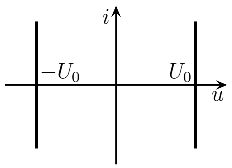
Circuits en régime transitoire

Le cours

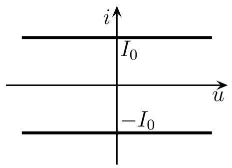
1. Pour la bobine en convention récepteur, la relation constitutive s'écrit $u(t) = L\,\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$.

Ainsi lorsque $u(t) = +U_0$, nous trouvons $i(t) = \dfrac{U_0\,t}{L} + \mathrm{C^{te}}$ et lorsque $u(t) = -U_0$, cela donne $i(t) = -\dfrac{U_0\,t}{L} + \mathrm{C^{te}}{}'$.

Autrement dit la valeur de $i(t)$ varie à u constant, ce qui permet d'arriver à la caractéristiques ① représentée ci-dessous.



caractéristique ①



caractéristique ②

2. Pour le condensateur en convention récepteur, la relation constitutive s'écrit $i(t) = C\,\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$.

Ainsi lorsque $u(t) = +\dfrac{U_0\,t}{\tau} + \mathrm{C^{te}}$ (pour les partie où $u(t)$ croît) avec $\mathrm{C^{te}}$ qui dépend de la période, nous trouvons $i(t) = C\,\dfrac{U_0}{\tau} \overset{\text{not}}{=} I_0$ et lorsque $u(t) = -\dfrac{U_0\,t}{\tau} + \mathrm{C^{te}}{}'$ (pour les partie où $u(t)$ décroît) avec $\mathrm{C^{te}}{}'$ dépendant de la période, nous trouvons $i(t) = -C\,\dfrac{U_0}{\tau} = -I_0$.

Finalement la valeur de $u(t)$ varie à i constant. Cela permet de faire la caractéristique ② ci-dessus.

3. Les propositions A, B et C sont valides. Dans les trois cas, les trois dipôles sont bien pris en compte une et une seule fois et l'équation peut se ramener à l'équation générale $\sum \mathscr{E}_{\text{fournie}} = \sum \mathscr{E}_{\text{reçue}}$.

N'oublions pas en effet que l'équation précédente est algébrique et ne reflète donc pas forcément *a priori* la réalité des échanges énergétiques entre dipôles.

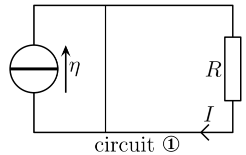
4. Mathématiquement, ces conditions initiales sont tout à fait valables. Toutefois, expérimentalement, il est assez difficile de les réaliser : à un moment où à un autre, un interrupteur dans le circuit « bobine » pour la séparer du générateur auquel elle est reliée, et cela va fatalement poser des problèmes de continuité de courant.

Exercice 1

➜ *Préliminaires.*

En régime continu, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et une bobine comme un interrupteur fermé. Il suffit donc de remplacer ces dipôles par leurs équivalents pour déterminer les caractéristiques du circuit en régime continu.

➜ *Circuit* ①. Le circuit est équivalent au schéma représenté ci-dessous.

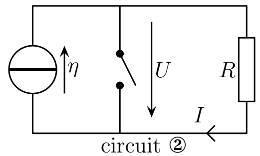


circuit ①

Il s'agit d'un circuit à deux mailles et un seul nœud ! Il est si simple qu'il ne doit poser aucun problème de résolution [1].

La loi constitutive du résistor s'écrit $R\,I = 0$, ce qui donne $\boxed{I = 0}$.

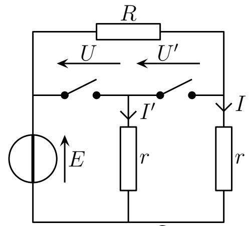
➜ *Circuit* ②. Le circuit est équivalent au schéma représenté ci-dessous.



circuit ②

La relation constitutive du générateur donne $\boxed{I = \eta}$ et celle du résistor $\boxed{U = -R\,\eta}$.

➜ *Circuit* ③. Le circuit est équivalent au schéma représenté ci-dessous.



circuit ③

Étant donnés les interrupteurs ouvert, il s'agit d'un circuit à une seule maille.

La loi de POUILLET donne ainsi $\boxed{I = \dfrac{E}{r+R}}$.

L'additivité des tensions permet d'écrire $U = E - r\,I' = 0$ et comme $I' = 0$ $\boxed{U = E}$.

