delta \mathcal{V} \neq 0$, donc que la particule de fluide a changé de volume.

★ avec la conservation de la masse

✧ La seconde forme de la loi de conservation de la masse s'écrit, en dehors des sources,

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{I.71})$$

✧ Ce qui conduit naturellement à

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt} = -\operatorname{div} \vec{v} \quad (\text{I.72})$$

✧ Dans ces conditions, pour $\operatorname{div} \vec{v} \neq 0$, nous avons, puisque la dérivée représente la dérivée particulière,

$$\frac{d\mu}{dt} \neq 0 \quad \rightsquigarrow \quad \mu \neq C^{\text{te}} \quad (\text{I.73})$$

✧ Mais comme une particule de fluide possède une masse constante (c'est un système fermé), cela ne peut qu'impliquer sa variation de volume.

✧ Nous retrouvons bien là le fait que les particules de fluide se dilatent (ou se contractent) lorsque $\operatorname{div} \vec{v} \neq 0$.

II – Premiers écoulements

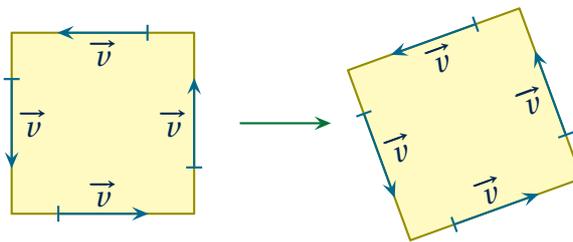
II.1 – Rotation des particules de fluide et rotationnel

- ✧ À la fin de la partie précédente, nous avons vu qu'une des caractéristiques fondamentales des particules de fluide, à savoir la possibilité de se dilater, avait une traduction technique en terme d'opérateur différentiel : la divergence.
- ✧ Nous allons montrer, dans le paragraphe ci-dessous, que la rotation des particules de fluide sur elles-mêmes peut aussi se traduire avec un (nouvel) opérateur vectoriel : le bien nommé *rotationnel*.

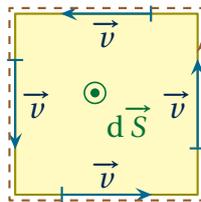
II.1.i – le rotationnel

★ de manière générale au niveau de la particule de fluide

- ✧ Zoomons sur une particule de fluide qui tourne sur elle-même.



- ✧ Calculons la circulation de la vitesse sur un contour qui entoure la particule de fluide.



- ✧ Comme nous avons orienté le contour dans le sens de la vitesse, nous avons

$$C_v = \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{v}(P) \cdot d\vec{\ell}_P > 0 \quad (\text{II.1})$$

- ✧ À l'instar du théorème de GREEN – OSTROGRADSKI, nous pouvons transformer cette somme simple en somme double, sur la surface délimitée par le contour

$$\oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{v}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}} \overrightarrow{\text{qqch}}(P) \cdot d\vec{S}_P \quad (\text{II.2})$$

- ✧ Nous allons (subtilement) appeler « rotationnel » ce qqch qui va, dès lors, représenter la rotation propre de la particule de fluide : si la particule de fluide tourne dans le sens du contour, alors le rotationnel est un vecteur dans le sens de $d\vec{S}$, et dans le sens contraire sinon.

$$\oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{v}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}(P) \cdot d\vec{S}_P \quad (\text{II.3})$$

II.1.ii – pause rotationnel

★ relation fondamentale

Définition

Pour un contour fermé orienté \mathcal{C} définissant une surface élémentaire $d\vec{S}$, la *circulation* du champ vectoriel \vec{A} à travers le long de \mathcal{C} s'écrit

$$dC \triangleq \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

✧ Autrement dit, nous pouvons transformer une sommation sur une ligne en une sommation sur une surface



✧ Et cela donne le...

Loi

THÉORÈME DE STOKES

Pour une surface \mathcal{S} quelconque délimité par le contour **fermé** \mathcal{C} nous avons

$$C = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$\vec{\text{rot}} \vec{A}$ est appelé le *rotationnel* de \vec{A}

✧ Cela revient à dire que, pour savoir ce qui se passe le long de \mathcal{C} ,

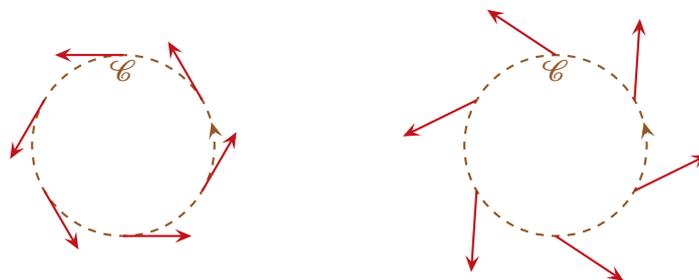
→ soit il faut regarder ce qui se passe sur le contour lui-même $\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$;

→ soit il faut regarder ce qui se passe « à l'intérieur » $\iint_{\mathcal{S}} \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$.

★ interprétation

✧ Tout comme la divergence, le rotation traduit la structure locale d'un champ de vecteur.

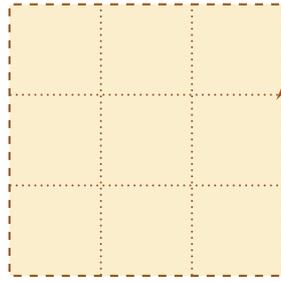
✧ Ici le rotationnel est lié à la circulation donc va traduire la manière dont les lignes de champ « tournent » sur elles-mêmes.



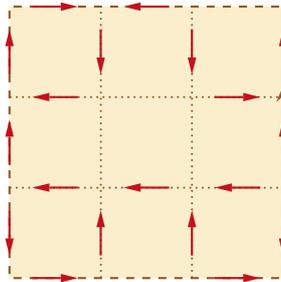
✧ Dans les deux cas ci-dessus, les flèches semblent tourner dans le sens du contour donc la circulation sera positive.

★ comment ça marche ?

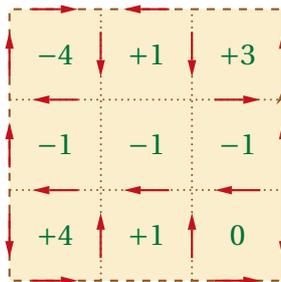
✧ Commençons par prendre un contour orienté que nous découperons en 9 cases.



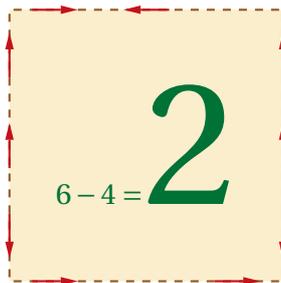
✧ Sur chaque bordure mettons des flèches au hasard



✧ Pour chaque case, comptons les flèches qui tournent dans le sens choisi, *i.e.* ici trigonométrique



✧ Maintenant comptons le nombre de flèches qui tourne dans le bon sens pour le grand contour



✧ Nous constatons alors que

$$-4 + 1 - 3 - 1 - 1 - 1 + 4 + 1 + 0 = 2 \tag{II.4}$$

✧ Il s'agit là du nombre de flèches circulant dans le sens positif pour le grand contour.

✧ L'explication est simple. Quand nous regardons une flèche séparant deux cases, nous pouvons voir qu'elle compte obligatoirement positivement pour l'une et négativement pour l'autre



✧ Dans ces conditions, lorsque nous sommes le tout, toutes les flèches à l'intérieur ont une contribution nulle et il ne reste que les flèches sur l'extérieur.

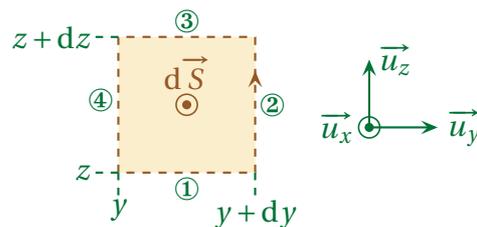
★ **expression en coordonnées cartésiennes****Loi**

En coordonnées **cartésiennes** le rotationnel d'un champ de vecteur $\vec{\xi}$ s'écrit

$$\text{rot } \vec{\xi} = \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial y} - \frac{\partial \xi_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial x} - \frac{\partial \xi_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \quad \text{où :}$$

ξ_x, ξ_y et ξ_z sont les composantes de $\vec{\xi}$ sur respectivement \vec{u}_x, \vec{u}_y et \vec{u}_z .

- ✧ Pour le démontrer, nous allons nous contenter de trouver l'expression de la composante sur \vec{u}_x du rotationnel puis nous aurons les autres par permutation circulaire.
- ✧ Pour cela considérons une surface élémentaire $d\vec{S} = dy dz \vec{u}_x$.



- ✧ Par extensivité, la circulation sur l'ensemble du contour s'écrit

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \quad (\text{II.5})$$

- ✧ Les vecteurs déplacement élémentaires associés s'écrivent

$$dl_1 = +dy \vec{u}_y; \quad dl_2 = +dz \vec{u}_z; \quad dl_3 = -dy \vec{u}_y \quad \text{et} \quad dl_4 = -dz \vec{u}_z \quad (\text{II.6})$$

- ✧ Cela donne d'abord

$$C = \xi_{y(y,z)} dy + \xi_{z(y+dy,z)} dz - \xi_{y(y,z+dz)} dy - \xi_{z(y,z)} dz \quad (\text{II.7})$$

- ✧ En regroupant astucieusement

$$C = \left(\xi_{y(y,z)} - \xi_{y(y,z+dz)} \right) dy + \left(\xi_{z(y+dy,z)} - \xi_{z(y,z)} \right) dz \quad (\text{II.8})$$

- ✧ Et en utilisant des développements limités

$$C = -\frac{\partial \xi_y}{\partial z}(y,z) dz \times dy + \frac{\partial \xi_z}{\partial y}(y,z) dy \times dz \quad (\text{II.9})$$

- ✧ Ce qui est bien de la forme

$$C = \left(\text{rot } \vec{\xi} \right) \cdot d\vec{S} \quad \text{avec} \quad d\vec{S} = dy dz \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{\xi} \cdot \vec{u}_x = \frac{\partial \xi_y}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial y} \quad (\text{II.10})$$

★ **avec nabla****Loi**

Avec nabla, le rotationnel se note

$$\text{rot } \vec{\xi} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\xi}$$

- ✧ Comme c'était le cas pour la divergence, le rotationnel... cette notation permet de retrouver l'expression du rotationnel **en coordonnées cartésiennes**.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_z}{\partial y} - \frac{\partial \xi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_x}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi_y}{\partial x} - \frac{\partial \xi_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{II.11})$$

★ c'est un opérateur différentiel linéaire



Loi

Le rotationnel est un opérateur vectoriel différentiel et

$$[\text{rot } \vec{\xi}] = \frac{[\xi]}{\text{longueur}}$$



Bon à retenir

Avec λ_1 et λ_2 des scalaires quelconques, nous avons

$$\text{rot} \left(\lambda_1 \vec{\xi}_1 + \lambda_2 \vec{\xi}_2 \right) = \lambda_1 \text{rot } \vec{\xi}_1 + \lambda_2 \text{rot } \vec{\xi}_2$$

✧ La démonstration est exactement la même que celle pour la divergence, à savoir laissée au lecteur.

