

# Thermodynamique

## Chapitre 2

### **Phénomènes de diffusion**

# Table des matières

<b>Biographies succinctes</b>	<b>6</b>
<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>I Diffusion thermique</b>	<b>9</b>
I-1 Première approche des transferts thermiques . . . . .	9
I-1·i modes de transfert . . . . .	9
la convection . . . . .	9
le rayonnement . . . . .	10
la conduction . . . . .	10
I-1·ii point de vue de la thermodynamique . . . . .	10
I-1·iii flux thermique . . . . .	11
résultat . . . . .	11
justification . . . . .	11
un dernier mot . . . . .	12
I-1·iv production énergétique . . . . .	12
phénoménologie de base . . . . .	12
3 grands types de production . . . . .	12
traduction formelle . . . . .	13
I-2 Bilan thermique . . . . .	13
I-2·i courant thermique . . . . .	13
l'énergie va se déplacer . . . . .	13
généralisation . . . . .	14
avec la convention usuelle . . . . .	15
simplification usuelle . . . . .	16
I-2·ii bilan 1D . . . . .	16
exemple du barreau calorifugé . . . . .	16
approche mésoscopique . . . . .	17
variation dans le temps . . . . .	17
échange à travers la surface . . . . .	18
création en volume . . . . .	18
rassemblement . . . . .	19
résultat connu . . . . .	19
I-2·iii bilan 3D . . . . .	19
situation . . . . .	19
variation dans le temps . . . . .	20
production en volume . . . . .	20
échange à travers la surface . . . . .	21
rassemblement . . . . .	21
I-2·iv pause divergence . . . . .	22
relation fondamentale . . . . .	22
comment ça marche? . . . . .	23
interprétation physique . . . . .	24
expression en coordonnées cartésiennes . . . . .	25
c'est un opérateur vectoriel différentiel . . . . .	26
c'est une vision 3D d'un théorème connu . . . . .	26
I-2·v petit flash-back . . . . .	26
I-2·vi régime stationnaire sans production . . . . .	27

	en 1D . . . . .	27
	continuité du flux en 3D . . . . .	27
I-3	Équation de diffusion thermique . . . . .	27
I-3·i	loi de FOURIER . . . . .	28
	énoncé . . . . .	28
	interprétation . . . . .	28
	limites . . . . .	28
I-3·ii	équation en 1D . . . . .	29
	équation de diffusion . . . . .	29
	cas particulier fréquent : diffusion sans terme de création . . . . .	29
	ordres de grandeur . . . . .	30
I-3·iii	interprétation de l'équation de diffusion . . . . .	30
	approche technique . . . . .	30
	irréversibilité . . . . .	30
	ordre de grandeur . . . . .	31
	régime permanent stationnaire . . . . .	32
I-3·iv	équation de diffusion thermique en 3D . . . . .	32
I-3·v	pause laplacien et nabla . . . . .	33
	définition du laplacien . . . . .	33
	expression du laplacien en coordonnées cartésiennes . . . . .	33
	notation nabla . . . . .	33
I-3·vi	nouveau flash-back . . . . .	35
	passer de la 3D à la 1D . . . . .	35
	passer de la 1D à la 3D sur un cas déjà rencontré . . . . .	35
	une notation et un nom . . . . .	35
I-4	Quelques solutions . . . . .	36
I-4·i	méthode . . . . .	36
I-4·ii	mur de maison – régime stationnaire 1D . . . . .	36
	mur simple . . . . .	36
	mur isolé . . . . .	38
I-4·iii	barreau radioactif – régime stationnaire en symétrie cylindrique . . . . .	41
	dispositif et analyse . . . . .	41
	mise en équation : méthode du bilan global . . . . .	42
	mise en équation : méthode sans réfléchir . . . . .	45
	comparaison des deux méthodes . . . . .	46
I-4·iv	température dans le sol – régime sinusoïdal forcé en 1D . . . . .	46
	situation et analyse physique . . . . .	46
	analyse technique . . . . .	47
	résolution . . . . .	48
	interprétation . . . . .	49
I-4·v	choc thermique – solution en régime transitoire en 1D . . . . .	50
	situation . . . . .	50
	graphiquement . . . . .	51
	solution et interprétation . . . . .	51
I-4·vi	résumé des conditions aux limites . . . . .	52
	condition au bord d'un milieu diffusant . . . . .	52
	condition entre deux milieux diffusants . . . . .	53
I-5	Résistance thermique . . . . .	56
I-5·i	définition par l'exemple . . . . .	56
	tout d'abord les circonstances . . . . .	56

	exemple du mur simple . . . . .	56
	définition retenue . . . . .	57
	interprétation . . . . .	57
I-5-ii	analogie électrique . . . . .	57
I-5-iii	association de résistances thermiques . . . . .	58
	association parallèle . . . . .	58
	association série . . . . .	59
	exemple du mur isolé . . . . .	60
I-5-iv	résistance cylindrique . . . . .	61
	situation, analyse . . . . .	61
	méthode : associer des résistances élémentaires . . . . .	62
	méthode : partir de la loi globale . . . . .	63
	comparaison . . . . .	64
I-6	Retour sur le rayonnement . . . . .	65
I-6-i	le corps noir . . . . .	65
	kesako ? . . . . .	65
	émissivité . . . . .	65
	loi de WIEN . . . . .	65
	loi de STEFAN . . . . .	66
I-6-ii	la Terre et le Soleil . . . . .	66
	le Soleil . . . . .	66
	la Terre . . . . .	67
	l'effet de serre . . . . .	67
<b>II</b>	<b>Diffusion de particules</b> . . . . .	<b>69</b>
II-1	Molécules en mouvement . . . . .	69
II-1-i	exemples de phénomènes . . . . .	69
II-1-ii	mouvement brownien . . . . .	69
II-1-iii	modèle de marche au hasard . . . . .	70
	un modèle discret . . . . .	70
	mise en équation . . . . .	70
	approximation des milieux et des temps continus . . . . .	71
	lien avec une approche microscopique . . . . .	71
	distance moyenne parcourue . . . . .	72
II-2	Bilan moléculaire . . . . .	73
II-2-i	modélisation . . . . .	73
	densité particulaire . . . . .	73
	courant particulaire . . . . .	73
II-2-ii	bilan particulaire 1D . . . . .	74
	situation . . . . .	74
	approche mésoscopique . . . . .	74
	variation dans le temps . . . . .	74
	échange à travers la surface . . . . .	75
	production en volume . . . . .	75
	rassemblement . . . . .	76
II-2-iii	bilan particulaire 3D . . . . .	76
	approche globale . . . . .	76
	variation dans le temps . . . . .	77
	échange à travers la surface . . . . .	77
	production en volume . . . . .	78

	rassemblement . . . . .	78
II-3	Équation de diffusion particulaire . . . . .	78
II-3·i	loi de FICK . . . . .	78
	énoncé . . . . .	79
	interprétation, limites . . . . .	79
	quelques valeurs . . . . .	79
II-3·ii	équation de diffusion . . . . .	79
	version 1D . . . . .	79
	version 3D . . . . .	80
	approche qualitative . . . . .	80
	interprétation en terme de mouvement – vitesse d’ensemble . . . . .	81
II-3·iii	équation de diffusion directement en symétrie cylindrique . . . . .	82
	situation et analyse . . . . .	83
	un système particulier pour un bilan usuel . . . . .	83
II-3·iv	équation de diffusion directement en symétrie sphérique . . . . .	86
	situation et analyse . . . . .	86
	un système particulier pour un bilan usuel . . . . .	86
II-3·v	équation de diffusion en 3D . . . . .	88
	laplacien en coordonnées cylindriques dans un cas particulier . . . . .	89
	laplacien en coordonnées cylindriques dans un cas particulier . . . . .	89
II-4	Quelques solutions . . . . .	89
II-4·i	tache d’encre – régime transitoire en 1D . . . . .	89
	situation . . . . .	89
	solution, représentation . . . . .	90
II-4·ii	canal à ion – régime stationnaire 1D . . . . .	90
	<b>Compétences du chapitre</b>	<b>92</b>

## Biographies succinctes

### Pierre Simon marquis de LAPLACE

(1749 Beaumont en Auge – 1827 Paris)



Né dans une famille aisée, Pierre Simon aurait dû devenir ecclésiastique mais il décide de lui-même de monter à Paris avec une lettre de recommandation. Il fait rapidement ses preuves et Jean le Rond D'ALEMBERT lui trouve un poste rémunéré de professeur de mathématiques. Pierre Simon est élu à l'académie royale des sciences à 24 ans et à l'académie française en 1816. Entre temps son prestige international lui permettra de naviguer dans les hautes sphères aussi bien durant la monarchie que durant la révolution ou sous NAPOLÉON. Pierre Simon de LAPLACE est connu pour le « déterminisme laplacien » pour qui tout le futur et tout le passé est absolument connu à celui qui connaît les lois physiques et tous les mouvements de toutes les particules.

### Jean-Baptiste Joseph FOURIER

(1768 Auxerre – 1830 Paris)



Orphelin à 10 ans, Joseph est envoyé dans une école militaire où il brille et devient professeur à 16 ans. Plongé au cœur de la révolution, il échappe de peu à la guillotine avec la mort de ROBESPIERRE. Fin 1794, il est admis à l'école Normale Supérieure de Paris (qui fermera un an après) puis à la toute nouvelle école Polytechnique. La renommée de Joseph lui permettra de suivre NAPOLÉON dans son expédition égyptienne. À son retour, il s'installe à Grenoble comme préfet de l'Isère et effectue durant son temps libre des travaux en mathématiques dont son mémoire sur la chaleur. En 1817 il est élu à l'académie des sciences dont il deviendra le secrétaire perpétuel en 1822.

### Robert BROWN

(1773 Montrose – 1858 Londres)



Après des études de médecine, Robert, botaniste écossais, a été chirurgien dans l'armée. C'est durant cette période qu'il apprend l'allemand et s'intéresse à la botanique. Après, il participe à une expédition de 5 ans près des côtes australiennes, grâce à l'appui du président de la Royal Society, Joseph BANKS. À la mort de ce dernier, en 1820, Robert est nommé conservateur du département de botanique du British Museum. Robert est un des premiers scientifiques à utiliser fréquemment le microscope. C'est suite à ses observations qu'il découvre puis décrit le mouvement qui porte son nom et qui ne sera expliqué que bien plus tard avec l'hypothèse atomiste.

**George GREEN**

(1793 Nottingham – 1841 Nottingham)



Fils de meunier, George GREEN ne va à l'école que pendant un an (de 8 à 9 ans) puis aide son père au moulin dont il hérite à la mort de celui-ci. C'est alors qu'il se met à étudier, seul, les mathématiques et publie un ouvrage en 1828. Un mathématicien passant par là en achète une copie et encourage George à faire des études. Ce dernier tergiverse mais accepte finalement. Il rentre à l'âge de 40 ans à l'université de Cambridge où sa carrière fut brillante. Son diplôme en poche en 1837 il commence à publier quelques ouvrages. Mais il tombe malade en 1840 et rentre dans son village natal pour y mourir quelques temps plus tard.

**Mikahail OSTROGRADSKI**

(1801 Pachenna, Ukraine – 1862 Poltava, Ukraine)



Mikhail commença ses études de mathématiques à l'université de Kharkov avant de les continuer à Paris où rencontra et se lia à de célèbres mathématiciens français comme CAUCHY, BINET, FOURIER et POISSON. De retour en Russie il enseigne à Moscou puis à Saint-Pétersbourg. Ses travaux l'amènent à être élu à l'Académie américaine des arts et des sciences en 1834, à l'Académie des sciences de Turin en 1841 et à l'Académie des sciences de Rome en 1853.

**Ludwig BOLTZMANN**

(1844 Vienne – 1906 Duino)



Ludwig étudie d'abord à Linz en Autriche avant d'entrer à l'université de Vienne où il obtient un doctorat en 1867 avec une thèse sur la théorie cinétique des gaz. En 1869 il obtient une chaire de physique théorique puis occupe à partir de 1873 une chaire de mathématique avant de retourner enseigner la physique expérimentale en 1876. Les échanges très vifs avec ses collègues qui ne croyaient pas à sa théorie l'affectent particulièrement. C'est très certainement une des causes de ses deux tentatives de suicide, la seconde lui étant fatale. Ludwig BOLTZMANN meure avant d'avoir vu ses idées pleinement acceptées.

**Adolf Eugen FICK**

(1829 Kassel – 1901 Blankenberge)



Orphelin à 5 ans, Adolf a été élevé par son oncle, un physiologiste qui faisait des recherches sur la vision. Cela va conduire tout naturellement Adolf à suivre des études de médecine. En 1851 il devient docteur et introduit en 1855 une loi sur la diffusion moléculaire qui sera démontrée par Albert EINSTEIN en 1905. Ayant attrapé la tuberculose en 1879 il émigre en Afrique du Sud pour le climat mais sa femme y contracte la fièvre typhoïde et tous reviennent en Europe. Adolf Fick est principalement connu pour sa plus célèbre invention : les lentilles de contact.

# Phénomènes de diffusion

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la diffusion. Il s'agit là d'un phénomène important de la thermodynamique, car c'est une source importante d'irréversibilité.

La diffusion se caractérise par :

- la nécessité d'un support matériel (contrairement à la propagation ou à l'effusion) ;
- l'irréversibilité du phénomène ;
- la lenteur du phénomène (nous définirons plus loin en quoi ce phénomène est « lent »).

Exemples de diffusion :

- taches d'encre sur un buvard (diffusion de particules) ;
- conduction thermique (diffusion d'énergie cinétique) ;
- conduction électrique (diffusion d'électrons) ;
- viscosité des fluides (diffusion de la quantité de mouvement).

Nous séparerons cette étude en deux. Nous commencerons par nous intéresser à la diffusion thermique avant de regarder le peu de choses qui changent pour la diffusion de particules.

# I – Diffusion thermique

## I.1 – Première approche des transferts thermiques

### I.1.i – modes de transfert

#### ★ la convection



#### Définition

Le transfert thermique par *convection* correspond à un transport macroscopique de matière.

- ✧ Par exemple s'il faut « chaud » dehors et « froid » dedans, en ouvrant la porte il est possible de sentir un courant d'air (déplacement de matière) apportant le « chaud » de l'extérieur.
- ✧ Dans ce type de transport, de la matière en chasse une autre, mais de température différente.
- ✧ *A priori* dès qu'il y a un fluide, il y a de la convection sauf si le dispositif est tel que le fluide est confiné, comme dans les fenêtres double vitrage<sup>1</sup>.



- ✧ Ceci étant il est très difficile d'empêcher la convection : les chauffages des maisons et même l'eau utilisée pour faire cuire les pâtes *utilisent* la convection car cela permet naturellement d'homogénéiser le milieu et donc la température.



1. Source : [http://img.archiexpo.fr/images\\_ae/photo-g/fenetre-battante-a-double-vitrage-en-aluminium-a-coupure-thermique-3400-2164925.jpg](http://img.archiexpo.fr/images_ae/photo-g/fenetre-battante-a-double-vitrage-en-aluminium-a-coupure-thermique-3400-2164925.jpg).



### Bon à retenir

§ Si rien n'est dit, nous négligerons toujours le phénomène de convection.

☞ *Remarque.* Pour étudier la convection, il faut faire de la mécanique des fluides avec un fluide non homogène.

### ★ le rayonnement



#### Définition

Les transferts thermiques par *rayonnement* correspondent à l'absorption d'ondes électromagnétiques.

- ☞ Cela traduit le fait que les ondes électromagnétiques transportent de l'énergie.
- ☞ Expérimentalement, il suffit de s'allonger au Soleil pour avoir une sensation de « chaud » : c'est simplement que le corps absorbe de l'énergie reçue par rayonnement.
- ☞ Un autre chauffage très utile qui utilise le rayonnement est le chauffage par micro-ondes.

### ★ la conduction



#### Définition

La *conduction* est un mode de transfert énergétique de proche en proche sans déplacement de matière.

- ☞ Une expérience classique consiste à plonger une petite cuillère dans un mug contenant du café (ou du thé) très chaud.



- ☞ Au bout de quelques minutes, le bout immergé de la cuillère est devenu très chaud : l'énergie est remontée le long du manche.

## I.1.ii – point de vue de la thermodynamique

- ☞ Comme nous le verrons, la conduction (ou la diffusion pour être un peu plus général) c'est un simple problème de thermodynamique auquel nous rajouterons une loi<sup>2</sup> et c'est tout.
- ☞ Typiquement, nous considérerons un système  $\mathcal{S}$  idoine (nous verrons comment le choisir) et nous appliquerons le premier principe en version statique

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (\text{I.1})$$

---

2. La loi de FOURIER.

⇨ Nous dirons alors que la transformation est isochore ce qui permettra de simplifier en

$$dU = \delta Q \quad (I.2)$$



### Bon à retenir

Dans les phénomènes de diffusion thermique nous ferons toujours l'hypothèse de transformation isochore.

⇨ Pour que la diffusion soit isochore, il faut :

- un système solide pour lequel la dilatation est négligée, ce qui est tout à fait justifié pour des variations modérées de température : qui a déjà vu son bol augmenter de volume en y versant son café ?
- un système fluide pour lequel la convection est négligée, ce qui est acceptable si le fluide est confiné et que les variations de températures au sein de celui-ci sont faibles. Si tel n'est pas le cas, les variations de densité associées aux variations de température vont engendrer des mouvements.

## I.1.iii – flux thermique

⇨ Du point de vue de la thermodynamique, il ne reste plus qu'à écrire  $\delta Q$ .

### ★ résultat



### Loi

Le transfert thermique  $\delta Q_{\text{éch}}$  échangé entre deux systèmes s'écrit

$$\delta Q_{\text{éch}} = \varphi_q \times dS \times \delta t \quad \text{où :}$$

- $dS$  est l'aire de la surface à travers laquelle se fait l'échange ;
- $\delta t$  est la durée de l'échange ;
- $\varphi_q \geq 0$  est le *flux surfacique de puissance thermique* en  $\text{W.m}^{-2}$ , c'est un flux *algébrique*.

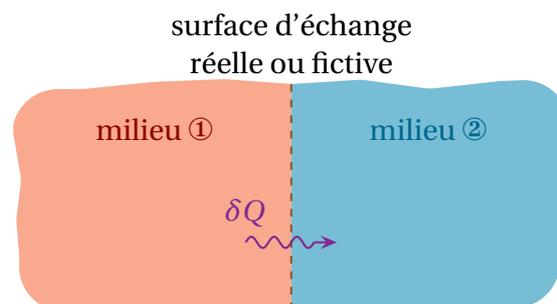
⇨ Parfois  $\delta Q$  est noté  $\delta^2 Q$  pour insister sur le fait qu'il provient de deux infiniments petits de natures différentes (un d'espace et un de temps). Nous ne le ferons pas, sauf si cela permet d'éviter des collisions de notation.

⇨ Nous n'avons certes pas encore tout à fait répondu à la question, mais, pour autant, nous n'avons pas rien dit.

⇨ En effet, même si cela paraît logique et naturel, cette relation impose le fait que le transfert thermique est proportionnel à la surface d'échange et à la durée d'échange !

### ★ justification

⇨ Imaginons deux systèmes séparés par une surface fictive.



- ⇨ De l'énergie passe de l'un à l'autre.
- ⇨ Comme l'énergie est une grandeur extensive, ce qui passe à un endroit s'additionne avec ce qui passe ailleurs ce qui signifie que

$$\delta Q \propto dS \quad (I.3)$$

- ⇨ De même l'énergie s'accumule dans le temps puisque rien ne peut la détruire donc ce qui arrive à un moment s'ajoute à ce qui arrive après d'où

$$\delta Q \propto \delta t \quad (I.4)$$

- ⇨ Par définition, nous poserons  $\varphi_q$  le facteur de proportionnalité, facteur que nous avons interprété comme le flux *surfactive* de puissance thermique.

### ★ un dernier mot

- ⇨ Cela paraît peut-être évident, mais comme nous aurons plus que l'occasion d'en parler et reparler, autant insister dès maintenant.



#### Bon à retenir

⌘ Les échanges thermiques se font à travers la surface délimitant un système.

## I.1.iv – production énergétique

### ★ phénoménologie de base



#### Bon à retenir

⌘ La production énergétique se fait au sein du système.

- ⇨ Quelquefois la production énergétique est appelée « production de chaleur » mais c'est ambigu car cela revient à considérer que la « chaleur » n'est pas une énergie comme une autre et renforce l'idée commune (et **fausse**) que la température serait proportionnelle à la chaleur.

### ★ 3 grands types de production



#### Bon à retenir

⌘ Un matériau peut produire de l'énergie en son sein suite à trois grands phénomènes :

- les réactions chimiques (en incluant les changements de phase) ;
- les réactions nucléaires ;
- l'effet JOULE.

- ⇨ En réalité, nous parlerons, *du point de vue de la diffusion thermique*, de « production » d'énergie alors que nous savons bien qu'il est impossible de produire / créer de l'énergie, tout juste pouvons nous la transformer :

- pour les réactions chimiques (ou les changements de phase), l'énergie est initialement sous forme d'énergie de liaison atomique ;
- pour les réactions nucléaires l'énergie est initialement sous forme d'énergie de liaison nucléaire ;
- pour l'effet JOULE l'énergie est initialement dans le champ électromagnétique responsable du courant.

- ✧ Dans les trois cas cette énergie est transformée en énergie interne.
- ✧ Dans ces conditions, *i.e.* toujours du point de vue de la diffusion, la distinction de l'origine de l'énergie, à savoir l'écriture sous la forme d'un  $dU_{\text{int}}$  pour l'énergie de liaison ou d'un  $\delta W$  pour l'effet JOULE, ne sert à rien. Nous nous contenterons de regarder l'énergie qui arrive et non d'où elle vient, ce qui nous permettra de parler dans tous les cas de l'énergie « produite ».

### ★ traduction formelle



**Loi**

L'énergie produite  $\delta Q_{\text{prod}}$  dans un système de volume  $\delta\tau$  s'écrit

$$\delta Q_{\text{prod}} = \mathcal{P} \times \delta\tau \times \delta t \quad \text{où :}$$

→  $\delta t$  est la durée de production ;

→  $\mathcal{P} \geq 0$  est la puissance volumique produite en  $\text{W.m}^{-3}$ .

- ✧ Le cas le plus simple de production négative d'énergie est celui d'une réaction chimique endothermique.



**Loi**

Le terme de production lié à l'effet JOULE s'écrit

$$\delta Q_{\text{prod}} = \mathcal{P} \times \delta\tau \times \delta t \quad \text{avec} \quad \mathcal{P} = \frac{j^2}{\gamma} \quad \text{où :}$$

→  $j$  est la densité de courant ;

→  $\gamma$  est la conductivité du matériau.

- ✧ Cela vient directement du fait que la puissance volumique que le champ fournit à la matière s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{champ} \rightarrow \text{matière}} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (\text{I.5})$$

## I.2 – Bilan thermique

### I.2.i – courant thermique

#### ★ l'énergie va se déplacer

- ✧ Revenons sur la petite cuillère dans le café dont le manche chauffe.



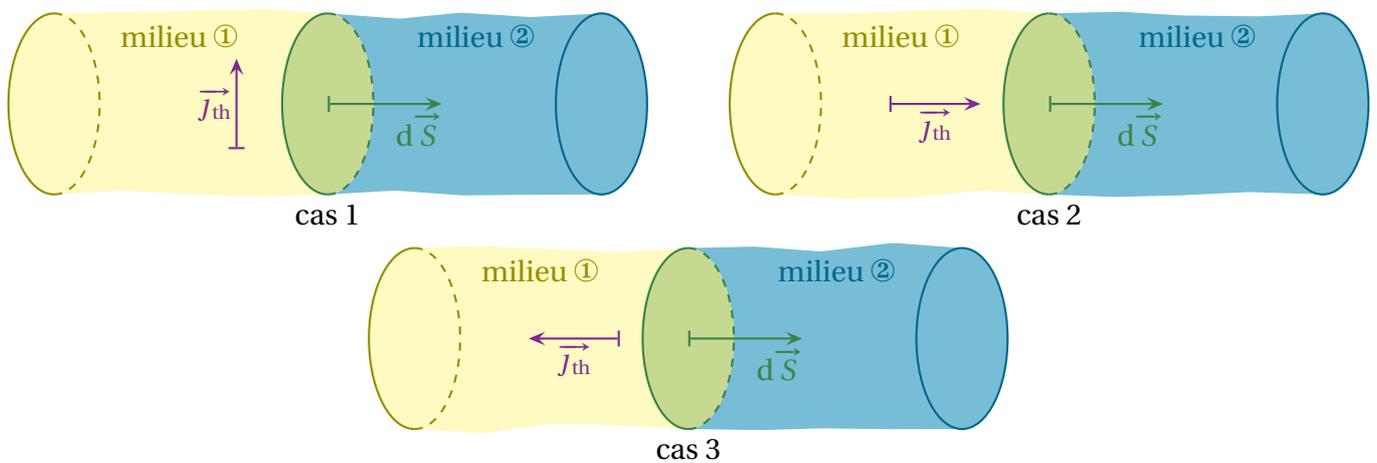
- Si la température augmente, c'est que l'énergie cinétique moyenne des atomes qui composent la petite cuillère augmente puisque nous avons  $\langle e_c \rangle = \frac{n}{2} k_B T$ .
- Cela prouve que de l'énergie s'est *déplacée* à l'intérieur du manche.

**Bon à retenir**

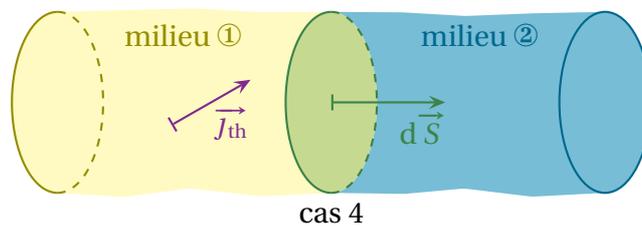
Le vecteur  $\vec{j}_{th}$  représente le déplacement d'énergie dans un problème de diffusion.

*milieu diffusant*

- Considérons quelques cas simples et cherchons ce que peut valoir le transfert thermique  $\delta Q_{1 \rightarrow 2}$ .



- Dans le premier cas nous avons  $\delta Q_{1 \rightarrow 2} = 0$  car l'énergie ne passe pas à travers la surface  $dS$  : elle la longe, mais ne la traverse pas.
- Dans le deuxième cas nous avons  $\delta Q_{1 \rightarrow 2} > 0$  car l'énergie passe effectivement de 1 vers 2.
- Enfin dans le troisième cas nous avons  $\delta Q_{1 \rightarrow 2} < 0$  car l'énergie va de 2 vers 1.
- Imaginons maintenant un quatrième cas.



- Cette fois nous avons  $\delta Q_{1 \rightarrow 2} > 0$ , mais quand même inférieur à ce qu'il était quand  $\vec{j}_{th}$  était normal à la surface.

★ **généralisation**

- Finalement, en réunissant toutes ces remarques, nous pouvons généraliser en posant la définition précise de  $\vec{j}_{th}$ .

3.  $n$  est le nombre de termes quadratiques énergétiques.

**Définition**

Le vecteur *densité surfacique de courant thermique en volume*  $\vec{J}_{\text{th}}$  est défini par

$$\delta Q = \vec{J}_{\text{th}} \cdot d\vec{S} \delta t \quad \text{où :}$$

- $d\vec{S}$  est le vecteur surface de la surface à travers laquelle se fait l'échange  $\delta Q$  ;
- $\delta Q$  est le transfert thermique dans le sens de  $d\vec{S}$  ;
- $\delta t$  est la durée du transfert.

⇨ De cette définition, nous pouvons tirer immédiatement

**Loi**

En notant  $\varphi_q$  le flux surfacique de 1 vers 2 et  $\vec{n}_{12}$  le vecteur normal dirigé de 1 vers 2, nous avons

$$\varphi_q = \vec{J}_{\text{th}} \cdot \vec{n}_{12}$$

⇨ Et ainsi

**Loi**

Le vecteur *densité surfacique de courant thermique en volume*  $\vec{J}_{\text{th}}$  est en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ .

⇨ L'unité de  $\vec{J}_{\text{th}}$  explique son nom :

- c'est bien une densité *surfacique* puisque  $\vec{J}_{\text{th}}$  est par unité de surface ;
- ce vecteur correspond bien à de l'énergie qui se déplace dans un volume.

⇨ La plupart du temps  $\vec{J}_{\text{th}}$  est appelé « densité de courant thermique volumique » ce qui présente l'avantage d'être plus léger mais aussi l'inconvénient de laisser sous entendre que l'unité est en  $\text{m}^{-3}$  ce qui est **faux**.

⇨ C'est pourquoi, même si la tournure est plus lourde, nous parlerons de « densité surfacique de courant thermique en volume » ou, pour alléger un peu, de « courant thermique en volume ».

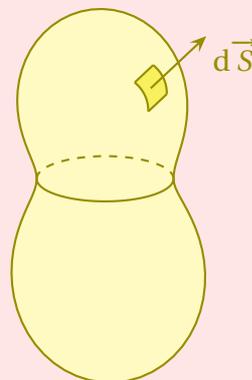
**STOP** Les énoncés n'ont pas tous le même vocabulaire donc il faudra systématiquement aller doucement et réinterpréter physiquement les phénomènes avant d'essayer de les traduire analytiquement.

★ avec la convention usuelle

**Loi**

Pour un système fermé, comme les vecteurs surface élémentaires sont orientés vers l'extérieur, nous avons

$$\delta Q_{\text{reçu}} = -\vec{J}_{\text{th}} \cdot d\vec{S} \delta t$$



⇨ Ce qui donne, en version sommée

**Loi**

Pour un système fermé, la puissance thermique reçue n'est autre que l'opposé du flux de densité de courant thermique  $\vec{j}_{th}$  et s'écrit

$$\mathcal{P}_{th} = -\Phi_j = -\oint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}_{th}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

## ★ simplification usuelle

**Loi**

Lorsque le courant thermique en volume est uniforme, le transfert thermique algébrique à travers une surface  $\vec{S}$  non infinitésimale s'écrit

$$\delta Q = \vec{j}_{th} \cdot \vec{S} \delta t$$

✧ La « démonstration » est immédiate. Comme le transfert thermique est extensif, nous avons

$$\delta Q = \int_{P \in \mathcal{S}} \delta^2 Q_P \quad \rightsquigarrow \quad \delta Q = \int_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}_{th}(P) \cdot d\vec{S}_P \delta t \quad (I.6)$$

✧ Comme le courant thermique est uniforme, nous avons  $\vec{j}_{th}(P) = \vec{j}_{th}$  indépendant de  $P$ , ce qui nous permet de le factoriser et ainsi

$$\delta Q = \vec{j}_{th} \cdot \left( \int_{P \in \mathcal{S}} d\vec{S}_P \right) \delta t \quad \rightsquigarrow \quad \delta Q = \vec{j}_{th} \cdot \vec{S} \delta t \quad (I.7)$$

✧ Ce qui est bien le résultat.