Elle permet aussi d'écrire $U' = r\,I' - r\,I = 0$ et avec les expressions de I et de I' : $\boxed{U' = -\dfrac{r}{r+R}\,E}$.

Exercice 2

➜ *Préliminaires.* Comme l'intensité du courant traversant une bobine est une fonction mathématiquement continue du temps et que juste avant la fermeture des interrupteurs tous les courants les traversant sont nuls, alors les bobines sont traversées par un courant nul juste après la fermeture des interrupteurs.

Autrement dit, les bobines se comportent comme des interrupteurs **ouverts** à l'instant initial (et **uniquement** à cet instant !).

De même, comme la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction mathématiquement continue du temps et qu'avant la fermeture des interrupteurs, tous les condensateurs sont déchargés, alors la tension aux bornes des condensateurs est nulle juste après la fermeture des interrupteurs.

1. Et pourtant l'expérience montre qu'il est très déstabilisant !

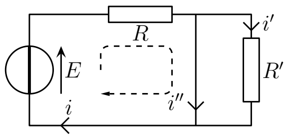
Autrement dit, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs **fermés** à l'instant initial (et **uniquement** à cet instant !).

Pour déterminer les grandeurs à l'instant initial, il faudra donc remplacer les bobines par des interrupteurs ouverts et les condensateurs par des interrupteurs fermés. Mais insistons sur le fait que le circuit obtenu ne sera valable qu'à l'instant $t = 0^+$.

Remarque : dans la suite, nous avons distingué des relations toujours valables des relations valables uniquement à l'instant initial.

➜ *Circuit* ①. À l'instant initial, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.

Il s'agit d'un circuit à deux mailles et un seul nœud principal : il ne va donc poser aucune difficulté de résolution.



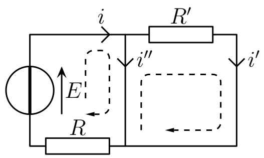
La loi des mailles représentée donne $E - R\,i(0) = 0$ et la loi constitutive de R' donne :

$$R'\,i'(0) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{i(0) = \frac{E}{R}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{i'(0) = 0}$$

La loi des nœuds fournit toujours $i(t) = i'(t) + i''(t)$ et nous arrivons ainsi à $\boxed{i''(0) = \dfrac{E}{R}}$.

➜ *Circuit* ②. À l'instant initial, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.

Il s'agit d'un circuit à deux mailles et un seul nœud principal : il ne va donc poser aucune difficulté de résolution.



La première loi des mailles représentée s'écrit $E - R\,i(0) = 0$, ce qui donne $\boxed{i(0) = \dfrac{E}{R}}$.

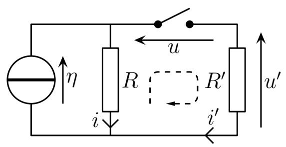
La deuxième loi des mailles donne $-R'\,i'(0) = 0$ et ainsi $\boxed{i'(0) = 0}$.

De plus, comme la loi des nœuds donne à chaque instant $i(t) = i'(t) + i''(t)$, nous en déduisons :

$$\boxed{i''(0) = \frac{E}{R}}$$

➜ *Circuit* ③. À l'instant initial, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.

Il s'agit d'un circuit à une seule maille : il ne va donc poser aucune difficulté de résolution.



De par la présence de l'interrupteur ouvert, nous avons tout de suite $\boxed{i'(0) = 0}$ et la loi des nœuds impose à chaque instant $i(t) + i'(t) = \eta$ nous en déduisons $\boxed{i(0) = \eta}$.

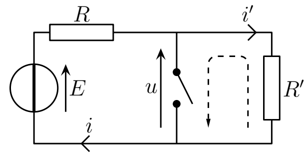
De plus, la loi des mailles valable à chaque instant aussi s'écrit $R\,i(t) - u(t) - R\,i'(t) = 0$ d'où :

$$u(0) = R\,i(0) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{u(0) = R\,\eta}$$

La relation constitutive de R' étant $u'(t) = R'\,i'(t)$, nous en déduisons : $\boxed{u'(0) = 0}$.

➜ *Circuit* ④. À l'instant initial, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.

Il s'agit d'un circuit à une seule maille : il ne va donc poser aucune difficulté de résolution.



La loi de POUILLET donne ainsi $\boxed{i'(0) = i(0) = \dfrac{E}{R + R'}}$.