★ cas du rotationnel nul



Loi

Un champ vectoriel \vec{v} est de rotationnel nul si et seulement s'il existe un champ scalaire Φ dont \vec{v} est le gradient.

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{v} = -\text{grad } \Phi$$

✧ Le signe « - » est là par habitude / par convention. Il n'est pas intrinsèquement nécessaire mathématiquement parlant.

✧ C'est une propriété mathématique, nous laissons aux mathématiciens le soin de le démontrer.

👉 *Remarque.* Nous avons déjà utilisé cette propriété, sans le savoir, en électromagnétisme.

✧ Cette relation est très importante et nous resserrera à plusieurs reprises.

★ rotationnel et divergence



Loi

Quel que soit le champ vectoriel \vec{A} , la divergence de son rotationnel est nul

$$\text{div} \left(\text{rot } \vec{A} \right) = 0$$

✧ C'est, là aussi, une propriété mathématique.

✧ Physiquement, cela peut s'interpréter comme le fait que quelque chose qui « tourne » (le rotationnel), n'a pas tendance à partir dans tous les sens, *i.e.* à diverger.

✧ Nous nous resserrons de cette relation en électromagnétisme.

II.1.iii – lien rotationnel – vecteur rotation de la particule de fluide

⇨ Revenons à notre particule de fluide.

★ exemple

⇨ Imaginons un écoulement dans lequel le champ de vitesse est tel que

$$\vec{v}(M) = r \Omega \vec{u}_\theta \quad (\text{II.12})$$

⇨ Vérifions tout d'abord qu'il s'agit là d'un écoulement rotationnel.

⇨ Pour cela, commençons par écrire ce champ de vitesse en coordonnées cartésiennes.

⇨ En remarquant que $r \vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge r \vec{u}_r$, nous trouvons rapidement

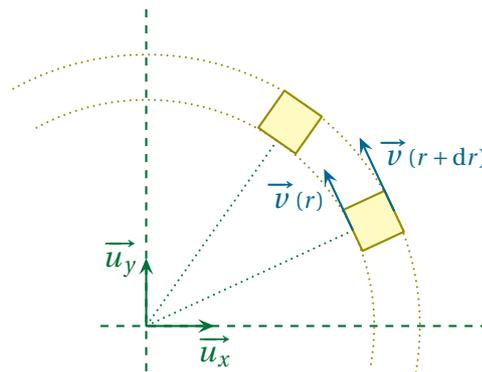
$$\vec{v}(M) = \Omega x \vec{u}_y - \Omega y \vec{u}_x \quad (\text{II.13})$$

⇨ Nous pouvons aisément vérifier que $\text{div } \vec{v} = 0$ car

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + 0 = 0 \quad (\text{II.14})$$

⇨ Il s'agit donc bien d'un écoulement incompressible.

⇨ Regardons ce qu'il advient d'une particule de fluide située entre r et $r + dr$.



⇨ La particule avance en tournant sur elle-même avec un vecteur rotation qui n'est autre que $\vec{\Omega}$.

⇨ Nous avons alors

$$\vec{\text{rot}} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{\text{rot}} \vec{v} = 2\Omega \vec{u}_z \quad (\text{II.15})$$

⇨ Autrement dit, à un facteur 2 près, le rotationnel de la vitesse représente le vecteur rotation de la particule de fluide.

★ **vecteur tourbillon****Bon à retenir**

Dans une zone de l'espace où $\text{rot } \vec{v} \neq \vec{0}$, les particules de fluide tournent sur elles-mêmes (en plus d'avancer).

**Définition**

Le *vecteur tourbillon*, noté $\vec{\Omega}$, est défini par

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$$

✧ Le vecteur tourbillon n'est autre que le vecteur local de rotation, ou, autrement dit, le champ de vecteur de rotation propre des particules de fluides.

**Définition**

Si le vecteur tourbillon n'est pas nul partout, *i.e.* s'il y a au moins une zone (même très petite) dans laquelle $\text{rot } \vec{v} \neq \vec{0}$, l'écoulement est dit *tourbillonnaire* ou *rotationnel*.

**Définition**

Un écoulement qui n'est pas tourbillonnaire est dit *irrotationnel*.

**Bon à retenir**

Dans un écoulement irrotationnel, en tout point de l'écoulement, nous pouvons écrire

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$$

✧ Nous savons que le mouvement propre d'un solide dépend du référentiel dans lequel nous l'étudions. Il en est de même avec les fluides.

**Loi**

Le rotationnel d'un fluide dépend du référentiel d'étude. En particulier, le caractère irrotationnel d'un écoulement dépend du référentiel d'étude.

★ **autre version de l'accélération particulaire**

✧ Nous avons vu, dans la partie précédente que l'accélération convective s'écrivait

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \quad (\text{II.16})$$

✧ Il existe une autre manière, totalement équivalente, d'écrire cette accélération

**Bon à retenir**

La dérivée particulaire d'un champ de vitesse s'écrit aussi, au choix,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

✧ Cette 2^e version de l'accélération particulaire nous sera très utile dans le dernier chapitre.

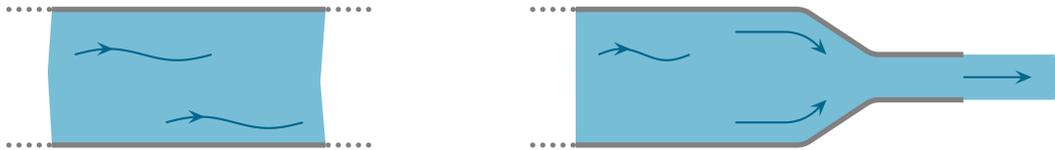
II.2 – Conditions aux limites naturelles

✧ Il existe d'autres limites que naturelles, nous verrons cela plus tard, dans le chapitre 6, avec les fluides newtoniens.

II.2.i – où sont les limites ?

★ milieux confinés

✧ Nous appellerons « milieux confinés » tout ce qui est tuyau, canalisation, etc.



✧ Il y a deux types de limites : sur les bords et « au loin ».

✧ Les conditions aux limites au niveau des bords sont non contrôlables par l'opérateur¹⁰.

✧ En revanche, les conditions « au loin » sont souvent imposées par l'opérateur, d'une manière ou d'une autre (débit, pression, vitesse...)

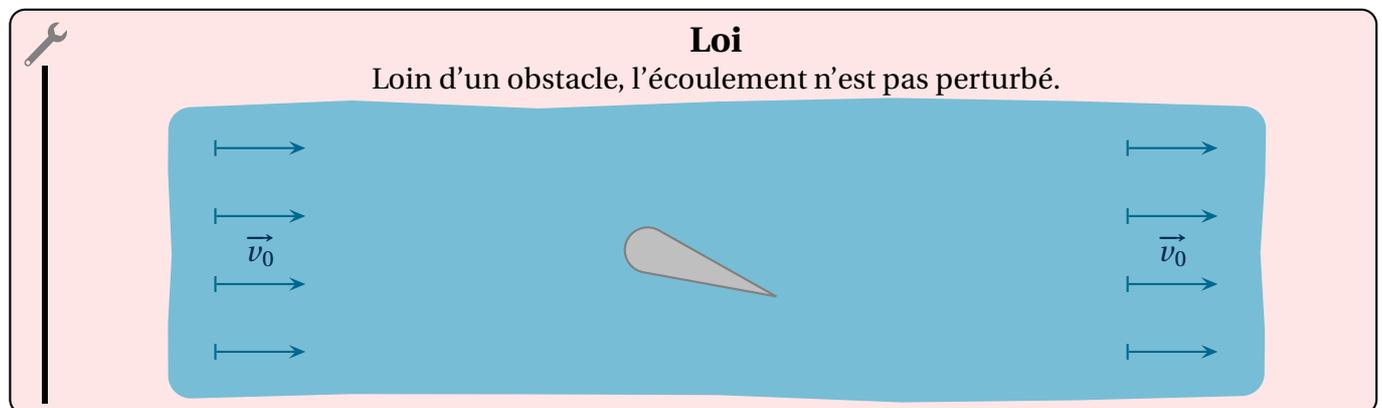
★ milieux non confinés

✧ Les milieux non confinés regroupent tout ce qui est obstacle (ballon, aile d'avion...)

✧ Là aussi, il y a deux types de limites : au contact de l'obstacle et « au loin ».

II.2.ii – loin d'un obstacle

✧ Loin d'un obstacle (aile d'avion, ballon...), nous ferons l'hypothèse suivante.



✧ Concrètement, cela signifie que nous traduirons le fait que le champ de vitesse est uniforme à l'infini.

✧ Expérimentalement, cela se conçoit assez bien :

- tant qu'une voiture n'est pas passée, une personne sur le bord de la route ne ressent pas son souffle ;
- une fois passée, quelques secondes après, le passage de la voiture n'est plus perceptible.

¹⁰. Sauf cas particuliers de tuyau avec aspiration ou refoulement de fluide.

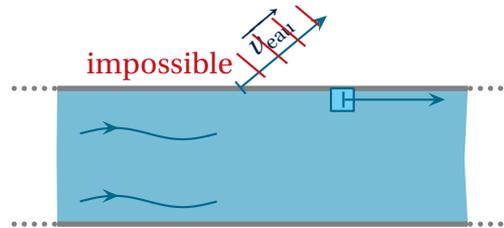
II.2.iii – à la surface d'une paroi, d'un obstacle



Loi

La surface d'un obstacle, d'une paroi est *imperméable*.

- ✧ Sauf pour quelques parois très particulières, l'immense majorité des parois (tuyau, carlingue d'avion, habitacle de voiture, maison, ballon...) sont imperméables, *i.e.* sont fabriquées de telle sorte que l'air (ou l'eau de pluie) ne rentre pas de manière incontrôlée dans l'appareil ou l'objet.
- ✧ Autrement dit, les particules de fluides ne peuvent pas traverser les parois.



