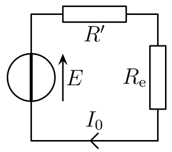
Étudier un circuit électrocinétique

Exercice 1

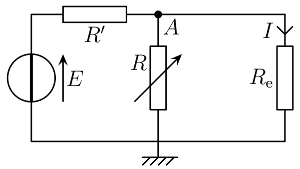
1. (a) Le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.



Nous avons donc immédiatement $\boxed{I = \dfrac{E}{R' + R_e}}$.

1. (b) Si $R' \gg R_e$ alors $R' + R_e \simeq R'$ d'où $\boxed{I = \dfrac{E}{R'}}$.

2.(a) Avec un ampèremètre réel, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.



Il s'agit d'un circuit à deux mailles et deux nœuds. L'approche nodale est préférable puisqu'elle ne générera qu'une seule inconnue et ce, sans transformation de circuit. Que cette inconnue soit le potentiel en un nœud et non l'intensité recherchée ne sera pas un handicap car il suffira d'utiliser la loi constitutive de R_e pour parvenir à nos fins.

La loi des nœuds en terme de potentiels en A donne :

$$\frac{E - V_A}{R'} + \frac{0 - V_A}{R} + \frac{0 - V_A}{R_e} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_A \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_e} \right) = \frac{E}{R'} \quad \rightsquigarrow \quad V_A = \frac{\dfrac{E}{R'}}{\dfrac{1}{R'} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R_e}}$$

Et avec $I = \dfrac{V_A - 0}{R_e}$, nous obtenons $\boxed{I = \dfrac{\dfrac{E}{R'}}{\dfrac{R_e}{R'} + \dfrac{R_e}{R} + 1}}$

Comme R_e est négligeable devant R', alors $\frac{R_e}{R} \ll 1$ et $\dfrac{R_e}{R'} + 1 \simeq 1$. Il reste alors $\boxed{I = \dfrac{\dfrac{E}{R'}}{\dfrac{R_e}{R} + 1}}$.

Remarque : ne sachant pas *a priori* si $R \gg R_e$ ou $R \ll R_e$, nous ne pouvons pas simplifier davantage $\dfrac{R_e}{R} + 1$.

2. (b) Nous pouvons en déduire très vite que $I = \dfrac{I_0}{2}$ pour $\boxed{R = R_e}$.

2. (c) Avec un tel montage, il faut d'abord noter l'intensité I_0 affichée par l'ampèremètre lorsque K est ouvert. Ensuite il faut fermer K et modifier R jusqu'à lire sur l'ampèremètre $\dfrac{I_0}{2}$. Il suffit alors de mesurer R à l'ohmmètre (en le débranchant du circuit !) pour obtenir la valeur de R_e.

Comme, par construction, on a $R_e \ll R'$ et que tout a été fait pour avoir $R = R_e$, il est normal de considérer $R \ll R'$.

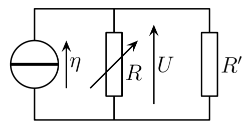
3. R' a un rôle de protection : si elle n'était pas là, avec l'interrupteur fermé, l'intensité du courant vaudrait $I_0 = \dfrac{E}{R_e}$. Elle pourrait alors atteindre des valeurs trop élevées pour l'ampèremètre (car R_e est petit) et le détériorer.

En fait, tout se passe comme si l'association de R' avec le générateur de tension se comportait comme un générateur idéal de courant de c.é.m. $I_0 = \dfrac{E}{R'}$. Le courant se *divise* alors entre les deux branches R et R_e en deux courants égaux lorsque $R = R_e$.

Exercice 2

1. Si le voltmètre est idéal et se comporte comme un interrupteur ouvert et le circuit est équivalent au générateur η avec la résistance R. Dès lors $i = \eta$ et comme $U = R\,i$, on arrive à $\boxed{U_0 = R\,\eta}$.

2. (a) En considérant le voltmètre réel, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.



Il s'agit d'un circuit à deux nœuds et nous pouvons écrire directement $U = \dfrac{\eta}{G + G'} = \dfrac{\eta}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R'}}$ et ainsi $\boxed{U = \dfrac{R\,R'\,\eta}{R + R'}}$.

2. (b) Nous pouvons constater que l'affichage réel est plus petit que l'affichage attendu et l'écart vaut ainsi :

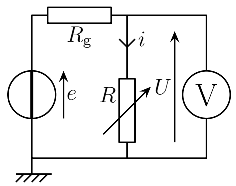
$$\Delta U = R\,\eta - \frac{R\,R'\,\eta}{R + R'} = R\,\eta \times \frac{R}{R + R'}$$

nous recherchons $\Delta U \leqslant \dfrac{5}{100}\,R\,\eta$ soit $\dfrac{5}{100}\,R' \geqslant \dfrac{95}{100}\,R$. Finalement, la condition recherchée est $\boxed{R \leqslant \dfrac{R'}{19}}$. Lorsque la résistance interne du voltmètre est supérieure à 20 fois celle de la résistance R, le voltmètre se comporte comme un voltmètre idéal. Dans ces conditons, on peut dire que le voltmètre **est** idéal.

