

Analyser un circuit électrocinétique

☛ Le cours

1. Court-circuiter un générateur idéal de tension, *ie.* relier ses deux bornes par un fil, revient à lui imposer une d.d.p. nulle entre ses deux bornes alors que son rôle est justement d'établir une différence de potentiels (d.d.p.) *non nulle* entre ces mêmes bornes. Cela n'étant pas possible, il risque d'en souffrir et de se détériorer, même si normalement les appareils sont censés avoir une sécurité pour se prémunir des conséquences d'un tel acte.

2. Dès qu'un générateur idéal de courant est mis sous tension, celui-ci cherche à remplir son rôle qui est de débiter un courant de caractéristique précise. Seulement, comme il n'est pas relié à un circuit, il ne peut le faire et risque ainsi d'en souffrir, même si un dispositif de sécurité (interne) peut exister.

3. → *Circuit ①.* Les résistors R et R_2 sont en parallèle et leur **association** est en série avec R_1 .

→ *Circuit ②.* Les trois résistors R , R_1 et R_2 sont tous en parallèle.

→ *Circuit ③.* R_1 , R_2 et R_3 sont en série et leur **association** est en parallèle avec R .

→ *Circuit ④.* R_1 et R_2 sont en série (aucun courant ne circule dans la branche marquée $I = 0$) et leur **association** est en parallèle avec R .

4. Oui, la modélisation est possible. Comme il n'y a pas de sens obligatoire pour le générateur de THÉVENIN, il est possible de le mettre dans n'importe quel sens. Il faudra juste faire attention aux sens des flèches lors des transformations ou au signe lors du calcul direct de la f.é.m. E_{th} .

5. Procédons par ordre.

→ *Circuit ①.* R'_1 , R'_2 et R'_3 sont en série donc nous pouvons écrire $U = \frac{R'_3}{R'_1 + R'_2 + R'_3} \times U_2$.

De même l'association $R_2 // (R'_1 \oplus R'_2 \oplus R'_3)$ est en série avec R_1 et R_3 d'où :

$$U_2 = \frac{\frac{R_2(R'_1 + R'_2 + R'_3)}{R_2 + R'_1 + R'_2 + R'_3}}{\frac{R_2(R'_1 + R'_2 + R'_3)}{R_2 + R'_1 + R'_2 + R'_3} + R_1 + R_3} \times U_1$$

☛ *Remarque* : il n'y a pas grand intérêt à simplifier une expression telle que celle-là.

→ *Circuit ②.* L'association $R_2 // R'_2$ est en série avec R_3 et R d'où (attention au signe) :

$$U = -\frac{R}{R + \frac{R_2 R'_2}{R_2 + R'_2} + R_3} \times U_1 \quad \text{et} \quad U_2 = \frac{\frac{R_2 R'_2}{R_2 + R'_2}}{\frac{R_2 R'_2}{R_2 + R'_2} + R + R_3} \times U_1$$

Remarquons que ces résultats sont indépendants de R_1 .

→ *Circuit ③.* R_1 et R_2 sont en série, donc $U_1 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \times U_2$.

De même R' , R'_1 , R'_2 et R'_3 sont en série d'où $U = -\frac{R'_1}{R' + R'_1 + R'_2 + R'_3} \times U_2$.

→ *Circuit ④.* Les associations $R // R'$ et $R_1 // R'_1$ sont en série donc :

$$U = \frac{\frac{R R'}{R + R'}}{\frac{R R'}{R + R'} + \frac{R_1 R'_1}{R_1 + R'_1}} \times U_2 \quad \text{et} \quad U_1 = \frac{\frac{R_1 R'_1}{R_1 + R'_1}}{\frac{R R'}{R + R'} + \frac{R_1 R'_1}{R_1 + R'_1}} \times U_2$$

☛ Exercice 1

1. Dans ce circuit, il y a :

→ 6 nœuds : $A, B, (CDE), (FG), H$ et (JK)

→ 3 nœuds principaux : $(CDE), (FG)$ et (JK)

→ 5 branches $CBAHJ, CJ$ (passant par R_5), DF, EG et FK

→ 3 mailles $ABCJH, CDKJ$ et $DEGF$.

2. Les points au même potentiel sont les points sur un même nœud, à savoir :

$$(C, D \text{ et } E); \quad (F \text{ et } G) \quad \text{et} \quad (J \text{ et } K)$$

3. Les résistors R_1, R_2, R_6 et le générateur idéal de tension E sont en série et leur association est en parallèle avec R_5 .