- ✧ Nous sommes en train de dire que la vitesse des particules de fluide est tangente à la paroi.

$$\vec{v} \text{ (P.F. qui touche la paroi par rapport à la surface)} // \text{ surface} \quad \text{ou} \quad \vec{v} \text{ (P.F. qui touche la paroi)} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II.17})$$

- ✧ Nous retiendrons



Bon à retenir

Au niveau d'une surface imperméable, les particules de fluide ont une vitesse, par rapport à la surface, tangentielle à celle-ci.

$$\left(\vec{v} |_{\mathcal{R}(I \in \text{fluide})} - \vec{v} |_{\mathcal{R}(I \in \text{paroi})} \right) \cdot \vec{n} = 0$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la paroi au point I considéré.

- ✧ Ceci étant, pour d'évidente raison de praticité, nous nous placerons très souvent dans le référentiel lié à la paroi, *i.e.* dans un référentiel où la paroi est immobile.
- ✧ La condition précédente se réécrit donc



Bon à retenir

Au niveau d'une surface imperméable immobile, les particules de fluide ont une vitesse tangentielle à celle-ci.

$$\vec{v} |_{\mathcal{R}(I \in \text{fluide})} \cdot \vec{n} = 0$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la paroi au point I considéré.

- ☞ *Remarque.* Dans le cas, rare, d'une paroi non imperméable, le lecteur curieux pourra s'imaginer à quoi peut ressembler une condition aux limites, sachant qu'elle s'exprime en terme de flux.

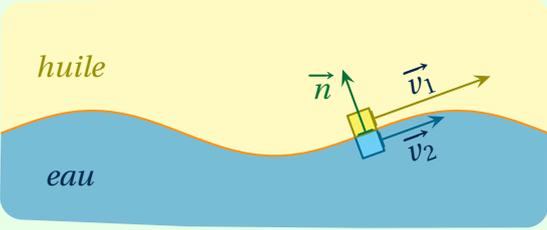
II.2.iv – fluides non miscibles

- ✧ Parfois, nous serons amenés à traduire des conditions aux limites entre deux fluides non miscibles.
- ✧ En écrivant cela le lecteur peut penser spontanément au célèbre mélange eau-huile, mais il existe deux autres fluides non miscibles ô combien plus fréquents : l'eau et l'air.
- ✧ C'est ainsi qu'il nous faudra parfois décrire ce qui se passe à la surface d'un lac, de la mer...
- ✧ En fait deux fluides non miscibles peuvent être vus comme deux fluides séparés par une membrane infiniment fine, mobile et... imperméable.

✧ Dès lors, la condition à la limite tombe d'elle-même.

Bon à retenir

Au niveau de la surface de deux fluides non miscibles en écoulement, nous avons

$$\left(\vec{v}|_{\mathcal{R}(I \in \textcircled{1})} - \vec{v}|_{\mathcal{R}(I \in \textcircled{2})} \right) \cdot \vec{n} = 0$$


✧ Ceci étant, lorsque nous ne nous intéresserons pas à l'écoulement d'un des deux fluides, nous pourrons nous contenter de traduire la continuité de la pression.

II.3 – Écoulements tourbillonnaires

II.3.i – origine physique

- ✧ Supposons qu'un écoulement soit tourbillonnaire.
- ✧ Alors cela signifie qu'il existe une zone de l'espace (éventuellement finie voire très petite) dans laquelle nous avons $\text{rot } \vec{v} \neq \vec{0}$.
- ✧ Autrement dit, il y a quelque part dans l'espace des particules de fluide qui tournent sur elles-mêmes.
- ✧ Il faut alors savoir que, pour que des particules de fluides puissent se mettre à tourner sur elles-mêmes, il est impératif qu'il y ait un peu de frottement au sein du fluide, *i.e.* que le fluide soit un tout petit peu *visqueux*.
- ✧ Nous reviendrons à la fin de ce chapitre sur la notion de viscosité et nous verrons dans le chapitre 6 pourquoi un fluide sans viscosité ne peut ni faire tourner des particules de fluide sur elles-mêmes ni arrêter leurs rotations si elles sont en train de tourner sur elles-mêmes.

II.3.ii – base de l'analogie

- ✧ Imaginons un fluide en écoulement incompressible et tourbillonnaire.
- ✧ Alors son champ de vitesse :
 - est à flux conservatif, *i.e.* $\text{div } \vec{v} = 0$;
 - est à circulation non nulle puisque $\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\Omega}$.
- ✧ N'oublions pas, en effet, que la circulation d'un champ vectoriel est intimement lié à son rotationnel grâce au théorème de STOKES

$$C = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.18})$$

- ✧ Ces deux propriétés nous rappellent un autre champ vectoriel, le champ magnétique.
- ✧ En effet, ce dernier est à flux conservatif puisque, quel que soit la surface fermée \mathcal{S}

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P = 0 \quad (\text{II.19})$$

- ✧ De plus, sa circulation n'est pas nulle, c'est le théorème d'AMPÈRE

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \mu_0 i_{\text{enlacé}} \quad (\text{II.20})$$

- ✧ Puisque ces deux champs, le champ de vitesse d'un écoulement incompressible et tourbillonnaire d'une part et le champ magnétostatique d'autre part, obéissent **rigoureusement** aux *mêmes équations physiques*, nous allons pouvoir, pour calculer l'un, utiliser des techniques apprises pour l'autre.
- ✧ Pour finir l'analogie, cherchons l'équivalent du théorème d'AMPÈRE pour la mécanique des fluides.

$$C_v = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad (\text{II.21})$$

$$= \iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{v}(P) \cdot d\vec{S}_P \quad (\text{II.22})$$

$$= \iint_{\mathcal{S}} 2\vec{\Omega} \cdot d\vec{S}_P \quad (\text{II.23})$$

- ✧ Alors que, pour le théorème d'AMPÈRE « original », le terme d'intensité se réécrit

$$C_B = \mu_0 i_{\text{enlacé}} \quad (\text{II.24})$$

$$= \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S}_P \quad (\text{II.25})$$

- ✧ Nous pouvons donc faire l'analogie suivante

$$\vec{v} \longleftrightarrow \vec{B} \quad \text{et} \quad 2\vec{\Omega} \longleftrightarrow \mu_0 \vec{j} \quad (\text{II.26})$$

- 👉 *Remarque.* En allant jusqu'au bout de l'analogie, cela signifie que les lois de la magnétostatique s'écrivent

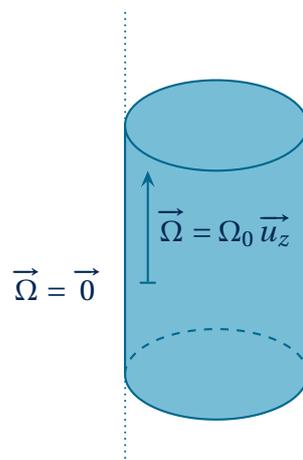
$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{II.27})$$

II.3.iii – modèle de la tornade

★ présentation

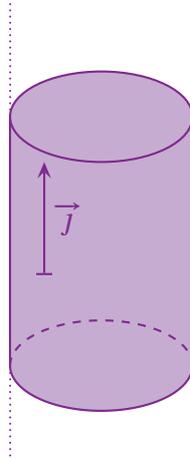
- ✧ Nous allons chercher le champ de vitesse dans tout l'espace pour un écoulement incompressible et tourbillonnaire tel que

$$\begin{cases} \vec{\Omega} = \Omega_0 \vec{u}_z & \text{dans un cylindre infini} \\ \vec{\Omega} = \vec{0} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$



★ analogie et résultats

✧ Étant donné que le vecteur tourbillon est analogue au vecteur densité de courant en volume, nous pouvons facilement voir que le champ de vitesse créé par la tornade est équivalent au champ magnétostatique créé par un fil infini cylindrique parcouru par un courant uniforme.



✧ Les lois précédemment évoquées nous permettent de faire l'analogie suivante

$$\vec{v} \longleftrightarrow \vec{B} \quad \text{et} \quad 2\Omega \longleftrightarrow \mu_0 j \quad (\text{II.29})$$

✧ Rappelons les résultats trouvés pour le fil infini¹¹

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta & \text{pour } r < R \\ \vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r} \vec{u}_\theta & \text{pour } r > R \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

★ transposition et vision graphique

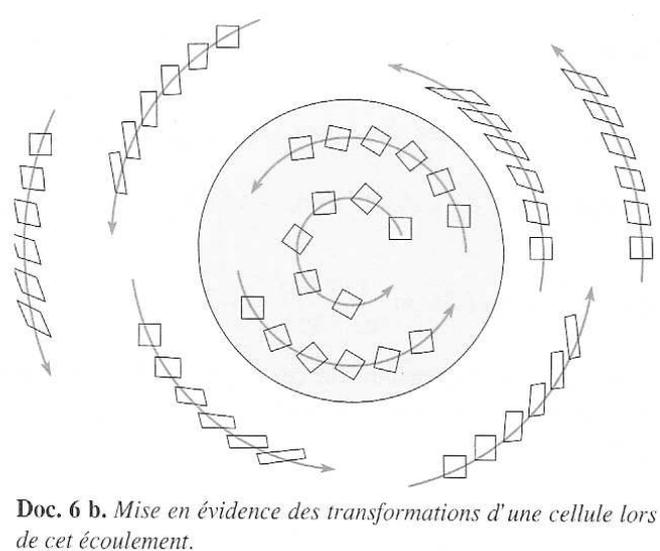
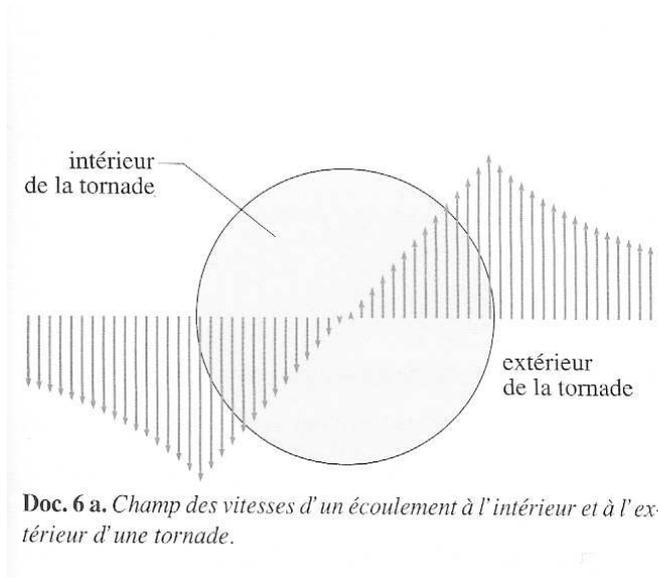
✧ En remplaçant $\mu_0 j$ par $2\Omega_0$, nous obtenons immédiatement

$$\begin{cases} \vec{v} = \Omega_0 r \vec{u}_\theta & \text{pour } r < R \\ \vec{v} = \frac{\Omega_0 R^2}{r} \vec{u}_\theta & \text{pour } r > R \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

✧ Graphiquement, cela donne¹²

11. Voir chapitre 1 d'électromagnétisme.

12. Source : H-Prépa, mécanique des fluides.



- ✧ C'est au cœur de la tornade que les vents sont les moins forts et plus la distance à la tornade est grande, plus les vitesses sont faibles. Deux constatations qui semblent bien correspondre aux situations réelles.
- ✧ En ce qui concerne les particules de fluide, nous voyons bien que :
 - celles à l'intérieur de la tornade tournent sur elles-mêmes ;
 - celles à l'extérieur de la tornade ont une trajectoire circulaire mais ne tournent pas sur elles-mêmes.