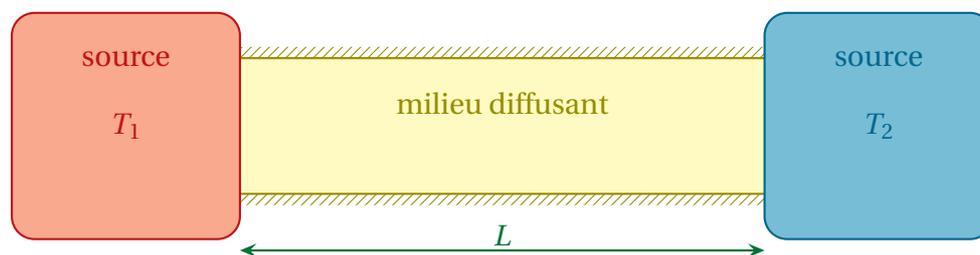
**I·2·ii – bilan 1D**

✧ Nous n'allons pas tout de suite rechercher l'équation vérifiée par la température mais plutôt celle vérifiée par l'énergie.

✧ Nous verrons le lien entre énergie et température après.

## ★ exemple du barreau calorifugé

✧ Considérons l'exemple canonique suivant.



✧ Un barreau en métal est au contact de deux thermostats, un à chaque extrémité.

✧ Nous pouvons supposer que celui-ci est isolé thermiquement sur les côtés de sorte que l'énergie ne peut se propager que suivant l'axe.

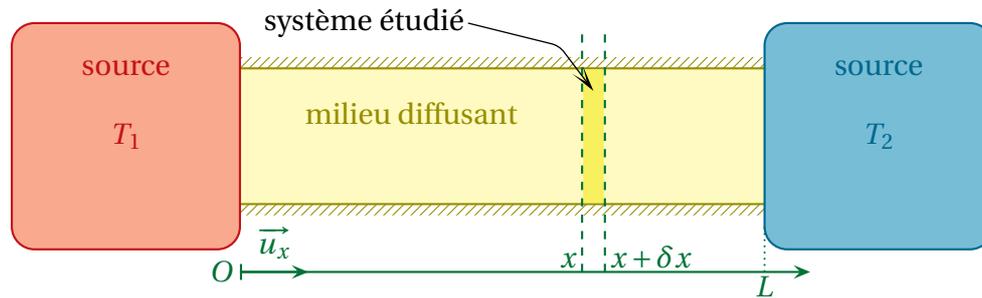
✧ Analyse physique :

→ le barreau va être le siège de phénomènes de diffusion car il est en contact avec des thermostats de températures différentes ;

→ la température ne va donc pas être la même partout et va évoluer dans le temps.

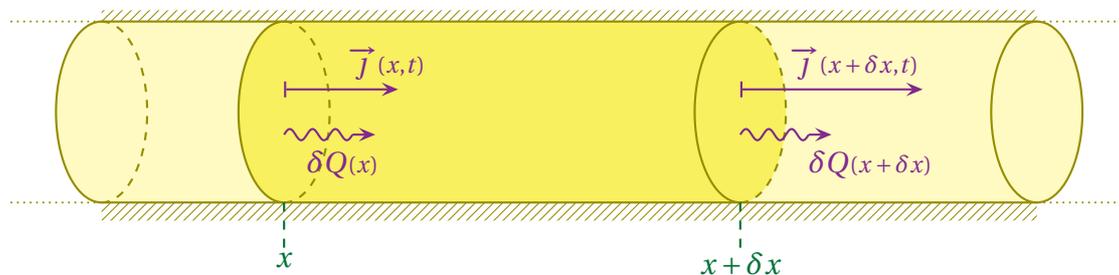
✧ Analyse technique :

- comme ici la température varie localement, nous allons faire une approche mésoscopique du problème;
- pour rester dans les conventions usuelles, nous noterons  $\vec{u}_x$  l'axe avec 0 à gauche et  $L$  à droite.



### ★ approche mésoscopique

- ✧ Commençons par faire un zoom sur la partie intéressante, ce qui sera notre système  $\mathcal{S}$  : la tranche comprise entre  $x$  et  $x + \delta x$ .



- ✧ Comme ce système subit une transformation isochore, nous pouvons écrire le premier principe sur  $\mathcal{S}$  entre  $t$  et  $t + \delta t$ . 12

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (\text{I.8})$$

- ✧ Dans cette expression :

- $dU$  est la variation d'énergie interne ;
- $\delta Q$  est le transfert thermique reçu *via* les parois ;
- $\delta W$  est le travail fourni par les forces autres que celles de pression, puisque la transformation est isochore. En clair, c'est l'énergie apportée autrement que par transfert thermique, c'est ce que nous appellerons l'énergie *créée* et qui provient de réactions chimique, nucléaires ou de l'effet JOULE.

- ✧ Dans ces conditions, le bilan peut se résumer sous la forme

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} + \text{CRÉATION EN VOLUME} \quad (\text{I.9})$$

- ✧ Trois termes donc...

### ★ variation dans le temps

- ✧ Ici comme nous avons une transformation isochore, nous allons utiliser l'énergie interne ce qui donne

$$U(t + \delta t) - U(t) = C_V (T(x, t + \delta t) - T(x, t)) \quad (\text{I.10})$$

- ✧ Et avec une phase condensée (ici un solide)  $C_V = C = \rho c \delta \tau$  où :

- $\rho$  est la masse volumique ;
- $c$  est la capacité thermique massique ;

→  $\delta\tau$  est le volume du système.

✧ Finalement

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \rho c \delta\tau (T(x, t + \delta t) - T(x, t)) \quad (\text{I.11})$$

### ★ échange à travers la surface

✧ Regardons le schéma et constatons que :

- en tant que cylindre, la surface se décompose naturellement en 3 : la section en  $x$ , la section en  $x + \delta x$  et la surface latérale ;
- l'énergie ne passe pas à travers la surface latérale.



✧ L'énergie échangée s'écrit donc

$$\delta Q_{\text{éch}} = \delta Q(x, t) + \delta Q(x + \delta x, t) \quad (\text{I.12})$$

✧ Or, d'après la définition du courant thermique en volume, et parce qu'il est uniforme sur la section,

$$\delta Q(x) = +j_{\text{th}}(x, t) S \delta t \quad \text{et} \quad \delta Q(x + \delta x, t) = -j_{\text{th}}(x + \delta x, t) S \delta t \quad (\text{I.13})$$

✧ Remarquons que le signe n'est pas le même, ce qui peut se voir de deux manières différentes :

- soit en constatant que lorsque  $\vec{j}_{\text{th}}$  est dans le sens de  $\vec{u}_x$ , alors  $\vec{j}_{\text{th}}(x, t)$  « rentre » alors que  $\vec{j}_{\text{th}}(x + \delta x, t)$  « sort » ;
- soit en introduisant les vecteurs surfaces *sortant* avec  $\vec{S}(x) = -S\vec{u}_x$  et  $\vec{S}(x + \delta x) = +S\vec{u}_x$  et en utilisant la convention usuelle  $\delta Q_{\text{reçue}} = -\vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{S}$ .

✧ Dans tous les cas, il ne faut pas se tromper dans les signes.

✧ Ce terme peut se réécrire

$$\begin{aligned} \delta Q_{\text{éch}} &= +j_{\text{th}}(x, t) S \delta t - j_{\text{th}}(x + \delta x, t) S \delta t \\ &= S \delta t (j_{\text{th}}(x, t) - j_{\text{th}}(x + \delta x, t)) \end{aligned}$$

✧ Ce qui donne, avec un petit développement limité à l'ordre 1,

$$\text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} = -S \delta t \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}(x, t) \delta x \quad (\text{I.14})$$

### ★ création en volume

✧ Par définition même de l'expression de l'énergie produite en volume, nous avons tout de suite

$$\text{CRÉATION EN VOLUME} = \mathcal{P}(x, t) \delta t \delta\tau \quad (\text{I.15})$$

★ **rassemblement**

⇨ En reprenant le bilan initial nous avons

$$\rho c \delta\tau (T(x, t + \delta t) - T(x, t)) = -S \delta t \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}(x, t) \delta x + \mathcal{P}(x, t) \delta t \delta\tau \quad (\text{I.16})$$

⇨ En remarquant que  $\delta\tau = S \delta x$  et en divisant par  $\delta\tau \delta t$  nous obtenons

$$\rho c \frac{(T(x, t + \delta t) - T(x, t))}{\delta t} = -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}(x, t) + \mathcal{P}(x, t) \quad (\text{I.17})$$

⇨ En faisant tendre  $\delta t$  vers 0, nous avons

$$\frac{(T(x, t + \delta t) - T(x, t))}{\delta t} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) \quad (\text{I.18})$$

⇨ Nous arrivons alors à

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}(x, t) + \mathcal{P}(x, t) \quad \rightsquigarrow \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}(x, t) = \mathcal{P}(x, t) \quad (\text{I.19})$$

★ **résultat connu****Loi**

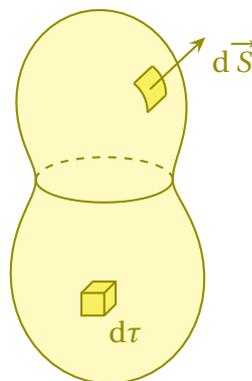
Dans le cas d'une diffusion thermique unidimensionnelle, la conservation de l'énergie se traduit par

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}(x, t) = \mathcal{P}(x, t)$$

⇨ Notons, dans le second membre, la présence d'un terme représentant le terme de production.

**I.2.iii – bilan 3D**★ **situation**

⇨ Nous allons cette fois faire un bilan énergétique entre  $t$  et  $t + \delta t$  mais pour un système compris dans un volume  $\mathcal{V}$  quelconque.



⇨ Nous ferons les hypothèses usuelles suivantes :

- chaque point du système est immobile donc  $\mathcal{V}$  ne dépend pas du temps ;
- la transformation est isochore (ce qui est un peu lié à l'hypothèse précédente) ;
- le corps est une phase condensée.

⇨ Le bilan d'énergie sur  $\mathcal{S}$  entre  $t$  et  $t + \delta t$  s'écrit donc, comme tout bilan :

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} + \text{CRÉATION EN VOLUME} \quad (\text{I.20})$$

⇨ Explicitons les différents termes

### ★ variation dans le temps

⇨ Tout d'abord nous ne pouvons **pas** écrire

$$U(t + \delta t) - U(t) = dU \quad \rightsquigarrow \quad \text{VARIATION DANS LE TEMPS} = C (T(t + \delta t) - T(t)) \quad (\text{I.21})$$

⇨ En effet une telle écriture laisse entendre que ~~la~~ température est définie pour l'ensemble du système ou, autrement dit, que le système a une température homogène.

⇨ C'est bien évidemment faux *a priori* donc nous ne pouvons pas faire cela.

⇨ Commençons alors par exprimer l'énergie interne contenue à  $t$  dans le système.

⇨ L'extensivité de l'énergie interne permet de voir le système comme une réunion de plein de petits morceaux de masse  $dm_P$  et, donc, en notant  $u_{(P,t)}$  l'énergie interne massique au point  $P$

$$U(t) = \iiint_{\mathcal{V}(t)} u_{(P,t)} dm_P \quad (\text{I.22})$$

⇨ De même l'énergie interne en  $t + \delta t$  s'écrit

$$U(t + \delta t) = \iiint_{\mathcal{V}(t + \delta t)} u_{(P,t + \delta t)} dm_P \quad (\text{I.23})$$

⇨ La variation d'énergie s'écrit donc

$$U(t + \delta t) - U(t) = \iiint_{\mathcal{V}(t + \delta t)} u_{(P,t + \delta t)} dm_P - \iiint_{\mathcal{V}(t)} u_{(P,t)} dm_P \quad (\text{I.24})$$

⇨ Mais comme  $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}(t + \delta t)$ , puisque le système est immobile, nous pouvons réunir les deux sommes

$$\iiint_{\mathcal{V}} u_{(P,t + \delta t)} dm_P - \iiint_{\mathcal{V}} u_{(P,t)} dm_P = \iiint_{\mathcal{V}} (u_{(P,t + \delta t)} - u_{(P,t)}) dm_P \quad (\text{I.25})$$

⇨ De là, en utilisant un développement limité à l'ordre 1, nous voyons apparaître une différentielle

$$U(t + \delta t) - U(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial u}{\partial t}(P,t) \delta t dm_P \quad (\text{I.26})$$

⇨ Et, parce que nous avons une phase condensée, nous pouvons écrire, avec  $dm_P = \rho \delta \tau_P$

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(P,t) \delta t d\tau_P \quad (\text{I.27})$$

 Même si cela sera souvent le cas,  $\rho$  et  $c$  ne sont pas forcément uniformes ce qui nous interdit de les factoriser, *i.e.* de les sortir *a priori* du signe somme.

### ★ production en volume

⇨ Par extensivité de l'énergie produite par chaque portion de volume  $d\tau_P$  nous pouvons écrire immédiatement

$$\text{CRÉATION EN VOLUME} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{P}(P,t) \delta t d\tau_P \quad (\text{I.28})$$

### ★ échange à travers la surface

✧ Par extensivité de l'énergie reçue, nous pouvons écrire que

$$\delta Q_{\text{reçu}} = \oint_{\mathcal{S}} \delta^2 Q_{\text{reçue}}(P,t) \quad (\text{I.29})$$

✧ Remarquons qu'ici la surface est fermée puisque le système est de taille finie.

✧ Nous pouvons réécrire ce terme d'échange avec le vecteur densité surfacique de courant thermique en volume  $\vec{J}_{\text{th}}$

$$\delta Q_{\text{reçu}} = \oint_{\mathcal{S}} -\vec{J}_{\text{th}}(P,t) \cdot d\vec{S}_P \delta t \quad (\text{I.30})$$

✧ Ce qui donne

$$\text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} = - \oint_{\mathcal{S}} \vec{J}_{\text{th}}(P,t) \cdot d\vec{S}_P \delta t \quad (\text{I.31})$$

### ★ rassemblement

✧ Le bilan complet donne donc

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(P,t) \delta t d\tau_P = - \oint_{\mathcal{S}} \vec{J}_{\text{th}}(P,t) \cdot d\vec{S}_P \delta t + \iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{P}(P,t) \delta t d\tau_P \quad (\text{I.32})$$

✧ Il y a deux termes dont la sommation est sur le volume et un troisième dont la sommation est sur la surface...

✧ Pour pouvoir aller plus loin, nous allons utiliser **le** truc qui transforme une sommation sur la surface en une sommation en volume

**Loi**

THÉORÈME DE GREEN – OSTROGRADSKI

Pour un volume  $\mathcal{V}$  quelconque délimité par la surface  $\mathcal{S}$  nous avons

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{J}_{\text{th}}(P,t) \cdot d\vec{S}_P = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{J}_{\text{th}}(P,t) \delta \tau_P$$

div  $\vec{J}_{\text{th}}$  est appelé la *divergence* de  $\vec{J}_{\text{th}}$

✧ Deux remarques :

- ce théorème marche avec n'importe quel champ de vecteur et pas seulement avec  $\vec{J}_{\text{th}}$ , qui n'est là que parce que c'est la première fois que nous rencontrons la notion de *divergence*;
- le « quelconque » pour le volume est à prendre au sens physique, *i.e.* « délimité n'importe quelle surface raisonnable ». Car, avec des surfaces pathologiques du type fractale ou bouteille de KLEIN, ce théorème ne marche plus. Mais fort heureusement cela ne peut pas nous arriver puisque c'est nous qui choisissons la surface et nous en choisirons systématiquement des surfaces qui marchent.

✧ Revenons à nos moutons et voyons ce que cela donne

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(P,t) \delta t d\tau_P = - \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{J}_{\text{th}}(P,t) \delta \tau_P \delta t + \iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{P}(P,t) \delta t d\tau_P \quad (\text{I.33})$$

✧ Comme, encore une fois, tous les volumes de sommation sont les mêmes, nous pouvons tout regrouper sous le même signe somme ce qui donne

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left( \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(P,t) + \text{div } \vec{J}_{\text{th}}(P,t) - \mathcal{P}(P,t) \right) \delta t d\tau_P = 0 \quad (\text{I.34})$$

- ✧ Ce résultat est vrai quel que soit le volume  $\mathcal{V}$  ce qui implique que, quelle que soit la manière dont nous sommions l'intégrande, le résultat est nul.
- ✧ Cela ne peut vouloir dire qu'une chose : que l'intégrande est nulle.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_{\text{th}} - \mathcal{P} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_{\text{th}} = \mathcal{P} \quad (\text{I.35})$$

13



### Loi

La conservation de l'énergie lors d'une diffusion en trois dimensions s'écrit

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_{\text{th}} = \mathcal{P}$$

## I·2·iv – pause divergence

- ✧ Maintenant que nous avons « inventé » un truc appelé divergence, il va falloir regarder d'un peu plus près ce que c'est.
- ✧ Il faut tout d'abord savoir que le concept de *divergence* va être **très** utilisé tout au long de l'année.
- ✧ Il est donc indispensable de travailler cette notion tant au niveau physique (comprendre ce qu'il représente, quand s'en servir) qu'au niveau technique (pour le manipuler correctement dans les équations).

### ★ relation fondamentale

- ✧ C'est la relation qui définit la divergence.

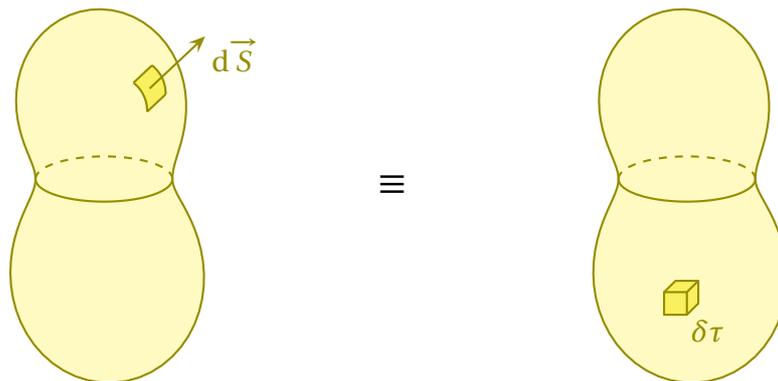


### Définition

Pour un volume élémentaire  $\delta\tau$ , le flux sortant d'un champ de vecteur  $\vec{A}$  à travers la surface délimitant  $\delta\tau$  s'écrit

$$d\Phi \triangleq \operatorname{div} \vec{A} \times \delta\tau$$

- ✧ Autrement dit, nous pouvons transformer une sommation sur une surface en une sommation en volume



- ✧ Et cela donne le théorème de GREEN – OSTROGRADSKI

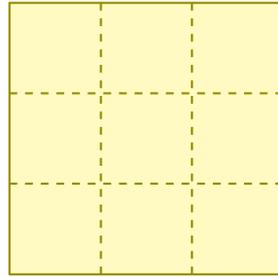
$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{A} \times \delta\tau \quad (\text{I.36})$$

- ✧ Cela revient à dire que, pour compter le flux sortant  $\Phi$  :

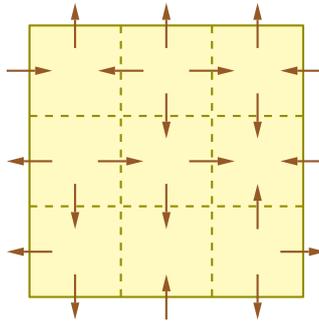
- soit il faut regarder ce qui se passe au niveau de la surface  $\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$  ;
- soit il faut regarder ce qui se passe à l'intérieur  $\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{A} \delta\tau$ .

★ comment ça marche ?

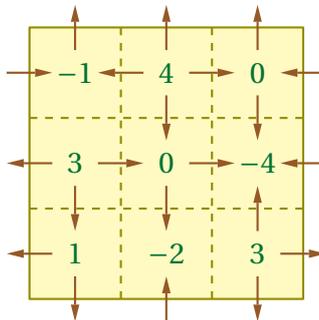
- ✧ Regardons sur un exemple en 2D comment le théorème fonctionne.
- ✧ Commençons par prendre un système que nous découperons en 9 cases.



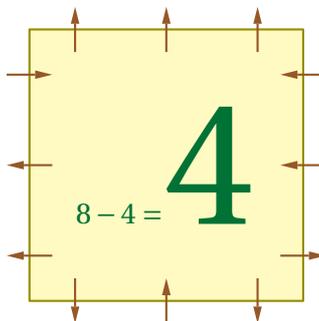
- ✧ Mmettons des flèches au hasard sur chaque bordure



- ✧ Pour chaque case, comptons les flèches qui sortent



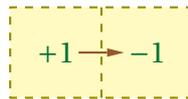
- ✧ Maintenant comptons le nombre de flèches qui sortent du gros système



- ✧ Nous constatons alors que

$$-1 + 4 + 0 + 3 + 0 - 4 + 1 - 2 + 3 = 4 \tag{I.37}$$

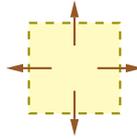
- ✧ Il s'agit là ni plus ni moins que du nombre de flèches qui sortent du gros système!
- ✧ L'explication est simple. Quand nous regardons une flèche séparant deux cases, nous pouvons voir qu'elle compte obligatoirement positivement pour l'une et négativement pour l'autre



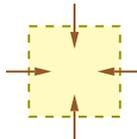
✧ Dans ces conditions, lorsque nous sommes le tout, toutes les flèches à l'intérieur ont une contribution nulles et il ne reste que les flèches donnant sur l'extérieur.

### ★ interprétation physique

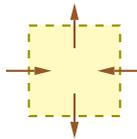
- ✧ Au niveau local, la divergence représente le caractère local d'un champ vectoriel.
- ✧ Quand le champ « sort », la divergence est positive.



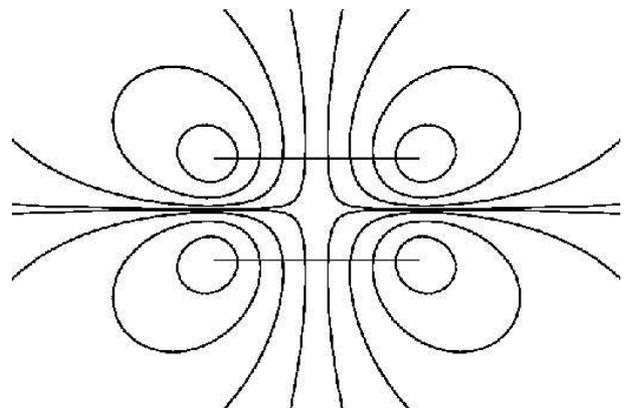
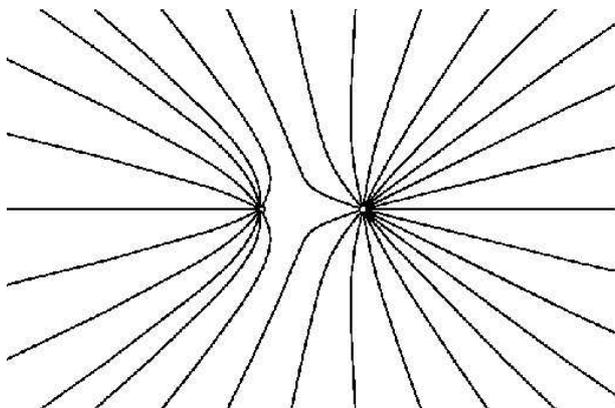
✧ Quand le champ « rentre », la divergence est négative.



✧ Enfin, quand le champ « rentre » autant qu'il sort, la divergence est nulle.



- ✧ Bref, que la divergence s'appellent *divergence* et représente la manière dont des lignes de champs sortent (donc « divergent ») à partir d'un point n'est peut-être pas qu'une heureuse coïncidence.
- ✧ En électromagnétostatique, nous avons rencontré des champs de vecteurs que nous représentions sous forme de lignes.
- ✧ Voici, en rappel, deux exemples de cartes de champ, le premier est un champ électrostatique, le deuxième un champ magnétique.



✧ C'est ainsi que :

- pour le champ électrostatique, nous voyons que les lignes convergent ou divergent vers les charges. Nous aurons donc  $\text{div } \vec{E}$  directement proportionnel aux charges ;
- les lignes de champs magnétique ne peuvent pas diverger donc  $\text{div } \vec{B} = 0$ . C'est là ni plus ni moins qu'une des 4 équations fondamentales de l'électromagnétisme.

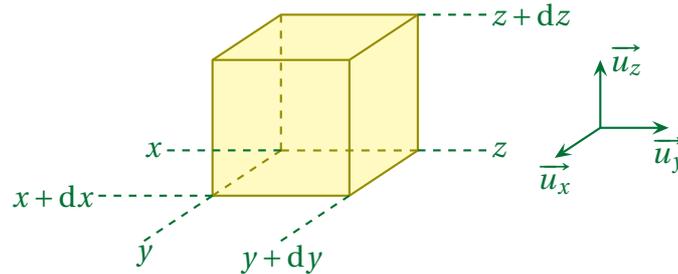
★ **expression en coordonnées cartésiennes****Loi**

En coordonnées **cartésiennes** la divergence d'un champ vectoriel  $\vec{\xi}$  s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{\xi} = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \quad \text{où :}$$

$\xi_x$ ,  $\xi_y$  et  $\xi_z$  sont les composantes de  $\vec{\xi}$  sur respectivement  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$ .

✧ Pour démontrer ce résultat, partons d'un volume élémentaire  $\delta\tau$  et utilisons la relation fondamentale de la divergence.



✧ Le flux traversant la surface délimitant  $\delta\tau$  peut donc se décomposer en 6 puisqu'il y a 6 surfaces élémentaires

$$d\Phi = d\Phi(x) + d\Phi(x+dx) + d\Phi(y) + d\Phi(y+dy) + d\Phi(z) + d\Phi(z+dz) \quad (\text{I.38})$$

✧ En remplaçant par leurs expressions cela donne

$$\begin{aligned} d\Phi = & \vec{\xi}(x,y,z) \cdot (-dydz \vec{u}_x) + \vec{\xi}(x+dx,y,z) \cdot (dydz \vec{u}_x) \dots \\ & \dots + \vec{\xi}(x,y,z) \cdot (-dxdz \vec{u}_y) + \vec{\xi}(x,y+dy,z) \cdot (dxdz \vec{u}_y) \dots \\ & \dots + \vec{\xi}(x,y,z) \cdot (-dxdy \vec{u}_z) + \vec{\xi}(x,y,z+dz) \cdot (dxdy \vec{u}_z) \end{aligned}$$

✧ Et ainsi en regroupant adroitement

$$\begin{aligned} d\Phi = & (\xi_x(x+dx,y,z) - \xi_x(x,y,z)) dydz \dots \\ & \dots + (\xi_y(x,y+dy,z) - \xi_y(x,y,z)) dxdz \dots \\ & \dots + (\xi_z(x,y,z+dz) - \xi_z(x,y,z)) dxdy \end{aligned}$$

✧ En faisant des développements limités, nous voyons alors apparaître 3 dérivées partielles

$$\Phi = dx \frac{\partial \xi_x}{\partial x}(x,y,z) \times dydz + dy \frac{\partial \xi_y}{\partial y}(x,y,z) \times dxdz + dz \frac{\partial \xi_z}{\partial z}(x,y,z) \times dxdy \quad (\text{I.39})$$

✧ Puis, en factorisant

$$\Phi = \left( \frac{\partial \xi_x}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial \xi_y}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}(x,y,z) \right) \times dxdydz \quad (\text{I.40})$$

✧ Comme  $dx dy dz = \delta\tau$ , par identification avec la relation fondamentale de la divergence, nous obtenons bien le résultat attendu

$$\Phi = \operatorname{div} \vec{\xi} \times dx dy dz \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{div} \vec{\xi} = \frac{\partial \xi_x}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial \xi_y}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}(x,y,z) \quad (\text{I.41})$$

★ **c'est un opérateur vectoriel différentiel**



### Loi

La divergence est un opérateur vectoriel différentiel et

$$[\operatorname{div} \vec{\xi}] = \frac{[\xi]}{\text{longueur}}$$



### Loi

Avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  des scalaires quelconques, nous avons

$$\operatorname{div} (\lambda_1 \vec{\xi}_1 + \lambda_2 \vec{\xi}_2) = \lambda_1 \operatorname{div} \vec{\xi}_1 + \lambda_2 \operatorname{div} \vec{\xi}_2$$

✧ La démonstration basée sur la linéarité de l'opérateur différentielle est laissée au lecteur.

★ **c'est une vision 3D d'un théorème connu**

✧ Regardons à nouveau le théorème de GREEN – OSTROGRADSKI

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \times \delta\tau \quad (\text{I.42})$$

✧ Nous voyons que nous pouvons remplacer une somme double par une somme triple à condition de dériver l'intégrande.

✧ C'est *exactement* la même philosophie que d'écrire

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx \quad (\text{I.43})$$

## I·2·v – petit flash-back

✧ Reprenons l'équation de conservation de l'énergie dans le cas de la diffusion en version 3D

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_{\text{th}} = \mathcal{P} \quad (\text{I.44})$$

✧ Pour une diffusion unidimensionnelle, nous avons

$$\vec{J}_{\text{th}} = j_{\text{th}}(x,t) \vec{u}_x \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{div} \vec{J}_{\text{th}} = \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} \quad (\text{I.45})$$

✧ Et ainsi l'équation de conservation de l'énergie se réécrit

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = \mathcal{P} \quad (\text{I.46})$$

✧ Ce qui est bien (et heureusement) ce que nous avons trouvé en raisonnant directement en 1D.

## I.2.vi – régime stationnaire sans production

✧ Regardons un cas particulier assez fréquent du cas où la diffusion est envisagée dans un cas stationnaire sans terme de production.

### ★ en 1D

✧ Regardons le cas particulier du régime stationnaire.



#### Définition

Un régime est dit *stationnaire* lorsqu'aucune grandeur ne dépend du temps.

✧ Dans ces conditions la conservation de l'énergie donne

$$0 + \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad j_{\text{th}}(x) = C^{\text{te}} \quad (\text{I.47})$$



#### Loi

Dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle sans terme de production et en régime stationnaire, la densité surfacique de courant thermique en volume est uniforme.

✧ Même si elle est rapide à démontrer, c'est une loi que nous pourrions utiliser directement.

### ★ continuité du flux en 3D

✧ Sous ces mêmes conditions, la conservation de l'énergie en version 3D donne



#### Loi

La diffusion tridimensionnelle sans terme de production et en régime stationnaire se traduit par  $\text{div } \vec{j}_{\text{th}} = 0$

✧ Autrement dit



#### Loi

Dans le cas diffusion tridimensionnelle sans terme de production et en régime stationnaire, la densité surfacique de courant thermique en volume est à flux conservatif.

✧ Rappelons que « à flux conservatif » signifie que quelle que soit la surface **fermée** choisie, le flux est nul.

✧ Nous pouvons le montrer rapidement grâce au théorème de GREEN – OSTROGRADSKI

$$\Phi = \oint_{\mathcal{S}} \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S} \quad \rightsquigarrow \quad \Phi = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{j}_{\text{th}} \delta\tau \quad (\text{I.48})$$

✧ Et comme  $\text{div } \vec{j}_{\text{th}} \delta\tau = 0$ , le résultat tombe.

✧ Là aussi il s'agit d'un résultat rapide à démontrer mais que nous utiliserons parfois immédiatement.

## I.3 – Équation de diffusion thermique

✧ Malgré tout ce que nous venons de faire, nous n'avons pas encore tout à fait l'équation de diffusion thermique.

✧ Physiquement, c'est évident, parce que, nulle part, nous avons expliqué de quelle manière l'énergie bougeait (vite ou pas vite ? dans quelle direction ?)