Exercice 3

1. Avec K ouvert et avec le voltmètre idéal qui se comporte comme un interrupteur ouvert, aucun courant ne circule dans le circuit. Le voltmètre affiche donc $\boxed{U_0 = E}$

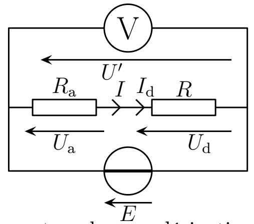
$\boxed{2.\ (a)}$ Si K est fermé, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous. Le courant qui circule vaut donc (loi de Pouillet) $I = \dfrac{E}{R+R_\text{g}}$ et la tension aux bornes de R vaut $U = R\,I$ d'où $U = \dfrac{R\,E}{R+R_\text{g}} = \dfrac{E}{1+R_\text{g}/R}$. On a donc $U = \dfrac{U_0}{2}$ pour $1+\dfrac{R_\text{g}}{R} = 2$, *ie.* pour $\boxed{R = R_\text{g}}$.



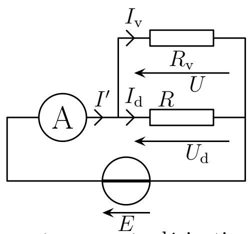
$\boxed{2.\ (b)}$ En procédant comme dans l'énoncé, on obtient, à la fin, un résistor de même résistance que celle du GBF. Il faut alors le débrancher du circuit et mesurer sa résistance à l'aide d'un ohmmètre.

$\boxed{3.}$ Les résistances des GBF sont d'environ 50 Ω, ce qui est très inférieur à la résistance interne du voltmètre (au moins MΩ), on peut donc considérer ce dernier comme idéal (cf. TD 1).

Exercice 4



montage longue dérivation



montage courte dérivation

$\boxed{1.}$ ➜ *Montage longue dérivation.* Comme l'ampèremètre est en série avec le résistor, et que l'ampèremètre affiche l'intensité du courant le traversant, alors il affiche l'intensité du courant I_d traversant le résistor. Cette mesure est parfaite : $I = I_\text{d}$. En ce qui concerne la tension, la mesure est erronée car $U' = U_\text{a} + U_\text{d} \neq U_\text{d}$: la tension U_a aux bornes de l'ampèremètre n'est pas nulle lorsque ce dernier n'est pas idéal.

➜ *Montage courte dérivation.* C'est le contraire. Le voltmètre est en parallèle avec le résistor, donc la mesure de la tension est parfaite. En revanche, l'intensité du courant traversant l'ampèremètre est la somme des intensités des courants traversant le voltmètre et le résistor, le courant traversant ce premier n'étant pas rigoureusement nul pour un appareil réel.

$\boxed{2.\ (a)}$ ➜ *Montage longue dérivation.* I_d est parfaitement mesuré, donc nous nous attendons à lire $U_\text{d} = R\,I$. Or le voltmètre va afficher $U' = R_\text{a}\,I + Ri = (R_\text{a}+R)\,I$. Tout se passe donc comme le résistor avait une résistance $\boxed{R_\text{ld} = R + R_\text{a}}$.

➜ *Montage courte dérivation.* U_d étant parfaitement mesurée, nous nous attendons à lire $I_\text{d} = \dfrac{U_\text{d}}{R}$, or $I' = I_\text{v} + I_\text{d} = \dfrac{U_\text{d}}{R_\text{v}} + \dfrac{U_\text{d}}{R}$. Tout se passe donc comme si le résistor avait une résistance $\boxed{\dfrac{1}{R_\text{cd}} = \dfrac{1}{R_\text{v}} + \dfrac{1}{R}}$.

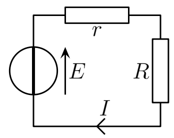
$\boxed{2.\ (b)}$ ➜ *Montage longue dérivation.* Pour que l'erreur soit négligeable, peu importe la qualité du voltmètre, il faut avoir $R_\text{a} \ll R$ soit, comme $R_\text{a} \simeq 10\ \Omega$, $\boxed{R \gg 10\ \Omega}$.

➜ *Montage courte dérivation.* Pour que l'erreur commise dans ce montage soit négligeable, peu importe la qualité de l'ampèremètre, il faut avoir $\dfrac{1}{R} \simeq \dfrac{1}{R_\text{cd}}$ soit $\dfrac{1}{R} \gg \dfrac{1}{R_\text{v}}$ ou encore $R_\text{v} \gg R$. Comme $R_\text{v} \simeq 10\ \text{M}\Omega$, il faut $\boxed{R \ll 10\ \text{M}\Omega}$.