II.4 – Écoulements potentiels

II.4.i – condition d'obtention

★ une autre analogie

- ✧ Considérons un écoulement irrotationnel et incompressible.
- ✧ Cela signifie que le champ de vitesse :
 - est à flux conservatif (sauf au niveau des sources) ;
 - est à circulation conservative.
- ✧ Nous pouvons faire une analogie avec le champ électrostatique car, lui aussi,
 - est à flux conservatif (sauf au niveau des sources) ;
 - est à circulation conservative.
- ✧ Et, comme pour le champ électrostatique, nous préférons, quand cela était possible, chercher un potentiel, nous allons faire de même pour le champ de vitesse.
- ✧ Rappelons que c'est bien le fait que l'écoulement soit irrotationnel qui permet de chercher la solution sous forme de potentiel.

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \quad (\text{II.32})$$

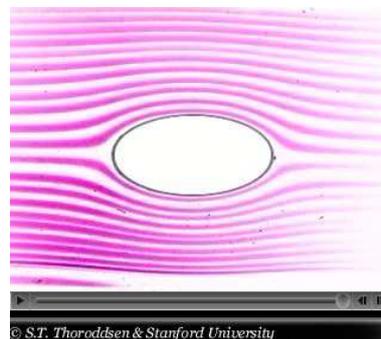
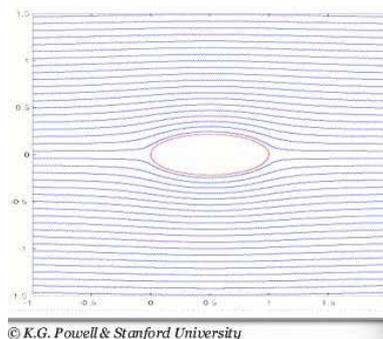
- ✧ Le signe – devant le gradient dépend de la convention utilisée :
 - la convention des électriciens donne $\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \Phi$;
 - la convention des mécaniciens donne $\vec{v} = +\overrightarrow{\text{grad}} \Phi$.
- ✧ Comme les deux donnent les mêmes résultats physiques (heureusement !), nous pourrons utiliser l'un ou l'autre.

★ méthodes de résolution

- ✧ Même s'il est possible, en électrostatique, de trouver et de résoudre l'équation locale pour le potentiel (équation de LAPLACE ou de POISSON), nous ne le faisons jamais. Nous utilisons plutôt la solution pour une charge ponctuelle et le principe de superposition.
- ✧ Il en sera de même en mécanique des fluides.
- ✧ Nous utiliserons donc la superposition de solutions déjà connue et déterminerons, avec l'aide des conditions aux limites, les coefficients adaptés.

II.4.ii – exemples expérimentaux

- ✧ Sur les illustrations qui suivent, nous pouvons voir :
 - à gauche, la résolution numérique des lignes de champs obtenues en présence d'un objet ;
 - à droite, l'écoulement expérimental avec un objet de même forme.



- ✧ Nous pouvons constater l'extrême ressemblance des résultats, ce qui montre l'efficacité de la méthode. Celle-ci est avantageuse car il est beaucoup plus simple de calculer numériquement quelques lignes de champ plutôt que de fabriquer expérimentalement un écoulement.
- 👉 *Remarque.* Ceci étant, la plupart des écoulements sont tourbillonnaires, ce qui limite grandement le champ d'application de cette méthode.

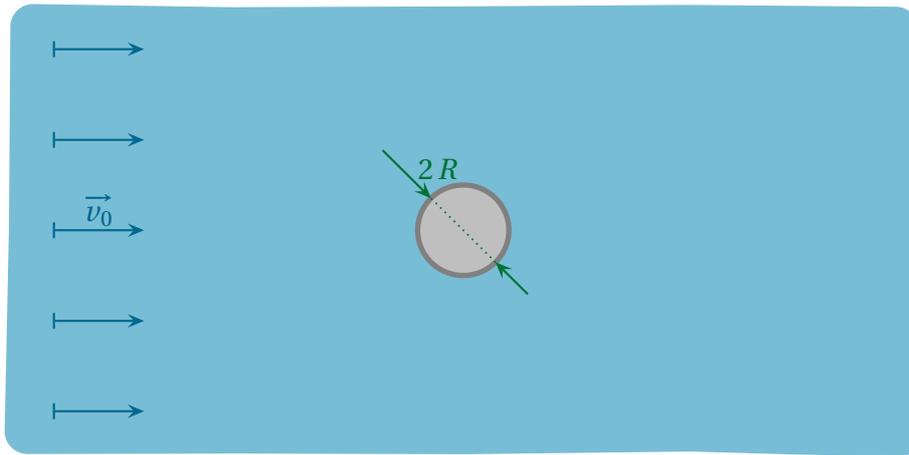
Montrer d'autres exemples.

Dynamique – écoulements potentiels – comparaison théorie / pratique

II.4.iii – un exemple détaillé

★ situation

- ✧ Nous allons modéliser de manière simple l'écoulement autour d'une balle ou d'un ballon qui ne tourne pas sur lui-même.
- ✧ Pour cela, nous allons rechercher le champ de vitesse d'un écoulement incompressible, irrotationnel et stationnaire autour d'une sphère.
- ✧ Pour que l'écoulement soit stationnaire, il est indispensable de se placer dans le référentiel lié à la sphère.



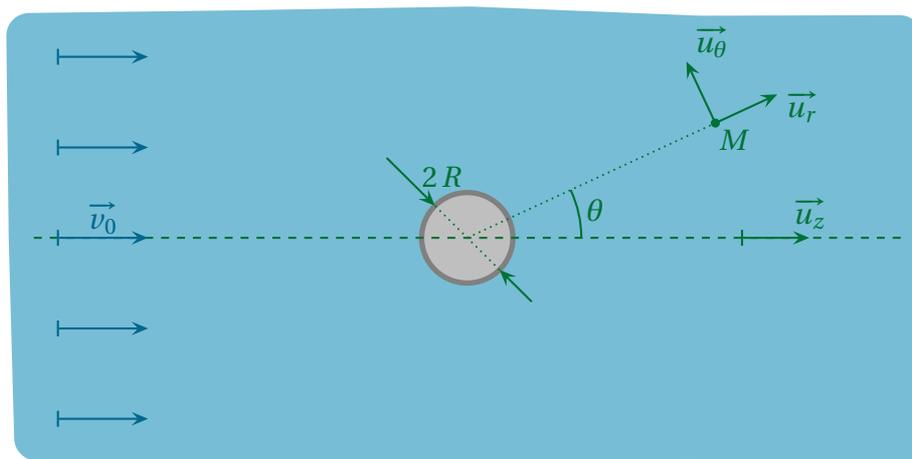
- ✧ Comme discuté un peu plus haut, l'écoulement, loin de la sphère, est non perturbé, *i.e.* uniforme \vec{v}_0 .
- ✧ Ici, tout est fait pour pouvoir utiliser l'analogie entre électrostatique et champ de vitesse. Nous allons donc rechercher le potentiel Φ dont dérive la vitesse tel que

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \quad (\text{II.33})$$

- ✧ Rappelons que le signe devant le gradient importe peu puisqu'il s'agit d'un signe *conventionnel*.
- ✧ De plus ici nous n'allons pas résoudre directement l'équation de LAPLACE mais allons chercher une superposition de solutions de types connus.

★ analyse du problème

- ✧ De manière générale, l'écoulement doit traduire deux choses :
 - l'uniformité à grande distance ;
 - la « perturbation » près de l'obstacle.
- ✧ C'est la raison pour laquelle nous allons superposer des potentiels tels que :
 - l'un représente le champ uniforme ;
 - l'autre obéisse à l'invariance sphérique de l'obstacle.
- ✧ Commençons par poser le repérage. Étant donné la symétrie sphérique du problème, celui-ci est évident



- ✧ Nous avons donc un champ de vitesse uniforme à l'infini auquel est associé le potentiel

$$\vec{v}_0 = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_1 \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_1 = v_0 z \quad (\text{II.34})$$

- ✧ En ce qui concerne les potentiels obéissants à la symétrie sphérique, nous en connaissons deux : celui créé par une charge ponctuelle et celui créé par un dipôle électrostatique.

✧ Ces deux potentiels s'écrivent, respectivement

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{et} \quad \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{II.35})$$

✧ En enlevant les constantes et en ne gardant que la fonctionnalité, nous pouvons dire que les potentiels Φ_2 et Φ_3 suivant obéissent à l'équation de LAPLACE et, donc, sont aptes à correspondre à un champ de vitesse

$$\Phi_2 = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \Phi_3 = \frac{\cos\theta}{r^2} \quad (\text{II.36})$$

✧ Finalement, nous allons chercher le potentiel des vitesses comme une combinaison linéaire des potentiels Φ_1 , Φ_2 et Φ_3

$$\Phi = \alpha v_0 z + \frac{\beta}{r} + \gamma \frac{\cos\theta}{r^2} \quad (\text{II.37})$$

★ conditions aux limites

🕒 expression de la vitesse

✧ Commençons par chercher l'expression de la vitesse.

✧ Pour cela, réécrivons la vitesse en coordonnées polaires

$$\Phi = \alpha v_0 r \cos\theta + \frac{\beta}{r} + \gamma \frac{\cos\theta}{r^2} \quad (\text{II.38})$$

✧ Nous avons ensuite

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \rightsquigarrow \vec{v} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \vec{u}_\theta \quad (\text{II.39})$$

✧ Ce qui donne

$$\vec{v} = \left(\alpha v_0 \cos\theta - \frac{\beta}{r^2} - 2\gamma \frac{\cos\theta}{r^3} \right) \vec{u}_r + \left(-\alpha v_0 \sin\theta - \gamma \frac{\sin\theta}{r^3} \right) \vec{u}_\theta \quad (\text{II.40})$$

🕒 condition au loin

✧ Lorsque $r \rightarrow \infty$, le potentiel tend vers $\Phi \rightarrow \alpha v_0 r \cos\theta = \alpha v_0 z$ dont le champ de vitesse associé est $\alpha \vec{v}_0$.