Les résistors R_3 et R_4 sont en parallèle et leur association est en série avec le générateur idéal de courant η .

4. Oui ce circuit est réductible à un circuit simple. Le plus simple accessible est un circuit à deux nœuds en associant R_3 et R_4 ; il reste alors trois branches entre les nœuds CDE et JK .

Pour obtenir un circuit à une maille, il est possible de transformer la branche $CBAHJ$ en un générateur modèle de NORTON puis d'associer la résistance obtenue avec R_5 puis de repasser en modèle de THÉVENIN.

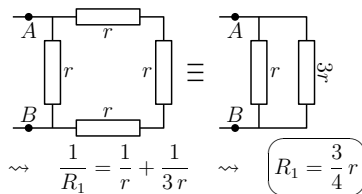
5. Regroupons les résultats dans un tableau.

Dipôle	tension	courant	relation
E	U_3	I	$U_3 = +E$
E	U_3	I_3	$U_3 = +E$
R_1	U_8	I	$U_8 = -R_1 I$
R_1	U_8	I_3	$U_8 = +R_1 I_3$
R_2	U_7	I	$U_7 = +R_2 I$
R_2	U_7	I_3	$U_7 = -R_2 I_3$
R_3	U_5	I_5	$U_5 = -R_3 I_5$
R_4	U_6	I_4	$U_6 = -R_4 I_4$
R_5	U_4	I_1	$U_4 = -R_5 I_1$
R_6	U_1	I	$U_1 = +R_6 I$
R_6	U_1	I_3	$U_1 = -R_6 I_3$
η	U_2	I_2	$I_2 = +\eta$

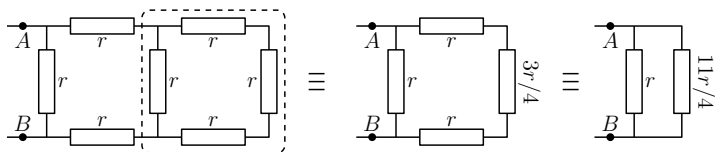
6. On ne peut donner aucun signe *a priori* concernant les différentes grandeurs, ne serait-ce que parce que l'on ne connaît pas les signes des générateurs : $e = +5,0$ V ou $e = -2,7$ V ? et $\eta = +152$ mA ou $\eta = -0,357$ mA ? Toutefois, même la connaissance des signes de e et de η ne serait pas suffisante : le circuit est trop complexe pour en faire une étude qualitative simple *a priori*.

☛ Exercice 2

1. → Pour R_1 . Procédons par associations successives.



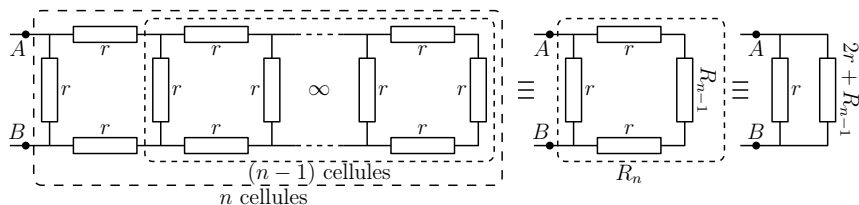
→ Pour R_2 . Procédons aussi par associations successives en remarquant qu'un morceau n'est autre que R_1



Nous avons ainsi :

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} + \frac{4}{11r} \rightsquigarrow R_2 = \frac{11}{15} r = 0,733 r$$

→ Pour R Cherchons par équivalence en notant R_n la résistance équivalente pour n cellules.



Ainsi la loi d'association nous donne $\frac{1}{R_n} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r + R_{n-1}}$.

À la limite nous pouvons écrire $R_n = R_{n-1} = R$, d'où :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r + R} \rightsquigarrow \frac{1}{R} = \frac{2r + R + r}{r(2r + R)} \text{ et } r(2r + R) = R(3r + R)$$

Nous obtenons ainsi l'équation en R suivante : $R^2 + 2rR - 2r^2 = 0$.

Après résolution, nous obtenons : $R = r(\sqrt{3} - 1) = 0,732 r$.

L'autre solution pour R est négative et n'est donc pas physiquement acceptable.

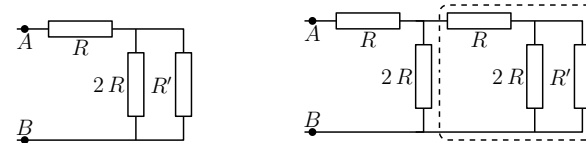
☛ Remarque : avec l'écriture canonique de l'équation $R^2 - SR + P = 0$, nous pouvons effectivement constater que le produit P des racines vaut $P = -2r^2 < 0$.