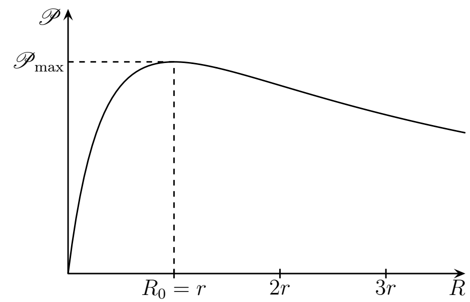
Remarque : certains voltmètres à main (donc pas l'oscilloscope), sont d'excellente qualité et tels que $R_\text{v} \simeq$ GΩ. Le montage courte dérivation convient à ce moment là (presque) toujours. Remarquons qu'il est plus difficile de réaliser un ampèremètre d'excellente qualité qu'un voltmètre d'excellente qualité.

Exercice 5

$\boxed{1.}$ Le circuit est équivalent au schéma ci-contre. La loi de Pouillet donne alors $\boxed{I = \dfrac{E}{r+R}}$.



$\boxed{2.}$ La puissance instantannée reçue par un résistor de résistance R vaut $\mathscr{P}(t) = R\,i_\text{d}^2(t)$ où $i_\text{d}(t)$ est l'intensité du courant le traversant. Ici $i_\text{d}(t) = i(t) = \dfrac{E}{r+R} = \text{C}^\text{te}$ et $\boxed{\mathscr{P} = \dfrac{R\,E^2}{(r+R)^2} = \text{C}^\text{te}}$.



$\boxed{3.}$ Le tracé est représenté ci-contre. Le maximum est atteint en R_0 tel que $\dfrac{\text{d}\mathscr{P}}{\text{d}R}(R_0) = 0$, soit $E^2 \times \dfrac{(r+R_0)^2 - 2\,R_0(r+R_0)}{(r+R_0)^4} = 0$ d'où $r + R_0 = 2\,R_0$ et donc $\boxed{R_0 = r}$. Nous avons alors $\mathscr{P}_\text{max} = \mathscr{P}(R_0)$ soit $\boxed{\mathscr{P}_\text{max} = \dfrac{E^2}{4\,r}}$.

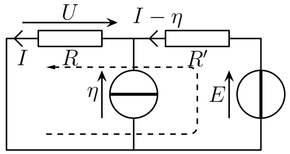
Exercice 6

$\boxed{1.}$ ➽ **Méthode rapide : approche nodale.** Il s'agit d'un circuit à deux nœuds. Une tension est inconnue, la loi des nœuds en terme de potentiel est tout indiquée.

En mettant la masse en bas du circuit, la loi des nœuds en terme de potentiels s'écrit :

$$\frac{0-U}{R} + \eta + \frac{E-U}{R'} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad U\,(R+R') = R\,R'\,\eta + R\,E \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{U = \frac{R\,(R'\,\eta + E)}{R+R'}}$$

➨ **Méthode moins rapide : approche maillère.**
Introduisons le courant I et écrivons les lois des nœuds sur le schéma.



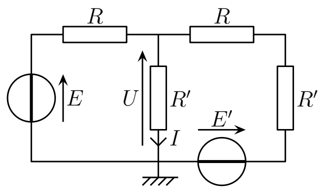
La loi des mailles en terme de courant donne :

$$E - R'(I-\eta) - R\,I = 0 \quad \rightsquigarrow \quad I = \frac{E + R'\,\eta}{R+R'}$$

et comme la loi constitutive du résistor s'écrit $U = R\,I$, nous arrivons à $\boxed{U = \dfrac{R}{R+R'}(E + R'\,\eta)}$.

2. ➨ **Méthode rapide : approche nodale** Il s'agit d'un circuit à deux mailles et deux nœuds. Autant ne pas manipuler le circuit pour le ramener à une seule maille et conserver le circuit à deux nœuds. Avec cette approche nous aurons facilement la tension aux bornes de R' et, avec la loi constitutive du résistor, l'intensité du courant le traversant.

Pour écrire la loi des nœuds en terme de potentiel, il est préférable de mettre le circuit sous cette forme.



La loi des nœuds en terme de potentiels s'écrit $\dfrac{E-U}{R} + \dfrac{0-U}{R'} + \dfrac{E'-U}{R+R'} = 0$.

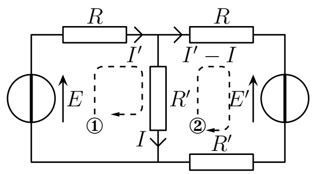
En multipliant cette relation par $R\,R'\,(R+R')$ nous obtenons :

$$U\Big(R\,R' + R'\,(R+R') + r\,(R+R')\Big) = E\,R'\,(R+R') + E'\,R\,R' \quad \rightsquigarrow \quad U = \frac{E\,R'\,(R+R') + E'\,R\,R'}{R'^2 + R^2 + 3\,R\,R'}$$

et ainsi $\boxed{I = \dfrac{U}{R'} = \dfrac{E\,(R+R') + E'\,R}{R'^2 + R^2 + 3\,R\,R'}}$

➨ **Méthode moins rapide : approche maillère.** Comme il y a deux mailles, il faudra deux inconnues pour décrire ce circuit, c'est la raison pour laquelle cette méthode est moins rapide que l'approche nodale. Mais faisons-le quand même.