✧ Nous en déduisons que $\alpha = 1$.

👉 *Remarque.* Nous aurions aussi pu prendre l'expression générale de la vitesse et constater que pour $r \rightarrow \infty$ nous avons $\vec{v} \rightarrow \alpha v_0 \cos\theta \vec{u}_r - \alpha v_0 \sin\theta \vec{u}_\theta = \alpha \vec{v}_0$. Cela revient au même.

🕒 condition sur la sphère

✧ Au niveau de la sphère, comme elle est imperméable, nous pouvons dire que la vitesse n'est *que* tangentielle, *i.e.* que la vitesse est portée par \vec{u}_θ en tout point de la sphère.

✧ Techniquement

$$\vec{v}(r=R,\theta) // \vec{u}_\theta \rightsquigarrow \vec{v}(r=R,\theta) \cdot \vec{u}_r = 0 \quad (\text{II.41})$$

✧ Cela impose, pour tout θ ,

$$v_0 \cos\theta - \frac{\beta}{R^2} - 2\gamma \frac{\cos\theta}{R^3} = 0 \quad (\text{II.42})$$

✧ Le cas particulier $\theta = \frac{\pi}{2}$ permet de déduire

$$\beta = 0 \quad (\text{II.43})$$

✧ Puis, pour (par exemple) $\theta = 0$

$$\gamma = +\frac{v_0 R^3}{2} \quad (\text{II.44})$$

🌀 rassemblement

✧ Finalement, le potentiel des vitesses s'écrit

$$\Phi = v_0 r \cos\theta + \frac{v_0 R^3 \cos\theta}{2 r^2} \quad (\text{II.45})$$

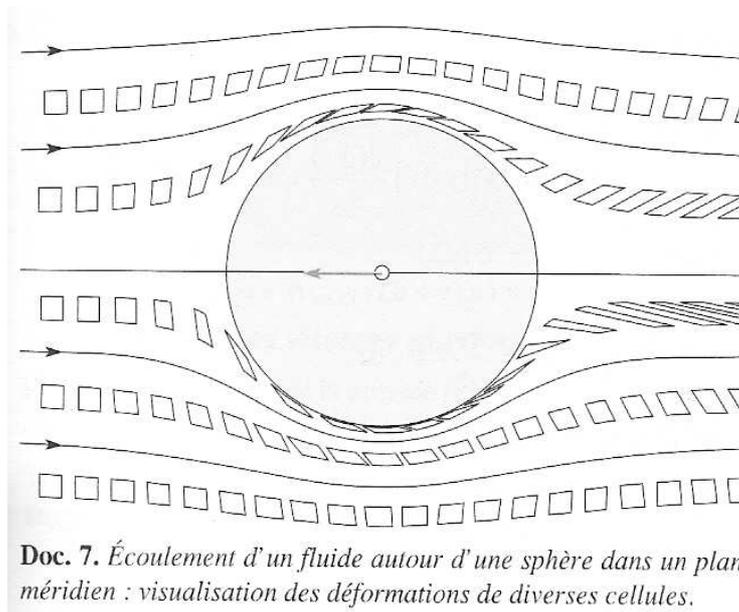
✧ Et le champ de vitesse associé

$$\vec{v} = v_0 \cos\theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \vec{u}_r - v_0 \sin\theta \left(1 + \frac{R^3}{2 r^3}\right) \vec{u}_\theta \quad (\text{II.46})$$

★ interprétation

🌀 le champ de vitesse

✧ Représentons les lignes de courant et la déformation des particules de fluide¹³



✧ Nous pouvons voir deux points particuliers, les points A et B , tels que $\vec{v}(A) = \vec{v}(B) = \vec{0}$.

✧ Ces points A et B sont appelés « points d'arrêt ».

✧ D'un point de vue symétrie, nous voyons qu'en deux points symétriques $M(r, \theta)$ et $M'(r, \pi - \theta)$

$$v_\theta(M) = v_\theta(M') \quad \text{et} \quad v_r(M) = -v_r(M') \quad (\text{II.47})$$

✧ Regardons enfin le point C tel que $C(R, \pi/2)$.

✧ La vitesse en C s'écrit, après simplification,

¹³. Source : H-Prépa, mécanique des fluides.

$$\vec{v}(C) = \frac{3}{2} \vec{v}_0 \quad (\text{II.48})$$

- ✧ Autrement dit le fluide a été accéléré ! Accéléré par la présence d'un obstacle, voilà ce qui pourrait heurter le sens commun. . .
- ✧ En réalité, c'est tout à fait normal : la balle, par sa présence, diminue l'espace disponible pour l'écoulement de l'air. Or il s'agit d'un écoulement incompressible. Et donc, si la section d'écoulement est plus petite, la norme de la vitesse doit augmenter, tout est normal.
- ✧ Du point de vue de la particule de fluide, l'augmentation de vitesse ne peut venir que des forces exercées **par les autres** particules de fluide.

🔗 retour *a posteriori* sur la solution *a priori*

- ✧ Lors de la recherche des solutions, nous avons trouvé $\beta = 0$, pouvions-nous nous en douter dès le début ?
- ✧ La réponse est oui !
- ✧ En fait la solution en Φ_2 correspond à une charge ponctuelle qui « injecte » des lignes de champ. Elle est donc analogue à une source qui injecterait du fluide.
- ✧ Comme ici la sphère n'injecte ni n'absorbe de fluide, cette solution ne pouvait pas convenir.
- ✧ Question subsidiaire : et qu'aurions-nous fait si nous étions arrivé à une contradiction ? Par exemple une équation aurait donné $\beta = 0$ et l'autre $\beta = v_0 R$.
- ✧ La réponse est simple : une contradiction aurait signifié que la solution recherchée ne pouvait pas s'écrire sous la forme de cette superposition.
- ✧ Il aurait donc fallu soit chercher d'autres potentiels à superposer, soit résoudre l'équation de LAPLACE directement, comme nous allons le faire maintenant.

II.5 – Morale

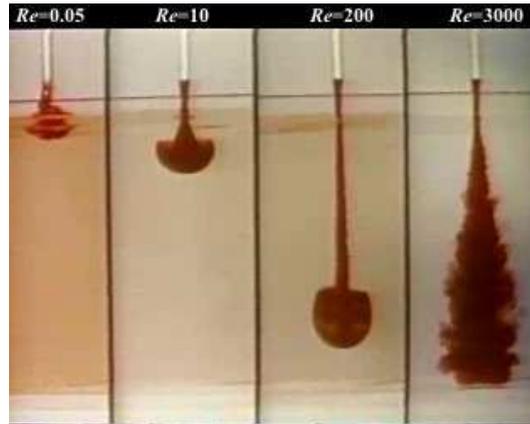
- ✧ Pour les exemples précédents, nous avons pu trouver l'ensemble de l'écoulement **sans aucune** notion de force.
- ✧ Cela signifie que, sans savoir ce qui se passe dans le fluide, sans connaître les interactions entre particules de fluide, nous pouvons quand même trouver et étudier des écoulements réels !
- ✧ Pour un peu, nous pourrions presque avoir l'impression de n'avoir fait que du calcul. . .
- ✧ En réalité, la physique est bel et bien présente mais se cache dans de toutes petites lois utilisées très vite au début ou à la fin. Il s'agit de :
 - ➔ l'incompressibilité de l'écoulement qui se traduit par $\text{div } \vec{v} = 0$;
 - ➔ l'aspect rotationnel ou non de l'écoulement ;
 - ➔ l'imperméabilité des parois.
- ✧ Tous ces aspects, indéniablement physiques, imposent, comme nous venons de le voir, suffisamment de contraintes pour pouvoir déterminer, dans certaines conditions, quels écoulements sont possibles ou non.
- ✧ Bien sûr, ce n'est qu'une étape, car si nous voulons déterminer exactement la force que le fluide exerce sur l'objet (comme une aile d'avion), il va être indispensable de modéliser les interactions au niveau de la particule de fluide.
- ✧ Cela fera l'objet du chapitre 6.

III – Approche phénoménologique des écoulements

III.1 – Constatations expérimentales

III.1.i – mélanger des liquides

- ✧ Faisons l'expérience suivante. Prenons un récipient contenant un liquide et versons-y ce même liquide, mais coloré, pour voir comment se passe le mélange. Et faisons-le 4 fois avec 4 liquides différents, les 4 jets étant « lancé » au même instant.
- ✧ Nous obtenons quelque chose comme la photo qui suit.



Montrer le mélange des fluides.

Dynamique – Nombre de REYNOLDS : inertie et viscosité – jets liquides

- ✧ Que constatons-nous ? Il y a 4 phénoménologies différentes :
 - dans le récipient de gauche, c'est tout juste si le mélange se fait ;
 - dans le 2^e récipient, le jet et le liquide déjà présent se mélangent de manière géométrique, symétrique, « proprement » nous pourrions presque dire ;
 - dans le 3^e récipient, le mélange commence à se faire proprement mais à partir d'une certaine distance, des « ondulations » commencent à apparaître ;
 - dans le dernier récipient, nous pouvons constater que le mélange est presque déjà une réalité, c'est un mélange complètement chaotique et dont la meilleure description serait « un nuage ».
- ✧ En fait ces écoulements peuvent être caractérisés par un nombre, le nombre de REYNOLDS, qui est ici croissant de gauche à droite.
- ✧ Nous constatons que ce nombre de REYNOLDS influence grandement la phénoménologie :
 - plus le nombre de REYNOLDS est petit, plus le liquide se freine lui-même (dans le 1^{er} récipient le freinage est tel que le jet n'arrive même pas à « rentrer ») ;
 - plus le nombre de REYNOLDS est grand, plus, au contraire, le fluide a un mouvement *inertiel*, *i.e.* garde son mouvement et est très peu freiné par le reste du fluide.
- ✧ Ces constatations sont en fait très générales : dans les écoulements simplifiés (mais réels) que nous étudierons, la connaissance *a priori* du nombre de REYNOLDS permettra de se faire une idée du comportement du fluide et, donc, de pouvoir faire éventuellement des approximations appropriées.