✧ Techniquement, cela se voit car le membre de gauche de l'équation de conservation de l'énergie ne fait pas intervenir que la température, elle n'est donc pas soluble en l'état.

### I.3.i – loi de FOURIER

- ✧ C'est la loi phénoménologique qui relie
  - $\vec{J}_{th}$  qui représente le mouvement de l'énergie ;
  - $T$  qui est un<sup>4</sup> marqueur de présence d'énergie.

#### ★ énoncé

14



**Loi**  
LOI DE FOURIER

Pour un matériau usuel

$$\vec{J}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad \text{où :}$$

- $\vec{J}_{th}$  est le vecteur densité surfacique de courant thermique en volume ;
- $\lambda > 0$  est la *conductivité thermique* et dépend du matériau.



**Loi**

L'unité de la conductivité thermique est

$$[\lambda] = \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

- ✧ En effet

$$[\vec{J}_{th}] = \text{W.m}^{-2} \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{\text{grad}} T] = \text{K.m}^{-1} \quad \rightsquigarrow \quad [\lambda] = \frac{\text{W.m}^{-2}}{\text{K.m}^{-1}} = \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} \quad (\text{I.49})$$

#### ★ interprétation



**Loi**

La loi de FOURIER traduit le fait que l'énergie se déplace des zones chaudes vers les zones froides dans le cadre de la conduction thermique.

- ✧ En effet,  $\overrightarrow{\text{grad}} T$  est dirigé vers les hautes températures et la présence du signe – associé au fait que  $\lambda$  ne peut être que positif impose ce résultat.
- ✧ En fait la loi de FOURIER traduit ce que nous savons du second principe.
- ✧ Toutefois la loi de FOURIER va un peu plus loin en précisant *comment* l'énergie se déplace.

#### ★ limites

- ✧ La loi de FOURIER est une loi linéaire faisant apparaître une dérivée première de l'espace (le gradient).
- ✧ Autrement dit, utiliser la loi de FOURIER revient à limiter au premier ordre les effets de la diffusion.
- ✧ Nous pouvons alors en déduire la première restriction : il ne faut pas que  $\|\overrightarrow{\text{grad}} T\|$  soit trop grand sans quoi il faudrait ajouter un terme correctif (non linéaire) du second ordre.
- ✧ De plus si  $\|\overrightarrow{\text{grad}} T(t)\|$  varie trop rapidement, il peut y avoir un temps de réponse au niveau moléculaire entre  $\vec{J}_{th}$  et  $\overrightarrow{\text{grad}} T$ .
- ✧ Enfin, pour pouvoir utiliser la loi de FOURIER il faut que le matériau soit isotrope sinon le  $\lambda$  sur  $\vec{u}_x$  ne serait pas le même que le  $\lambda$  sur  $\vec{u}_y$ .
- ✧ C'est ainsi que dans le graphique, matériau composé de feuillets de carbone<sup>5</sup>, la conductivité thermique suivant les feuillets est plusieurs centaines de fois plus grande que la conductivité thermique entre les feuillets.

4. Mais ce n'est pas le seul !

5. Voir cours de chimie.

**Loi**

Sauf précision explicite contraire, nous supposons *a priori* que la loi de FOURIER est valide.

✧ Cela ne nous empêchera pas de discuter des résultats obtenus vis à vis de la validité de la loi de FOURIER!

**I.3.ii – équation en 1D**★ **équation de diffusion****Loi**

L'équation de diffusion thermique unidimensionnelle dans un matériau uniforme s'écrit

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mathcal{P}$$

- $\rho$  est la masse volumique ;
- $c$  est la capacité thermique massique ;
- $\lambda$  est la conductivité thermique ;
- $\mathcal{P}$  est la production volumique d'énergie.

✧ Pour le montrer, commençons par reprendre l'équation de conservation de l'énergie en 1D.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = \mathcal{P} \quad (\text{I.50})$$

✧ Introduisons, dans cette équation, la loi de FOURIER qui s'écrit, en 1D,

$$j_{\text{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad \rightsquigarrow \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \mathcal{P} \quad (\text{I.51})$$

✧ Nous pouvons alors « sortir » la conductivité de la dérivée parce que le matériau est uniforme. Cela nous conduit à l'équation attendue

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mathcal{P} \quad (\text{I.52})$$

★ **cas particulier fréquent : diffusion sans terme de création****Loi**

L'équation de diffusion thermique unidimensionnelle dans un matériau uniforme et sans terme de source s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

- $\rho$  est la masse volumique ;
- $c$  est la capacité thermique massique ;
- $\lambda$  est la conductivité thermique ;
- $a$  est le *coefficient de diffusivité thermique* en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

✧ Cette équation découle de l'équation précédente avec  $\mathcal{P} = 0$ .

✧ Remarquons que dans cette équation, le coefficient de diffusivité thermique est le **seul** coefficient phénoménologique qui apparaît.

✧ Cela a pour première conséquence que, techniquement, les solutions ne dépendent que de  $a$ .

✧ Physiquement,  $a$  représente le couplage spatio-temporel de la diffusion.

- ✧ D'une certaine manière, ce n'est pas surprenant que l'équation de diffusion ne dépende que d'un terme de couplage, car c'est ce que nous avons trouvé avec l'équation de propagation qui, elle, ne dépendait aussi que d'un terme de couplage spatio-temporel, à savoir  $c$ .

### ★ ordres de grandeur

#### 🕒 pour la loi de FOURIER

14

- ✧ Regardons quelques valeurs de conductivité thermique

matériau	cuivre	eau stagnante	verre pyrex	polystyrène
$\lambda$ (W.m <sup>1</sup> .K <sup>-1</sup> )	399	0,597	1,4	0,027

- ✧ Nous pouvons constater que les conductivités thermiques peuvent varier sur 5 ordres de grandeurs, ce qui est considérable.
- ✧ De plus, conformément à l'intuition, le polystyrène conduit (beaucoup) moins bien la chaleur que le cuivre ou l'eau.

#### 🕒 pour l'équation de diffusion

- ✧ Regardons maintenant quelques valeurs de diffusivité thermique

matériau	cuivre	eau stagnante	verre pyrex	polystyrène
$a$ (m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )	117.10 <sup>-6</sup>	0,143.10 <sup>-6</sup>	0,75.10 <sup>-6</sup>	0,41.10 <sup>-6</sup>

- ✧ De manière surprenante nous voyons que la diffusivité du polystyrène est supérieure à celle de l'eau !
- ✧ Il ne faut surtout pas en conclure que le polystyrène conduit mieux la « chaleur » que l'eau, non, mais plutôt que le polystyrène est plus rapide à réagir que l'eau.

### I.3-iii – interprétation de l'équation de diffusion

- ✧ Nous allons tout de suite interpréter l'équation de diffusion bien qu'elle ne décrive que le cas unidimensionnel car l'interprétation en 3D est la même.

#### ★ approche technique

- ✧ Tout d'abord c'est une équation dont nous n'avons pas, « comme ça » toutes les solutions, contrairement à l'équation de propagation où nous pouvions les écrire *a priori*.
- ✧ Toutefois il s'agit d'une équation aux dérivées partielles *linéaire* ce qui peut parfois faciliter la résolution.
- ✧ Par exemple dans le cas d'un régime forcé, nous pourrions étudier chaque composante sinusoïdale séparément et sommer le tout avec le principe de superposition, une composante s'écrivant

$$\underline{T}(x,t) = \underline{T}_0(x) e^{j\omega t} \quad (\text{I.53})$$

#### ★ irréversibilité



#### Loi

L'équation de diffusion traduit le caractère irréversible du phénomène.

- ✧ En effet, si nous regardons ce qui se passe lorsque nous remontons le temps, *i.e.* lorsque  $t \rightarrow t' = -t$ , les dérivées partielles par rapport au temps changent de signe

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{I.54})$$

✧ C'est normal : quand quelque chose augmente avec le temps  $\frac{\partial}{\partial t} > 0$  et que nous remontons le temps, cette même chose se met à décroître  $\frac{\partial}{\partial t'} < 0$ .

✧ L'équation de diffusion vue en remontant le temps s'écrit

$$-\rho c \frac{\partial T}{\partial t'} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mathcal{P} \quad (\text{I.55})$$

✧ Cette équation **n'est pas** une équation de diffusion.

✧ Cela signifie qu'en remontant le temps nous voyons des phénomènes non diffusifs : c'est bien irréversible.

✧ Ce genre d'irréversibilité a déjà été beaucoup vu en thermodynamique de première année et est du au fait que le « chaud » va vers le froid et non le contraire.

### ★ ordre de grandeur

✧ Réécrivons l'équation de diffusion thermique

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{I.56})$$

✧ En notant  $T_0$  l'ordre de grandeur de la température et  $\tau$  le temps caractéristique, nous pouvons dire, non seulement d'un point de vue dimensionnel, mais aussi parce qu'une dérivée n'est qu'une division déguisée, que

$$\frac{\partial T}{\partial t} \equiv \frac{T_0}{\tau} \quad (\text{I.57})$$

✧ De même, pour l'autre terme, comme nous dérivons deux fois,

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a \times \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \rightsquigarrow a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \equiv a \frac{T_0}{L^2} \quad (\text{I.58})$$

✧ Finalement

$$\frac{T_0}{\tau} = a \frac{T_0}{L^2} \rightsquigarrow L = \sqrt{a\tau} \quad (\text{I.59})$$



#### Bon à retenir

La distance caractéristique  $L$  de diffusion est :

→ d'autant plus grande que la diffusivité  $a$  est grande ;

→ proportionnelle à  $\sqrt{\tau}$  où  $\tau$  est le temps caractéristique : c'est un phénomène lent.

✧ Pour passer de  $L$  à  $10L$ , il faut passer de  $\tau$  à  $100\tau$ , ce qui n'est pas rien !

✧ Pour la propagation, comme nous avons  $L = c\tau$ , pour passer aller 10 fois plus loin il suffit d'attendre 10 fois plus longtemps.

### ★ régime permanent stationnaire

✧ Rappelons ici la différence avec le régime permanent.



#### Loi

Un régime est dit *permanent* lorsque le régime transitoire est terminé.

- ✧ Il peut très bien y avoir un régime permanent non stationnaire comme, par exemple, tout ce qui est régime forcé (sinusoïdal ou non).
- ✧ Le cas d'un régime permanent sinusoïdal est celui que nous connaissons bien, celui pour lequel nous nous précipitons sur la notation complexe.
- ✧ Dans le cas du régime permanent stationnaire (RPS), l'équation de diffusion devient

$$-\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mathcal{P} \quad (\text{I.60})$$

✧ Et s'il n'y a pas de source

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{I.61})$$



#### Loi

Dans le cas d'un régime permanent stationnaire, le champ de température dépend :

- de la conductivité (vs. la diffusivité) s'il y a des sources ;
- uniquement des conditions aux limites s'il n'y a pas de source.

### I.3-iv – équation de diffusion thermique en 3D

✧ L'équation de conservation de l'énergie en 3D s'écrit

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{J}_{\text{th}} = \mathcal{P} \quad (\text{I.62})$$

✧ La loi de FOURIER s'écrit, elle

$$\vec{J}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (\text{I.63})$$

✧ En remplaçant dans l'équation de conservation de l'énergie et en « sortant » le  $\lambda$  parce que le matériau est homogène nous arrivons à

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \left( -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \right) = \mathcal{P} \quad \rightsquigarrow \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \text{div } \overrightarrow{\text{grad}} T = \mathcal{P} \quad (\text{I.64})$$

✧ Il s'agit là de l'équation de diffusion thermique mais nous allons la *noter* autrement.



#### Loi

L'équation de diffusion thermique en 3D s'écrit

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = \mathcal{P}$$

- $\rho$  est la masse volumique ;
- $c$  est la capacité thermique massique ;
- $\lambda$  est la conductivité thermique ;
- $\mathcal{P}$  est la production volumique d'énergie.

### I.3.v – pause laplacien et nabla

#### ★ définition du laplacien



#### Loi

Le *laplacien* noté  $\Delta$  est défini par

$$\Delta = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}}$$

- ✧ Les puristes remarqueront la différence entre  $\Delta$  et  $\Delta$  :
  - $\Delta$  se lit « delta » et est une lettre majuscule grecque représentant en général une variation ( $\Delta U$ ,  $\Delta E_c \dots$ );
  - $\Delta$  se lit « laplacien » et est un triangle représentant un opérateur vectoriel à l'instar de gradient, divergence...
- ✧ Malgré cette très nette différence, nous éviterons d'utiliser la notation  $\Delta$  pour des variations dans des problèmes où intervient le laplacien car, il faut l'avouer, cela prête à confusion.
- ⚠ Ceci ce qui précède est la définition du laplacien *scalaire*. Pour le laplacien *vectoriel*  $\overrightarrow{\Delta}$ , la définition est associée à la formule qui sera un jour bien connue  $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} - \overrightarrow{\Delta}$ .

#### ★ expression du laplacien en coordonnées cartésiennes



#### Loi

En coordonnées **cartésiennes** le laplacien de  $T(x,y,z)$  s'écrit

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

- ✧ Nous savons calculer un gradient ? une divergence ? alors nous pouvons calculer un laplacien.
- ✧ Commençons par le gradient

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{u}_z \quad (\text{I.65})$$

- ✧ Nous voyons donc que la composante de  $\overrightarrow{\operatorname{grad}} T$  sur  $\vec{u}_x$  est  $\frac{\partial T}{\partial x}$ .
- ✧ Cela nous permet de calculer la divergence

$$\Delta T = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (\text{I.66})$$

- ✧ D'où le résultat.

#### ★ notation nabla

#### 🗣️ kesako ?

- ✧ nabla c'est :
  - une notation (surtout anglo-saxonne) ;
  - un vecteur ;
  - un super moyen mnémotechnique pour retenir les expressions de  $\overrightarrow{\operatorname{grad}}$ ,  $\operatorname{div}$ ,  $\Delta$  en **cartésiennes**.
- ✧ Insistons : le « truc » calculatoire avec nabla ne marche qu'avec les coordonnées cartésiennes, quiconque essaiera de l'utiliser avec des coordonnées cylindro-polaire ou sphérique ne pourra qu'échouer.

**Définition**

Par notation, le vecteur *nabla*  $\vec{\nabla}$  est tel que :

$$\overrightarrow{\text{grad}} T = \vec{\nabla} T; \quad \text{div } \vec{j}_{\text{th}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{th}}; \quad \Delta T = \nabla^2 T$$

**nabla donne le calcul en coordonnées cartésiennes**

✧ Nous ne le rappellerons jamais assez : **utiliser le vecteur nabla ne marche bien qu'avec les coordonnées cartésiennes.**

**Loi**

Dans le système de coordonnées cartésiennes, le vecteur nabla peut être vu comme

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

✧ Nous avons alors bien  $\overrightarrow{\text{grad}} T = \vec{\nabla} T$  car

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times T = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{I.67})$$

✧ De même  $\text{div } \vec{j}_{\text{th}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{th}}$  car

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_{\text{th},x} \\ j_{\text{th},y} \\ j_{\text{th},z} \end{pmatrix} = \frac{\partial j_{\text{th},x}}{\partial x} + \frac{\partial j_{\text{th},y}}{\partial y} + \frac{\partial j_{\text{th},z}}{\partial z} \quad (\text{I.68})$$

✧ Enfin  $\Delta T = \nabla^2 T$  car en élevant au carré les composantes de nabla, nous trouvons déjà

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{I.69})$$

✧ Et donc

$$\nabla^2 T = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \times T \quad \rightsquigarrow \quad \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{I.70})$$

### I.3.vi – nouveau flash-back

#### ★ passer de la 3D à la 1D

✧ Nous pouvons (et c'est fort heureux) retrouver l'équation de diffusion en 1D à partir de l'équation de diffusion en 3D.

✧ En effet, en admettant que la température ne dépende que de  $x$  nous avons

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{=0} \rightsquigarrow \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{I.71})$$

✧ Et ainsi l'équation de diffusion donne

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = \mathcal{P} \rightsquigarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mathcal{P} \quad (\text{I.72})$$

#### ★ passer de la 1D à la 3D sur un cas déjà rencontré

✧ Nous pouvons maintenant imaginer ce que deviendra l'équation de propagation en 3D.

✧ En effet, le passage 3D  $\rightarrow$  1D est

$$\Delta T \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{I.73})$$

✧ Nous pouvons alors imaginer que l'opération 1D  $\rightarrow$  3D est

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \rightarrow \Delta T \quad (\text{I.74})$$

✧ Imaginons une équation de propagation 1D sur, par exemple, une surpression  $p$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (\text{I.75})$$

✧ Cette équation devient, en 3D

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (\text{I.76})$$

#### ★ une notation et un nom

✧ Nous pouvons réécrire l'équation de propagation sous la forme

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.77})$$

✧ Comme il s'agit là d'une équation très fréquente, un vieil usage a introduit une notation spécifique, peu utilisée de nos jours

$$\square p = 0 \quad (\text{I.78})$$

✧ Comme l'équation est l'équation de D'ALEMBERT, l'opérateur  $\square$  s'appelle le *d'alembertien*.

✧ Mais il existe le « laplacien » :  $\Delta$ .

✧ Eh bien l'équation suivante est l'équation de LAPLACE

$$\Delta T = 0 \quad (\text{I.79})$$

## I-4 – Quelques solutions

### I-4.i – méthode

- ✧ Intéressons-nous maintenant à quelques solutions de l'équation de diffusion.
- ✧ Pour résoudre l'équation de diffusion thermique, la méthode est *simple*.
- ✧ La première question à se poser est : « Le régime est-il stationnaire ou non ? »
- ✧ Si la réponse est « Oui, le régime est stationnaire » alors l'équation de diffusion devient une équation uniquement spatiale qui, dans le cas unidimensionnel, est rarement difficile à résoudre.
- ✧ Si la réponse est « Non, le régime n'est pas stationnaire » alors :
  - le régime est sinusoïdal forcé, nous pouvons sortir les complexes et résoudre sans difficulté particulière ;
  - le régime n'est pas sinusoïdal forcé et il n'y a aucune méthode magique de résolution.

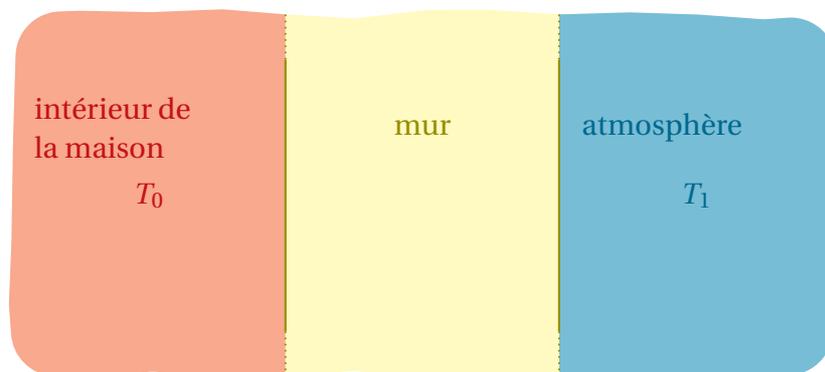
### I-4.ii – mur de maison – régime stationnaire 1D

- ✧ Il s'agit là d'une situation **très classique** à tel point que c'est presque l'archétype des phénomènes de diffusion et c'est pourquoi nous y ferons référence régulièrement.

#### ★ mur simple

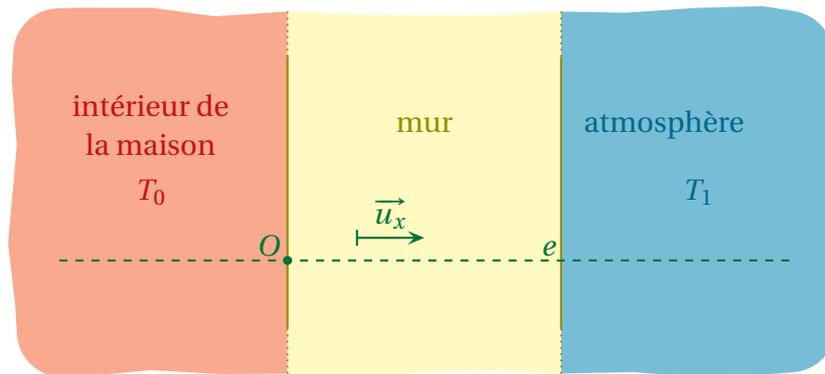
#### 🕒 situation et analyses

- ✧ Considérons un mur de maison, suffisamment grand pour pouvoir négliger les effets de bords et donc être considéré comme infini bien qu'il ne le soit pas.



- ✧ Ce mur sépare deux milieux (infinis eux aussi) et de températures uniformes et constante.
- ✧ La question est :
  - quelle est la répartition de température à l'intérieur du mur en régime permanent ?
  - quelle est la puissance perdue à travers le mur en régime permanent ?
- ✧ Analyse physique :
  - nous sommes face à un problème de diffusion (c'est évident dans ce chapitre mais il faut le préciser devant un problème « inconnu ») ;
  - la maison et l'atmosphère vont jouer le rôle de thermostats ;
  - le mur n'est pas radioactif, n'est pas envahi de réaction chimique et n'est pas parcouru par un courant électrique donc le terme de production est nul ;
  - le régime permanent est atteint et les contraintes sont constantes (cf. thermostat) donc le régime permanent est un régime permanent stationnaire ;
  - les grandeurs pertinentes sont  $\lambda$  (caractéristique du matériau en RPS),  $e$  et  $S_{\text{mur}}$  (géométrie),  $T_0$  et  $T_1$  (contraintes).
- ✧ Analyse technique :

- nous allons repérer le problème comme sur le schéma ci-dessous ;
- comme il y a invariance sur  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$ , la température s'écrit  $T(x)$ .



### 🔗 résolution

✧ Dans le cas de la diffusion sans source et en régime permanent stationnaire, l'équation de diffusion s'écrit

$$\Delta T = 0 \quad (\text{I.80})$$

✧ Cela donne dans le cas unidimensionnel

$$\frac{d^2 T}{dx^2}(x) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad T(x) = \alpha x + \beta \quad (\text{I.81})$$

✧  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes d'intégration qui dépendent des contraintes.



### Bon à retenir

§ À l'échelle mésoscopique, la température est une fonction continue de l'espace.

✧ Nous avons donc

$$T(0^+) = T(0^-) \rightsquigarrow T(0^+) = T_0 \quad \text{et} \quad T(0^+) = \alpha \rightsquigarrow \alpha = T_0 \quad (\text{I.82})$$

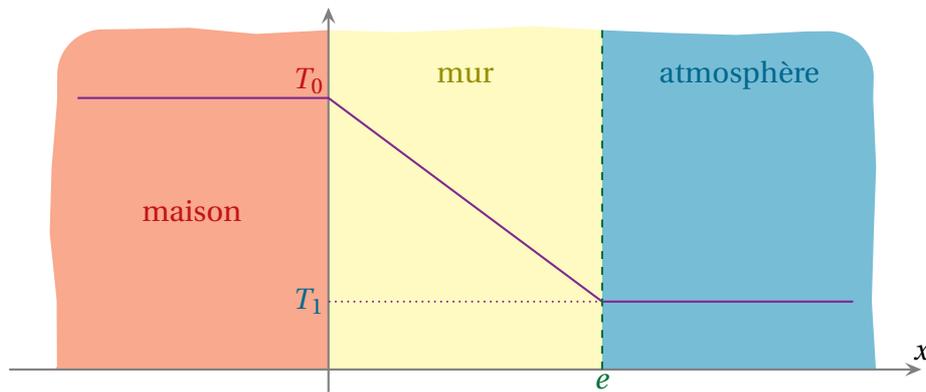
✧ De même

$$T(e^-) = T(e^+) \rightsquigarrow T(e^-) = T_1 \quad \text{et} \quad T(e^-) = T_0 + \beta e \rightsquigarrow \beta = \frac{T_1 - T_0}{e} \quad (\text{I.83})$$

✧ Finalement

$$T(x) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{e} \times x \quad (\text{I.84})$$

✧ Nous voyons que le champ de température est *affine* à l'intérieur du mur.



✧ Nous pouvons constater que  $\lambda$  n'intervient pas, mais c'était prévisible étant donné que la conductivité n'intervient pas dans l'équation de diffusion.

### 🕒 puissance perdue à travers le mur

✧ La puissance thermique perdue est celle qui va de la maison vers l'atmosphère ce qui nous impose le sens de  $d\vec{S}$  dans le sens de  $+\vec{u}_x$ .

✧ La puissance thermique perdue s'écrit donc

$$\mathcal{P}_{\text{perdue}} = \Phi_{\text{th, à travers le mur}} \rightsquigarrow \mathcal{P}_{\text{perdue}} = \iint_{P \in \text{mur}} \vec{J}_{\text{th}}(P) \cdot d\vec{S}_P \quad (\text{I.85})$$

✧ Or la densité surfacique de courant en volume s'écrit, d'après la loi de FOURIER

$$\vec{J}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \rightsquigarrow \vec{J}_{\text{th}}(x) = -\lambda \frac{dT}{dx}(x) \vec{u}_x \rightsquigarrow \vec{J}_{\text{th}}(x) = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{e} \vec{u}_x \quad (\text{I.86})$$

✧ De plus pour compter positivement l'énergie qui va de la maison vers l'atmosphère, il faut

$$d\vec{S}_P = +dS_P \vec{u}_x \quad (\text{I.87})$$

✧ Nous avons ainsi

$$\mathcal{P}_{\text{perdue}} = \iint_{P \in \text{mur}} -\lambda \frac{T_1 - T_0}{e} dS_P \rightsquigarrow \mathcal{P}_{\text{perdue}} = \lambda \frac{T_0 - T_1}{e} \times \iint_{P \in \text{mur}} dS_P \quad (\text{I.88})$$

✧ Et finalement

$$\mathcal{P}_{\text{perdue}} = (T_0 - T_1) \times \frac{\lambda S_{\text{mur}}}{e} \quad (\text{I.89})$$

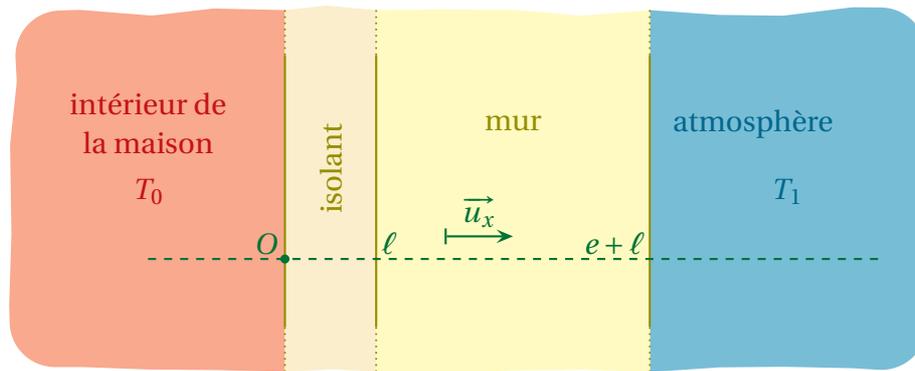
✧ Ce résultat est bien homogène (pour le voir, utiliser de tête la loi de FOURIER) et est cohérent :

- si  $T_0 > T_1$  c'est la maison qui perd de l'énergie ;
- plus  $e$  est grand plus la perte est faible ;
- plus le mur est grand plus la perte est grande.

### ★ mur isolé

#### 🕒 situation et analyses

✧ Considérons maintenant le même mur (sans effet de bord et d'épaisseur  $e$ ) recouvert d'une couche isolante d'épaisseur  $\ell$  et de conductivité  $\lambda_i$ .



✧ Posons-nous les mêmes questions :

- champ de température dans le mur et l'isolant ?
- puissance perdue ?

✧ L'analyse physique est analogue à la précédente

- c'est un problème de diffusion ;
- il n'y a pas de production ;
- il y a **deux** milieux diffusants donc **deux** équations de diffusion à résoudre et à recoller ;
- les grandeurs pertinentes sont les mêmes que précédemment auxquelles il faut ajouter les caractéristiques de l'isolant  $\lambda_i$  et  $\ell$ .

✧ Analyse technique :

- comme il y a **deux** milieux diffusants, il y a **deux** fonctions températures soit  $T_i(x)$  et  $T_m(x)$  ;
- comme les deux milieux sont en régime permanent stationnaire, nous pouvons écrire tout de suite que les champs de température associés sont linéaires ce qui donne

$$T_i(x) = Ax + B \quad \text{et} \quad T_m(x) = Cx + D \quad (\text{I.90})$$

- **quatre** constantes d'intégration il faudra donc **quatre** conditions aux limites pour pouvoir tout résoudre.

✧ En ce qui concerne la continuité de température, nous en avons 3 : en  $x = 0$ , en  $x = \ell$  et en  $x = \ell + e$ .

✧ Il manque une condition, ça sera la continuité du flux thermique en  $x = \ell$ .

✧ N'oublions pas, en effet, qu'en régime permanent stationnaire la conservation de l'énergie s'écrit

$$0 + \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = \mathcal{P}^{\text{ici}} = 0 \quad (\text{I.91})$$

✧ Cette équation montre bien que la fonction  $j_{\text{th}}$  est dérivable *donc* qu'elle est continue.



### Bon à retenir

À l'échelle mésoscopique, la densité surfacique de courant thermique en volume est une fonction continue de l'espace.

✧ Nous avons nos 4 conditions aux limites, nous pouvons les traduire puis résoudre.

### 🔗 traduction des conditions aux limites

✧ La continuité de la température en  $x = 0$  donne

$$T(0^-) = T_i(0^+) \quad \rightsquigarrow \quad T_0 = B \quad (\text{I.92})$$

✧ La continuité de la température en  $x = \ell + e$  donne

$$T_m((\ell + e)^-) = T((\ell + e)^+) \quad \rightsquigarrow \quad C(\ell + e) + D = T_{\text{ext}} \quad (\text{I.93})$$

✧ La continuité de la température en  $x = \ell$  donne

$$T_i(\ell^-) = T(\ell^+) \quad \rightsquigarrow \quad A\ell + B = C\ell + D \quad (\text{I.94})$$

✧ Enfin la continuité du courant thermique donne

$$j_{\text{th},i}(\ell^-) = j_{\text{th},m}(\ell^+) \quad (\text{I.95})$$

✧ Soit, avec la loi de FOURIER

$$-\lambda_i \frac{dT_i}{dx}(\ell^-) = -\lambda_m \frac{dT_m}{dx}(\ell^+) \quad \rightsquigarrow \quad -\lambda_i A = -\lambda_m C \quad \rightsquigarrow \quad \lambda_i A = \lambda_m C \quad (\text{I.96})$$

### 🔗 résolution

✧ Commençons par réécrire les équations obtenues

$$B = T_0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} C(\ell + e) + D = T_{\text{ext}} \\ A\ell + T_0 = C\ell + D \\ \lambda_i A = \lambda_m C \end{cases} \quad (\text{I.97})$$

✧ Nous allons d'abord chercher le flux thermique perdu.

✧ Par continuité du flux thermique, le flux thermique perdu par la maison n'est autre que le flux qui traverse l'épaisseur  $\ell$  d'isolant.

✧ Or ce flux s'écrit

$$\Phi_i = -\lambda_i \times A \times S_{\text{mur}} \quad (\text{I.98})$$

✧ Il nous faut donc trouver  $A$ .