Introduisons les courants I et I' et transcrivons les lois des nœuds sur le schéma.



Les lois des mailles ① et ② donnent

$$\left\{\begin{array}{l} E - R\,I' - R'\,I = 0 \\ R'\,I - R\,(I'-I) - E' - R'\,(I'-I) = 0 \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} R'\,I + R\,I' = E\ (●) \\ (2\,R'+R)\,I - (R+R')\,I' = E'\ (▦) \end{array}\right.$$

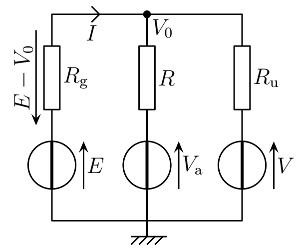
Seul I nous intéresse, faisons donc $(R+R')$(●)$+R$(▦). Nous aboutissons alors à :

$$\Big[R'\,(R+R') + R\,(2\,R'+R)\Big]\,I = (R+R')\,E + R\,E' \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{I = \frac{(R+R')\,E + R\,E'}{R^2 + R'^2 + 3\,R\,R'}}$$

Exercice 7

Il s'agit d'un circuit à deux mailles et deux nœuds. Nous avons donc le choix soit de conserver l'aspect deux nœuds mais cela aura l'inconvénient de fournir plus facilement un potentiel et il faudra alors utiliser la loi constitutive du résistor R_g pour revenir à I. L'approche maillère présente l'inconvénient d'introduire deux inconnues, soit une de plus que l'approche nodale, mais cessons de débattre et agissons.

➨ **Approche nodale.** Imposons la masse « en bas » (ce que nous avons toujours le droit de faire puisque le choix de la masse est arbitraire) et notons V_0 le potentiel « en haut ».



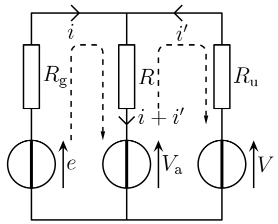
La loi des nœuds en terme de potentiel s'écrit

$$\frac{E-V_0}{R_g} + \frac{V_a - V_0}{R} + \frac{V-V_0}{R_u} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_0 = \frac{R\,R_u\,E + R_g\,R_u\,V_a + R\,R_g\,V}{R\,R_g + R_g\,R_u + R\,R_u}$$

La loi constitutive de R_g s'écrit (attention au signe de la tension) : $I = \dfrac{E-V_0}{R_g}$, ce qui donne :

$$I = \frac{1}{\cancel{R_g}} \times \frac{\cancel{R_g}\,R_u\,(V_a - E) + R\,\cancel{R_g}\,(V-E)}{R\,R_g + R_g\,R_u + R\,R_u} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{I = \frac{R_u\,(E-V_a) + R\,(E-V)}{R\,R_g + R_g\,R_u + R\,R_u}}.$$

➨ **Approche maillère.** Notons les différentes intensités sur le circuit ainsi que les lois des nœuds associées.



Les deux lois des mailles s'écrivent

$$s\left\{\begin{array}{l} E - R_{\mathrm{g}}\,I - R\,(I+I') - V_{\mathrm{a}} = 0 \\ V_{\mathrm{a}} + R\,(I+I') + R_{\mathrm{u}}\,I' - V = 0 \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} (R+R_{\mathrm{g}})\,I + R\,I' = E - V_{\mathrm{a}}\ (⛅) \\ R\,I + (R+R_{\mathrm{u}})\,I' = V - V_{\mathrm{a}}\ (☁) \end{array}\right.$$

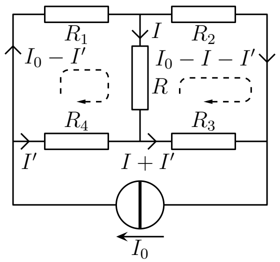
En faisant $(R+R_{\mathrm{u}})$(⛅)$-R$(☁), nous arrivons à

$$\Big[(R+R_{\mathrm{g}})\,(R+R_{\mathrm{u}}) - R^2\Big]\,I = (R+R_{\mathrm{u}})\,(E-V_{\mathrm{a}}) + (V_{\mathrm{a}}-V)\,R \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{I = \frac{(R+R_{\mathrm{u}})\,E - R\,V - R_{\mathrm{u}}\,V_{\mathrm{a}}}{R_{\mathrm{g}}\,R_{\mathrm{u}} + R_{\mathrm{g}}\,R + R\,R_{\mathrm{u}}}}$$

Exercice 8

Deuxième circuit. Il s'agit d'un circuit à trois mailles et à quatre nœuds. Nous pouvons donc hésiter entre les approches nodale et maillère. L'approche maillère va connduire à 3 inconnues mais comme il y a un générateur de courant, une inconnue est déjà connue. Restent 2. En revanche, l'approche nodale avec ses 4 nœuds conduit à 3 inconnues ... Mieux vaut l'approche maillère.