III.1.ii – nombre de REYNOLDS

- ✧ La question reste : comment déterminer *a priori* le nombre de REYNOLDS ?

★ viscosité

- ✧ Comme l'expérience courante le montre, il y a des liquides plus ou moins « visqueux », le mot existe dans le langage commun même s'il n'a pas exactement la même signification qu'en physique.
- ✧ Nous savons tous que l'huile ne s'écoule pas de la même manière que l'eau ou que le miel d'acacia.
- ✧ Pour les distinguer, nous allons introduire une grandeur, la viscosité.

Définition

La *viscosité* (ou *viscosité dynamique*) η d'un fluide est la grandeur qui caractérise l'intensité des interactions internes au fluide.

La viscosité s'exprime en *poiseuille* (Pl) ou en *pascal seconde* (Pa.s)

☞ *Remarque.* La viscosité est appelée, parfois, viscosité dynamique pour ne pas la confondre avec une autre viscosité, la viscosité cinématique, que nous définirons au chapitre 6.

✧ C'est ainsi que

**Bon à retenir**

§ Plus la viscosité d'un fluide est grande, plus il a du mal à s'écouler.

- ✧ En d'autres termes, l'huile est plus visqueuse que l'eau.
- ✧ Quelques exemples numériques.

fluide	air	eau	lait	huile	glycérine
viscosité (Pl)	2.10^{-5}	10^{-3}	2.10^{-3}	$\sim 0,1$	~ 1

- ✧ Nous pouvons constater que, à l'instar du henry, le poiseuille est une « grande » unité.
- ✧ Nous verrons dans le chapitre 6 une définition mécanique de la viscosité, définition qui ouvre la voie à des mesures précises de cette grandeur.

★ calcul du nombre de REYNOLDS

✧ Nous pouvons maintenant définir le nombre de REYNOLDS

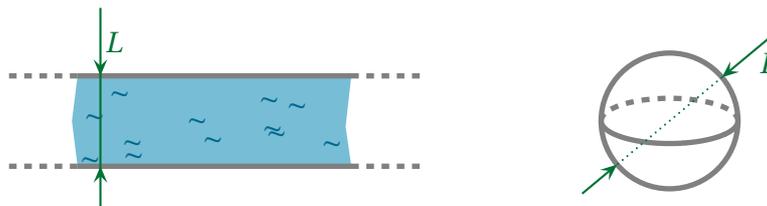
Définition

Le *nombre de REYNOLDS* est défini par

$$\text{Re} \triangleq \frac{\rho V L}{\eta} \quad \text{où :}$$

- ρ est la masse volumique du fluide ;
- V est la vitesse caractéristique de l'écoulement ;
- L est la longueur caractéristique de l'écoulement ;
- η est la viscosité (dynamique) du fluide.

- ✧ La longueur caractéristique est la longueur caractéristique soit de l'obstacle soit de la canalisation.
- ✧ Dans le cas d'un objet sphérique ou cylindrique, la longueur caractéristique est le diamètre¹⁴.

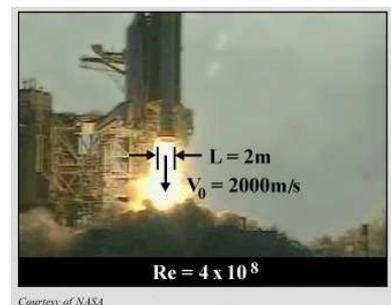
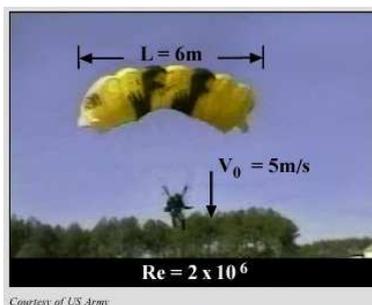
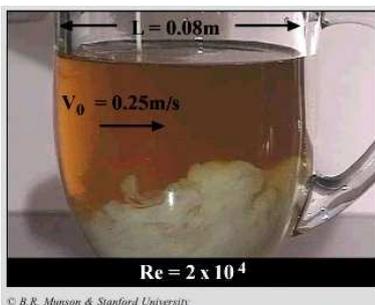
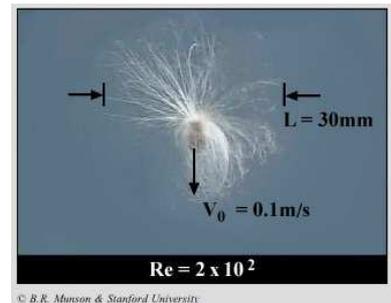
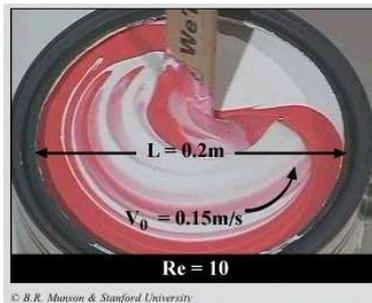
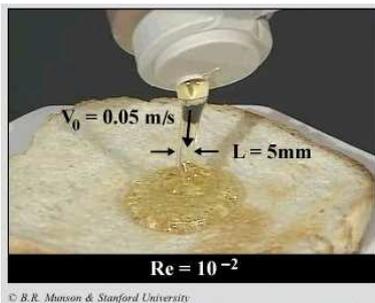


14. N'importe quel bricoleur, qu'il soit professionnel ou « du dimanche », achète des tuyaux d'un certain diamètre (12 mm, 8 mm...) et *jamais* des tuyaux d'un certain rayon. La raison est extrêmement simple : il est bien plus facile de mesurer le diamètre que le rayon. Le fait de définir un cercle, une sphère ou un cylindre par un rayon nous vient de l'apprentissage de la construction au compas où là, effectivement, le rayon est important.

★ **exemples numériques**

✧ Regardons quelques situations, plus ou moins classiques, d'écoulement. Dans l'ordre :

- le versement de miel sur une tartine ;
- le mélange de deux peintures ;
- le vol d'une graine de pissenlit ;
- un nuage de lait dans un mug de thé ;
- une descente en parachute ;
- le décollage d'une navette spatiale.



Montrer les exemples.
 Dynamique – Nombre de REYNOLDS : inertie et viscosité – galerie

- ✧ Nous pouvons constater que le nombre de REYNOLDS peut facilement varier sur 10 ordres de grandeurs et même plus !
- ✧ Pour notre part, nous retiendrons les limites (arbitraires) suivantes.

Définition

| Pour $Re \leq 10$, l'écoulement est dit *laminaire*, la viscosité prédomine.
| Pour $Re \geq 10^3$, l'écoulement est dit *turbulent*, les effets inertiels prédominent.

✧ Notons que la valeur « exacte » du nombre de REYNOLDS n'a aucune importance, c'est essentiellement son ordre de grandeur qui compte.

III.2 – Force exercée par un fluide

III.2.i – ça dépend du nombre de REYNOLDS

★ **le fluide s'entraîne lui-même**

✧ Comme la définition même de la viscosité le laisse imaginer (c'est la grandeur qui caractérise l'intensité des interactions au sein du fluide), suivant que la viscosité va être grande ou non, le fluide va pouvoir se mettre en mouvement lui-même... ou non.

- ✧ Mettons dans un grand cristallisateur deux fluides au repos, un visqueux et l'autre moins. Injectons une ligne d'encre pour repérer une position initiale et plaçons le tout sur un plateau tournant que nous mettons en route.
- ✧ Au bout de quelques instant, alors même que le cristallisateur est en train de tourner, une photo donne ceci



Montrer les vidéos.

dynamique – Re : inertie et viscosité – écoulement simple avec et sans viscosité – 3° onglet puis 2°

- ✧ Sans trop de surprise :
 - ➔ le liquide faiblement visqueux (en jaune) s'entraîne peu lui-même, le bord est en train de bouger alors que le centre est encore immobile ;
 - ➔ le liquide visqueux (en rouge-orange) s'entraîne lui-même au point qu'il agit presque comme un solide, tout se met en mouvement d'un coup et l'ensemble ne se déforme que peu ou pas.

★ le fluide exerce des forces sur les objets

- ✧ Faisons la même expérience mais, cette fois, en mettant un petit flotteur dans les deux liquides.

Montrer les deux vidéos.

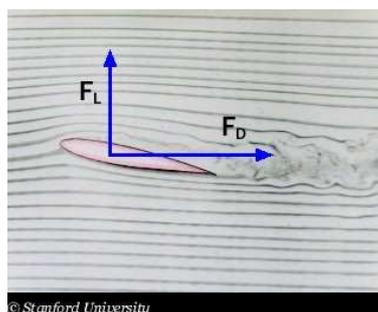
dynamique – écoulement à petit Re – écoulement avec et sans inertie

- ✧ Aucune surprise là non plus :
 - ➔ dans le cas d'une faible viscosité, il faut « un certain temps » entre le moment où le cristallisateur se met à tourner et le moment où le flotteur commence à bouger ;
 - ➔ en revanche, avec une viscosité plus élevée, le flotteur démarre et s'arrête en même temps que le fluide, les forces exercées par ce dernier sont donc bien plus intenses.

III.2.ii – portance et traînée

★ deux forces de même nature

- ✧ Considérons un obstacle, quel qu'il soit, plongé dans un écoulement uniforme \vec{v}_0 .
- ✧ Nous pouvons décomposer la force qu'il subit en deux : une composante dans la direction de la vitesse de l'écoulement et une composante normale à cette direction.



Montrer la décomposition de la force exercée par un fluide sur une aile.

Dynamique – variation de force avec Re et la géométrie – force de portance et de traînée

Définition

La *traînée* est la force exercée par un fluide dans la direction de la vitesse de l'écoulement.

Définition

La *portance* est la force exercée par un fluide dans la direction normale à la direction de la vitesse de l'écoulement.

- ✧ Remarquons que si la traînée est toujours orientée dans le sens de la vitesse de l'écoulement, la portance, elle, peut être vers le haut ou vers le bas :
 - comme nous pouvons nous en douter, les avions sont conçus de telle sorte que la portance soit vers le haut de manière à soulever l'avion ;
 - les voitures de courses, au contraire, par l'adjonction d'ailerons sont plaquées au sol, c'est une portance dite « négative »¹⁵.