2. Nous trouvons immédiatement $\frac{R_2 - R}{R} \leq 0,2 \%$.

Du point de vue de la valeur de la résistance, R_2 est une très bonne approximation de R .

☛ Exercice 3

1. Étudions les deux cas.



► $n = 1$

Les lois d'association des résistors donnent $R_1 = R \oplus (2R // R')$ d'où $R_1 = R + \frac{2RR'}{2R + R'}$.

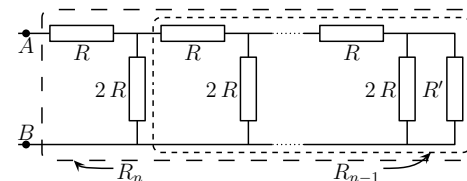
► $n = 2$

Il est inutile de calculer R_2 pour répondre à la question. Pour avoir $R_1 = R_2$, il faut et il suffit que la partie entourée ait une résistance égale à R' . La condition $R_2 = R_1$ devient donc $R_1 = R'$ (☛). Il faut ainsi

$$R' = R + \frac{2RR'}{2R + R'} \rightsquigarrow 2RR' + R'^2 = 2R^2 + RR' + 2RR' \rightsquigarrow R'^2 - RR' - 2R^2 = 0$$

La résolution fournit une seule solution positive (et donc acceptable) : $R' = 2R$.

2. Calculons R_n en fonction de R_{n-1} .



Du point de vue des associations de résistor, nous avons $R_n = R \oplus (2R // R_{n-1})$ ce qui donne

$$R_n = R + \frac{2RR_{n-1}}{2R + R_{n-1}}$$

Montrons que pour tout n , $R_n = 2R = R'$.

Ceci est vrai au rang 1 par hypothèse (cf. (☛)).

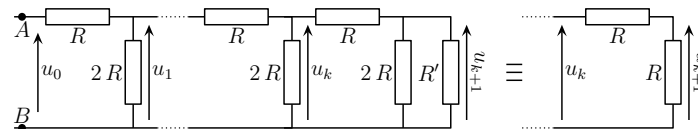
Supposons $R_n = 2R$ et montrons que $R_{n+1} = 2R$.

Les lois d'associations des résistors donnent $R_{n+1} = R + \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R + \frac{4R^2}{4R} = 2R$. C.Q.F.D.

Par le principe de récurrence, on a bien pour tout n : $R_n = 2R$.

☛ Remarque : ceci est sans aucun doute la première démonstration par récurrence de l'année en physique. Mais c'est encore plus sûrement la dernière!

3. Calculons U_{k+1} en fonction de U_k .



Comme les deux résistors sont en série, nous pouvons utiliser un diviseur de tension et écrire :

$$U_{k+1} = \frac{U_k}{2}$$

Nous constatons alors que U_k est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, ce qui permet d'écrire immédiatement et sans réfléchir (après tout, ce ne sont que des calculs) :

$$U_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k U_0$$

4. Nous cherchons à avoir $U_k < \frac{U_0}{100}$. Cela revient à chercher k tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^k < \frac{1}{100}$. De manière purement calculatoire, cette condition s'écrit :

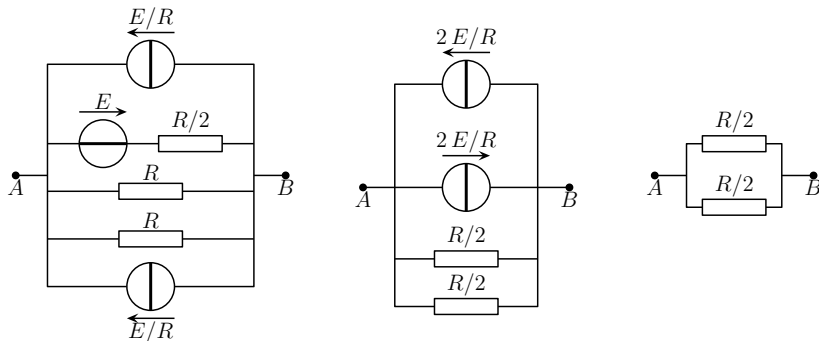
$$k \ln \left(\frac{1}{2}\right) < \ln \left(\frac{1}{100}\right) \rightsquigarrow -k \ln 2 < -\ln 100 \rightsquigarrow k > \frac{\ln 100}{\ln 2} = 6,64$$

Compte tenu du fait que k soit un entier, cela donne finalement $k \geq 7$.