Sur le circuit ci-dessous, notons les intensités inconnues I et I'.



Dans les mailles représentées sur le schéma ci-contre, nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} -R_1\,(I_0 - I') - R\,I + R_4\,I' = 0 \\ +R\,I - R_2\,(I_0 - I - I') + R_3\,(I+I') = 0 \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -R\,I + (R_1+R_4)\,I' = R_1\,I_0\ (🌧) \\ (R+R_2+R_3)\,I + (R_2+R_3)\,I' = R_2\,I_0\ (☁) \end{array}\right.$$

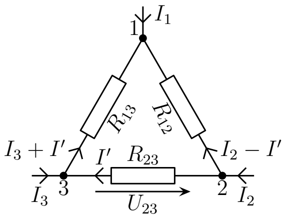
Seul I nous intéresse, faisons donc (R_1+R_4)(☁)$-(R_2+R_3)$(🌧). Nous obtenons

$$\Big[R\,(R_2+R_3) + (R+R_2+R_3)\,(R_1+R_4)\Big]\,I = \left[-R_1\,(R_2+R_3) + R_2\,(R_1+R_4)\right]\,I_0$$

et ainsi $\boxed{I = \dfrac{R_4\,R_2 - R_1\,R_3}{R\,(R_2+R_3) + (R+R_2+R_3)\,(R_1+R_4)} \times I_0}$

Exercice 9

1. (a) Le circuit formant une maille, nous allons aborder le problème avec une approche maillère. Pour cela, notons I' le courant traversant R_{23} (cf. ci-dessous).



La loi constitutive de R_{23} donne $U_{23} = R_{23}\,I'$. De plus la loi des mailles en terme de courants s'écrit :

$$-R_{23}\,I' - R_{13}\,(I_3 + I') + R_{12}\,(I_2 - I') = 0 \quad \rightsquigarrow \quad I' = \frac{R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}\,I_2 - \frac{R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}\,I_3$$

et ainsi $\boxed{U_{23} = \dfrac{R_{12}\,R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}\,I_2 - \dfrac{R_{13}\,R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}\,I_3}$.

1. (b) Nous avons directement directement $\boxed{U_{23} = R_2\,I_2 - R_3\,I_3}$.

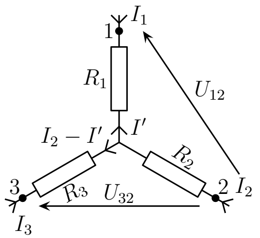
1. (c) Les valeurs de U_{23} doivent être identiques pour les deux circuits quelles que soient les valeurs des courants I_2 et I_3. Cela doit donc être le cas pour la valeur particulière $I_3 = 0$. On arrive alors à $U_{23} = \dfrac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}I_2 = R_2 I_2$, on en déduit donc $\boxed{R_2 = \dfrac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}}$. De même, avec $I_2 = 0$ on arrive à $\boxed{R_3 = \dfrac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}}$ et par analogie on peut dire que $\boxed{R_1 = \dfrac{R_{13}R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}}$.

2. Le problème étant contraire, on va chercher à exprimer une intensité I_2 en fonction de deux tensions U_{12} et U_{32} au lieu d'exprimer, comme précédemment, une tension en fonction de deux intensités. Deux méthodes s'offrent à nous. Commençons par la plus naturelle.

➠ Méthode « ça va marcher ».

➔ *Circuit étoile.* Avec les notations ci-dessous, nous avons :

$$U_{12} = -R_2\,I_2 - R_1\,I' \quad \text{et} \quad U_{32} = -R_2\,I_2 - R_3\,(I_2 - I') \quad \rightsquigarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} U_{12} = -R_2 I_2 - R_1 I' \\ U_{32} = -(R_2 + R_3) I_2 + R_3 I' \end{array} \right.$$



Seul I_2 nous intéresse, donc on fait $R_3(\;)+R_1(\;)$, ce qui donne

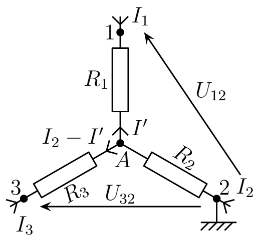
$$I_2 = -\frac{R_3}{R_2\,R_3 + R_1\,R_2 + R_1\,R_3}\,U_{12} - \frac{R_1}{R_2\,R_3 + R_1\,R_2 + R_1\,R_3}\,U_{32}$$

➔ *Circuit triangle.* En notant I' le courant qui circule dans R_{23} de 2 vers 3 et I'' le courant qui circule dans R_{12} de 2 vers 1, on a $I_2 = I' + I'' = -\dfrac{U_{32}}{R_{32}} - \dfrac{U_{12}}{R_{12}}$.