✧ Pour ce faire commençons par éliminer  $C$  et obtenir un système de deux équations à deux inconnues

$$C = \frac{\lambda_i}{\lambda_m} A \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} A(\ell + e) + D = T_{\text{ext}} \\ A\ell + T_0 = \frac{\lambda_i}{\lambda_m} A\ell + D \end{cases} \quad (\text{I.99})$$

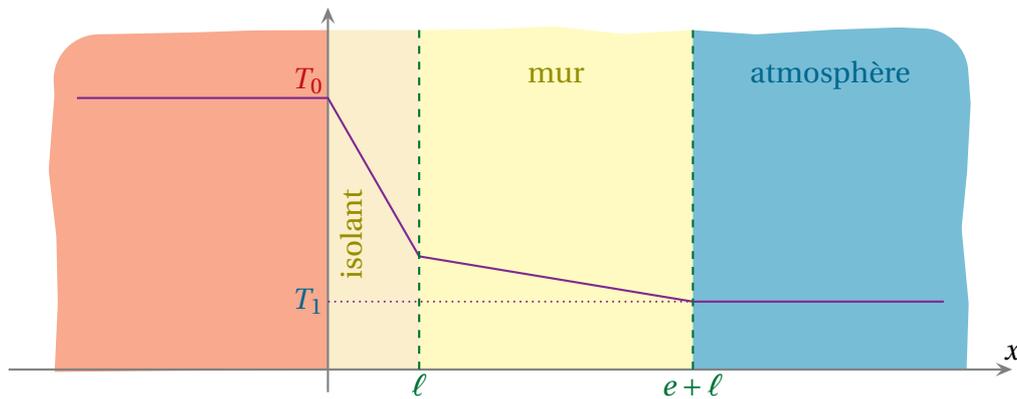
✧ Réécrivons ce système sous une forme plus adéquate

$$\begin{cases} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} A(\ell + e) + D = T_{\text{ext}} \\ \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_m} - 1 \right) \ell A + D = T_0 \end{cases} \quad (\text{I.100})$$

✧ En soustrayant les deux équations ainsi obtenues nous arrivons à

$$A \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_m} (\ell + e) - \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_m} - 1 \right) \ell \right) = T_{\text{ext}} - T_0 \quad \rightsquigarrow \quad A = \frac{T_{\text{ext}} - T_0}{\frac{\lambda_i}{\lambda_m} e + \ell} \quad (\text{I.101})$$

✧ Graphiquement, cela donne quelque chose comme représenté ci-dessous.



### 🌀 isolation ?

✧ La puissance perdue par la maison peut s'écrire

$$\mathcal{P}_{\text{perdue}} = -\lambda_i A S_{\text{mur}} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}_{\text{perdue}} = -\lambda_i S_{\text{mur}} \times \frac{T_{\text{ext}} - T_0}{\frac{\lambda_i}{\lambda_m} e + \ell} \quad (\text{I.102})$$

✧ Réécrivons cette puissance sous une autre forme pour pouvoir plus facilement la comparer à la puissance perdue par le mur non isolé

$$\mathcal{P}_{\text{perdue}} = -\lambda_m S_{\text{mur}} \times \frac{T_{\text{ext}} - T_0}{e + \frac{\lambda_m}{\lambda_i} \ell} \quad (\text{I.103})$$

✧ Résultat à comparer avec

$$\mathcal{P}_{\text{perdue, non isolé}} = -\lambda_m S_{\text{mur}} \times \frac{T_{\text{ext}} - T_0}{e} \quad (\text{I.104})$$

✧ Donc finalement, isoler un mur de conductivité  $\lambda_m$  avec un isolant d'épaisseur  $\ell$  et de conductivité  $\lambda_i$  revient à augmenter l'épaisseur du mur de  $\frac{\lambda_m}{\lambda_i} \ell$

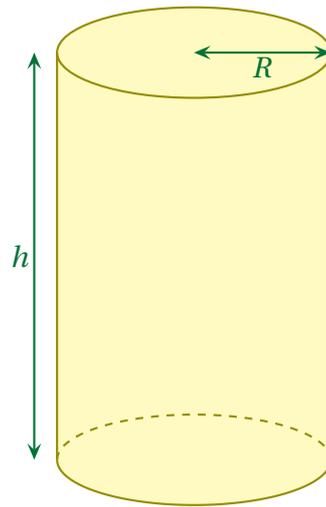
✧ Nous retrouvons là quelque chose de très cohérent vis-à-vis de l'isolation thermique :

- plus l'épaisseur est grande, plus l'isolation est efficace ;
- moins la conductivité de l'isolant est grande, plus l'isolation est efficace ;
- plus la conductivité du mur est grande, plus l'isolation est efficace.

### I-4-iii – barreau radioactif – régime stationnaire en symétrie cylindrique

#### ★ dispositif et analyse

✧ Considérons un barreau radioactif cylindrique de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ .

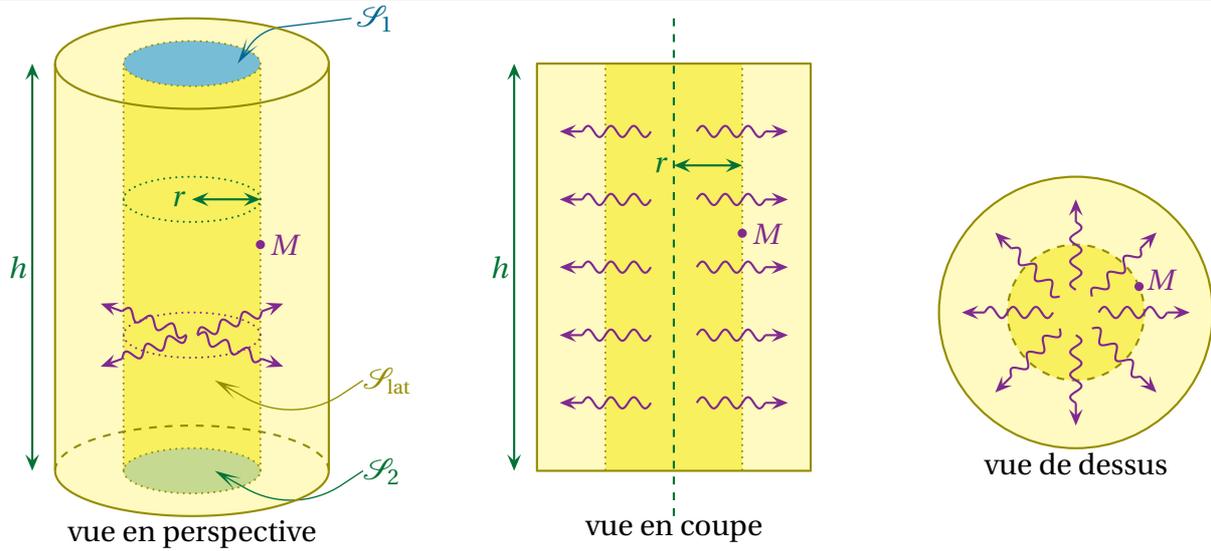


- ✧ Nous considérerons le barreau suffisamment grand pour pouvoir négliger les effets de bord.
- ✧ En admettant que la température ambiante soit uniforme et constante égale à  $T_0$ , quelle est la température dans le barreau ?
- ✧ Analyse physique
  - ici nous sommes face à un problème de diffusion ;
  - comme le barreau est radioactif, il y a un terme de source que nous prendrons uniforme et constant à  $\mathcal{P}_0$  (en  $\text{W.m}^{-3}$ ) ;
  - il y a une invariance par translation par rapport à l'axe (puisque les effets de bord sont négligés) et par rotation autour du même axe ;
  - nous allons considérer le régime permanent stationnaire ;
  - les grandeurs pertinentes sont  $R$  et  $h$  (géométrie),  $\lambda$ ,  $\mathcal{P}_0$  (aspect thermique) et  $T_0$  (contrainte).
- ✧ Rappelons que  $\rho$  et  $c$  ne font pas parti des grandeurs pertinentes car le régime est stationnaire.
- ✧ Analyse technique
  - étant donné la géométrie du dispositif, nous allons naturellement utiliser le repérage cylindro-polaire ce qui permet de dire que, grâce aux invariances, les différentes grandeurs ( $T$ ,  $j_{\text{th}}$ ) ne dépendent que de  $r$  ;
  - dans le cas d'un régime stationnaire avec terme de source (de préférence uniforme), il y a deux grandes méthodes ;
    - une mise en équation globale qui permet de simplifier la résolution grâce aux symétries ;
    - une mise en équation en 3D quelconque suivi de la résolution avec le laplacien en cylindro-polaire.

### ★ mise en équation : méthode du bilan global

#### 🕒 un système bien choisi

- ✧ L'idée est en fait de redémontrer la loi de conservation de l'énergie mais dans le cas particulier du barreau radioactif.
- ✧ Le tout étant de bien choisir le système.
- ✧ Pour choisir le « bon » système, c'est très simple car cela revient à choisir un « bon » volume et une « bonne » surface qui permettent de faire des calculs de flux facilement.
- ✧ Et des calculs de flux, cela ressemble beaucoup à l'électrostatique !
- ✧ En fait, comme pour le théorème de GAUSS le bon système sera celui délimité par une surface qui :
  - respecte les symétries du problème ;
  - passe par le point  $M$  où nous voulons déterminer le champ (de température).
- ✧ Ici comme la diffusion est *radiale* nous allons choisir un système contenue dans un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ .



**🕒 mise en équation et résolution**

- ✧ Nous allons faire un bilan d'énergie pour ce système entre  $t$  et  $t + \delta t$ .
- ✧ Ce bilan s'écrit

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} + \text{CRÉATION EN VOLUME} \tag{I.105}$$

- ✧ Comme le régime est stationnaire, nous avons tout de suite

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = 0 \tag{I.106}$$

- ✧ Commençons par calculer le terme d'échange.

$$\Phi_{\text{re\c{u}e}} = - \oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}_{\text{th}}(P) \cdot d\vec{S}_P \tag{I.107}$$

- ✧ En découpant la surface  $\mathcal{S}$  en trois (1 étant au-dessus et 2 en dessous) et avec l'extensivité du flux

$$\Phi_{\text{re\c{u}e}} = - \iint_{P \in \mathcal{S}_1} \vec{j}_{\text{th}}(P) \cdot d\vec{S}_{1P} - \iint_{P \in \mathcal{S}_2} \vec{j}_{\text{th}}(P) \cdot d\vec{S}_{2P} - \iint_{P \in \mathcal{S}_\ell} \vec{j}_{\text{th}}(P) \cdot d\vec{S}_{\text{lat},P} \tag{I.108}$$

- ✧ Or les vecteurs surface élémentaires s'écrivent

$$d\vec{S}_{1P} = dS_P \vec{u}_z; \quad d\vec{S}_{2P} = -dS_P \vec{u}_z \quad \text{et} \quad d\vec{S}_{\text{lat},P} = dS_P \vec{u}_r \tag{I.109}$$

- ✧ Ce qui donne, avec  $\vec{j}_{\text{th}}(P) = j_{\text{th}}(P) \vec{u}_r$

$$\Phi_{\text{re\c{u}e}} = -0 - 0 - \iint_{P \in \mathcal{S}_\ell} j_{\text{th}}(P) dS_P \tag{I.110}$$

- ✧ Or la surface  $\mathcal{S}$  est choisie de telle sorte que

$$r_P = C^{\text{te}} = r_M \stackrel{\text{not}}{=} r \tag{I.111}$$

- ✧ Et ainsi

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\text{reçue}} &= - \iint_{P \in \mathcal{S}_\ell} j_{\text{th}}(r_P) \, dS_P \\
 &= - \iint_{P \in \mathcal{S}_\ell} j_{\text{th}}(r) \, dS_P \\
 &= - j_{\text{th}}(r) \times \iint_{P \in \mathcal{S}_\ell} dS_P \\
 &= - j_{\text{th}}(r) \times 2\pi r h
 \end{aligned}$$

✧ Le terme de production s'écrit, lui

$$\mathcal{P} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \mathcal{P}(P) \, \delta\tau_P \quad (\text{I.112})$$

✧ Comme  $\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}_0$  est uniforme, nous avons rapidement

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= \iiint_{P \in \mathcal{V}} \mathcal{P}_0 \, \delta\tau_P \\
 &= \mathcal{P}_0 \iiint_{P \in \mathcal{V}} \delta\tau_P \\
 &= \mathcal{P}_0 \times \pi r^2 h
 \end{aligned}$$

✧ En réinjectant ces résultats dans la loi de conservation de l'énergie cela donne

$$0 = \Phi_{\text{reçue}} \delta t + \mathcal{P} \delta t \rightsquigarrow j_{\text{th}}(r) \times 2\pi r h = \mathcal{P}_0 \times \pi r^2 h \rightsquigarrow j_{\text{th}}(r) = \frac{\mathcal{P}_0 r}{2} \quad (\text{I.113})$$

✧ Maintenant nous pouvons utiliser la loi de FOURIER qui dit

$$j_{\text{th}}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}(r) \quad (\text{I.114})$$

✧ Et ainsi  $T(r)$  s'écrit

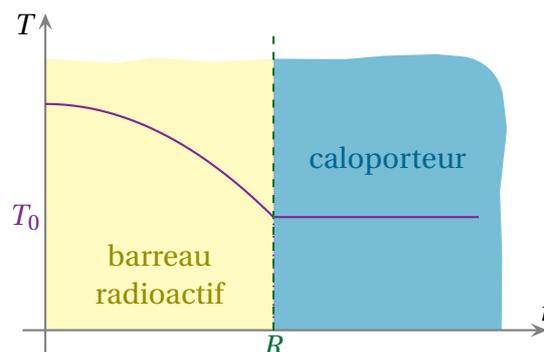
$$-\lambda \frac{dT}{dr}(r) = \frac{\mathcal{P}_0 r}{2} \rightsquigarrow \frac{dT}{dr}(r) = -\frac{\mathcal{P}_0 r}{2\lambda} \rightsquigarrow T(r) = -\frac{\mathcal{P}_0 r^2}{4\lambda} + C^{\text{te}} \quad (\text{I.115})$$

✧ La constante d'intégration s'obtient grâce à la continuité de la température en  $r = R$

$$T(R) = T_0 \rightsquigarrow T(r) = \frac{\mathcal{P}_0}{4\lambda} (R^2 - r^2) + T_0 \quad (\text{I.116})$$

### 👁 vision graphique

✧ Graphiquement la température en fonction de  $r$  ressemble à cela



✧ Nous pouvons constater que :

- la température la plus élevée est au centre ;
- plus  $r$  augmente, plus le courant thermique est grand.

★ mise en équation : méthode sans réfléchir

🕒 repartir de l'équation de diffusion thermique

✧ L'idée est de résoudre « mathématiquement » l'équation de diffusion.

✧ Il faut d'abord rétablir dans le cas général l'équation

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = \mathcal{P} \quad (\text{I.117})$$

✧ Cette équation se simplifie tout de suite car le régime est permanent stationnaire

$$-\lambda \Delta T = \mathcal{P} \quad \rightsquigarrow \quad \Delta T = -\frac{\mathcal{P}_0}{\lambda} \quad (\text{I.118})$$

✧ Et maintenant il faut l'expression du laplacien en cylindro polaire pour une fonction qui ne dépend que de  $r$ .

✧ Pour cela en cherchant dans les archives / l'énoncé / la calculatrice, nous trouvons

$$\Delta T(r) = \frac{1}{r} \times \frac{d}{dr} \left( r \times \frac{dT}{dr}(r) \right) \quad (\text{I.119})$$

🛑 Comme le montre l'expression ci-dessus, contrairement aux coordonnées cartésiennes

$$\Delta T(r) \neq \frac{d^2 T}{dr^2}(r) \quad \text{en cylindro-polaire} \quad (\text{I.120})$$

🕒 résoudre

✧ Il faut y aller lentement et par étapes.

$$\Delta T = -\frac{\mathcal{P}_0}{\lambda} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{r} \times \frac{d}{dr} \left( r \times \frac{dT}{dr}(r) \right) = -\frac{\mathcal{P}_0}{\lambda} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d}{dr} \left( r \times \frac{dT}{dr}(r) \right) = -\frac{\mathcal{P}_0}{\lambda} \times r \quad (\text{I.121})$$

✧ En primitivant cela donne

$$r \times \frac{dT}{dr}(r) = -\frac{\mathcal{P}_0}{2\lambda} \times r^2 + \alpha \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dT}{dr}(r) = -\frac{\mathcal{P}_0}{2\lambda} \times r + \frac{\alpha}{r} \quad (\text{I.122})$$

✧ En primitivant une fois de plus nous arrivons à

$$T(r) = -\frac{\mathcal{P}_0}{4\lambda} \times r^2 + \alpha \ln r + \beta \quad (\text{I.123})$$

✧ Il y a deux constantes d'intégration, il faut donc deux conditions aux limites pour les trouver.

✧ Ici  $r = 0$  existe car il est dans le domaine de résolution, il faut donc trouver une solution pour  $r = 0$ .

✧ Cela implique que  $\alpha = 0$  sans quoi pour  $r = 0$  la température deviendrait infinie, ce qui n'est pas possible.

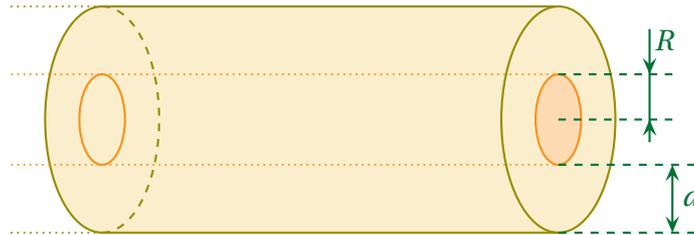
✧ Il reste donc

$$T(r) = -\frac{\mathcal{P}_0}{4\lambda} \times r^2 + \beta \quad (\text{I.124})$$

✧ À partir de là nous sommes ramenés au cas précédent et la continuité de la température en  $r = R$  permet de conclure.

### ★ comparaison des deux méthodes

- ✧ Vue de loin la 2<sup>e</sup> méthode paraît plus courte mais c'est oublier que nous n'avons pas retranscrit :
  - le début qui consiste à retrouver l'équation de diffusion thermique en 3D;
  - la fin pour trouver  $\beta$  et tracer  $T(r)$ .
- ✧ Malgré cela cette méthode présente quelques caractéristiques qui peuvent être des inconvénients :
  - cette méthode dépend de la connaissance de  $\Delta T(r)$  qui n'est pas intuitive;
  - cette méthode fait apparaître des arguments de cohérence dans la résolution ce qui n'est pas fréquent;
  - des fois il est possible d'avoir un terme en  $\ln r$  dans une diffusion en symétrie cylindrique.
- ✧ Considérons un fil de cuivre parcouru par un courant et entouré d'une gaine isolante (électriquement).



- ✧ La diffusion est radiale et il y a deux milieux diffusif donc il y a deux fonctions  $T(r)$  à trouver

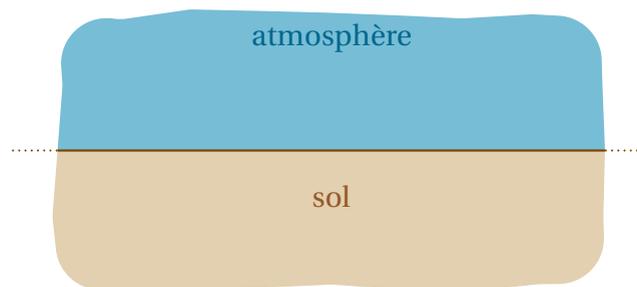
$$T_{\text{fil}}(r) \text{ pour } 0 \leq r \leq R \quad \text{et} \quad T_{\text{isol}}(r) \text{ pour } R \leq r \leq R + a \quad (\text{I.125})$$

- ✧ Dans ces conditions il ne peut pas y avoir de terme en  $\ln r$  dans  $T_{\text{fil}}(r)$  puisque la valeur  $r = 0$  appartient au domaine de résolution mais il peut très bien y avoir ce terme dans  $T_{\text{isol}}(r)$  parce que, justement,  $r = 0$  n'est pas un point de l'isolant.

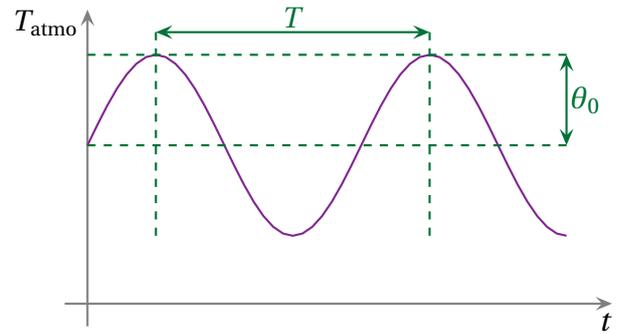
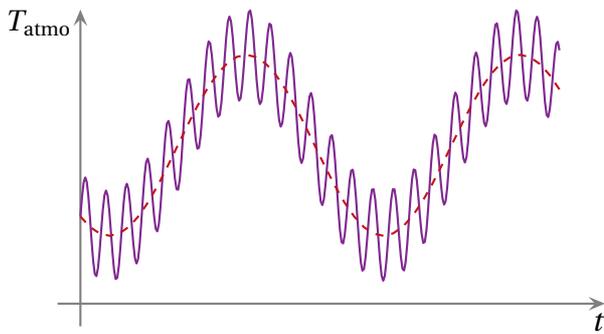
## I-4-iv – température dans le sol – régime sinusoïdal forcé en 1D

### ★ situation et analyse physique

- ✧ Considérons une portion de sol suffisamment grande pour pouvoir être considérée comme infinie.



- ✧ Nous pouvons mettre de côté le chauffage par rayonnement car la diffusion est un phénomène **linéaire**.
- ✧ Nous pouvons ainsi nous concentrer sur l'influence thermique de l'air.
- ✧ La température de l'air varie sinusoïdalement avec des périodes très différentes :
  - une période correspond à l'évolution saisonnière;
  - une autre période correspond à l'évolution quotidienne.
- ✧ Toujours parce que la diffusion est un phénomène **linéaire** nous allons nous contenter d'étudier une seule période  $T$  sans préciser laquelle.
- ✧ Ainsi, pour nous, la température de l'air sera  $T_{\text{air}}(t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$

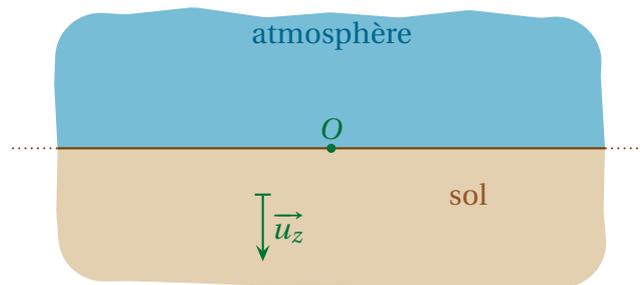


#### ✧ Analyse physique

- nous sommes face à un problème de diffusion ;
- le sol n'étant pas radioactif<sup>6</sup>, ni le siège de réaction chimique, ni parcouru par un courant, la diffusion se fera sans terme de production ;
- le régime que nous allons chercher est un régime permanent **mais** non stationnaire ;
- la situation est invariante par translation suivant deux axes ;
- les grandeurs pertinentes sont  $a$  pour l'aspect thermique (et non  $\lambda$ ),  $T_0$ ,  $\theta_0$  et  $\omega$  pour les contraintes. Ici il n'y a pas d'aspect géométrique à moins de désirer compter exactement le flux qui passe à travers une surface  $S_0$  dessinée sur le sol.

#### ★ analyse technique

✧ Commençons par imposer un repérage de la situation.



✧ Les invariances imposent donc que la température s'écrive  $T(z, t)$  avec  $z \geq 0$ .

✧ Nous pouvons écrire cette température sous la forme

$$T(z, t) = T_0 + T_{\text{sol}}(z, t) \quad (\text{I.126})$$

✧ L'avantage de cette écriture est qu'elle fait apparaître le régime permanent stationnaire (*i.e.* la solution pour  $\theta_0 = 0$ ) de sorte que  $T_{\text{sol}}(z, t)$  soit sinusoïdal de valeur moyenne nulle.

✧ Sinusoïdal ? De valeur moyenne nulle ? Utilisons la notation complexe.

$$T_{\text{sol}}(z, t) = \Re(\underline{T}_{\text{sol}}(z, t)) \quad (\text{I.127})$$

✧ La notation complexe donne de manière systématique

$$\underline{T}_{\text{sol}}(z, t) = \underline{f}(z) e^{j\omega t} \quad (\text{I.128})$$

✧ Nous nous irons un peu plus loin en cherchant directement  $\underline{T}_{\text{sol}}(z, t)$  sous une forme un peu plus particulière

$$\underline{T}_{\text{sol}}(z, t) = \underline{T}_m e^{j(\omega t - \underline{k}z)} \quad (\text{I.129})$$

✧ Si cela ne marche pas, nous reviendrons à la forme originelle  $\underline{T}_{\text{sol}}(z, t) = \underline{f}(z) e^{j\omega t}$  mais cela marchera.

6. Du moins pas à faible profondeur.

★ **résolution**

✧ Faisons comme si nous avons retrouvé l'équation de diffusion thermique sans terme de production

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \Delta T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{avec} \quad a \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\lambda}{\rho c} \quad (\text{I.130})$$

✧ En une dimension le laplacien donne

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z,t) = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}(z,t) \quad (\text{I.131})$$

✧ Et ainsi en notation complexe

$$\frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial z^2}(z,t) = \frac{1}{a} \frac{\partial \underline{T}}{\partial t}(z,t) \quad (\text{I.132})$$

✧ En injectant la solution recherchée cela donne

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \underline{T}_m e^{j(\omega t - \underline{k}z)} \right) = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \left( \underline{T}_m e^{j(\omega t - \underline{k}z)} \right) \quad \rightsquigarrow \quad -\underline{k}^2 \underline{T}_m e^{j(\omega t - \underline{k}z)} = \frac{1}{a} j \omega \underline{T}_m e^{j(\omega t - \underline{k}z)} \quad (\text{I.133})$$

✧ Nous avons finalement

$$-\underline{k}^2 = \frac{1}{a} j \omega \quad \rightsquigarrow \quad \underline{k}^2 = -j \frac{\omega}{a} \quad (\text{I.134})$$

✧ Pour trouver  $\underline{k}$  nous allons nous aider de la relation  $-j = e^{-j\pi/2}$

$$\begin{aligned} \underline{k} &= \underline{k}^2^{1/2} \\ &= \left( \frac{\omega}{a} e^{-j\pi/2} \right)^{1/2} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\omega}{a}} e^{-j\pi/4} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\omega}{a}} \times \frac{1-j}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

✧ Résultat que nous allons noter

$$\underline{k} = \varepsilon \times k_0 (1-j) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1 \quad \text{et} \quad k_0 \stackrel{\text{not}}{=} \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \quad (\text{I.135})$$

✧ Nous pouvons maintenant remplacer  $\underline{k}$  dans la solution

$$\begin{aligned} \underline{T}_{\text{sol}}(z,t) &= \underline{T}_m e^{j(\omega t - \underline{k}z)} \\ &= \underline{T}_m e^{j(\omega t - \varepsilon k_0 z(1-j))} \\ &= \underline{T}_m e^{j(\omega t - \varepsilon k_0 z)} \times e^{+j^2 \varepsilon k_0 z} \\ &= \underline{T}_m e^{j(\omega t - \varepsilon k_0 z)} \times e^{-\varepsilon k_0 z} \end{aligned}$$

✧ Ici comme  $z$  peut tendre vers  $+\infty$  et que la température ne peut être infinie, nous avons forcément  $\varepsilon = +1$  et donc

$$\underline{T}_{\text{sol}}(z,t) = \underline{T}_m e^{j(\omega t - k_0 z)} \times e^{-k_0 z} \quad (\text{I.136})$$

⇨ Nous pouvons revenir à la solution réelle (sans oublier l'argument de  $\underline{T}_m$ )

$$T_{\text{sol}}(z,t) = \text{Re} \left( \underline{T}_{\text{sol}}(z,t) \right) \rightsquigarrow T_{\text{sol}} = T_m \cos(\omega t - k_0 z + \varphi) \times e^{-k_0 z} \quad (\text{I.137})$$

⇨ Puis à la solution complète

$$T(z,t) = T_0 + T_m \cos(\omega t - k_0 z + \varphi) \times e^{-k_0 z} \quad (\text{I.138})$$

⇨ Pour déterminer  $T_m$  et  $\varphi$  nous allons utiliser la continuité de la température en  $z = 0$ .

$$T(0,t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t) \rightsquigarrow T_0 + T_m \cos(\omega t + \varphi) = T(0,t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t) \quad (\text{I.139})$$

⇨ Par identification nous trouvons très vite

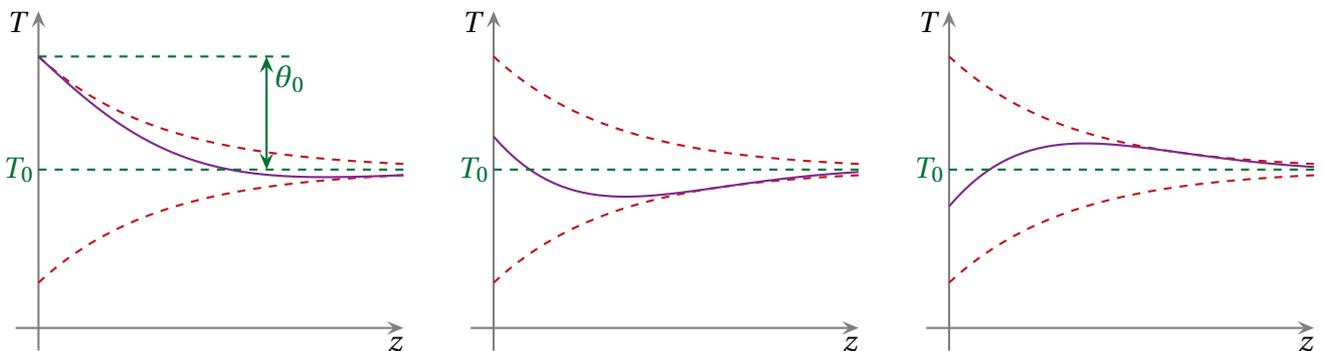
$$T_m = \theta_0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \quad (\text{I.140})$$

⇨ Et la solution finale s'écrit

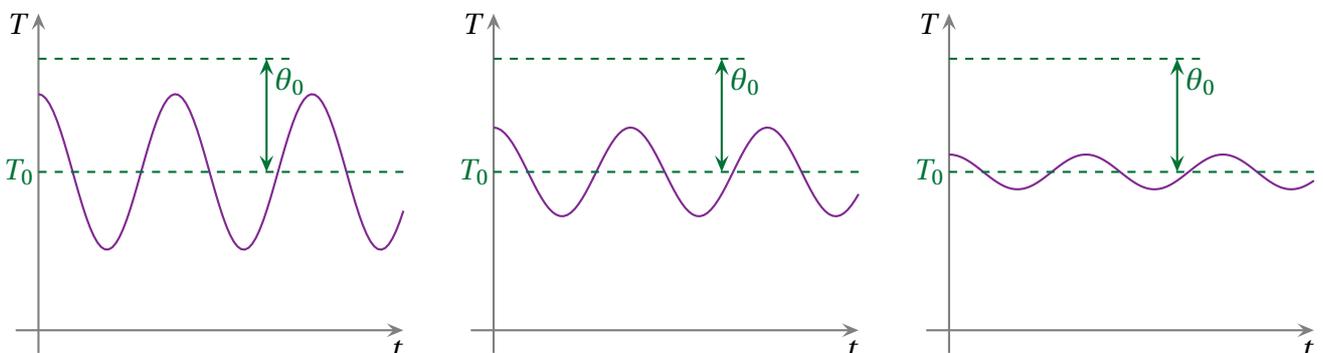
$$T(z,t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t - k_0 z) \times e^{-k_0 z} \quad (\text{I.141})$$

### ★ interprétation

⇨ Graphiquement la solution en fonction de  $x$  à  $t$  fixé est la suivante (pour plusieurs valeurs de  $t$ )



⇨ En revanche, la solution en fonction de  $t$  à  $x$  fixé est la suivante (pour plusieurs valeurs de  $x$ )



⇨ Dynamiquement cela ressemble à une onde dont l'amplitude diminue très vite au fur et à mesure de l'avancement.