❁ Exercice 4

Cherchons à simplifier le dipôle AB . Pour cela, effectuons les transformations suivantes :

- association parallèle des deux résistances R et transformation THÉVENIN - NORTON pour le générateur du bas ;
- association parallèle des deux résistances du bas ; transformation THÉVENIN - NORTON pour le générateur du haut et association des deux générateurs de courant ;
- association des deux générateurs de courant.



Il reste deux résistances en parallèle dont l'association est équivalente à un résistor de résistance

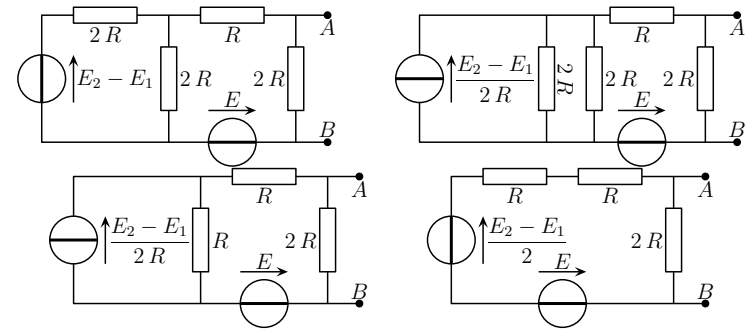
$$R_{\text{eq}} = \frac{R}{4}$$

❁ Exercice 5

Procédons uniquement par transformation du circuit :

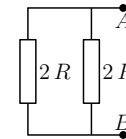
- association en série des deux résistors de gauche et des deux générateurs de tension E_1 et E_2 ;
- transformation THÉVENIN - NORTON de $(E_2 - E_1, 2R)$;

- association parallèle des deux résistors $2R$;
- transformation NORTON - THÉVENIN du générateur de gauche.



Il reste alors un circuit où deux générateurs idéaux sont en série. Pour que le dipôle AB soit équivalent à un résistor, il faut que leur association donne un générateur de tension de f.é.m. nulle, i.e. il faut $E = \frac{E_2 - E_1}{2}$.

Le circuit est maintenant équivalent à 3 résistors dont l'association est équivalente au schéma ci-dessous lui même équivalent à un résistor de résistance $R_{\text{eq}} = R$.



❁ Exercice 6

1. Lorsque l'ampèremètre idéal se comporte comme un interrupteur fermé, le circuit se réduit au générateur de tension avec la résistance R .

Nous pouvons alors directement écrire : $I = \frac{E}{R}$.

2. Lorsque l'ampèremètre se comporte comme une résistance R_e , le circuit est équivalent à un générateur avec deux résistances R et R_e .

Dans ce cas, nous avons $I = \frac{E}{R + R_e}$.

3. Nous pouvons constater que la valeur affichée par l'ampèremètre réel est plus petite que celle attendue, i.e. que celle obtenue avec un ampèremètre idéal. L'écart s'écrit donc

$$\Delta I = \frac{E}{R} - \frac{E}{R + R'} = \frac{E R'}{R(R + R')}$$

Nous cherchons à avoir $\Delta I \leq \frac{5}{100} \times \frac{E}{R}$ soit $\frac{R'}{R + R'} \leq \frac{5}{100}$ ou encore :

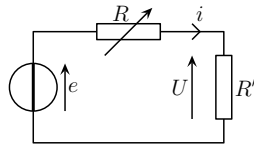
$$\frac{5}{100} R \geq \frac{95}{100} R' \rightsquigarrow R \geq 19 R'$$

Dès que la résistance du circuit vaut au moins 20 fois celle de l'ampèremètre, il est tout à fait acceptable de considérer que l'affichage de ce dernier est identique à celui d'un ampèremètre idéal. Dans ces conditions, l'ampèremètre est idéal.

✿ Exercice 7

1. Lorsque l'interrupteur est fermé, le voltmètre affiche directement la tension aux bornes du générateur, ie. $U_0 = e$.

2. (a) Lorsque K est ouvert, le circuit est équivalent au schéma représenté ci-dessous.



Nous avons alors directement $I = \frac{E}{R + R'}$ et comme $U = R' I$ cela donne $U = \frac{R' E}{R + R'}$.

Dans ces conditions le voltmètre affiche $\frac{U_0}{2}$ lorsque $\frac{R'}{R + R'} E = \frac{E}{2}$ soit pour $R = R'$.