➔ *Conclusion.* Avec le même raisonnement que pour la question 1, on peut identifier les coefficients devant U_{12} et U_{32}, ce qui donne : $\dfrac{1}{R_{12}} = \dfrac{R_3}{R_2\,R_3 + R_1\,R_2 + R_1\,R_3}$ soit, en utilisant les conductances : $\boxed{G_{12} = \dfrac{G_1\,G_2}{G_1 + G_2 + G_3}}$. On a de même $\boxed{G_{13} = \dfrac{G_1\,G_3}{G_1 + G_2 + G_3}}$ et $\boxed{G_{23} = \dfrac{G_2\,G_3}{G_1 + G_2 + G_3}}$.

➠ Méthode « fallait y penser »

➔ *Circuit étoile.* Comme la forme de cette portion de circuit est un nœud, nous allons aborder le problème avec une loi des nœuds en terme de potentiels. Mais comme nous recherchons des résultats avec des tensions, il va falloir faire en sorte que les potentiels et les tension soient identiques, autrement dit, il faut imposer la masse au point 2 : $V_2 = 0$.



La loi des nœuds en terme de potentiel s'écrit (sans oublier que $V_1 = V_1 - 0 = V_1 - V_2 = U_{12}$:

$$G_1\,(V_1 - V_A) + G_2\,(0 - V_A) + G_3\,(V_2 - V_A) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_A = \frac{G_1\,V_1 + G_3\,V_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{G_1\,U_{21} + G_3\,U_{23}}{G_1 + G_2 + G_3} =$$

Et avec la loi constitutive de R_2, nous obtenons :

$$I_2 = -G_2\,V_A = -\frac{-G_2\,G_1\,U_{21} - G_2\,G_3\,U_{23}}{G_1 + G_2 + G_3}$$

➔ *circuit triangle*

La loi des nœuds au point 2 donne tout de suite (en faisant attention aux signes) :

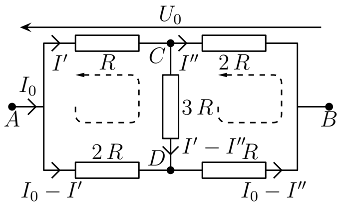
$$I_2 = I_{21} + I_{23} = -U_{23}\,G_{23} - U_{21}\,G_{21}$$

La suite est identique.

➠ Morale Avec les nœuds, mieux vaut travailler en termes de potentiels et avec les conductances, ça va plus vite ! ☺

Exercice 10

1. (a) Comme aucun des résistor n'est en série ou en parallèle avec un autre, il n'est pas possible de simplifier le circuit. Il va donc falloir déterminer le lien qui existe entre la tension U_0 entre ses bornes et l'intensité I_0 du courant qui le traverse. Ici le dipôle est en convention récepteur ce qui donne $U_0 = R_{\text{éq}}\,I_0$. Introduisons les courants d'intensité I' et I'' sur le schéma ci-dessous. La loi d'additivité des tensions s'écrit donc $U_0 = 2\,R\,I'' + R\,I'$; il ne reste plus qu'à déterminer les expressions de I' et de I'' en fonction de I_0.



Ecrivons les deux lois des mailles et réécrivons les :

$$\left\{\begin{array}{l} -2\,R\,(I_0-I')+3\,R(I'-I'')+R\,i'=0 \\ -3\,R(I'-I'')-R\,(I_0-I'')+2\,R\,I''=0 \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l} 6\,I'-3\,I''=2\,I_0 \;(▥) \\ -3\,I'+6\,I''=I_0 \;(❋) \end{array}\right.$$

En faisant 2(▥)+(❋), nous obtenons $9\,I'=5\,I_0$ soit $I'=\dfrac{5}{9}\,I_0$. De même en faisant (▥)+2(❋) on a $9\,I''=4\,I_0$ soit $I''=\dfrac{4}{9}\,I_0$. Et comme $U_0=R\,I'+2\,R\,I''=\dfrac{13}{9}\,R\,I_0$ nous arrivons finalement à $\boxed{R_{\text{éq}}=\dfrac{13}{9}\,R}$.