Montrer l'animation Maple.

- ✧ Ici il n'y a **aucune** dissipation ! L'énergie se conserve et n'est même pas transformée en une autre forme.
- ✧ La raison pour laquelle l'amplitude décroît est simple : comme la diffusion se fait dans tous les sens, un « morceau » d'énergie peut aller vers l'avant ou vers l'arrière.
- ✧ C'est pourquoi en chaque endroit il y a de l'énergie qui rebrousse chemin, ce qui implique que moins d'énergie va vers l'avant et donc une amplitude des oscillations de température qui décroît. C'est inévitable.
- ✧ Nous voyons aussi que l'effet des variations de température se fait sentir jusqu'à une profondeur d'environ  $\frac{5}{k_0}$  soit

$$z_{\max} \sim 5 \sqrt{\frac{2a}{\omega}} \quad \rightsquigarrow \quad z_{\max} \sim 5 \sqrt{\frac{a \times \text{période}}{\pi}} \tag{I.142}$$

- ✧ Nous voyons ainsi que la profondeur maximal est directement lié à la période.
- ✧ En Champagne-Ardenne les caves de vin de champagne sont à 30 m de profondeur et creusées dans un sol calcaire. En prenant une diffusivité de  $0,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et une période de 365 jours, nous trouvons

$$z_{\max} = 10 \text{ m} \tag{I.143}$$

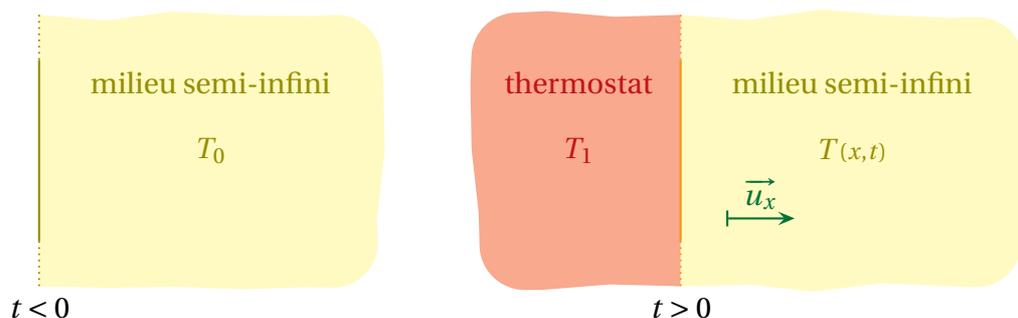
- ✧ Cette valeur explique pourquoi, quelle que soient les conditions extérieures de température, il fait **toujours** 13 °C dans une cave de champagne.
- ✧ Ci-dessous, une vue de la superbe cave de Moët et Chandon à Epernay<sup>7</sup>.



### I-4-ν – choc thermique – solution en régime transitoire en 1D

#### ★ situation

- ✧ Modélisons le contact brusque avec un thermostat de la manière suivante :
  - à  $t = 0^-$  un milieu occupant un demi-espace est à température uniforme ;
  - à  $t = 0$  il est mis en contact avec un thermostat de température différente.



7. Source : [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a4/Epernay\\_Champagne\\_Moet\\_Chandon\\_Cave.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a4/Epernay_Champagne_Moet_Chandon_Cave.jpg).

◇ Analyse :

- ici nous avons un problème de diffusion ;
- il y a deux invariances par translation tant dans la géométrie que dans les contraintes donc la température ne va dépendre que d'un axe ;
- il s'agit ici d'un problème non stationnaire et le régime n'est pas sinusoïdal forcé ;
- les grandeurs pertinentes seront donc  $a$  (régime non stationnaire) ainsi que  $T_0$  comme condition initiale et  $T_1$  comme contrainte.

◇ Analyse technique :

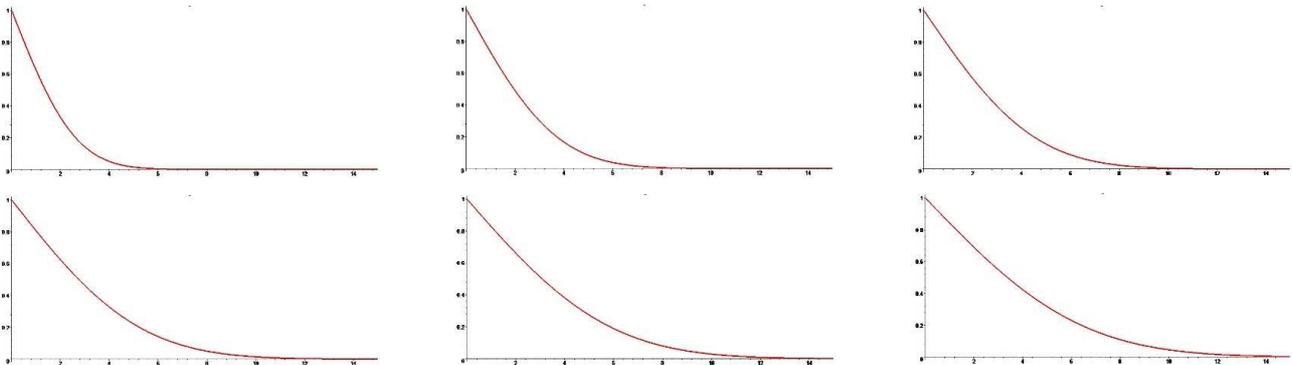
- nous allons noter  $\vec{u}_x$  l'axe normal au plan de séparation ;
- nous n'avons pas de méthode particulière de résolution donc il faudra la trouver avec une méthode particulière.

◇ Les deux conditions se traduisent par :

- $T(x, t < 0) = T_0$  ;
- $T(0, t > 0) = T_1$ .

### ★ graphiquement

◇ Une résolution numérique donne les graphiques suivants.



- ◇ Les différentes courbes correspondent à des instants répartis linéairement ( $t = k \times t_0$  avec  $k$  entier).
- ◇ Nous pouvons voir que la température diffuse effectivement vers les  $x$  croissants mais de plus en plus lentement.

### ★ solution et interprétation

◇ Admettons la solution suivante

$$T(x, t) = T_1 + 2 \times \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi}} \times \int_0^{x/(2\sqrt{at})} e^{-u^2} du \quad (\text{I.144})$$

◇ Nous pouvons facilement vérifier la 2<sup>e</sup> condition aux limites

$$T(0, t) = T_1 + 2 \times \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi}} \times \underbrace{\int_0^0 e^{-u^2} du}_{=0} \rightsquigarrow T(0, t) = T_1 \quad (\text{I.145})$$

◇ Rappelons que (cf. cours de maths)

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{I.146})$$

◇ Nous avons ainsi, pour  $x > 0$  à  $t = 0$  :

$$x/(2\sqrt{at}) = \infty \rightsquigarrow T(x,0) = T_1 + 2 \times \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi}} \times \int_0^\infty e^{-u^2} du \rightsquigarrow T(x,0) = T_0 \quad (\text{I.147})$$

✧ De même à  $x$  fixé, si  $t \rightarrow \infty$  cela donne

$$x/(2\sqrt{at}) \rightarrow 0 \rightsquigarrow T(x,0) = T_1 + 2 \times \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi}} \times \int_0^0 e^{-u^2} du \rightsquigarrow T(x,0) = T_1 \quad (\text{I.148})$$

✧ Autrement dit, en attendant suffisamment longtemps, quel que soit le lieu, la température finira par atteindre  $T_1$ .

✧ Enfin remarquons que la température ne dépend que de  $\frac{x}{2\sqrt{at}}$ .

✧ De la sorte, en se fixant une température  $T^*$  quelconque (entre  $T_0$  et  $T_1$  quand même) elle est atteinte en  $L$  à  $t_0$  tel que

$$\frac{L}{2\sqrt{at_0}} = C^{\text{te}} \rightsquigarrow L \propto \sqrt{t_0} \quad (\text{I.149})$$

✧ Nous retrouvons bien le fait que la diffusion est un phénomène lent puisque la distance est proportionnelle à  $\sqrt{t}$ .

## I.4.vi – résumé des conditions aux limites

### ★ condition au bord d'un milieu diffusant

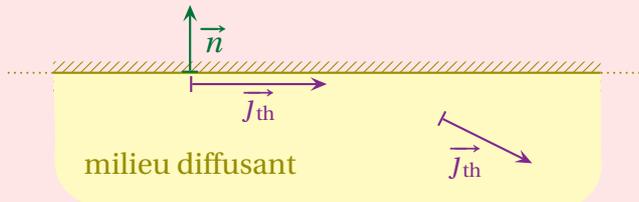
#### 🔧 paroi adiabatique

✧ Une paroi adiabatique est une paroi qui ne laisse pas passer l'énergie.

✧ Nous pouvons donc traduire techniquement la condition en utilisant la densité de courant en volume.

**Loi**

Au niveau d'une paroi adiabatique, nous avons

$$\vec{J}_{\text{th}} \cdot \vec{n} = 0 \text{ où } \vec{n} \text{ est le vecteur unitaire normal à la surface}$$


#### 🔧 contact avec un thermostat

✧ Un thermostat un dispositif qui impose sa température donc

**Loi**

La température de surface d'un milieu en contact avec un thermostat est imposée par le thermostat.

$$T_{\text{milieu diffusant (à la surface)}} = T_{\text{thermostat}}$$

thermostat à  $T_0$

milieu diffusant  $T_0$

### 🔗 contact avec un fluide en mouvement

- ✧ Tout le monde a déjà fait l'expérience du ventilateur : quand il y a *circulation* de fluide près d'un milieu diffusant, il y a des pertes thermiques.
- ✧ Ces pertes sont dites *conducto-convectives* (puisque'il s'agit d'un échange entre un milieu diffusif et un milieu convectif) et elles s'écrivent simplement.

22

**Loi**

RELATION DE NEWTON

Entre un milieu diffusif et un milieu fluide en mouvement, le flux thermique dit *conducto-convectif* s'écrit

$$\Phi = \pm h S (T_{\text{fluide}} - T_{\text{surface}}) \quad \text{où :}$$

- $h$  dépend du matériau, du fluide **et** de la vitesse du fluide ;
- $S$  est la surface d'échange ;
- $\Phi$  est en watt.

fluide en mouvement

milieu diffusant

- ✧ Cette loi n'est pas exigible en tant que telle mais comme elle ressemble énormément à une loi que nous allons voir dans le paragraphe suivant, autant la connaître de manière à ne pas les confondre.
- ✧ En ce qui concerne le signe, il faut réfléchir suivant la convention adoptée (qui reçoit  $\Phi$ ?).

### ★ condition entre deux milieux diffusants

### 🔗 flux thermique

- ✧ Généralisons une loi vue lors de la recherche du champ de température dans un mur.

**Loi**

Entre deux milieux diffusifs, il y a toujours continuité du flux thermique.

$\Phi_{\text{qui sort de 1}} = \Phi_{\text{qui rentre dans 2}}$     ou     $\vec{J}_{\text{th},1} \cdot \vec{n}_{12} = \vec{J}_{\text{th},2} \cdot \vec{n}_{12}$

- ✧ Cette loi ne fait que traduire la conservation de l'énergie.
- ✧ Pour la mettre en défaut, il faudrait qu'il y ait une création (ou une absorption) d'énergie à l'échelle de l'interface. Ce qui n'est pas possible à l'échelle mésoscopique, mais à l'échelle macroscopique...

**🔗 température à l'échelle mésoscopique**

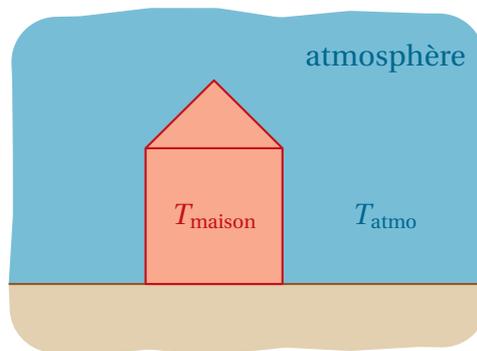
- ✧ Comme nous l'avons déjà signalé sur l'exemple du mur

**Loi**

À l'échelle mésoscopique, la température et la densité surfacique de courant thermique en volume sont des champs continus de l'espace.

**🔗 température à l'échelle macroscopique**

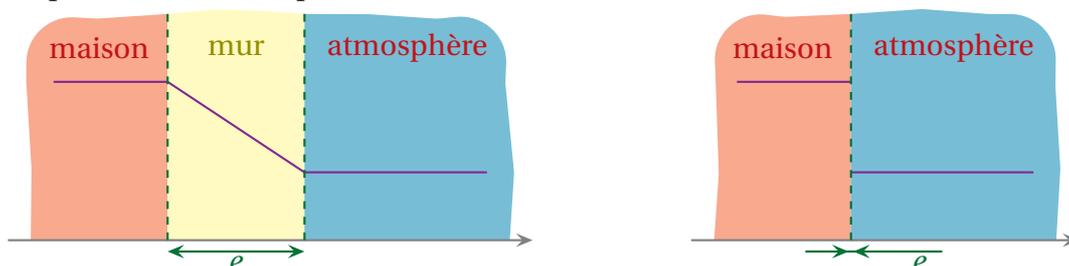
- ✧ À l'échelle macroscopique, la température n'est pas toujours une fonction continue de l'espace.
- ✧ Prenons par exemple une maison vue de loin.



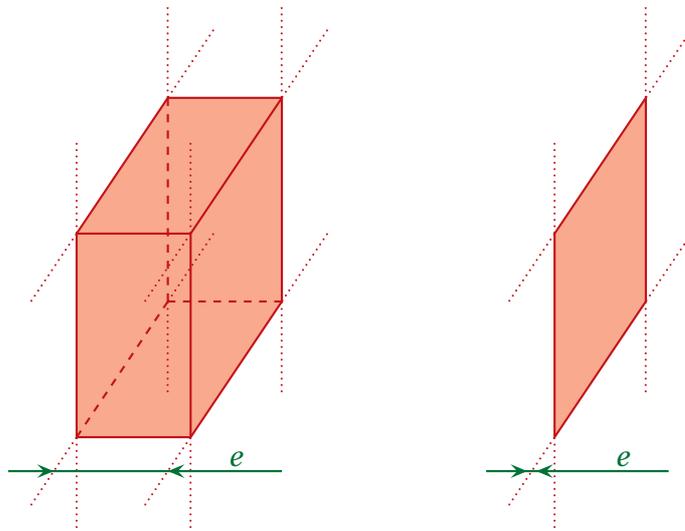
- ✧ À cette échelle les murs sont d'épaisseur nulle ce qui implique, à cette échelle, que

$$T(\text{juste au bord d'un mur}) \neq T(\text{juste de l'autre côté du mur}) \tag{I.150}$$

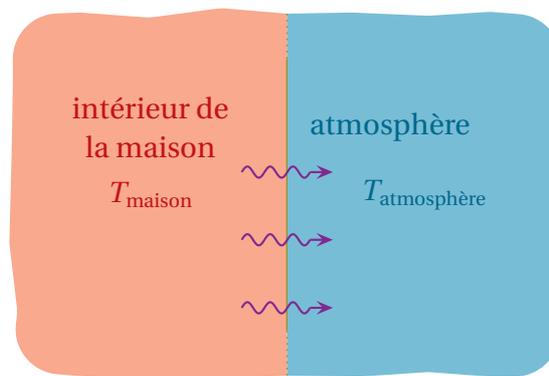
- ✧ En fait tout se passe comme si l'épaisseur  $e$  avait été réduite à 0.



- ✧ Il peut en être de même pour le terme de production.
- ✧ Imaginons une paroi source d'énergie et regardons-la de loin.



- ✧ Nous voyons que nous pouvons alors introduire un terme de puissance surfacique (et non plus volumique).
- ✧ C'est exactement la même chose qu'en électromagnétisme lorsque nous avons introduit la densité surfacique de charge.
- ✧ Ces pourquoi, face à une épaisseur infiniment fine à l'échelle macroscopique :
  - la température n'est plus continue ;
  - le courant thermique en volume n'est plus continu si l'épaisseur est source d'énergie.
- ✧ Il devient alors aussi plus difficile de trouver les flux thermiques, même dans le cas où il n'y a pas de source.
- ✧ Reprenons ainsi le mur de maison mais en version « infiniment » fin.



- ✧ Nous savons (car nous l'avons déjà calculé) que le flux thermique qui passe de l'un à l'autre s'écrit, en régime stationnaire

$$\Phi_{\text{maison vers atmosphère}} = \frac{\lambda}{e} \times S (T_{\text{maison}} - T_{\text{atmosphère}}) \stackrel{\text{not}}{=} h S (T_{\text{maison}} - T_{\text{atmosphère}}) \quad \text{avec} \quad h = \frac{\lambda}{e} \quad (\text{I.151})$$

- ✧ Nous voyons alors réapparaître une loi formellement identique à celle qui donne le flux conducto-convectif mais qui est *fondamentalement différente* en terme phénoménologique car là ce flux n'est autre que celui qui traverse **un** milieu diffusif (ici, le mur).
- ✧ Cette loi montre aussi que le flux est proportionnel à l'écart en température. Cela nous amène directement au paragraphe suivant.

## I-5 – Résistance thermique

### I-5.i – définition par l'exemple

#### ★ tout d'abord les circonstances

✧ Pour parler de résistance thermique il faut quelques conditions (simples).



### Loi

Nous pourrons parler de résistance thermique dans un phénomène de diffusion :

- en régime permanent stationnaire ;
- sans terme de source.

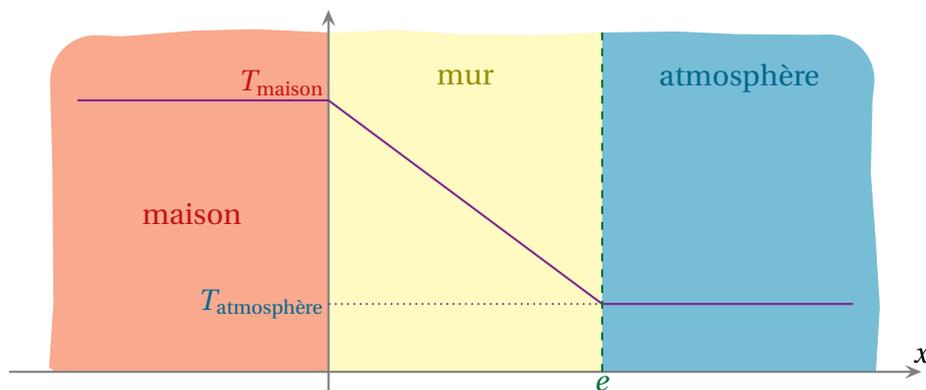
✧ Reste maintenant à savoir ce qu'est cette résistance thermique.

#### ★ exemple du mur simple

✧ Retrouvons très vite les résultats trouvés sur le mur simple de maison.

✧ Nous savons que la température est une fonction continue de l'espace et que la variation est affine dans le mur car le régime est permanent et sans terme de source.

✧ Graphiquement cela donne donc ceci



✧ Analytiquement il n'est pas très difficile de retrouver la fonction

$$T(x) = T_{\text{maison}} + \frac{T_{\text{atmo}} - T_{\text{maison}}}{e} \times x \quad (\text{I.152})$$

✧ Le flux allant de la maison vers l'atmosphère s'écrit donc

$$\Phi_{\text{m} \rightarrow \text{a}} = j_{\text{th}} \times S \quad (\text{I.153})$$

✧ Avec la loi de FOURIER cela donne

$$j_{\text{th}} = -\lambda \frac{dT}{dx} \rightsquigarrow j_{\text{th}} = \frac{T_{\text{maison}} - T_{\text{atmo}}}{e} \rightsquigarrow \Phi_{\text{m} \rightarrow \text{a}} = \frac{\lambda S}{e} (T_{\text{maison}} - T_{\text{atmo}}) \quad (\text{I.154})$$

✧ Autrement dit en généralisant un peu avec des milieux 1 et 2

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \text{qqch} \times (T_1 - T_2) \rightsquigarrow T_1 - T_2 = \text{autre chose} \times \Phi_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{I.155})$$

✧ C'est cette « autre chose » qui est la résistance thermique.

★ **définition retenue**

**Définition**

Un milieu diffusant dont les limites sont aux températures  $T_1$  et  $T_2$  :

- a une *résistance thermique*  $R_{th}$  telle que  $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1 \rightarrow 2}}$  ;
- a une *conductance thermique*  $G_{th}$  telle que  $G_{th} = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{T_1 - T_2}$ .

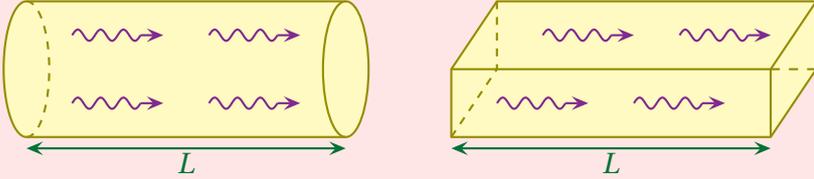
$R_{th}$  et  $G_{th}$  sont indépendants de  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  et  $T_1 - T_2$

- ✧ Pour se souvenir des conventions, c'est facile : les chiffres représentant les milieux sont dans le même ordre dans  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  et  $T_1 - T_2$ .
- ✧ Sinon, avec un peu de bon sens, le signe se retrouve par cohérence en sachant que le flux thermique est dirigé des zones chaudes vers les zones froides.

17

**Loi**

La résistance thermique d'un milieu diffusif unidimensionnel de longueur  $\ell$ , de section  $S$  et de conductivité  $\lambda$  s'écrit

$$R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{\ell}{S}$$


- ✧ Cette expression ressemble furieusement à celle de la résistance électrique !
- ✧ En fait ce n'est pas une coïncidence du tout.

★ **interprétation**

- ✧ Reprenons deux milieux quelconques séparés par un milieu diffusant.



- ✧ Nous avons alors

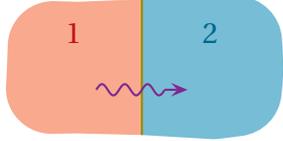
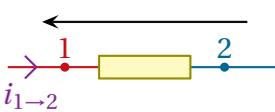
$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} \tag{I.156}$$

- ✧ Ainsi, si nous voulons favoriser les transferts thermiques, il nous faut diminuer la résistance thermique alors que si nous voulons au contraire limiter cette diffusion, il faut l'augmenter.

**I.5.ii – analogie électrique**

- ✧ Nous pouvons faire une analogie entre les aspects électriques et les aspects thermiques conformément à ce tableau.

16

diffusion thermique	courant électrique
$\vec{J}_{th}$	$\vec{j}$
$\Phi_{1 \rightarrow 2}$	$i_{1 \rightarrow 2}$
$T_1 - T_2$	$V_1 - V_2$
	
$T_1 - T_2 = R_{th} \Phi_{1 \rightarrow 2}$	$V_1 - V_2 = R i_{1 \rightarrow 2}$

✧ De cette manière il est assez facile de se souvenir de la définition de la résistance thermique

$$U = R i_{1 \rightarrow 2} \quad \rightsquigarrow \quad T_1 - T_2 = R_{th} \Phi_{1 \rightarrow 2} \tag{I.157}$$



**Loi**

Il est possible de transposer un problème de diffusion en un problème électrique dès lors que :

- le régime est permanent stationnaire ;
- il n'y a pas de terme de source.

✧ Au niveau des lois fondamentales, il est aussi possible de faire des analogie

diffusion thermique	courant électrique
$\vec{J}_{th} = -\lambda \text{grad } T$ (loi de FOURIER)	$\vec{j} = -\gamma \text{grad } V$ (loi d'OHM)
$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{J}_{th}(P) \cdot d\vec{S}_P$	$i_{1 \rightarrow 2} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{j}(P) \cdot d\vec{S}_P$

✧ Et comme nous connaissons l'expression de la résistance d'un milieu conducteur de longueur  $\ell$  et de conductivité  $\gamma$  depuis le cours (de première année) sur le courant électrique, nous avons

$$R = \frac{1}{\gamma} \times \frac{\ell}{S} \quad \rightsquigarrow \quad R_{th} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{\ell}{S} \tag{I.158}$$

**I-5-iii – association de résistances thermiques**

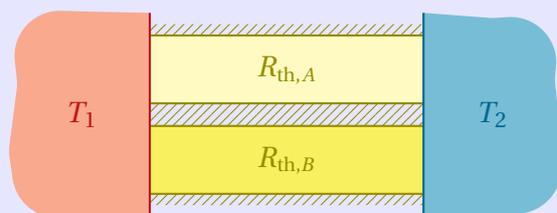
★ association parallèle

🌀 résultat



**Définition**

Deux milieux diffusifs A et B sont en *parallèle* lorsque leurs extrémités sont en contact avec les mêmes thermostats.



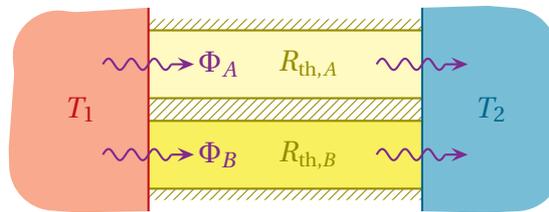
**Loi**

Deux milieux A et B diffusifs en parallèle sont équivalents à un seul milieu diffusif de résistance thermique  $R_{th,éq}$  tel que

$$\frac{1}{R_{th,éq}} = \frac{1}{R_{th,A}} + \frac{1}{R_{th,B}}$$

**démonstration**

✧ Considérons deux milieux en parallèle et demandons-nous s'ils ne seraient pas équivalents (thermiquement parlant) à un seul milieu diffusif.



✧ L'extensivité du flux nous dit que

$$\Phi_{tot} = \Phi_A + \Phi_B \tag{I.159}$$

✧ Par définition des résistances thermiques  $R_{th,A}$  et  $R_{th,B}$  nous avons ainsi

$$\Phi_{tot} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th,A}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{th,B}} \rightsquigarrow \Phi_{tot} = \left( \frac{1}{R_{th,A}} + \frac{1}{R_{th,B}} \right) \times (T_1 - T_2) \tag{I.160}$$

✧ Or pour que l'association soit équivalente à une résistance thermique unique, il faut trouver  $R_{th,éq}$  telle que

$$\Phi_{tot} = \frac{1}{R_{th,éq}} \times (T_1 - T_2) \tag{I.161}$$

✧ Par identification, nous trouvons bien le résultat

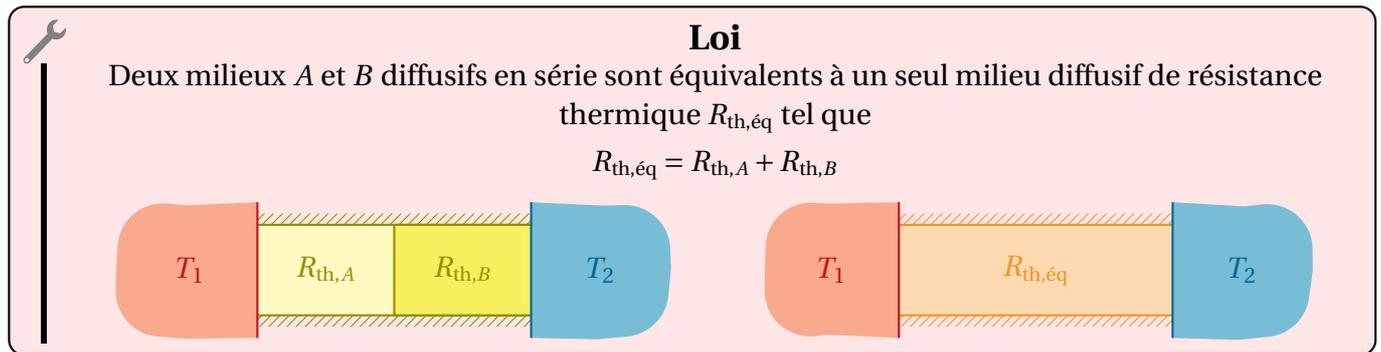
$$\frac{1}{R_{th,éq}} = \frac{1}{R_{th,A}} + \frac{1}{R_{th,B}} \tag{I.162}$$

★ **association série**

**résultat**

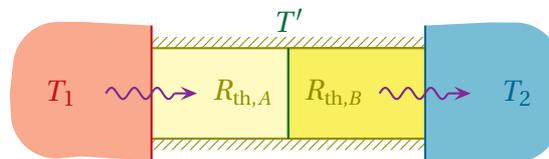
**Définition**

Deux milieux diffusifs A et B sont en *série* lorsqu'ils sont mis bout à bout.



### 🔧 démonstration

✧ Considérons deux milieux en série et demandons-nous s'ils ne seraient pas équivalents (thermiquement parlant) à un seul milieu diffusif.



✧ En notant  $T'$  la température au niveau du contact entre  $A$  et  $B$ , nous pouvons écrire la différence des températures sous la forme

$$T_1 - T_2 = (T_1 - T') + (T' - T_2) \quad (\text{I.163})$$

✧ Avec les définitions des résistances thermiques  $R_{th, A}$  et  $R_{th, B}$  nous avons ainsi

$$T_1 - T_2 = R_{th, A} \times \Phi_A + R_{th, B} \times \Phi_B \quad (\text{I.164})$$

✧ Et la continuité du flux impose que

$$\Phi_A = \Phi_B = \Phi_{tot} \quad \rightsquigarrow \quad T_1 - T_2 = (R_{th, A} + R_{th, B}) \times \Phi_{tot} \quad (\text{I.165})$$

✧ Or pour que l'association soit équivalente à une résistance thermique unique, il faut trouver  $R_{th, \acute{e}q}$  telle que

$$\Phi_{tot} = \frac{1}{R_{th, \acute{e}q}} \times (T_1 - T_2) \quad (\text{I.166})$$

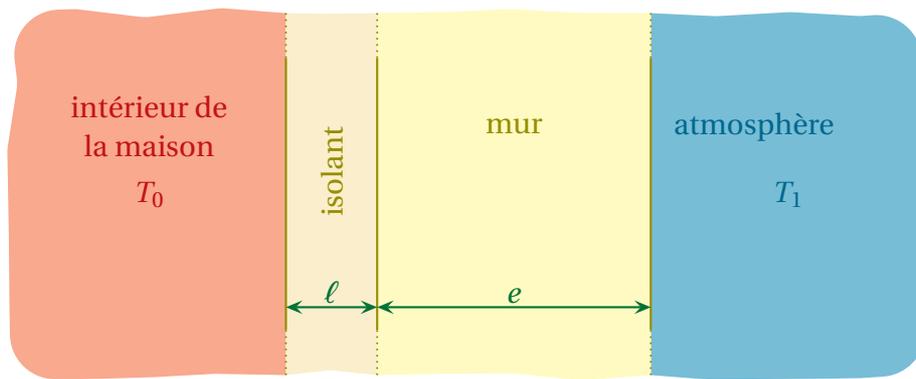
✧ Par identification, nous trouvons bien le résultat

$$R_{th, \acute{e}q} = R_{th, A} + R_{th, B} \quad (\text{I.167})$$

### ★ exemple du mur isolé

✧ Nous pouvons retrouver très vite le flux traversant un mur isolé.