★ **coefficients de traînée et de portance**

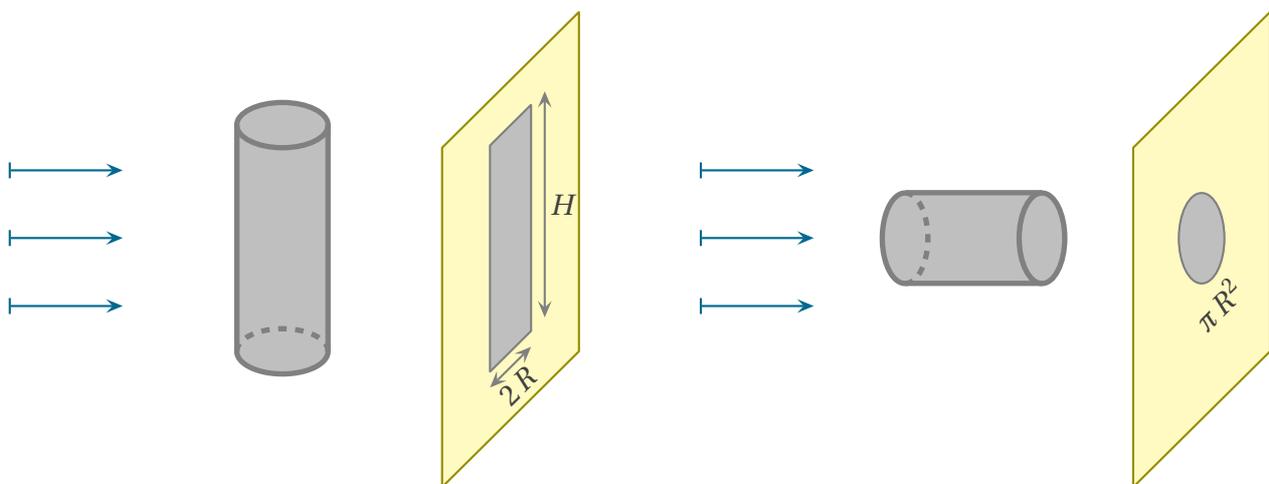
Définition

Le *coefficient de traînée*, noté C_x est le le nombre tel que

$$f_{\text{traînée}} \triangleq \frac{1}{2} C_x \rho S v^2 \quad \text{où :}$$

- ρ est la masse volumique du fluide ;
- S est l'ombre projetée de l'objet dans la direction de l'écoulement ;
- v est la vitesse au loin du fluide.

- ✧ L'ombre projetée est la surface de l'ombre que crée l'objet lorsqu'il est éclairé par de la lumière parallèle dans la direction de l'écoulement.



- ✧ La définition n'est pas si étrange qu'il n'y paraît.

15. Cette portance négative peut être si intense qu'elle peut dépasser le poids, ce qui fait que, en théorie, une F1 lancée à pleine vitesse pourrait rouler au plafond. Tant qu'elle ne s'arrête pas.

- ✧ En effet, à l'instar de la pression cinétique¹⁶, la force qu'un fluide exerce est « naturellement » fonction de sa masse volumique, de la surface qu'il « heurte » et du carré de sa vitesse.
- ✧ Le C_x représente donc le caractère aérodynamique de l'objet : plus celui-ci est petit, mieux il pénètre dans le fluide alors que plus le C_x est grand, plus l'objet a de difficulté pour se frayer un chemin dans le fluide.
- ✧ Comme nous le verrons juste après, le C_x dépend évidemment de la géométrie de l'objet et du fluide mais dépend aussi énormément de la vitesse ! C'est très très loin d'être une constante.

Définition

Le *coefficient de portance*, noté C_z est le le nombre tel que

$$f_{\text{portance}} \triangleq \frac{1}{2} C_z \rho S v^2 \quad \text{où :}$$

- ρ est la masse volumique du fluide ;
- S est la surface caractéristique de l'objet ;
- v est la vitesse au loin du fluide.

- ✧ S n'est pas, ici, l'ombre projetée, mais plutôt la surface caractéristique qui est, souvent, la surface de l'objet « vue de dessus au repos ». Elle représente la surface sur laquelle peut « s'appuyer » l'objet.

III.3 – Force de traînée

III.3.i – expérience type

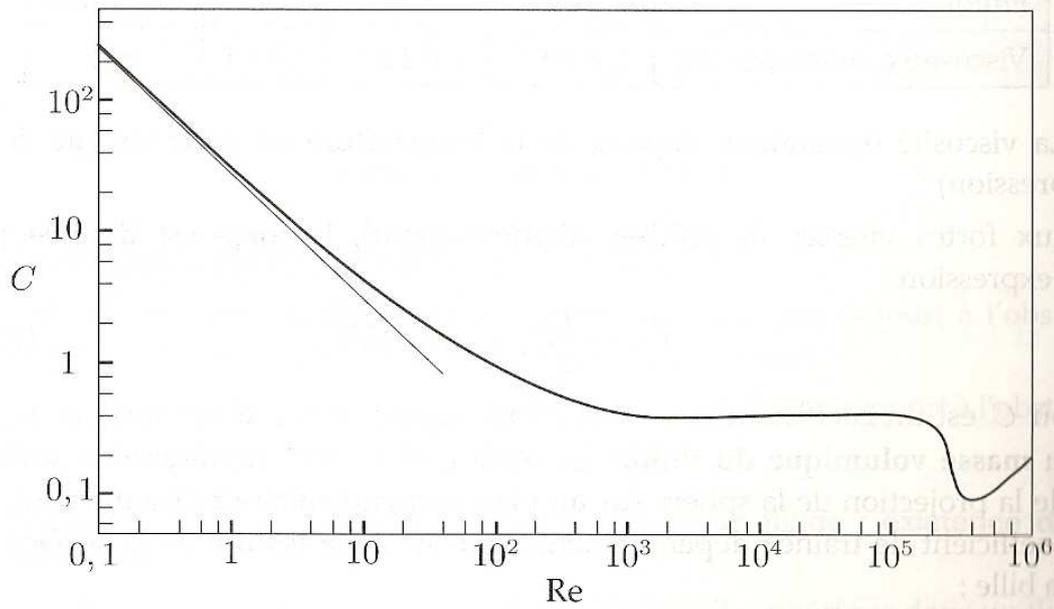
- ✧ Considérons une bille, ou tout autre objet sphérique de rayon R , dans une soufflerie.
- ✧ L'ombre projetée vaut, ici, sans ambiguïté $S = \pi R^2$.
- ✧ De plus, au niveau du nombre de REYNOLDS, L , η et ρ sont intrinsèquement fixés. Seule V est variable et est directement proportionnel à Re .
- ✧ En mesurant la force nécessaire à exercer sur la sphère pour la maintenir immobile, nous pouvons en déduire la force exercée par le fluide sur celle-ci et tracer le tout en fonction du nombre de REYNOLDS.

III.3.ii – résultat

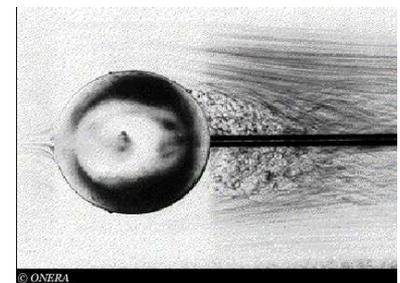
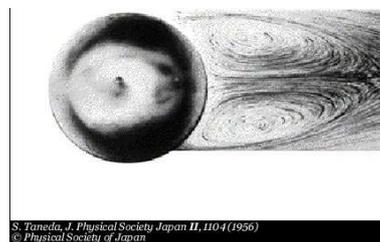
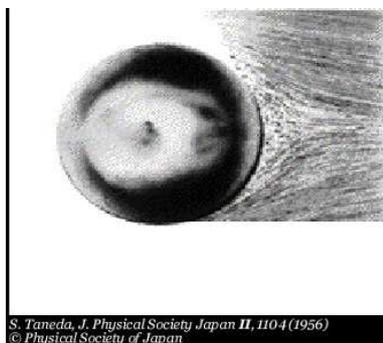
- ✧ Commençons par regarder la courbe obtenue¹⁷.

16. Voir cours de première année.

17. Source : oubliée...



- ✧ Nous pouvons constater qu'effectivement le C_x est une grandeur très variable puisqu'il varie sur un peu plus que 3 ordres de grandeurs (attention, les échelles sont logarithmiques).
- ✧ De plus, nous pouvons constater que, suivant la vitesse de l'écoulement, *i.e.* suivant le Re , l'allure de l'écoulement est très différent.
- ✧ Ci-dessous nous pouvons voir les photos associées à trois écoulements de nombre de REYNOLDS croissant.



Montrer le graphique du coefficient de traînée.

Dynamique – variation des forces avec le nombre de REYNOLDS et la géométrie – coefficients de traînée
pour les sphères et les cylindres

- ✧ Nous pouvons aisément constater que la taille du sillage, de la perturbation, que crée la sphère derrière elle est, certes, fonction de la vitesse de l'écoulement, mais pas de manière simple.
- ✧ En effet, si dans un premier temps quand la vitesse augmente, le sillage augmente aussi, il arrive un moment où, étrangement, celui-ci rediminue brutalement provoquant ainsi la chute du C_x .
- ✧ Le fait que cette chute brutale intervienne à nombre de REYNOLDS élevé explique pourquoi les balles de golf n'ont pas une surface lisse mais trouée. En effet la présence de ces irrégularités va augmenter le nombre de REYNOLDS et ainsi provoquer une baisse notable du C_x et donc un meilleur aérodynamisme.

III.3.iii – frottements fluides

★ à faible vitesse

- ✧ À faible vitesse, nous pouvons constater que la courbe décroît linéairement avec une pente d'environ -1 .
- ✧ Or cette courbe, de par la présence de l'échelle logarithmique représente $\log C_x$ en fonction de $\log Re$.
- ✧ Nous avons donc

$$\log C_x = a - \log Re \quad \rightsquigarrow \quad C_x = \frac{C^{te}}{Re} \quad (\text{III.1})$$

- ✧ Et comme le nombre de REYNOLDS est proportionnel à la vitesse, nous pouvons dire

$$C_x = \frac{C^{te'}}{v} \quad (\text{III.2})$$

- ✧ En reportant dans l'expression de la force de traînée, nous trouvons

$$f_{\text{traînée}} = \frac{1}{2} \rho S v^2 C_x \quad \rightsquigarrow \quad f_{\text{traînée}} \propto v \quad (\text{III.3})$$

- ✧ Nous retrouvons une loi bien connue



Loi

À vitesse faible, *i.e.* à nombre de REYNOLDS petit, la force de traînée est proportionnelle à la vitesse.

12

- ✧ Dans le cas d'une sphère, il existe même la loi de STOKES, avec r le rayon de la sphère

$$\vec{f}_{\text{traînée}} = -6\pi\eta r \vec{v} \quad (\text{III.4})$$

★ à grande vitesse



Bon à retenir

Pour une sphère, à nombre de REYNOLDS élevé, le C_x est presque constant et vaut environ 0,5.