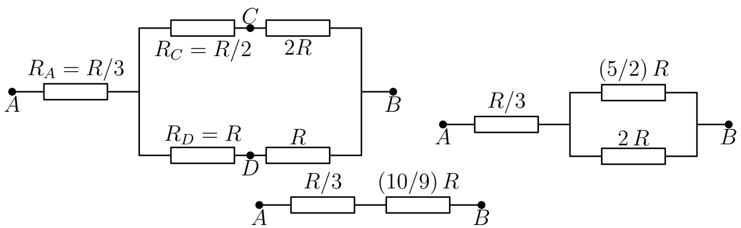
$\boxed{\text{1. (b)}}$ Notons C et D les nœuds à l'intérieur du dipôle AB (cf. schéma de la question précédente). La transformation triangle étoile pour les trois résistors de gauche donne, pour R_C :

$$R_C=\frac{R_{AC}\,R_{CD}}{R_{AC}+R_{AD}+R_{CD}}=\frac{R\times 3\,R}{R+2\,R+3\,R}=\frac{R}{2}$$

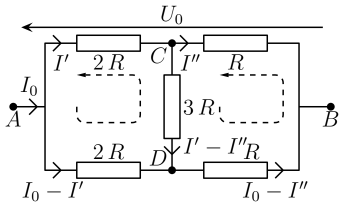
Et pour les deux autres résistors :

$$R_A=\frac{R_{AC}\,R_{AD}}{R_{AC}+R_{AD}+R_{CD}}=\frac{R}{3} \quad \text{et} \quad R_D=\frac{R_{AD}\,R_{CD}}{R_{AC}+R_{AD}+R_{CD}}=R$$

Le schéma est alors équivalent au circuit ci-dessous sur lequel on fait des associations série et parallèle de résistors pour arriver à deux résistors en série de résistance $\dfrac{R}{3}$ et $\dfrac{10}{9}R$ dont l'association a bien la résistance prévue, *ie.* $\boxed{R_{\text{éq}}=\dfrac{9}{13}R}$.



$\boxed{2.}$ Utilisons la même méthode qu'à la question précédente : cherchons le lien qui existe entre la tension U_0 aux bornes du dipôle et l'intensité I_0 du courant qui le traverse. Ici aussi le résistor est en convention récepteur donc $U_0=R_{\text{éq}}\,I_0$. Introduisons les courants I' et I'' sur le schéma ci-contre : nous avons alors, par additivité des tensions $U_0=R\,I''+2\,R\,I'$; il ne reste plus qu'à déterminer les expressions de I' et de I'' en fonction de I_0.



Écrivons les deux lois des mailles représentées et transformons-les sous une forme plus adéquate :

$$\left\{\begin{array}{l} -2\,R\,(I_0-I')+3\,R(I'-I'')+2\,R\,I'=0 \\ -3\,R(I'-I'')-R\,(I_0-I'')+R\,I''=0 \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{l} 7\,I'-3\,I''=2\,I_0 \;(☁) \\ -3\,I'+5\,I''=I_0 \;(☂) \end{array}\right.$$

En faisant 5(☁)3+(☂), nous arrivons à $26\,I'=13\,I_0$ soit $I'=\dfrac{1}{2}\,I_0$. De même en faisant 3(☁)+7(☂) nous obtenons $13\,I''=26\,I_0$ soit $I''=\dfrac{1}{2}\,I_0$. Et comme $U_0=2\,R\,I'+R\,I''=\dfrac{3}{2}\,R\,I_0$, nous en déduisons $\boxed{R_{\text{éq}}=\dfrac{3}{2}\,R}$.

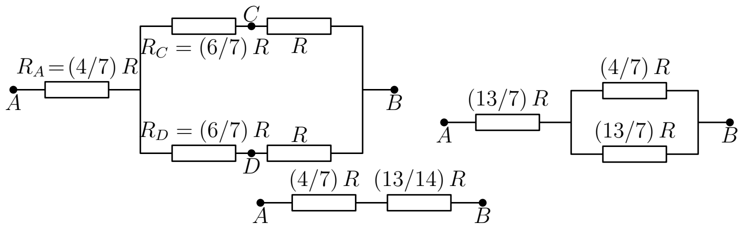
$\boxed{\text{2. (b)}}$ Notons C et D les nœuds à l'intérieur du dipôle AB (cf. schéma ci-dessus). La transformation triangle étoile pour les trois résistors de gauche donne pour R_C :

$$R_C=\frac{R_{AC}\,R_{CD}}{R_{AC}+R_{AD}+R_{CD}}=\frac{2\,R\times 3\,R}{2\,R+2\,R+3\,R}=\frac{6\,R}{7}$$

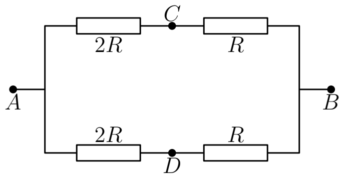
et pour les autres résistances :

$$R_A=\frac{R_{AC}\,R_{AD}}{R_{AC}+R_{AD}+R_{CD}}=\frac{4\,R}{7} \quad \text{et} \quad R_D=\frac{R_{AD}\,R_{CD}}{R_{AC}+R_{AD}+R_{CD}}=\frac{6\,R}{7}$$

Le schéma est alors équivalent au circuit ci-dessous sur lequel nous pouvons faire des associations série et parallélée de résistors pour arriver à deux résistors en série de résistance $\dfrac{4\,R}{7}$ et $\dfrac{13}{14}\,R$ dont l'association a bien la résistance prévue, *ie.* $\boxed{R_{\text{éq}}=\dfrac{3}{2}\,R}$.