✧ Reprenons le dispositif.



✧ Nous avons trouvé (après « pas mal » de calculs)

$$\Phi_{m \rightarrow a} = \lambda_m S \times \frac{T_m - T_a}{e + \frac{\lambda_m}{\lambda_i} \ell} \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_{m \rightarrow a} = \frac{T_m - T_a}{\frac{e}{\lambda_m S} + \frac{\ell}{\lambda_i S}} \quad (\text{I.168})$$

✧ Transposons le problème en problème électrocinétique



✧ Nous avons donc immédiatement

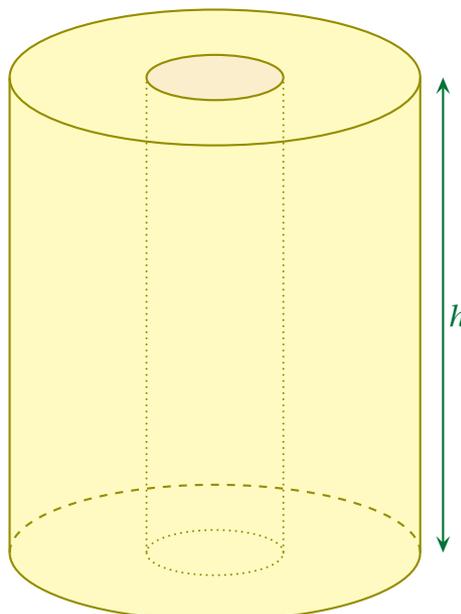
$$\Phi_{m \rightarrow a} = \frac{T_m - T_a}{R_{th,mur} + R_{th,isol}} \quad \text{avec} \quad R_{th,mur} = \frac{e}{\lambda_m S} \quad \text{et} \quad R_{th,isol} = \frac{\ell}{\lambda_i S} \quad (\text{I.169})$$

✧ Ce qui n'est autre que le résultat... et « immédiat »!

### I.5.iv – résistance cylindrique

#### ★ situation, analyse

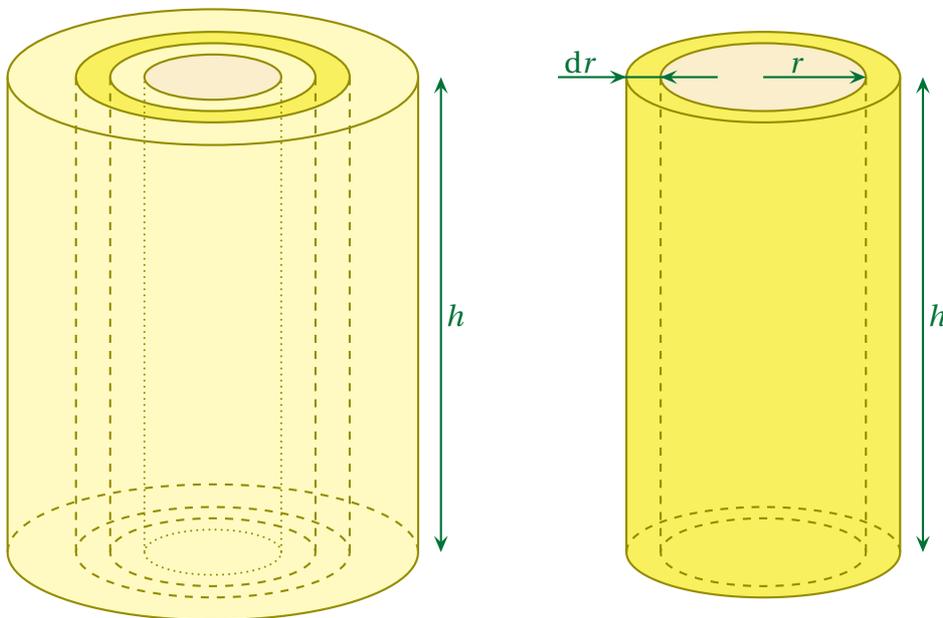
✧ Intéressons-nous à une situation de diffusion thermique, mais en symétrie cylindrique, comme par exemple l'isolation d'un tuyau d'eau chaude par une gaine en mousse.



- ✧ Ici nous avons bien un milieu diffusif (la gaine isolante) qui ne présente pas de terme de création d'énergie et qui est au contact de deux thermostats (la fine couche de cuivre elle même thermostatée par l'eau chaude à la température  $T_1$  et l'atmosphère à la température  $T_0$ ).
- ✧ Dans ces conditions, nous pouvons associer une résistance thermique mais comme ce n'est pas une diffusion unidimensionnelle, nous n'avons pas  $R = \frac{\ell}{\lambda S}$  et ce d'autant plus qu'il aurait été difficile de dire ce qu'était  $la$  section du milieu.
- ✧ Quelle est donc l'expression de la résistance thermique de cet isolant ?
- ✧ Analysons le problème :
  - le dispositif présente une symétrie de révolution, la diffusion est donc radiale  $\vec{j}_{th} = j_{th}(r) \vec{u}_r$  ;
  - le terme de production est nul dans la gaine isolante (pas de réaction chimique, pas de réaction nucléaire, pas de courant électrique) ;
  - le régime est stationnaire ;
  - les grandeur pertinentes sont  $\lambda$  (caractéristique thermique),  $R_1$ ,  $R_2$  et  $h$  (géométrie) et  $T_1$  et  $T_2$  comme contrainte mais si nous contentons de trouver la résistance thermique de la gaine, nous savons que les températures n'interviendront pas.
- ✧ Analyse technique :
  - étant donné la situation (pas de création, RPS), nous pouvons utiliser une approche en terme de résistance thermique ;
  - pour déterminer la résistance thermique nous avons deux méthodes ;
    - nous pouvons procéder par association de résistances thermiques ;
    - nous pouvons reprendre la définition et calculer le flux en fonction des températures.

★ **méthode : associer des résistances élémentaires**

- ✧ Étant donné que le courant thermique est radial, nous pouvons voir l'ensemble de la gaine comme l'association de cylindres creux d'épaisseur  $dr$ .



- ✧ Chaque morceau possède sa propre résistance thermique  $dR_{th}$  puisqu'il est en régime permanent et sans terme de source.
- ✧ De plus nous voyons que les différentes résistances élémentaires sont mises bout à bout : elles sont en *série*.
- ✧ Dès lors nous pouvons écrire

$$R_{\text{th}} = \int dR_{\text{th}} \quad (\text{I.170})$$

✧ La résistance élémentaire s'écrit

$$dR_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{\text{longueur traversée}}{\text{section}} \quad (\text{I.171})$$

✧ Ici nous avons

- longueur traversée =  $dr$  ;
- section =  $2\pi r h$ .

✧ Ce qui donne

$$dR_{\text{th}} = \frac{dr}{\lambda 2\pi r h} \quad (\text{I.172})$$

✧ Maintenant, il suffit de calculer

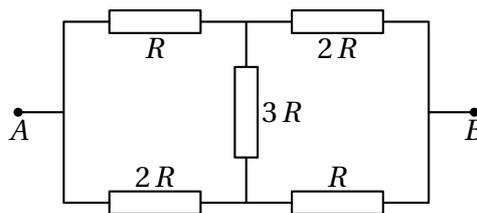
$$\begin{aligned} R_{\text{th}} &= \int_1^2 \frac{dr}{\lambda 2\pi r h} \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\lambda 2\pi r h} \\ &= \frac{1}{2\pi \lambda h} \times \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

✧ La résistance thermique s'écrit donc

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi \lambda h} \times \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{I.173})$$

### ★ méthode : partir de la loi globale

✧ L'idée est identique à celle qu'il faut avoir quand nous cherchons l'expression d'une résistance équivalente alors que nous ne pouvons pas faire d'association

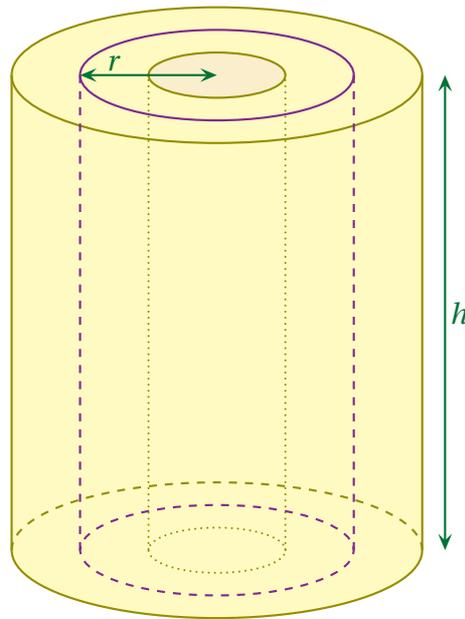


✧ Dans ce cas :

- nous imposons  $V_1 - V_2$  ;
- nous calculons  $i_{1 \rightarrow 2}$  ;
- nous en déduisons  $R_{\text{eq}} = \frac{V_1 - V_2}{i_{1 \rightarrow 2}}$ .

✧ Nous pourrions faire la même chose en diffusion mais **il est techniquement plus facile d'imposer un flux** et de résoudre en température que le contraire.

✧ Reprenons la situation.



- ✧ Imposons un flux  $\Phi_0$  qui va de 1 vers 2.
- ✧ Parce que le flux est conservé (milieu sans source) nous avons

$$\Phi_0 = \Phi(r) \quad (\text{I.174})$$

- ✧ Nous trouvons ensuite très vite que

$$\Phi(r) = \iint_P j_{\text{th}}(r_P) dS_P \quad \rightsquigarrow \quad 2\pi r h j(r) = \Phi_0 \quad (\text{I.175})$$

- ✧ Si nous ajoutons à cela la loi de FOURIER cela donne

$$j(r) = -\lambda \frac{dT}{dr}(r) \quad \rightsquigarrow \quad -2\pi r h \lambda \frac{dT}{dr}(r) = \Phi_0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dT}{dr}(r) = -\frac{\Phi_0}{2\pi r h \lambda} \quad (\text{I.176})$$

- ✧ Nous pouvons alors résoudre

$$T(r) = -\frac{\Phi_0}{2\pi h \lambda} \times \ln \frac{r}{r_0} \quad (\text{I.177})$$

- ✧ Il ne reste plus qu'à exprimer  $T_1 - T_2$  sans avoir besoin d'exprimer la constante d'intégration en  $\ln r_0$

$$T_1 - T_2 = T(R_1) - T(R_2) \quad \rightsquigarrow \quad T_1 - T_2 = -\frac{\Phi_0}{2\pi h \lambda} \times \ln \frac{R_1}{R_2} \quad (\text{I.178})$$

- ✧ Et nous voyons apparaître l'expression de la résistance thermique.

$$T_1 - T_2 = R_{\text{th}} \times \Phi_0 \quad \rightsquigarrow \quad R_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi h \lambda} \times \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{I.179})$$

- ✧ Il s'agit bien là de la même expression que précédemment.

### ★ comparaison

- ✧ La première méthode est certainement plus physique et (donc ?) plus facile mais elle nécessite de bien voir le découpage et l'association de résistances élémentaires.
- ✧ La deuxième méthode est plus systématique mais est moins naturelle, surtout parce qu'il faut se souvenir de l'astuce qui consiste à imposer un flux, et non à partir des températures, ce que tout le monde fait spontanément.

## I-6 – Retour sur le rayonnement

### I-6.i – le corps noir

#### ★ kesako ?

- ✧ Un corps noir est un objet physique dont l'étude a été à l'origine de la naissance de la mécanique quantique.
- ✧ Il s'agit d'un objet idéal tel que



#### Définition

Un *corps noir* est un corps capable d'absorber totalement toutes les radiations reçues.

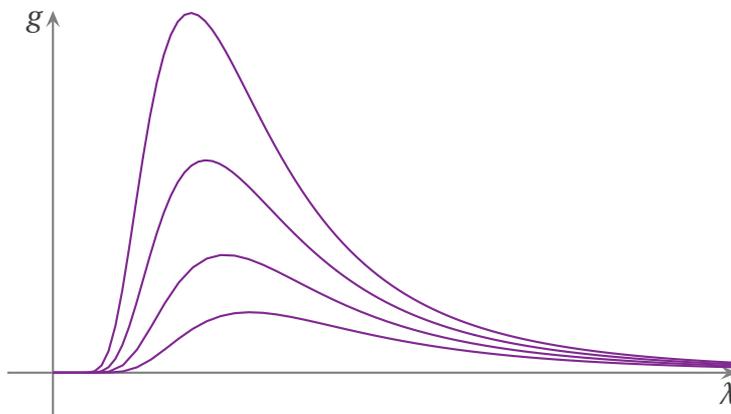
- STOP Le vocable corps *noir* peut prêter à confusion. En effet, le noir est souvent associé, dans la vie courante, à une émission nulle, alors que la définition fait référence à une absorption totale. Nuance.
- ✧ C'est ainsi que de nombreux corps, pourvu qu'ils soient un minimum denses, peuvent être considérés, au moins en première approximation, comme des corps noirs. C'est le cas du Soleil notamment.

#### ★ émissivité

- ✧ PLANCK a montré<sup>8</sup> que la puissance surfacique rayonnée par un corps noir à l'équilibre thermique  $T$  s'écrivait

$$d\varphi = g(\lambda) d\lambda \quad \text{avec} \quad g(\lambda) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1} \quad (\text{I.180})$$

- ✧ Graphiquement, cela donne



- ✧ Sur les graphiques précédents, plus la température est basse, plus la courbe est écrasée.

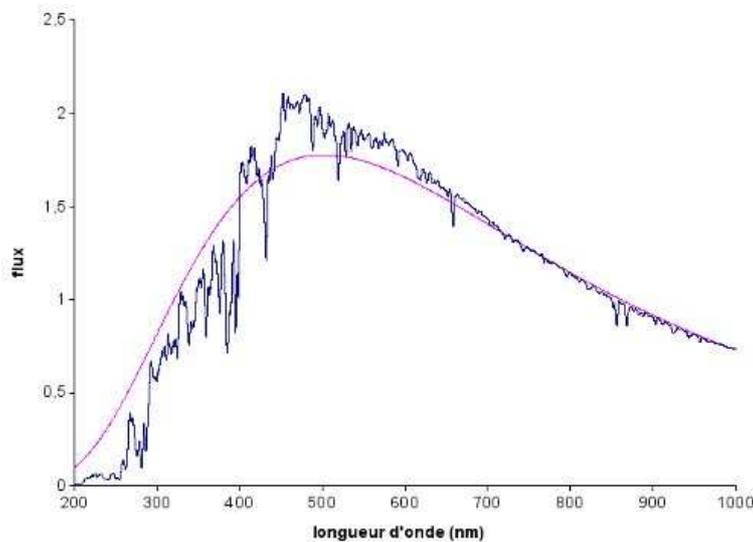
#### ★ loi de WIEN

- ✧ Nous pouvons constater qu'il existe une longueur d'onde pour laquelle l'émissivité est maximale.
- ✧ La loi de WIEN indique que l'émissivité est maximale en  $\lambda_m$  tel que

$$\lambda_m \times T \simeq 3 \times 10^{-3} \text{ K.m} \quad (\text{I.181})$$

8. Pour ce faire, il a utilisé d'un artifice de calcul (il a dit que les échanges énergétiques s'écrivaient  $h\nu$ ) qui est rapidement devenu la pierre fondamentale de la physique des quanta.

- ✧ Ainsi, quand nous entendons parler, en cosmologie, du « rayonnement diffus à 3 K », rayonnement fossile émis à l'origine de l'univers, cela signifie, *via* la loi de WIEN que la longueur d'onde associée à ce rayonnement est de  $\lambda_m \sim 1$  mm.
- ✧ Pour le Soleil, de température de surface d'environ  $6 \times 10^3$  K, la longueur d'onde correspondant au maximum d'émissivité est d'environ  $0,5 \mu\text{m}$ , au beau milieu du spectre visible. Et ce n'est pas un hasard. Au passage, le spectre expérimental du Soleil a tout à fait l'allure d'un spectre d'émission du corps noir.



### ★ loi de STEFAN

- ✧ La loi de STEFAN donne la puissance surfacique *totale* émise par un corps noir

$$\varphi = \sigma \times T^4 \quad \text{avec} \quad \sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4} \quad (\text{I.182})$$

- ✧ Comme, techniquement, cette puissance totale correspond à l'aire sous le graphique d'émissivité, nous pouvons effectivement constater que celle-ci baisse rapidement avec la température.
- ✧ En effet, même si nous n'avons pas les *valeurs* des températures, nous savons que le maximum de la courbe est à une abscisse proportionnelle à la température (loi de WIEN), ce qui nous permet de vérifier que l'aire diminue très vite par rapport à l'augmentation de température.

## I-6-ii – la Terre et le Soleil

### ★ le Soleil

- ✧ En assimilant le Soleil à un corps noir de température  $T_S = 5,8 \times 10^3$  K, nous pouvons, avec la loi de STEFAN trouver la puissance totale libérée par le Soleil.
- ✧ Cela donne

$$\mathcal{P}_S = 4\pi R_S^2 \times \sigma T_S^4 \quad (\text{I.183})$$

- ✧ Connaissant  $2R_S = 1,5 \times 10^6$  km, nous trouvons

$$\mathcal{P}_S = 4,5 \times 10^{26} \text{ W} \quad (\text{I.184})$$

- ✧ Au passage, en utilisant la célèbre relation d'EINSTEIN, cela signifie que la perte de masse du Soleil vaut

$$\mathcal{P}_m = \frac{\mathcal{P}_S}{c^2} = 5 \times 10^9 \text{ kg.s}^{-1} \quad (\text{I.185})$$

- ✧ Autrement dit, à chaque seconde, dans le Soleil, 5 millions de tonnes de matière sont converties en énergie « pure ».

### ★ la Terre

- ✧ En admettant que la puissance émise par le Soleil le soit de manière isotrope, nous pouvons calculer la puissance *surfactive* reçue par la Terre.

$$\mathcal{P}_{s \rightarrow T} = \frac{\mathcal{P}_S}{4\pi d_{ST}^2} = 1,6 \text{ kW.m}^{-2} \quad \text{avec} \quad d_{ST} = 150 \times 10^6 \text{ km} \quad (\text{I.186})$$

- ✧ Soit, au total, pour la demi-Terre éclairée, une puissance de

$$\mathcal{P}_{\text{tot, reçue}} = \mathcal{P}_{s \rightarrow T} \times \pi R_T^2 = 2 \times 10^8 \text{ GW} \quad \text{avec} \quad R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km} \quad (\text{I.187})$$

- ✧ Pour le calcul précédent, il faut bien prendre, comme surface réceptrice de la puissance du Soleil,  $\pi R_T^2$  et non  $\frac{4\pi R_T^2}{2}$ .

- ✧ La majorité de cette puissance est absorbée par le sol et les végétaux mais une partie non négligeable (environ un tiers) est directement réfléchiée par le sol.

- ✧ En admettant que la Terre est à l'équilibre thermique, cela signifie qu'elle rayonne autant de puissance qu'elle n'en absorbe.

- ✧ Ainsi, en assimilant la Terre à un corps noir, nous pouvons trouver la température moyenne de la Terre

$$\mathcal{P}_{s \rightarrow T} = 4\pi R_T^2 \times \sigma \times T_T^4 \quad \rightsquigarrow \quad T_T = 2,8 \times 10^2 \text{ K} \quad (\text{I.188})$$

- ✧ Cette température est très proche de la température moyenne de la Terre communément admise (environ 15 °C), même si, parler de température moyenne de la Terre, peut prêter à débat.

- ✧ Pour améliorer le modèle (et expliquer une légère augmentation de cette température moyenne), il nous faut parler de l'effet de serre.

### ★ l'effet de serre

- ✧ L'effet de serre consiste à incorporer, dans le modèle, l'influence de l'atmosphère.

- ✧ Prenons, comme modèle (simple) de l'atmosphère, une atmosphère :

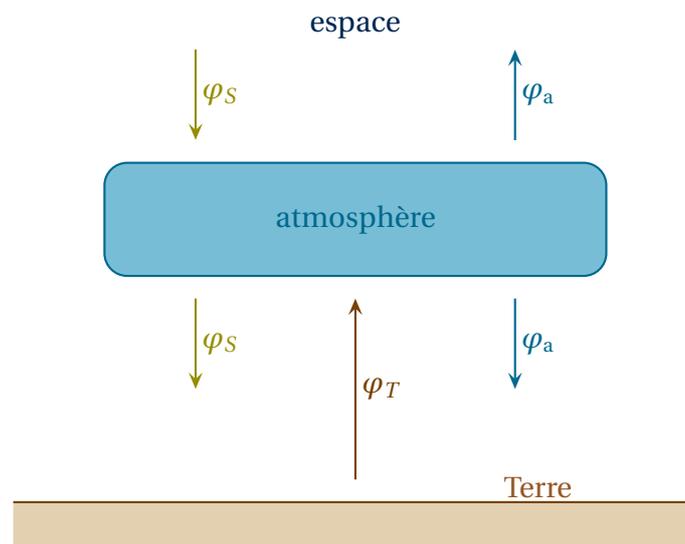
- totalement transparente au rayonnement solaire ;
- totalement absorbante du rayonnement terrestre ;
- qui émet dans toutes les directions.

- ✧ La première hypothèse se justifie par le fait que la lumière du Soleil est essentiellement visible et que cette lumière nous parvient sur Terre (faisons fi des nuages et de la couche d'ozone qui bloque les UV).

- ✧ La deuxième hypothèse se justifie par le fait que la Terre émet essentiellement dans l'infrarouge (cf. loi de WIEN avec  $\lambda_m \sim 1 \mu\text{m}$ ) et que la vapeur d'eau<sup>9</sup> absorbe très bien l'infrarouge.

- ✧ Dans ces conditions, la situation peut se représenter de la manière suivante.

9. Et, dans une moindre mesure, le dioxyde de carbone.



✧ Sur le schéma précédent, nous avons représenté uniquement les flux surfacique avec des notations telles que l'indice fasse référence à l'émetteur.

✧ Le bilan thermique, pour l'atmosphère s'écrit

$$\varphi_S + \varphi_T = \varphi_S + 2\varphi_a \quad (\text{I.189})$$

✧ Le bilan, pour la Terre, s'écrit

$$\varphi_S + \varphi_a = \varphi_S + \varphi_a \quad (\text{I.190})$$

✧ Nous trouvons alors, très vite, que

$$\varphi_T = 2\varphi_S \quad (\text{I.191})$$

✧ Autrement dit, la puissance surfacique que doit « évacuer » la Terre est deux fois plus grande en présence d'atmosphère que sans celle-ci.

✧ Nous avons, alors

$$2\mathcal{P}_{S \rightarrow T} = 4\pi R_T^2 \times \sigma \times T_T^4 \quad \rightsquigarrow \quad T_T = 3,3 \times 10^2 \text{ K} \quad (\text{I.192})$$

✧ Cette fois, nous trouvons une valeur beaucoup trop élevée par rapport à la réalité. Cela est due à la trop grande simplicité du modèle. Il faudrait prendre en compte, notamment :

→ le fait qu'une partie de la puissance reçue par le Soleil est directement réfléchi par la Terre sans être absorbée ;

→ le fait que l'atmosphère est, en partie, transparente au rayonnement émis par la Terre.

✧ Toutefois, ce modèle simple montre que la présence d'atmosphère et, donc, que l'augmentation de l'effet de serre (*i.e.* l'augmentation de l'absorption du rayonnement terrestre par l'atmosphère) conduit à une augmentation globale de la température de la Terre.

## II – Diffusion de particules

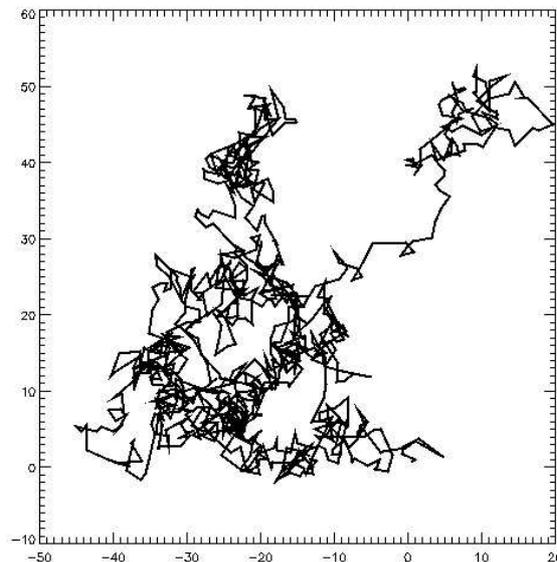
### II.1 – Molécules en mouvement

#### II.1.i – exemples de phénomènes

- ✧ Dans le quotidien, la diffusion de particules se « voit » quand il y a une tache d'encre sur un tissu ou un buvard : les molécules colorées, entraînées par le liquide, diffusent à travers les fibres du tissu.
- ✧ Dans l'industrie, le phénomène de diffusion est utilisé :
  - dans le dopage du silicium, dopage nécessaire à la fabrication de composants électroniques dont l'utilité se passe de commentaire ;
  - dans les réacteurs nucléaires.
- ✧ Au niveau physiologique l'influx nerveux est régi par des phénomènes de diffusion qui, à l'échelle microscopique, peuvent donc devenir « rapides ».

#### II.1.ii – mouvement brownien

- ✧ Le mouvement brownien est ce qui explique la diffusion à l'échelle microscopique.
- ✧ Nous savons déjà que les molécules s'agitent dans tous les sens à cause de l'agitation thermique.
- ✧ Une molécule particulière, ou même un objet de taille mésoscopique, peut ainsi être influencé par les chocs incessants de ces particules.
- ✧ Il en résulte un mouvement saccadé, assez aléatoire, qualifié de « marche au hasard », comme si chaque « pas » n'avait aucun lien avec le précédent.
- ✧ Voici ci-dessous une image extraite de Wikipédia<sup>10</sup> illustrant cette marche aléatoire.



#### Définition

Le *mouvement brownien* est une marche aléatoire d'une particule ou d'un objet suffisamment petit pour être sensible aux chocs avec les particules du milieu en mouvement à cause de l'agitation thermique.

- ✧ Notons que le mouvement brownien existe aussi dans les solides même si, évidemment, c'est beaucoup plus lent.

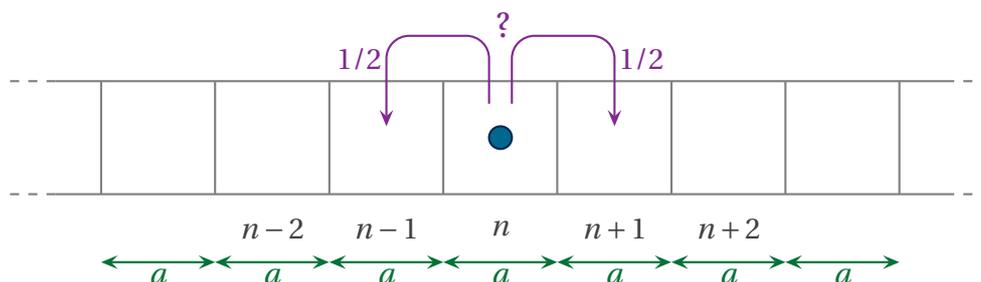
10. Source : <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/59/BrownianMotion.png>.

## II.1.iii – modèle de marche au hasard

10

### ★ un modèle discret

✧ Considérons une particule sauteuse, astreinte à se déplacer sur une ligne infinie de cases.



- ✧ Au bout de la durée  $\tau$ , la particule saute directement sur une case adjacente, distante de  $a$ , avec une probabilité  $p_0 = \frac{1}{2}$ .
- ✧ Autrement dit, à chaque fois qu'elle saute (à tous les instants  $t_k = k \times \tau$ ), elle a *exactement* autant de chance de sauter à droite qu'à gauche. Peu importe ce qu'elle a fait auparavant, même si elle a sauté 14 fois à droite consécutivement.
- ✧ La question est : est-il possible de trouver la loi de probabilité  $\Gamma(x_n, t_k)$  qui donne la probabilité pour la particule d'être à la position  $x_n = n \times a$  à la date  $t_k = k \times \tau$ .

### ★ mise en équation

- ✧ Regardons une case particulière  $x_n$  à une date  $t_k$ . Quelle est la probabilité que la particule sauteuse y soit ?
- ✧ Il n'y a pas 36 possibilités, il n'y en a que deux :
- soit la particule vient de la droite ( $x_{n+1} = x_n + a$ ) et a fait un saut vers la gauche à l'instant  $t_{k-1} = t_k - \tau$  ;
  - soit la particule vient de la gauche ( $x_{n-1} = x_n - a$ ) et a fait un saut vers la droite à l'instant  $t_{k-1} = t_k - \tau$ .
- ✧ Si la particule était, à l'instant  $t_{k-1} = t_k - \tau$ , ailleurs qu'en  $x_n \pm a$ , alors elle n'a strictement aucune chance d'être en  $x_n$  à l'instant  $k$ .
- ✧ Nous pouvons donc dire que :
- la probabilité que la particule vienne de  $x_n + a$  vaut  $\Gamma(x_n + a, t_k - \tau)$  multiplié par la probabilité  $\alpha$  que la particule aille à gauche ;
  - la probabilité que la particule vienne de  $x_n - a$  vaut  $\Gamma(x_n - a, t_k - \tau)$  multiplié par la probabilité  $\alpha$  que la particule aille à droite.
- ✧ Au final, cela signifie que la probabilité  $\Gamma(x_n, t_k)$  que la particule soit en  $x_n$  à  $t_k$  s'écrit

$$\Gamma(x_n, t_k) = \frac{1}{2} \Gamma(x_n + a, t_k - \tau) + \frac{1}{2} \Gamma(x_n - a, t_k - \tau) \quad (\text{II.1})$$

✧ Pour éviter de faire des doubles développements limité pour les termes du membre de droite, nous allons réécrire cette équation «  $\tau$  plus tard ». Cela donne

$$\Gamma(x_n, t_k + \tau) = \frac{1}{2} \Gamma(x_n + a, t_k) + \frac{1}{2} \Gamma(x_n - a, t_k) \quad (\text{II.2})$$

### ★ approximation des milieux et des temps continus

- ✧ Procédons de manière analogue à ce que nous avons fait dans le chapitre sur les ondes : transformons la fonction  $\Gamma(x_n, t_k)$  définie sur un ensemble discret d'abscisses et de temps en une fonction  $\Gamma(x, t)$  définie sur des ensembles continus.
- ✧ Ensuite, en supposant  $a$  et  $\tau$  « suffisamment petits », nous pouvons procéder à des développements limités

$$\Gamma(x_n, t_k + \tau) = \Gamma(x, t) + \tau \times \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x, t) \quad (\text{II.3})$$

$$\Gamma(x_n + a, t_k) = \Gamma(x, t) + a \times \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(x, t) \quad (\text{II.4})$$

$$\Gamma(x_n - a, t_k) = \Gamma(x, t) - a \times \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(x, t) \quad (\text{II.5})$$

- ✧ Ainsi, l'équation II.2 se réécrit

$$\tau \times \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x, t) = \frac{a^2}{2} \frac{d^2 \Gamma}{dx^2}(x, t) \quad (\text{II.6})$$

- ✧ Ou encore

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x, t) = D \frac{d^2 \Gamma}{dx^2}(x, t) \quad \text{avec} \quad D = \frac{a^2}{2\tau} \quad (\text{II.7})$$

- ✧ Il s'agit bien là d'une équation de diffusion.