2. (b) Pour déterminer R' , il est possible de procéder comme suit :

- réaliser le montage
- mesurer U_0 directement aux bornes du générateur
- fermer l'interrupteur et modifier R jusqu'à ce que le voltmètre affiche $\frac{U_0}{2}$
- débrancher R et la avec un ohmmètre pour obtenir la valeur de R' .

2. (c) Ce protocole implique de pouvoir disposer d'une résistance R de valeur identique à celle du voltmètre. Un oscilloscope a une résistance d'entrée d'environ 1 MΩ, donc pas (trop) de problème.

Mais un voltmètre peut avoir, lui, une résistance d'entrée de 10 MΩ ou bien plus ... ce qui peut être difficilement accessible pour une résistance variable.

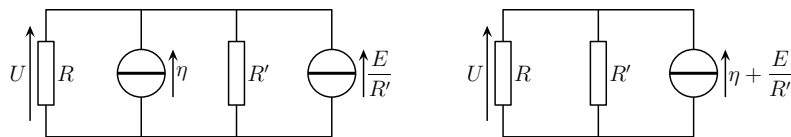
Ainsi, comme $U = \frac{U_0}{1 + R/R'}$, si $U = \frac{2}{3} U_0$, alors $1 + \frac{R}{R'} = \frac{3}{2}$ et $R = \frac{R'}{2}$.

De même avec $U = \frac{9}{10} U_0$, nous avons $R = \frac{R'}{9}$. Cela permet d'utiliser des résistors de résistance bien plus faible que celle du voltmètre.

✿ Exercice 8

1. Il s'agit d'un circuit à trois nœuds dont deux principaux : la solution n'est pas loin.

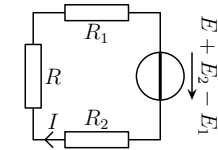
Transformons le générateur de THÉVENIN de droite pour en faire un générateur de NORTON afin que le circuit devienne un circuit à deux nœuds.



La tension s'écrit alors :

$$U = \frac{\eta + \frac{E}{R'}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}} \rightsquigarrow U = \frac{R(R'\eta + E)}{R + R'}$$

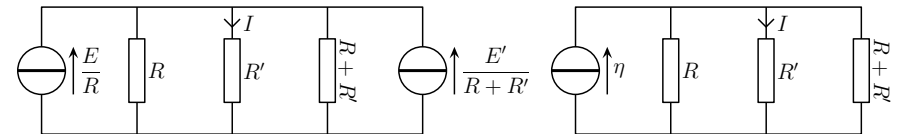
2. Il s'agit d'un circuit à une maille. Il suffit alors d'associer les générateurs idéaux de tension. Cela donne :



Nous pouvons alors écrire directement : $I = \frac{E_1 - E - E_2}{R + R_1 + R_2}$.

3. Il s'agit d'un circuit à deux mailles et 5 nœuds dont deux principaux. La solution n'est certainement pas loin.

Transformons les deux générateurs de THÉVENIN en modèles de NORTON en ayant, au préalable, associé les deux résistors R et R' en série dans la branche de droite. Cela donne :



avec $\eta = \frac{E}{R} + \frac{E'}{R + R'}$.

Les trois résistors étant en parallèle, nous pouvons alors utiliser un diviseur de courant :

$$I = \frac{\frac{E}{R} + \frac{E'}{R + R'}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R + R'}}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $RR'(R + R')$, nous obtenons finalement :

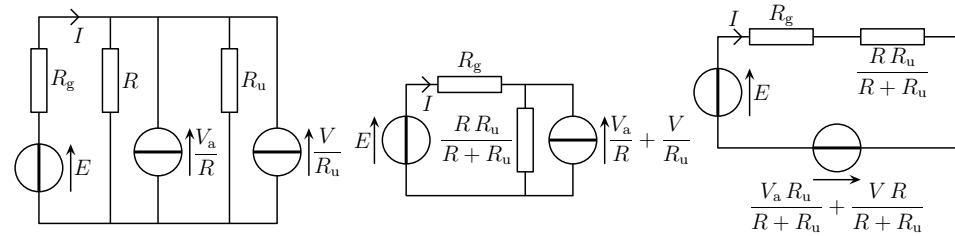
$$I = \frac{E(R + R') + E'R}{R'^2 + R^2 + 3RR'}$$

✿ Exercice 9

Il s'agit d'un circuit à deux mailles et 5 nœuds dont deux principaux. Cette dernière caractéristique nous assure que la solution n'est pas loin.