Remarque : en constatant que le circuit initial est symétrique par rapport à « l'axe AB », on peut dire que le courant se répartit également entre la branche du haut et la branche du bas. Par conséquent, on a $U_{AC}=U_{AD}$ et donc $U_{CD}=0$. Dans ces conditions, la résistance verticale n'est pas parcourue par un courant, elle se comporte donc comme un circuit ouvert et le dipôle est équivalent au schéma ci-contre dont les associations série et parallèle donnent rapidement le résultat attendu : $\boxed{R_{\text{éq}}=\dfrac{3R}{2}}$.

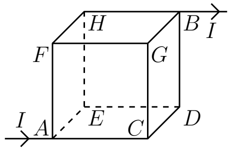


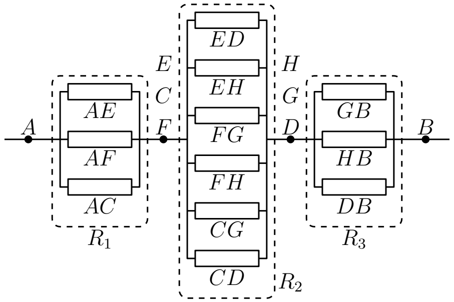
❆ Exercice 11

➜ *Bornes sur des sommets opposés.*

Avec les notations ci-contre, les branches AE, AF, AC sont équivalentes pour le réseau donc les points E, F et C sont au même potentiel et peuvent, par conséquent, être reliés par un fil de résistance nulle et ce sans changer le problème. De même les branches BH, BG et BD sont identiques et donc les points H, G et D peuvent être reliés.

Le réseau peut être finalement vu sous la forme équivalente ci-dessous.





Les lois d'association des résistors donnent :

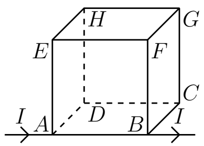
➜ $\dfrac{1}{R_1} = \dfrac{1}{R_3} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R} \rightsquigarrow R_1 = R_3 = \dfrac{R}{3}$

➜ $\dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R} \rightsquigarrow R_2 = \dfrac{R}{6}$

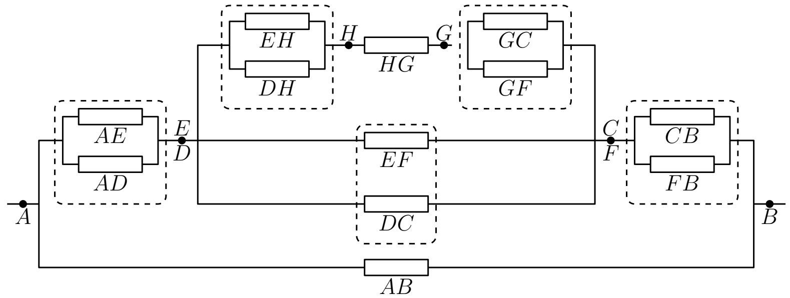
➜ et donc, comme $R_{\text{AB}} = R_1 + R_2 + R_3$, $\boxed{R_{\text{AB}} = \dfrac{5}{6}R}$

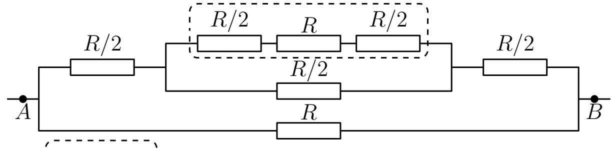
➜ *Bornes sur une même arrête.*

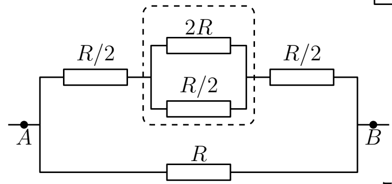
Le raisonnement est analogue au précédent. Avec les notations définies ci-dessous, Les branches AD, AE (resp. BF et BC) sont équivalentes pour le réseau donc les points E et D (resp C et F) sont au même potentiel et peuvent par conséquent être reliés par un fil de résistance nulle et ce sans changer le problème.

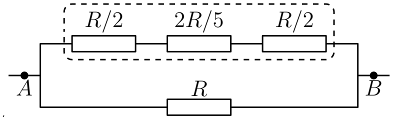


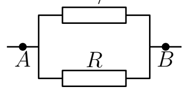
Le réseau peut donc se transformer de la manière suivante :











Et finalement : $\boxed{R_{\text{AB}} = \dfrac{7}{12}R}$.