### ★ lien avec une approche microscopique

- ✧ Au niveau microscopique, les particules sont soumises à l'agitation thermique et avancent à la vitesse  $v^*$  correspondant à la vitesse quadratique moyenne.
- ✧ La présence d'autres particules font que chacune ne parcourt que la distance  $\ell^*$  appelé *libre parcours moyen*.
- ✧ Nous avons alors, de manière quasiment immédiate

$$a = \ell^* \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\ell^*}{v^*} \quad (\text{II.8})$$

- ✧ Avec l'expression de  $D$  trouvée au dessus, nous avons donc, en ordre de grandeur

$$D \sim \ell^* \times v^* \quad (\text{II.9})$$

- ✧ Numériquement, la définition de la température cinétique nous donne, pour du diazote dans des conditions normales,

$$\frac{3}{2} k_B T = \frac{1}{2} m v^2 \quad \rightsquigarrow \quad v \sim 5,0 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1} \quad (\text{II.10})$$

- ✧ La loi des gaz parfait donne la distance moyenne entre les particules, distance que nous assimilerons au libre parcours moyen

$$\ell^* = \left( \frac{RT}{\mathcal{N}_A P} \right)^{1/3} = 3 \times 10^{-9} \text{ m} \quad (\text{II.11})$$

- ✧ Ce qui donne un coefficient de diffusion de

$$D \sim 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad (\text{II.12})$$

★ **distance moyenne parcourue**

✧ Par analogie avec l'équation de diffusion thermique, nous savons déjà que la distance parcourue  $L$  à l'instant  $t$  est telle que

$$L \sim \sqrt{Dt} \quad (\text{II.13})$$

✧ Nous pouvons retrouver ce résultat de la manière suivante.

✧ Notons  $M_i$  la position de la particule à l'instant  $i$ . Alors, la relation de CHASLES nous dit que

$$\overrightarrow{OM_k} = \sum_{i=1}^k \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \quad (\text{II.14})$$

✧ Il s'agit d'une somme donc la moyenne est la somme des moyennes

$$\langle \overrightarrow{OM_k} \rangle = \sum_{i=1}^k \langle \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \rangle \quad (\text{II.15})$$

✧ Or, parce que la particule a autant de chance d'aller à droite qu'à gauche

$$\langle \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \rangle = \vec{0} \quad (\text{II.16})$$

✧ Ce qui donne, sans surprise

$$\langle \overrightarrow{OM_k} \rangle = \vec{0} \quad (\text{II.17})$$

✧ Cela ne signifie pas que la particule, en moyenne, ne s'est pas déplacée, mais bien qu'elle a autant de chance d'être à droite qu'à gauche. Ce qui ne nous avance guère, il faut bien le dire.

✧ Pour accéder à la *distance* parcourue, il vaut mieux calculer

$$L = \sqrt{\langle \|\overrightarrow{OM_k}\|^2 \rangle} \quad (\text{II.18})$$

✧ En reprenant l'expression II.14 et en l'élevant au carré, nous avons

$$\|\overrightarrow{OM_k}\|^2 = \left( \sum_{i=1}^k \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^k \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \right) \quad (\text{II.19})$$

✧ Puis, en développant,

$$\|\overrightarrow{OM_k}\|^2 = \sum_{i=1}^k \|\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\|^2 + \sum_{i \neq j} \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \cdot \overrightarrow{M_{j-1}M_j} \quad (\text{II.20})$$

✧ Tous les vecteurs  $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$  sont de même norme  $a$  donc :

→ la première somme contient exactement  $k$  termes valant  $a^2$  ;

→ la deuxième somme contient des nombres valant soit  $a^2$  soit  $-a^2$  suivant le sens relatif de  $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$  et  $\overrightarrow{M_{j-1}M_j}$ . Comme ces sens sont répartis de manière totalement aléatoire, il y a, statistiquement, à peu près autant de «  $a^2$  » que de «  $-a^2$  », ce qui fait que cette somme est nulle.

✧ Il reste

$$\langle \|\overrightarrow{OM_k}\|^2 \rangle = k \times a^2 + 0 \quad (\text{II.21})$$

✧ Soit

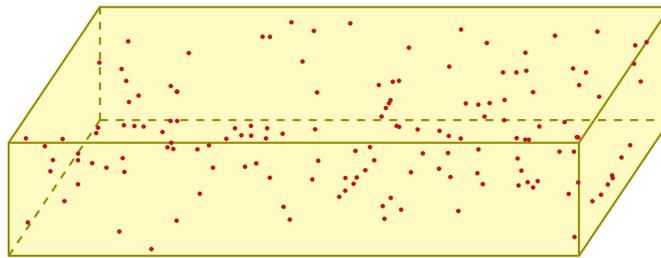
$$L^2 = \frac{t}{\tau} \times a^2 \quad \rightsquigarrow \quad L \approx \sqrt{Dt} \quad (\text{II.22})$$

✧ Tous ces modèles sont donc bien cohérents entre eux, et tant mieux.

## II.2 – Bilan moléculaire

### II.2.i – modélisation

✧ Considérons un milieu matériel globalement immobile dans lequel se trouvent des particules intéressantes.



✧ Les particules intéressantes sont celles dont nous suivrons la diffusion.

#### ★ densité particulaire

✧ Pour suivre les particules diffusantes, nous allons utiliser la densité particulaire.

#### Définition

La *densité particulaire*  $n^*$  est définie par  $dN = n^* d\tau$  où  $dN$  est le nombre de particules intéressantes dans le volume  $d\tau$ .

$$n^* \text{ est en } \text{m}^{-3}$$

✧ D'autres fois nous utiliserons la concentration en  $\text{mol.L}^{-1}$  ou en  $\text{mol.m}^{-3}$  pour suivre le mouvement des particules intéressantes.

✧ Parfois, mais pas toujours, nous rencontrerons la notation  $n$  pour la densité particulaire mais cela risque d'occasionner une collision de notation entre

- la densité particulaire  $n$  en  $\text{m}^{-3}$  ;
- la quantité de matière  $n$  en mol ;
- la concentration de matière  $n$  en  $\text{mol.m}^{-3}$ .

✧ Dans la mesure du possible, nous utiliserons la notation  $n^*$  pour éviter autant que possible les ambiguïtés.

#### ★ courant particulaire

✧ Tout comme il existe une densité surfacique de courant thermique en volume, nous allons introduire un vecteur  $\vec{j}_n$  caractérisant le mouvement des molécules diffusantes.

#### Définition

Le vecteur *densité surfacique de courant de particules en volume*  $\vec{j}_n$  est défini par

$$\delta N = \vec{j}_n \cdot d\vec{S} \delta t \quad \text{où :}$$

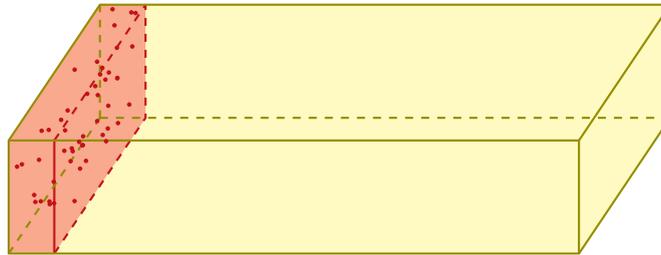
- $d\vec{S}$  est le vecteur surface de la surface à travers laquelle passent les particules ;
- $\delta N$  est le nombre de particules qui passent pendant  $\delta t$  dans le sens de  $d\vec{S}$ .

## II.2.ii – bilan particulaire 1D

3

### ★ situation

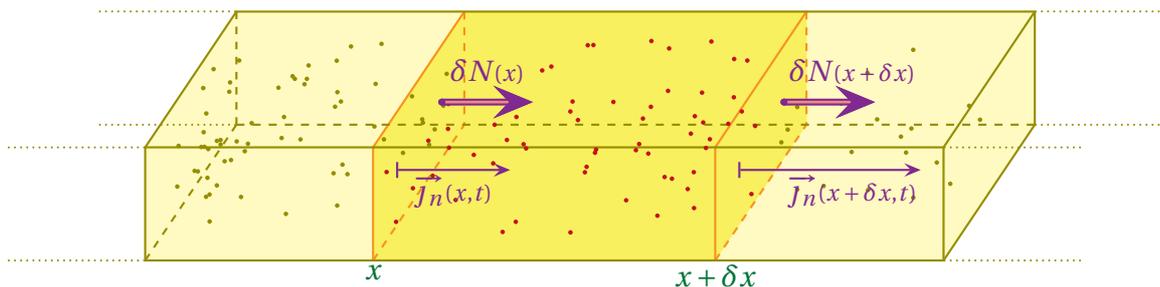
- ✧ Imaginons la situation suivante : dans un tube transparent scellé (pour éviter les phénomènes de convection) un peu de gaz particulier est introduit à une extrémité.



- ✧ Nous savons qu'à terme sa concentration sera homogène mais comment décrire l'évolution de la concentration ?

### ★ approche mésoscopique

- ✧ Étant donné que le rayon du tuyau est bien plus faible que sa longueur, nous pouvons supposer l'homogénéité sur une section et donc décrire le nombre de particules uniquement en fonction de l'abscisse.
- ✧ Comme le nombre de particules varie en espace et en temps, pour faire un bilan de particules nous allons utiliser une approche mésoscopique.
- ✧ Commençons par zoomer.



- ✧ Nous allons faire un bilan de particules sur  $\mathcal{S}$  { la tranche entre  $x$  et  $x + \delta x$  } entre  $t$  et  $t + \delta t$ .
- ☞ *Remarque.* Le système  $\mathcal{S}$  choisi n'est pas fermé. Et pour cause : il y a diffusion de particules. Toutefois comme nous n'allons pas écrire ni de lois mécaniques ni de lois thermodynamiques dessus, cela ne sera pas grave.
- ✧ Le bilan de particules sur  $\mathcal{S}$  peut se résumer sous la forme

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} + \text{CRÉATION EN VOLUME} \quad (\text{II.23})$$

### ★ variation dans le temps

- ✧ Il s'agit là de la variation du nombre de particules intéressantes contenues dans  $\mathcal{S}$ .
- ✧ En notant  $N(t)$  le nombre de particules contenues dans  $\mathcal{S}$  à l'instant  $t$  nous avons tout de suite, par définition de la densité particulaire

$$N(x, t) = n^*(x, t) d\tau \quad (\text{II.24})$$

- ✧ Ce qui donne

$$\delta N_{\text{var}} = N(x, t + \delta t) - N(x, t) \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{var}} = (n^*(x, t + \delta t) - n^*(x, t)) d\tau \quad (\text{II.25})$$

✧ Avec un développement limité à l'ordre 1 de  $n^*(x, t + \delta t)$  nous avons

$$n^*(x, t + \delta t) = n^*(x, t) + \delta t \times \frac{\partial n^*}{\partial t}(x, t) \quad (\text{II.26})$$

✧ Ce qui donne finalement

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \frac{\partial n^*}{\partial t}(x, t) \, d\tau \, \delta t \quad (\text{II.27})$$

### ★ échange à travers la surface

✧ Dans l'exemple choisi les particules ne peuvent évoluer (diffuser) que le long du tube donc les échanges ne se font qu'à deux endroits.

✧ Le terme d'échange se réduit donc à la somme de deux termes

$$\delta N_{\text{éch}} = \delta N_{\text{qui rentre en } x} + \delta N_{\text{qui rentre en } x + \delta x} \quad (\text{II.28})$$

✧ En notant  $S$  la section du tube, la notion de densité surface de courant de particules en volume nous permet d'arriver à (attention aux signes) 2

$$\delta N_{\text{qui rentre en } x} = +j_n(x, t) S \delta t \quad \text{et} \quad \delta N_{\text{qui rentre en } x + \delta x} = -j_n(x + \delta x, t) S \delta t \quad (\text{II.29})$$

✧ En rassemblant nous arrivons à

$$\delta N_{\text{éch}} = j_n(x, t) S \delta t - j_n(x + \delta x, t) S \delta t \quad (\text{II.30})$$

✧ Avec un développement limité à l'ordre 1 de  $n(x + \delta x, t)$  nous avons

$$j_n(x + \delta x, t) = j_n(x, t) + \delta x \times \frac{\partial j_n}{\partial x}(x, t) \quad (\text{II.31})$$

✧ Ce qui conduit à

$$\text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} = -\frac{\partial j_n}{\partial x}(x, t) \times S \delta x \delta t \quad (\text{II.32})$$

### ★ production en volume

✧ Comme nous le savons, il n'est pas possible de « créer » des particules, quoique cela puisse encore être discutable à l'échelle nucléaire.

✧ En revanche il est très facile avec la chimie de transformer une particule inintéressante du substrat en une particule intéressante qui diffuse.

✧ Comme nous ne comptons que les particules intéressantes, celles-ci sembleront apparaître alors qu'au fond il n'en est rien.



#### Loi

Les phénomènes à l'origine de la « création » de particules diffusantes sont les réactions chimiques et nucléaires.

✧ Nous pouvons alors définir un taux de création en volume.



#### Définition

Le *taux de création volumique* de particules  $\sigma$  est tel que

$$\delta N_{\text{créé}} = \sigma \, d\tau \, \delta t$$

✧ Normalement l'unité de  $\sigma$  est  $\text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$  si le bilan est particulaire mais si le décompte se fait en mol, il est possible d'avoir  $\sigma$  en  $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ .

✧ Dans ces conditions la partie création s'écrit immédiatement

$$\text{CRÉATION EN VOLUME} = \sigma(x, t) \, d\tau \, \delta t \quad (\text{II.33})$$

### ★ rassemblement

✧ En rassemblant les trois termes de variation, échange et création nous avons déjà

$$\frac{\partial n^*}{\partial t}(x, t) \, d\tau \, \delta t = -\frac{\partial j_n}{\partial x}(x, t) \times S \, \delta x \, \delta t + \sigma(x, t) \, d\tau \, \delta t \quad (\text{II.34})$$

✧ En remarquant que  $d\tau = S \, \delta x$  nous avons

$$\frac{\partial n^*}{\partial t}(x, t) \, d\tau = -\frac{\partial j_n}{\partial x}(x, t) \, d\tau + \sigma(x, t) \, d\tau \quad (\text{II.35})$$

✧ Et donc finalement

$$\frac{\partial n^*}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j_n}{\partial x}(x, t) = \sigma(x, t) \quad (\text{II.36})$$



### Loi

La loi de conservation des particules, appelée aussi *équation de continuité* s'écrit, dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle

$$\frac{\partial n^*}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j_n}{\partial x}(x, t) = \sigma(x, t)$$

✧ Nous reconnaissons là une équation de conservation avec :

- un couplage des variations spatio-temporelles ;
- une dérivée simple en temps et en espace.

## II.2.iii – bilan particulaire 3D

### ★ approche globale

✧ Nous allons cette fois établir l'équation de continuité mais dans un cas plus général.

✧ Cela nous amènera sans surprise au résultat suivant.

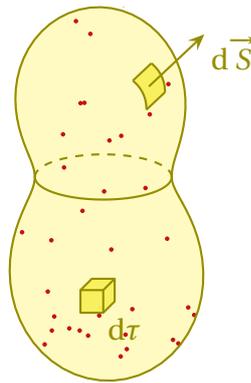


### Loi

La loi de conservation des particules, appelée aussi *équation de continuité* s'écrit, dans le cas général

$$\frac{\partial n^*}{\partial t}(x, t) + \text{div } \vec{J}_n(x, t) = \sigma(x, t)$$

✧ Reprenons la démonstration et commençons par considérer un volume  $\mathcal{V}$  quelconque mais fixe dans le temps.



⇨ Faisons un bilan de particules pour ce volume  $\mathcal{V}$  entre les instants  $t$  et  $t + \delta t$ .

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} + \text{CRÉATION EN VOLUME} \quad (\text{II.37})$$

### ★ variation dans le temps

⇨ À un instant  $t$  quelconque, la quantité totale  $N(t)$  de particules contenues dans le volume  $\mathcal{V}$  s'écrit, par extensivité

$$N(t) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} dN_P \quad \rightsquigarrow \quad N(t) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} n^*(P,t) d\tau_P \quad (\text{II.38})$$

⇨ La variation du nombre de particules s'écrit donc, en utilisant un développement limité

$$\delta N_{\text{var}} = N(t + \delta t) - N(t) \quad \text{et} \quad N(t + \delta t) = N(t) + \delta t \times \frac{dN}{dt}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{var}} = \frac{dN}{dt}(t) \delta t \quad (\text{II.39})$$

⇨ Remarquons qu'ici la dérivée temporelle est bien droite.

⇨ Avec l'expression de  $N(t)$  cela donne

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_{P \in \mathcal{V}} n^*(P,t) d\tau_P \right) \delta t \quad (\text{II.40})$$

⇨ Et comme le domaine d'intégration  $\mathcal{V}$  ne dépend pas du temps, il est possible de « rentrer » la dérivée sous le signe somme ce qui donne

$$\delta N_{\text{var}} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\partial n^*}{\partial t}(P,t) d\tau_P \delta t \quad (\text{II.41})$$

⇨ Et finalement

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\partial n^*}{\partial t}(P,t) d\tau_P \delta t \quad (\text{II.42})$$

### ★ échange à travers la surface

⇨ Pas de surprise ici : la totalité des particules qui rentrent dans le volume est la somme des particules qui rentrent par chaque portion de surface

$$\delta N_{\text{éch}} = \oint_{P \in \mathcal{S}} \delta^2 N_{\text{éch},P} \quad (\text{II.43})$$

⇨ En faisant attention au sens conventionnel du vecteur surface, nous avons

$$\delta^2 N_{\text{éch},P} = -\vec{J}_n(P,t) \cdot d\vec{S} \delta t \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{éch}} = -\oint_{P \in \mathcal{S}} \vec{J}_n(P,t) \cdot d\vec{S} \delta t \quad (\text{II.44})$$

✧ Et en faisant jouer GREEN – OSTROGRADSKI

$$\delta N_{\text{éch}} = -\iiint_{P \in \mathcal{V}} \text{div} \vec{J}_n(P,t) d\tau \delta t \quad (\text{II.45})$$

✧ Ce qui donne finalement

$$\text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} = -\iiint_{P \in \mathcal{V}} \text{div} \vec{J}_n(P,t) d\tau \delta t \quad (\text{II.46})$$

### ★ production en volume

✧ En utilisant l'extensivité de la production, nous avons tout de suite

$$\delta N_{\text{créé}} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \delta^2 N_{\text{créé},P} \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{créé}} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \sigma(P,t) d\tau \delta t \quad (\text{II.47})$$

✧ Ce qui conduit à

$$\text{CRÉATION EN VOLUME} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \sigma(P,t) d\tau \delta t \quad (\text{II.48})$$

### ★ rassemblement

✧ En rassemblant nous avons d'abord

$$\iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\partial n^*}{\partial t}(P,t) d\tau_P \delta t = -\iiint_{P \in \mathcal{V}} \text{div} \vec{J}_n(P,t) d\tau \delta t + \iiint_{P \in \mathcal{V}} \sigma(P,t) d\tau \delta t \quad (\text{II.49})$$

✧ Comme le volume  $\mathcal{V}$  est le même pour les trois sommes, nous pouvons les regrouper en une seule

$$\iiint_{P \in \mathcal{V}} \left( \frac{\partial n^*}{\partial t}(P,t) + \text{div} \vec{J}_n(P,t) - \sigma(P,t) \right) d\tau_P \delta t = 0 \quad (\text{II.50})$$

✧ Et comme ce résultat est nul **quel que soit** le volume  $\mathcal{V}$  c'est que l'intégrande est nul donc

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} + \text{div} \vec{J}_n - \sigma = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial n^*}{\partial t} + \text{div} \vec{J}_n = \sigma \quad (\text{II.51})$$

✧ Ce qui est bien le résultat attendu.

## II-3 – Équation de diffusion particulaire

### II-3.i – loi de FICK

✧ Tout comme pour la diffusion thermique, pour obtenir l'équation de diffusion particulaire il manque la loi qui explique comment les particules « bougent », *i.e.* la loi qui explique comment fonctionne  $\vec{J}_n$ .

## ★ énoncé

✧ Pas de surprise, elle ressemble à la loi de FOURIER.

5



**Loi**  
LOI DE FICK

Dans un milieu diffusant, la densité surfacique de courant de particules en volume s'écrit

$$\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n^* \quad \text{où :}$$

- $n^*$  est la densité particulaire en  $\text{m}^{-3}$  ;
- $D$  est le coefficient de diffusivité en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

✧ Pour l'unité de  $D$  nous avons en effet

$$\delta N = \vec{j}_n \cdot d\vec{S} \delta t \quad \rightsquigarrow \quad [j_n] = \frac{1}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \quad (\text{II.52})$$

✧ Et ainsi

$$[D \overrightarrow{\text{grad}} n^*] = [D] \times \frac{1}{\text{m}^4} \quad \rightsquigarrow \quad [D] = \frac{1}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \times \text{m}^4 \quad \rightsquigarrow \quad [D] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (\text{II.53})$$

## ★ interprétation, limites

✧ L'interprétation est globalement la même que pour la diffusion thermique :

- le courant de particule  $\vec{j}_n$  est dirigé vers les zones de densité basse ;
- la diffusion tend à uniformiser  $n^*$ .

✧ Les limites sont elles aussi analogues à celles de la loi de de FOURIER :

- il ne faut pas un gradient de densité trop important ou d'évolution temporelle trop rapide ;
- le milieu qui sert de support à la diffusion doit être isotrope.

## ★ quelques valeurs

✧ Dans un gaz au repos (donc sans convection) le coefficient  $D$  va de  $10^{-6}$  à  $10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

✧ Dans un liquide, là aussi au repos, le coefficient  $D$  va de  $10^{-12}$  à  $10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

✧ Dans un solide, forcément au repos, le coefficient  $D$  va de  $10^{-30}$  à  $10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-16}$ .

✧ Nous voyons donc que, suivant le substrat, il peut y avoir une variation de près de 26 ordres de grandeur en terme de diffusion entre celle qui se fait dans un gaz et celle qui a lieu dans un solide.

5

## II-3-ii – équation de diffusion

## ★ version 1D

✧ Rappelons l'équation de continuité en 1D

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} + \frac{\partial j_n}{\partial x} = \sigma \quad (\text{II.54})$$

✧ La loi de FICK donne, en 1D

$$\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n^* \quad \rightsquigarrow \quad j_n = -D \frac{\partial n^*}{\partial x} \quad (\text{II.55})$$

✧ Et donc en injectant l'un dans l'autre

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2} = \sigma \quad (\text{II.56})$$

7

**Loi**

L'équation de diffusion unidimensionnelle vérifiée par la densité particulière  $n^*$  s'écrit, en notant  $D$  le coefficient de diffusivité

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2} = \sigma$$

✧ Avec le cas particulier usuel

**Loi**

L'équation de diffusion unidimensionnelle vérifiée par la densité particulière  $n^*$  s'écrit, en notant  $D$  le coefficient de diffusivité et lorsqu'il n'y a pas de terme de source

$$\frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial n^*}{\partial t}$$

★ **version 3D**

8

✧ Comme nous l'avons fait pour l'équation de diffusion thermique, nous pouvons généraliser l'équation précédente en 3D sous la forme suivante.

**Loi**

L'équation de diffusion tridimensionnelle vérifiée par la densité particulière  $n^*$  s'écrit, en notant  $D$  le coefficient de diffusivité

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} - D \Delta n^* = \sigma$$

★ **approche qualitative**

21

- ✧ Nous voyons tout de suite pourquoi dans le cas de la diffusion thermique nous distinguons la *conductivité*  $\lambda$  de la *diffusivité*  $a$  alors que ce n'est pas le cas pour la diffusion particulière.
- ✧ En effet dans le cas de la diffusion particulière il n'y a pas « d'inertie » particulière alors qu'il existe une inertie thermique caractérisée par  $\rho c$ .
- ✧ C'est là la « grande » différence entre les deux types de diffusion : dans le cas de la diffusion particulière,  $D$  sera toujours une grandeur pertinente.
- ✧ Pour le reste, nous pouvons interpréter cette équation exactement de la même manière que nous l'avons fait pour la diffusion thermique :
  - il s'agit d'une loi linéaire ;
  - il s'agit d'une loi associée à un processus irréversible (à cause de la dérivée première en temps) ;
  - il s'agit d'une loi associée à un processus lent.

**Loi**

Dans le cas de la diffusion particulière, la longueur caractéristique de diffusion  $L$  est reliée à la durée caractéristique  $\tau$  par l'intermédiaire du coefficient de diffusivité  $D$  par

$$L = \sqrt{D\tau}$$

✧ Cela vient directement de l'équation de diffusion particulière sans source

$$\frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial n^*}{\partial t} \quad (\text{II.57})$$

✧ En ordre de grandeur nous avons

$$\frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2} \equiv \frac{n^*}{L^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{D} \frac{\partial n^*}{\partial t} \equiv \frac{n^*}{D\tau} \quad (\text{II.58})$$

✧ Ce qui donne bien

$$\frac{n^*}{L^2} = \frac{n^*}{D\tau} \quad \rightsquigarrow \quad L^2 = D\tau \quad (\text{II.59})$$

### ★ interprétation en terme de mouvement – vitesse d'ensemble

- ✧ Bien que, comme nous l'avons vu au début de cette partie, la diffusion est intrinsèquement lié au *hasard* du mouvement des particules, nous pouvons prévoir, pour un grand nombre de particules, leur mouvement.
- ✧ Ainsi, s'il n'est pas possible de regarder précisément comment chaque particule bouge lors de la diffusion, nous pouvons néanmoins associer à l'ensemble de ces particules une vitesse globale (ou vitesse d'ensemble) de diffusion.



#### Loi

Lors d'un phénomène de diffusion, les particules diffusantes ont une vitesse moyenne  $\vec{v}_{\text{diff}}$  telle que

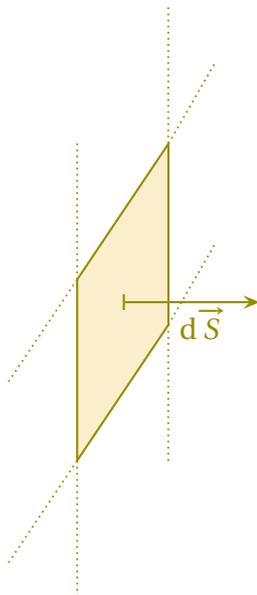
$$\vec{J}_n = n^* \vec{v}_{\text{diff}} \quad \text{où :}$$

- $n^*$  est la densité particulaire ;
- $\vec{J}_n$  est la densité surfacique de courant de particule en volume.

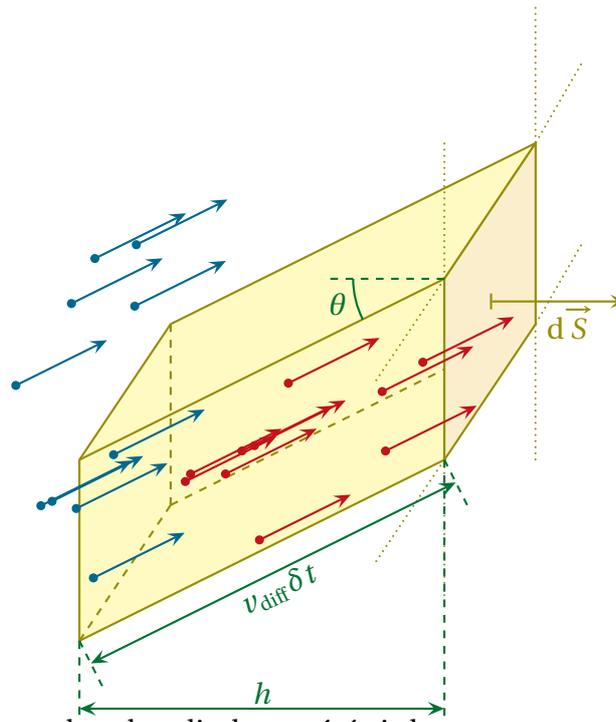
- ✧ Pour montrer ce résultat, nous allons montrer que le nombre de particules qui traverse une surface  $dS$  durant  $\delta t$  s'écrit

$$\delta N_{\text{qui traverse}} = n^* \vec{v}_{\text{diff}} \cdot d\vec{S} \delta t \quad (\text{II.60})$$

- ✧ Pour cela considérons une surface  $dS$  caractérisé par le vecteur surface  $d\vec{S}$



- ✧ Comptons le nombre  $\delta N_{\text{qui traverse}}$  de particules qui passe à travers  $dS$  durant  $\delta t$ .
- ✧ Pour simplifier considérons que toutes les particules ont la même vitesse  $\vec{v}_{\text{diff}}$ .
- ✧ Dans ces conditions **toutes** les particules, où qu'elles soient, avanceront de  $v_{\text{diff}} \delta t$ .



- ⇨ Seules celles (en rouge) qui sont dans le cylindre repéré ci-dessus pourront passer. Les autres (en bleu), ne passeront pas à travers la surface ou ne n'y passeront pas durant  $\delta t$
- ⇨ Or le volume d'un cylindre ne dépend pas de son inclinaison mais seulement de sa hauteur comme l'illustre un simple paquet de cartes



- ⇨ Le volume du cylindre dans lequel doivent se trouver les particules vaut donc

$$d\tau = dS \times h \quad \text{et} \quad h = v_{\text{diff}} dt \cos \theta \quad \rightsquigarrow \quad d\tau = dS \times v_{\text{diff}} dt \cos \theta \quad (\text{II.61})$$

- ⇨ Et dans ce volume, le nombre de particules diffusant s'écrit

$$\delta N_{\text{dans } d\tau} = n^* d\tau \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{dans } d\tau} = n^* dS v_{\text{diff}} dt \cos \theta \quad (\text{II.62})$$

- ⇨ Donc finalement, le nombre de particules diffusantes qui traversent  $dS$  durant  $\delta t$  s'écrit

$$\delta N_{\text{qui traverse}} = \delta N_{\text{dans } d\tau} \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{qui traverse}} = n^* dS v_{\text{diff}} dt \cos \theta \quad (\text{II.63})$$

- ⇨ Soit, en notation vectorielle

$$\delta N_{\text{qui traverse}} = n^* \vec{v}_{\text{diff}} \cdot d\vec{S} \delta t \quad (\text{II.64})$$

- ⇨ Et par identification avec la définition de  $\vec{j}_n$  nous avons

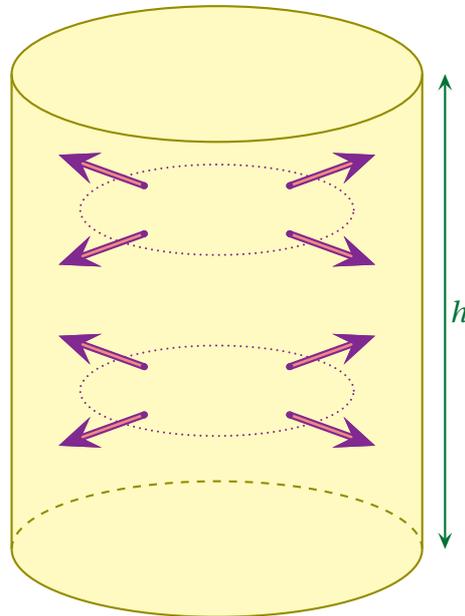
$$\delta N_{\text{qui traverse}} = \vec{j}_n \cdot d\vec{S} \delta t \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j}_n = n^* \vec{v}_{\text{diff}} \quad (\text{II.65})$$

### II-3-iii – équation de diffusion directement en symétrie cylindrique

- ⇨ Nous allons voir dans ce paragraphe comment trouver l'équation de diffusion dans le cas particulier de la symétrie cylindrique (diffusion radiale) sans passer par les opérateurs vectoriels.
- ⇨ Ce n'est pas, *stricto sensu* une méthode à savoir faire directement, mais il n'est pas interdit de penser qu'elle puisse faire l'objet de questions.