- ✧ Nous en déduisons immédiatement que

$$f_{\text{traînée}} = \frac{1}{2} \rho S v^2 C_x \quad \rightsquigarrow \quad f_{\text{traînée}} \propto v^2 \quad (\text{III.5})$$

- ✧ Et donc



Loi

À vitesse élevée, *i.e.* à nombre de REYNOLDS grand, la force de traînée est proportionnelle au carré de la vitesse.

12

III.4 – Couche limite

- ✧ En mécanique des fluides, s'il y a une chose qui s'oublie facilement, c'est que **toute** la physique des forces que le fluide exerce sur l'objet se passe au niveau du *contact* fluide – objet, pour la simple et néanmoins excellente raison qu'il s'agit de forces de contact.
- ✧ Autrement dit, il est *fondamental* de s'intéresser à ce qui se passe tout près de l'objet.

III.4.i – kesako ?

✧ De manière un peu simplifiée, nous pouvons tenter de donner la définition suivante.

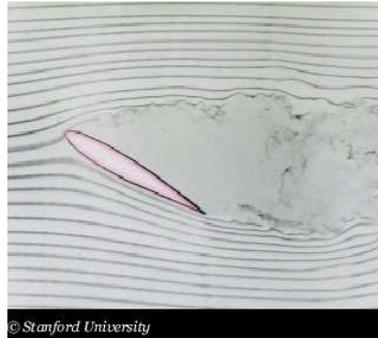


Définition

La *couche limite* est la zone près de l'objet où l'écoulement est perturbée en terme de valeur de vitesse ou de ligne de courant.

✧ C'est un peu ce que nous avons appelé « sillage » dans le paragraphe précédent.

✧ Comme nous pouvons le voir sur la photo ci-dessous, il y a des situations où la « couche limite » peut envahir une zone notablement grande de l'espace.



Montrer le décollement.

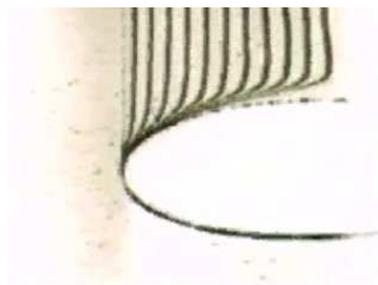
Couche limite – décollement – décollement sur une aile

✧ Dans le cas précédent, nous dirons que la couche limite *se décolle*.

✧ Si la couche limite se décolle pour une aile d'avion, la portance chute brutalement ce qui entraîne le « décrochage » de l'avion.

III.4.ii – couche limite laminaire

✧ Dans l'expérience ci-dessous, un dispositif injecte à intervalle régulier de l'encre suivant une ligne droite et orthogonale à la vitesse d'arrivée du fluide sur l'obstacle.



Montrer la couche limite laminaire.

Couche limite – Couche limite laminaire – calcul de couche limite

✧ Nous pouvons constater que les particules de fluide « loin » de l'obstacle avancent régulièrement : elles sont en dehors de la couche limite.

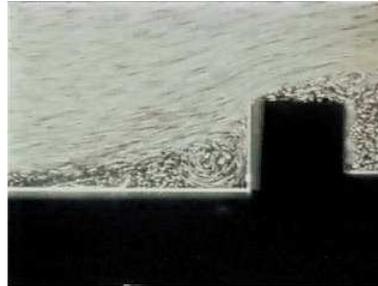
✧ En revanche, près de l'obstacle les particules de fluide vont moins vite et que la zone, la couche limite, dans laquelle les particules de fluide sont perturbées augmente avec la distance parcourue sur l'obstacle.

✧ Cette couche limite est dite *laminaire* car elle est associée à un écoulement laminaire.

✧ Nous montrerons dans le chapitre 6 que l'épaisseur δ est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{Re}}$.

III-4.iii – couche limite turbulente

- ✧ Comme nous l'avons vu avec l'aile d'avion, dans le cas d'écoulement turbulent (*i.e.* à grand nombre de REYNOLDS), la couche limite peut occuper une grande zone de l'espace, elle se décolle.

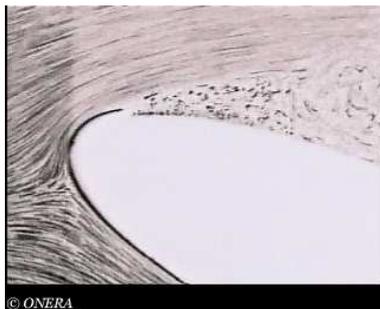


© ONERA

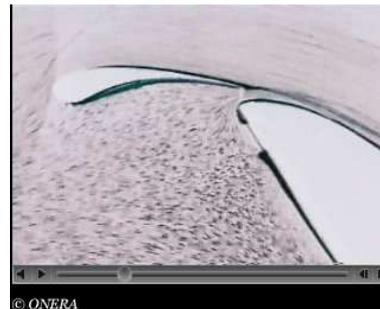
Montrer les turbulences.

Couche limite – Décollement – Écoulement autour d'arrêtes ou d'objets mal profilés

- ✧ Ceci étant, le décollement d'une couche limite est généralement néfaste, c'est pourquoi il existe plusieurs techniques pour la recoller comme l'aspiration de fluide, l'éjection de fluide ou, comme ci-dessous, l'adjonction d'un bord d'attaque.



© ONERA



© ONERA

Montrer le recollement de couches limites.

Couche limite – Décollement – Décollement bord d'attaque (onglets 1 puis 2)

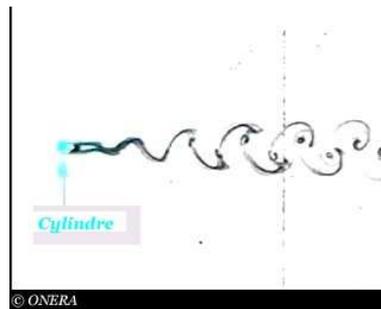
Couche limite – Décollement – Effet des conditions aux limites sur le décollement (onglets 1 puis 3)

III-5 – Effets célèbres

- ✧ La mécanique des fluides est une science très vaste, très complexe aux phénomènes d'une variété considérable (de la pâte dentifrice aux voitures de sport, en passant par les avalanches, il y a de quoi faire).
- ✧ Voici deux effets complexes et célèbres.

III-5.i – allées de BÉNARD – VON KARMAN

- ✧ Considérons un cylindre infini plongé dans un écoulement uniforme à nombre de REYNOLDS modéré, ni trop lentement pour ne pas provoquer un écoulement laminaire, ni trop rapide pour ne pas que l'écoulement soit turbulent.
- ✧ Très rapidement nous voyons apparaître une structure périodique dans le sillage du cylindre.



Montrer les allées.

Couche limite – Décollement – Écoulement autour d'un cylindre

- ✧ Ce sillage est appelée « les allées de VON KARMAN ».
- ✧ Si l'objet n'est pas cylindrique mais sphérique, les tourbillons partent un peu dans toutes les directions et pas forcément dans un plan.
- ✧ La conséquence de ces allées est bien connue des sportifs : en tapant dans une balle fort, mais pas trop, et sans la faire tourner sur elle même, la balle « flotte » et a des mouvements assez irréguliers autour de la trajectoire prévue.
- ✧ Pourquoi ? Parce que, comme nous pouvons le constater, l'existence même de ces allées « envoie » du fluide d'un côté ou de l'autre. Pour cela il faut une force, d'un côté ou de l'autre. Mais, la loi des actions réciproque implique que le fluide exerce en retour une force sur l'objet, tantôt d'un côté, tantôt de l'autre. D'où le flottement...

III-5-ii – pont de Takoma

- ✧ S'il est un pont connu, c'est le pont de Takoma, aux États-Unis, qui s'est écroulé un jour de vent.

Montrer la vidéo.



- ✧ Que s'est-il passé ?
- ✧ Lors de la construction du pont, seule une étude mécanique de résistance avait été menée, l'aspect « couplage avec le vent » n'avait pas été pris en compte.
- ✧ Sauf qu'un jour, la météo fut telle que les caractéristiques du vent (vitesse, durée) firent entrer le pont en résonance et, à force, celui-ci s'écroula.
- ✧ La légende, forcément invérifiable, raconte qu'il n'y eu qu'un seul mort... un chien oublié dans une voiture.

Compétences du chapitre

Les compétences à vocation essentiellement expérimentale sont indiquées en italique.

Deuxième année

Mécanique

★ 2.1 Description d'un fluide en mouvement

✧ Champ eulérien des vitesses. Lignes de champ. Tubes de champ.

1 Définir et utiliser l'approche eulérienne. [18]

✧ Écoulement stationnaire.

2 Savoir que le caractère stationnaire dépend du référentiel. [16]

✧ Dérivée particulaire de la masse volumique. Écoulement incompressible.

3 Établir l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique. Utiliser son expression pour caractériser un écoulement incompressible. Savoir que le caractère incompressible ne dépend pas du référentiel. [30,32,33]

✧ Équation locale de conservation de la masse.

4 Établir cette équation dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. [26]

5 Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie. [28]

✧ Caractérisation d'un écoulement incompressible par la divergence du champ des vitesses.

6 Utiliser $\text{div } \vec{v} = 0$ pour un écoulement incompressible. [32]

✧ Dérivée particulaire du vecteur-vitesse : terme local ; terme convectif.

7 Associer $\frac{d\vec{v}}{dt}$ à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point. [22]

8 Connaître et utiliser l'expression de l'accélération avec le terme convectif sous la forme $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$. [21]

9 Utiliser l'expression fournie de l'accélération convective en fonction de $\text{grad } \frac{v^2}{2}$ et $\text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v}$. [42]

✧ Vecteur tourbillon.

10 Illustrer sur des exemples simples la signification qualitative du vecteur tourbillon. [41]

✧ Écoulement irrotationnel défini par la nullité du rotationnel du champ des vitesses en tout point ; potentiel des vitesses.

11 Utiliser $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ pour un écoulement irrotationnel et en déduire l'existence d'un potentiel des vitesses. Savoir que le caractère irrotationnel dépend du référentiel. [48]

★ 2.2 Actions de contact dans un fluide en mouvement

✧ Traînée d'une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide newtonien : nombre de REYNOLDS ; coefficient de traînée C_x ; graphe de C_x en fonction du nombre de REYNOLDS ; notion d'écoulement laminaire et d'écoulement turbulent.

12 Évaluer un nombre de REYNOLDS pour choisir un modèle de traînée linéaire ou un modèle de traînée quadratique. [61,61]