Comme nous cherchons une intensité, mieux vaut transformer le circuit de manière à ne faire apparaître qu'une seule maille tout en laissant la branche de gauche intacte. Pour cela, effectuons les transformations suivantes :

- modèle de THÉVENIN en modèle de NORTON pour V_a et V ;
- association en parallèle de R et R_u et des deux générateurs idéaux de courants ;
- modèle de NORTON en modèle de THÉVENIN.

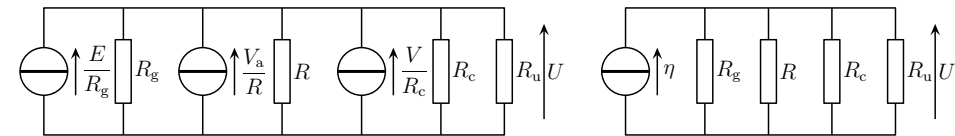


Il ne reste plus qu'à utiliser la loi connue qui donne : $I = \frac{E - \frac{V_a R_u}{R + R_u} - \frac{V R}{R + R_u}}{\frac{R R_u}{R + R_u}}$ puis, en multipliant par $R + R_u$ le numérateur et le dénominateur, $I = \frac{R_u (V_a - E) + R (V - E)}{R R_g + R_g R_u + R R_u}$.

✿ **Exercice 10**

Il s'agit d'un circuit à trois mailles et 5 nœuds dont deux principaux. Là encore cette dernière caractéristique nous assure que la solution n'est pas loin. Comme nous cherchons une tension, mieux vaut essayer de transformer le circuit en un circuit à deux nœuds.

Pour cela, nous allons d'abord mettre les générateurs sous la forme modèle de NORTON. Cela donne :



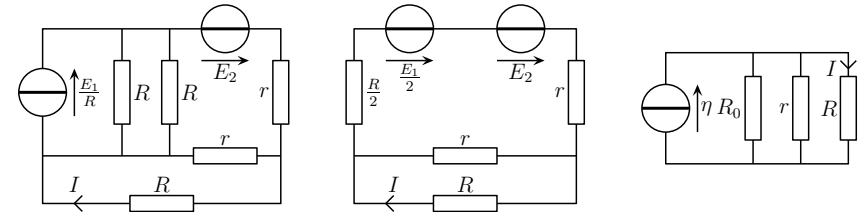
avec $\eta = \frac{E}{R_g} + \frac{V_a}{R} + \frac{V}{R_c}$, ce qui donne $U = \frac{\frac{E}{R_g} + \frac{V_a}{R} + \frac{V}{R_c}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_g}}$.

✿ **Exercice 11**

► **Premier circuit.**

Il s'agit d'un circuit à trois mailles et 5 nœuds dont trois principaux. Nous allons donc le simplifier jusqu'à obtenir soit un circuit à une maille avec un unique générateur, soit un circuit à deux nœuds avec un unique générateur **tout en conservant la branche dans laquelle circule le courant I**. En essayant, nous pouvons constater que cela nous mène aux transformations suivantes :

- modèle de THÉVENIN en modèle de NORTON pour E_1 et R ;
- association en parallèle des deux résistances R ;
- modèle de NORTON en modèle de THÉVENIN pour $\frac{E_1}{R}$ et $\frac{R}{2}$;
- association série de générateurs idéaux de tension et de résistances;
- transformation modèle de THÉVENIN en modèle de NORTON avec $\eta = \frac{2E_2 + E_1}{R + 2r}$ et $R_0 = \frac{R + 2r}{2}$.



Nous pouvons alors utiliser la relation du diviseur de courant $I = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} + \frac{1}{r}} \eta$, ce qui donne, en

remplaçant η et R_0 par leurs expressions et en simplifiant : $I = \frac{r(2E_2 + E_1)}{R^2 + 5rR + 2r^2}$.

► **Deuxième circuit.** Il s'agit d'un circuit à trois mailles et quatre nœuds. Malheureusement, aucune paire de dipôles n'est en série ou en parallèle. Il n'est donc pas possible de déterminer I par transformation successives. Nous verrons dans le chapitre suivant comment faire ...

► **Remarque :** il est très important pour un scientifique de discerner ce qu'il n'est pas possible de faire de ce qu'il est possible de faire. En ce sens, l'exercice n'était **pas** un piège. Cela se reproduira parfois en cours, en TD et, pourquoi pas, en DS!