### ★ situation et analyse

- ✧ Imaginons une situation de diffusion radiale en symétrie cylindrique.
- ✧ Des particules ont été introduites dans un barreau de manière à diffuser lentement vers l'extérieur.
- ✧ Ce genre de procédé peut être utilisé pour la délivrance de produits médicamenteux sur de longues durées.

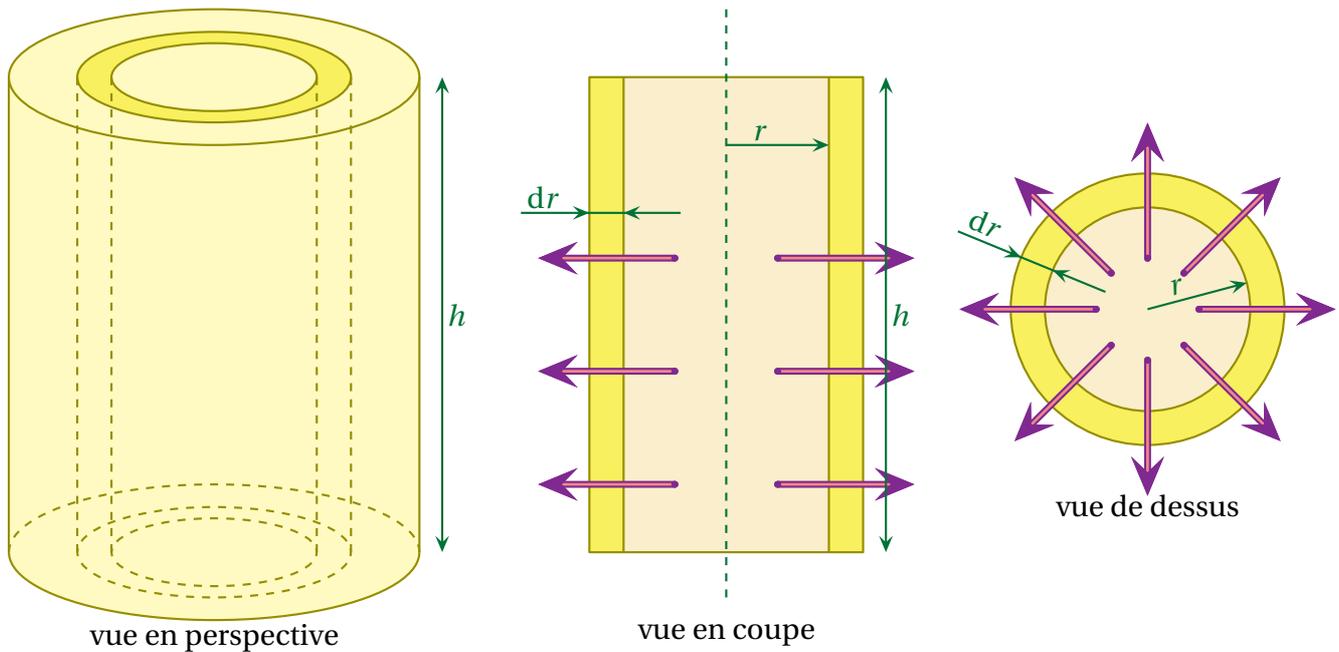


- ✧ Le dispositif est suffisamment grand pour pouvoir négliger les effets de bord.
- ✧ Analyse physique :
  - il s'agit d'un phénomène de diffusion ;
  - la diffusion est radiale donc le courant de particule est porté uniquement par  $\vec{u}_r$  ;
  - l'invariance par rotation et l'invariance par translation (ou plutôt la non prise en compte des effets de bord) permettent d'écrire que les grandeurs ne dépendent pas ni de  $z$  ni de  $\theta$ .
- ✧ Analyse technique :
  - ne sachant pas si le terme de création est uniforme ou non, nous allons procéder à une approche mésoscopique ;
  - nous allons choisir un volume de contrôle respectant au mieux les symétries du problème.

### ★ un système particulier pour un bilan usuel

#### 🌀 schéma

- ✧ Choisissons comme système  $\mathcal{S}$  le volume  $\mathcal{V}$  { cylindre creux de rayon  $r$ , d'épaisseur  $dr$  et de hauteur  $h$  }.



- ✧ Sur le schéma ci-dessus nous avons représenté qualitativement le courant de particules.
- ✧ Nous pouvons faire un bilan de particules pour  $\mathcal{V}$  entre  $t$  et  $t + \delta t$ .

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} + \text{CRÉATION EN VOLUME} \tag{II.66}$$

**🕒 variation dans le temps**

- ✧ Comme le volume  $\mathcal{V}$  est suffisamment bien choisi pour être tel que la densité particulaire y soit uniforme, nous pouvons dire qu'à l'instant  $t$  le nombre de particules qui y sont contenues s'écrit

$$N(t) = n^*(r,t) \times \mathcal{V} \quad \rightsquigarrow \quad N(t) = n^*(r,t) \times 2\pi r dr h \tag{II.67}$$

- ✧ De même à  $t + \delta t$

$$N(t + \delta t) = n^*(r,t + \delta t) \times 2\pi r dr h \tag{II.68}$$

- ✧ La variation s'écrit donc

$$\delta N_{\text{var}} = N(t + \delta t) - N(t) \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{var}} = \left( n^*(r,t + \delta t) - n^*(r,t) \right) 2\pi r dr h \tag{II.69}$$

- ✧ Et avec un développement limité à l'ordre 1

$$n^*(r,t + \delta t) = n^*(r,t) + \frac{\partial n^*}{\partial t}(r,t) \times \delta t \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{var}} = \frac{\partial n^*}{\partial t}(r,t) \times \delta t 2\pi r dr h \tag{II.70}$$

- ✧ Finalement

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \frac{\partial n^*}{\partial t}(r,t) \times \delta t 2\pi r dr h \tag{II.71}$$

### 🕒 production en volume

✧ Encore une fois, comme le volume  $\mathcal{V}$  est uniforme puisqu'à  $r = C^{te}$ , nous avons tout de suite

$$\delta N_{\text{créé}} = \sigma(r,t) \times \mathcal{V} \delta t \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{créé}} = \sigma(r,t) \times 2\pi r dr h \delta t \quad (\text{II.72})$$

✧ Insistons : c'est à l'intérieur de  $\mathcal{V}$  que la production est uniforme. En prenant en compte la totalité du barreau le terme de production peut fort bien *a priori* dépendre de  $r$  et  $t$ .

✧ Ce qui donne

$$\text{CRÉATION EN VOLUME} = \sigma(r,t) \times 2\pi r dr h \delta t \quad (\text{II.73})$$

### 🕒 échange à travers la surface

✧ Nous avons affaire ici à 4 surfaces :

- une couronne au-dessus et en dessous ;
- la surface en  $r$  ;
- la surface en  $r + dr$ .

✧ Étant donné que la diffusion est radiale, il n'y a pas de particules qui passent à travers les couronnes du dessus et du dessous donc il reste

$$\delta N_{\text{reçu}} = \delta N_{\text{reçue en } r} + \delta N_{\text{reçue en } r+dr} + 0 + 0 \quad (\text{II.74})$$

✧ Comme il y a uniformité sur chacune des deux surfaces du courant de particules, nous avons

$$\delta N_{\text{reçue en } r} = +j_n(r,t) \times S(r) \quad \text{et} \quad \delta N_{\text{reçue en } r+dr} = -j_n(r+dr,t) \times S(r+dr) \quad (\text{II.75})$$

**STOP Attention!** Ici et contrairement au cas unidimensionnel l'aire de la surface d'échange dépend de la position !

✧ Cela n'empêche pas de faire un développement limité mais pas directement en  $j_n(r)$

$$\delta N_{\text{reçu}} = f(r,t) \delta t - f(r+dr,t) \delta t \quad \text{avec} \quad f(r) = j_n(r) S(r) \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{reçu}} = -\frac{\partial f}{\partial r}(r,t) dr \delta t \quad (\text{II.76})$$

✧ Et ainsi

$$\delta N_{\text{reçu}} = -\frac{\partial(j_n S)}{\partial r}(r,t) dr \delta t \quad (\text{II.77})$$

✧ Et comme la surface  $S(r)$  s'écrit  $S(r) = 2\pi r h$  nous obtenons

$$\delta N_{\text{reçu}} = -\frac{\partial(j_n 2\pi r h)}{\partial r}(r,t) dr \delta t \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{reçu}} = -\frac{\partial(j_n r)}{\partial r}(r,t) 2\pi dr \delta t h \quad (\text{II.78})$$

✧ Et ainsi

$$= \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} = -\frac{\partial(j_n r)}{\partial r}(r,t) 2\pi dr \delta t h \quad (\text{II.79})$$

### 🌀 rassemblement

✧ Le bilan de particules s'écrit donc

$$\frac{\partial n^*}{\partial t}(r,t) \times \delta t 2\pi r dr h = -\frac{\partial(j_n r)}{\partial r}(r,t) 2\pi dr \delta t h + \sigma(r,t) \times 2\pi r dr h \delta t \quad (\text{II.80})$$

✧ Ce qui donne

$$\frac{\partial n^*}{\partial t}(r,t) + \frac{1}{r} \frac{\partial(j_n r)}{\partial r}(r,t) = \sigma(r,t) \quad (\text{II.81})$$

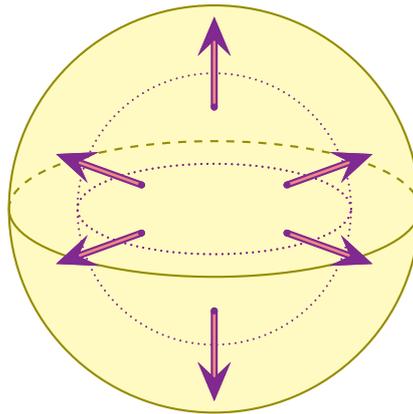
✧ En faisant intervenir la loi de FICK nous avons ainsi

$$j_n(r,t) = -D \frac{\partial n^*}{\partial r}(r,t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial n^*}{\partial t}(r,t) - D \times \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \times \frac{\partial n^*}{\partial r}(r,t) \right) = \sigma(r,t) \quad (\text{II.82})$$

## II-3·iv – équation de diffusion directement en symétrie sphérique

### ★ situation et analyse

- ✧ Nous allons considérer une situation similaire à la précédente mais différente dans la géométrie.
- ✧ Au lieu d'avoir un barreau diffusant, nous allons prendre une sphère diffusante avec une diffusion radiale.



✧ L'analyse physique est analogue :

- il s'agit d'un phénomène de diffusion ;
- la diffusion est radiale donc le courant de particule est porté uniquement par  $\vec{u}_r$  (mais ce n'est pas le même  $\vec{u}_r$  qu'en cylindrique) ;
- les deux invariances par rotation permettent d'écrire que les grandeurs ne dépendent pas ni de  $\theta$  ni de  $\varphi$ .

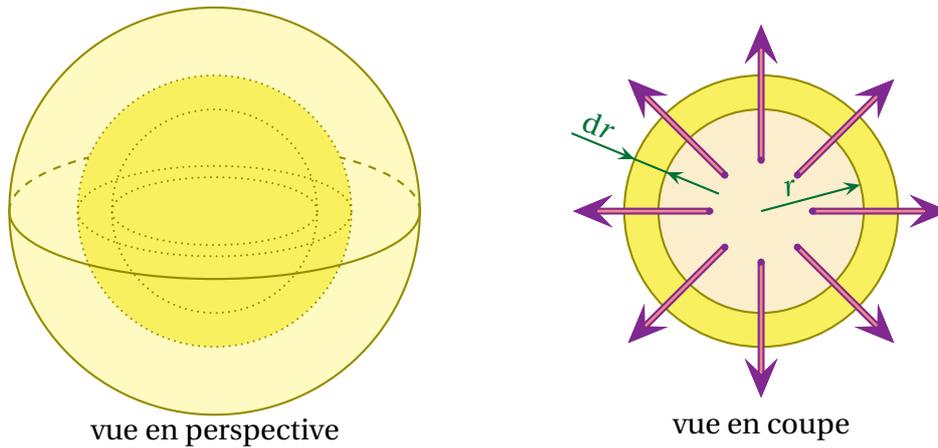
✧ Analyse technique :

- ne sachant pas si le terme de création est uniforme ou non, nous allons procéder à une approche mésoscopique ;
- nous allons choisir un volume de contrôle respectant au mieux les symétries du problème.

### ★ un système particulier pour un bilan usuel

#### 🌀 schéma

✧ Choisissons comme système  $\mathcal{S}$  le volume  $\mathcal{V}$  { coquille creuse de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  }.



- ✧ Sur le schéma ci-dessus nous avons représenté qualitativement le courant de particules.
- ✧ Nous pouvons faire un bilan de particules pour  $\mathcal{V}$  entre  $t$  et  $t + \delta t$  comme nous le faisons habituellement.

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} + \text{CRÉATION EN VOLUME} \quad (\text{II.83})$$

### 🕒 variation dans le temps

- ✧ Comme le volume  $\mathcal{V}$  est suffisamment bien choisi pour être tel que la densité particulaire y soit uniforme, nous pouvons dire qu'à l'instant  $t$  le nombre de particules qui y sont contenues s'écrit

$$N(t) = n^*(r, t) \times \mathcal{V} \quad \rightsquigarrow \quad N(t) = n^*(r, t) \times 4\pi r^2 dr \quad (\text{II.84})$$

- ✧ De même à  $t + \delta t$

$$N(t + \delta t) = n^*(r, t + \delta t) \times \mathcal{V} 4\pi r^2 dr \quad (\text{II.85})$$

- ✧ La variation s'écrit donc

$$\delta N_{\text{var}} = N(t + \delta t) - N(t) \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{var}} = \left( n^*(r, t + \delta t) - n^*(r, t) \right) 4\pi r^2 dr \quad (\text{II.86})$$

- ✧ Et avec un développement limité à l'ordre 1

$$n^*(r, t + \delta t) = n^*(r, t) + \frac{\partial n^*}{\partial t}(r, t) \times \delta t \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{var}} = \frac{\partial n^*}{\partial t}(r, t) \times \delta t 4\pi r^2 dr \quad (\text{II.87})$$

- ✧ Finalement

$$\text{VARIATION DANS LE TEMPS} = \frac{\partial n^*}{\partial t}(r, t) \times \delta t 4\pi r^2 dr \quad (\text{II.88})$$

### 🕒 production en volume

- ✧ Encore une fois, comme le volume  $\mathcal{V}$  est uniforme puisqu'à  $r = C^{\text{te}}$ , nous avons tout de suite

$$\delta N_{\text{créé}} = \sigma(r, t) \times \mathcal{V} \delta t \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{créé}} = \sigma(r, t) \times 4\pi r^2 dr \delta t \quad (\text{II.89})$$

- ✧ Ce qui donne

$$\text{CRÉATION EN VOLUME} = \sigma(r, t) \times 4\pi r^2 dr \delta t \quad (\text{II.90})$$

### 🔄 échange à travers la surface

✧ Ici, la situation est plus simple que pour le barreau puisque le volume considéré n'est constitué que des deux surfaces en  $r$  et en  $r + dr$ .

✧ Comme il y a uniformité sur chacune des deux surfaces du courant de particules, nous avons

$$\delta N_{\text{reçue en } r} = +j_n(r,t) \times S(r) \quad \text{et} \quad N_{\text{reçue en } r+dr} = -j(r+dr,t) \times S(r+dr) \quad (\text{II.91})$$

**STOP Attention!** Ici aussi, comme pour la diffusion radiale cylindrique, l'aire de la surface d'échange dépend de la position !

✧ Cela n'empêche toujours pas de faire un développement limité mais pas directement en  $j_n(r)$

$$\delta N_{\text{reçu}} = f(r,t) \delta t - f(r+dr,t) \delta t \quad \text{avec} \quad f(r) = j_n(r) S(r) \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{reçu}} = -\frac{\partial f}{\partial r}(r,t) dr \delta t \quad (\text{II.92})$$

✧ Et ainsi

$$\delta N_{\text{reçu}} = -\frac{\partial(j_n S)}{\partial r}(r,t) dr \delta t \quad (\text{II.93})$$

✧ Et comme la surface  $S(r)$  s'écrit  $S(r) = 4\pi r^2$  nous obtenons

$$\delta N_{\text{reçu}} = -\frac{\partial(j_n 2\pi r^2)}{\partial r}(r,t) dr \delta t \quad \rightsquigarrow \quad \delta N_{\text{reçu}} = -\frac{\partial(j_n r^2)}{\partial r}(r,t) 4\pi dr \delta t \quad (\text{II.94})$$

✧ Et ainsi

$$= \text{ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE} = -\frac{\partial(j_n r^2)}{\partial r}(r,t) 4\pi dr \delta t \quad (\text{II.95})$$

### 🔄 rassemblement

✧ Le bilan de particules s'écrit donc

$$\frac{\partial n^*}{\partial t}(r,t) \times \delta t 4\pi dr r^2 = -\frac{\partial(j_n r^2)}{\partial r}(r,t) 4\pi dr \delta t + \sigma(r,t) \times 4\pi dr \delta t r^2 \quad (\text{II.96})$$

✧ Ce qui donne

$$\frac{\partial n^*}{\partial t}(r,t) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(j_n r^2)}{\partial r}(r,t) = \sigma(r,t) \quad (\text{II.97})$$

✧ En faisant intervenir la loi de FICK nous avons ainsi

$$j_n(r,t) = -D \frac{\partial n^*}{\partial r}(r,t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial n^*}{\partial t}(r,t) - D \times \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \times \frac{\partial n^*}{\partial r}(r,t) \right) = \sigma(r,t) \quad (\text{II.98})$$

## II-3.v- équation de diffusion en 3D

✧ Aucune surprise.

### Loi

L'équation de diffusion particulaire s'écrit

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} - D \Delta n^* = \sigma \quad \text{où :}$$

- ➔  $D$  est le coefficient de diffusivité;
- ➔  $n^*$  est la densité particulaire;
- ➔  $\sigma$  est le taux de production volumique.

✧ Pour la redémontrer, il suffit de partir de l'équation de continuité en 3D

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_n = \sigma \quad (\text{II.99})$$

✧ Ensuite, introduisons la loi de FICK et utilisons le fait que le matériau soit homogène

$$\vec{J}_n = -D \overrightarrow{\operatorname{grad}} n^* \rightsquigarrow \frac{\partial n^*}{\partial t} + \operatorname{div} \left( -D \overrightarrow{\operatorname{grad}} n^* \right) = \sigma \rightsquigarrow \frac{\partial n^*}{\partial t} + -D \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} n^* = \sigma \quad (\text{II.100})$$

✧ Et il ne reste plus qu'à reconnaître la définition du laplacien

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} () \stackrel{\text{not}}{=} \Delta () \rightsquigarrow \frac{\partial n^*}{\partial t} - D \Delta n^* = \sigma \quad (\text{II.101})$$

✧ Dans les exemples précédents, nous avons pu mettre en équation la diffusion mais sans utiliser les opérateurs vectoriels divergence ou rotationnel.

✧ Cela ne signifie pas qu'il existe d'autres équations de diffusion mais bien que nous avons trouvé les expressions de ces opérateurs dans des géométries particulières.

### ★ laplacien en coordonnées cylindriques dans un cas particulier

✧ Dans le cas de la géométrie cylindre avec diffusion radiale, nous avons montré que

$$\operatorname{div} \vec{J}_n = \frac{1}{r} \frac{\partial (J_n r)}{\partial r} (r,t) \quad \text{et} \quad \Delta n^* (r,t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \times \frac{\partial n^*}{\partial r} (r,t) \right) \quad (\text{II.102})$$

✧ Il suffit pour cela de faire l'identification avec

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} (r,t) + \operatorname{div} \vec{J}_n = \sigma (r,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial n^*}{\partial t} (r,t) - D \Delta n^* (r,t) = \sigma (r,t) \quad (\text{II.103})$$

### ★ laplacien en coordonnées cylindriques dans un cas particulier

✧ De même dans le cas de la géométrie sphérique avec diffusion radiale, nous avons montré que

$$\operatorname{div} \vec{J}_n = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (J_n r^2)}{\partial r} (r,t) \quad \text{et} \quad \Delta n^* (r,t) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \times \frac{\partial n^*}{\partial r} (r,t) \right) \quad (\text{II.104})$$

✧ Il suffit pour cela de faire l'identification avec

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} (r,t) + \operatorname{div} \vec{J}_n = \sigma (r,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial n^*}{\partial t} (r,t) - D \Delta n^* (r,t) = \sigma (r,t) \quad (\text{II.105})$$

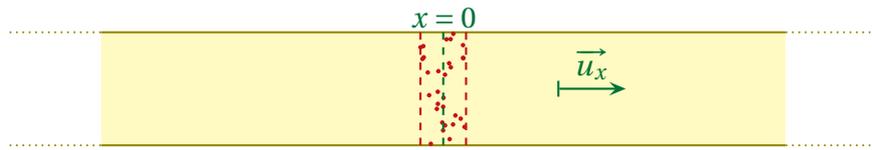
## II.4 – Quelques solutions

### II.4.i – tache d'encre – régime transitoire en 1D

#### ★ situation

✧ Modélisons une tache d'encre par une situation 1D.

✧ Imaginons qu'à l'instant  $t = 0$  toutes les particules soient en  $x = 0$  et qu'après elles sont « libres » de diffuser.



◇ Analyse physique :

- il s'agit là d'un phénomène de diffusion sans source ;
- le régime est non stationnaire, non permanent ;
- étant donné que la diffusion se fait en 1D,  $n^*$  sera une densité particulaire linéique en  $\text{m}^{-1}$  ;
- les grandeurs pertinentes sont  $N_0$  le nombre total de particule diffusantes et  $D$  la diffusivité du matériau.

◇ Les contraintes auxquelles devra obéir la solution est :

- toutes les particules sont localisées en  $x = 0$  à  $t = 0$ , i.e.  $n^*(x \neq 0, 0) = 0$  ;
- le nombre total de particules ne change pas, i.e.  $\int_{-\infty}^{+\infty} n^*(x, t) dx = N(t) = N_0 = \text{C}^{\text{te}}$ .

### ★ solution, représentation

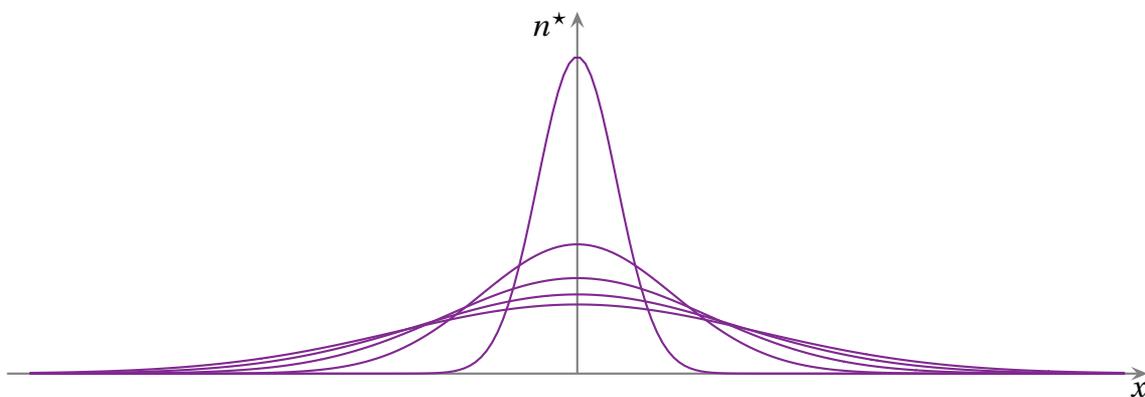
◇ Après des calculs sans grand intérêt physique, nous obtenons

$$n^*(x, t) = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi D t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4 D t}\right) \quad (\text{II.106})$$

◇ Nous constatons qu'il s'agit là d'une gaussienne (fonction que nous avons déjà rencontrée en optique) :

- dont la valeur maximale est en  $x = 0$  et décroît avec le temps ;
- dont l'écart-type en  $\sqrt{2 D t}$  augmente avec le temps.

◇ Voici la représentation de la solution pour différents instants régulièrement espacés.

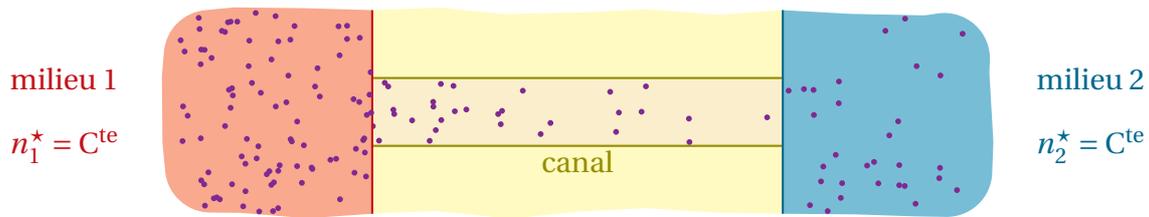


◇ Comme nous le savions, mais c'est toujours mieux de le vérifier, la distance caractéristique qui est ici l'écart-type, est proportionnelle à  $\sqrt{D t}$  illustrant une fois de plus la lenteur du phénomène de diffusion.

### II·4·ii – canal à ion – régime stationnaire 1D

◇ L'exemple ci-dessus est typique des phénomènes de diffusion au niveau moléculaire.

◇ Nous pouvons modéliser la paroi d'une cellule par un milieu imperméable à certains ions sauf au niveau de « canaux » dans lesquels ils diffusent.



- ✧ Les milieux à l'intérieur et à l'extérieur de la cellule sont si grands que nous pouvons les considérer comme des réservoirs de concentration constantes.
- ✧ Dans ces conditions, si nous supposons le régime permanent stationnaire, comme la diffusion est en 1D, nous pouvons dire que la concentration à l'intérieur du canal est une fonction affine de l'espace ce qui donne, en respectant la continuité de la concentration en  $x = 0$  et  $x = e$

$$n^*(x) = n_1^* + \frac{n_2^* - n_1^*}{e} \times x \quad (\text{II.107})$$

- ✧ Le flux de particules qui va du milieu ① vers le milieu ② s'écrit

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \vec{J}_n \cdot (S \vec{u}_x) \quad \text{avec} \quad \vec{J}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n^* \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{DS}{e} (n_1^* - n_2^*) \quad (\text{II.108})$$

- ✧ Vérifions quand même la cohérence :

- si  $n_1^* > n_2^*$  alors les particules vont de ① vers ② ;
- plus la diffusivité est grand plus  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  est grand ;
- plus la section  $S$  est grande plus  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  est grand ;
- plus la longueur  $e$  du canal  $e$  est petite plus  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  est grand.

- ✧ Pour finir, interprétons microscopiquement ce dernier résultat « plus la longueur  $e$  du canal  $e$  est petite plus  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  est grand ».
- ✧ N'oublions pas que les particules qui diffusent marchent **au hasard**.
- ✧ Ainsi, plus le canal est long, plus il faut qu'une particule fasse de pas *dans le même sens* pour arriver à passer de l'autre côté.
- ✧ C'est comme, sur un série de « pile ou face », faire plus de « pile » que de « face » : moins il y a de lancers, plus statistiquement l'écart peut être grand.
- ✧ C'est ainsi que plus la distance à traverser s'allonge moins il est probable que les molécules y diffusent.

# Compétences du chapitre

*Les compétences à vocation essentiellement expérimentale sont indiquées en italique.*

## Deuxième année

### 2.1 – Diffusion de particules

✧ Vecteur densité de flux de particules  $j_N$

1 Exprimer le nombre de particules traversant une surface en utilisant le vecteur  $j_N$

✧ Bilans de particules.

2 Utiliser la notion de flux pour traduire un bilan global de particules. [75,77]

3 Établir une équation traduisant un bilan local dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne, éventuellement en présence de sources internes. [74]

4 Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie. [76]

✧ Loi de FICK.

5 Utiliser la loi de FICK. Citer l'ordre de grandeur d'un coefficient de diffusion dans un gaz dans les conditions usuelles. [79,79]

✧ Régimes stationnaires.

6 Utiliser la conservation du flux sous forme locale ou globale en l'absence de source interne. [27]

✧ Équation de diffusion en l'absence de sources internes.

7 Établir une équation de la diffusion dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. [79]

8 Utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur laplacien et son expression fournie. [80]

9 Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. [31,80]

✧ Approche microscopique du phénomène de diffusion.

10 Mettre en place un modèle probabiliste discret à une dimension de la diffusion (marche au hasard) et évaluer le coefficient de diffusion associé en fonction du libre parcours moyen et de la vitesse quadratique moyenne. [70]

### 2.2 Diffusion thermique

✧ Vecteur densité de flux thermique  $j_Q$

11 Exprimer le flux thermique à travers une surface en utilisant le vecteur  $j_Q$ . [14,15]

✧ Premier principe de la thermodynamique.

12 Utiliser le premier principe dans le cas d'un milieu solide pour établir une équation locale dans le cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne, éventuellement en présence de sources internes. [17]

13 Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie. [22]

✧ Loi de FOURIER.

- 14 Utiliser la loi de FOURIER. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier. [28,30]

✧ Régimes stationnaires. Résistance thermique.

- 15 Utiliser la conservation du flux sous forme locale ou globale en l'absence de source interne. [27]

- 16 Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. [57]

- 17 Exprimer une résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel en géométrie cartésienne. [57]

- 18 Utiliser des associations de résistances thermiques. [58,60]

✧ Équation de la diffusion thermique en l'absence de sources internes.

- 19 Établir une équation de la diffusion dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. [29,29]

- 20 Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur laplacien et son expression fournie. [32]

- 21 Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. [31,80]

- 22 Utiliser la relation de NEWTON  $\delta Q = h(T_s - T_a) dS dt$  fournie comme condition aux limites à une interface solide-fluide. [53]

## 2.3 Rayonnement thermique

✧ Approche descriptive du rayonnement du corps noir : loi de WIEN, loi de STEFAN.

- 23 Utiliser les expressions fournies des lois de WIEN et de STEFAN pour expliquer qualitativement l'effet de serre. [67]