Et comme la loi constitutive de R' s'écrit $u(t) = R'\,i'(t)$, nous obtenons $\boxed{u(0) = \dfrac{R'}{R + R'}\,E}$.

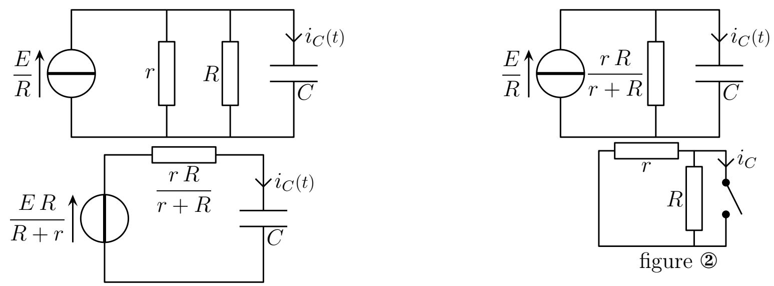
Exercice 3

➨ **Circuit** ① Il s'agit d'un circuit à deux mailles et deux nœuds.

Bien que l'approche nodale considère le circuit comme simple, il faut néanmoins remarquer que la grandeur recherchée est un courant.

C'est pourquoi nous allons privilégier l'approche maillère.

Dans ces conditions, nous allons modifier autant que faire se peut le circuit, sans toucher à la branche contenant $i_C(t)$ bien sûr.



La loi des mailles en terme de courant s'écrit donc :

$$\frac{R\,E}{r + R} - \frac{r\,R}{r + R}\,i_C(t) - u(0) - \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t')\,\mathrm{d}t' = 0$$

En dérivant, nous arrivons à l'équation canonique :

$$\frac{\mathrm{d}i_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,i_C(t) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\tau \overset{\text{not}}{=} \frac{r\,R\,C}{r + R}}$$

Résolvons cette équation différentielle.

Comme il n'y a pas de second membre, la solution générale s'écrit sous la forme : $i_C(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Il suffit juste maintenant de rechercher la condition initiale.

Pour trouver la condition initiale, reprenons la loi des maille en terme de courant et écrivons la à l'instant $t = 0$.

Cela donne : $\dfrac{R\,E}{r+R} - \dfrac{r\,R}{r+R} i_C(0) - u(0) - 0 = 0$.

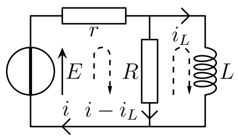
Que vaut donc $u_C(0)$? Pour $t < 0$, le condensateur est en régime permanent (car la situation dure depuis une durée infinie) et se comporte donc comme un interrupteur ouvert. Le circuit est alors équivalent à la figure ② ci-dessus. Comme le courant qui traverse R est nul, la tension à ses bornes l'est aussi d'où $u_C(0^-) = 0$.

Nous pouvons alors déterminer $\lambda = i_C(0)$ et nous arrivons à : $\boxed{i_C(t) = \dfrac{E}{r}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$.

➨ Circuit ②

Il s'agit là aussi d'un circuit à deux mailles et deux nœuds.

Comme précédemment, nous allons préférer l'approche maillère. Nous pourions transformer le circuit comme au-dessus, mais nous allons plutôt montrer ici ce qu'il se passe avec une approche maillère « brutale ».



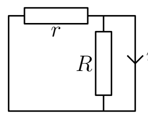


figure ②

Écrivons les deux lois des mailles : $\left\{\begin{array}{l} E - r\,i(t) - R\,(i(t) - i_L(t)) = 0 \\ R(i(t) - i_L(t)) - L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \end{array}\right.$.

De la première équation, nous en déduisons $i(t) = \dfrac{E + R\,i_L(t)}{r+R}$ et en remplaçant dans la seconde, nous arrivons, après calculs, à l'équation écrite sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} i_L(t) = \frac{E_0}{L} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\frac{1}{\tau} \overset{\text{not}}{=} \frac{1}{L}\left(\frac{r\,R}{r+R}\right)} \qquad \text{et} \qquad E_0 \overset{\text{not}}{=} \frac{R}{r+R} E$$

Il ne reste plus maintenant qu'à déterminer la solution de cette équation différentielle.

La solution générale s'écrit sous la forme : $i_L(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + i_{L,\mathrm{p}}(t)$.

En cherchant $i_{L,\mathrm{p}}(t) = \mathrm{C^{te}}$, nous trouvons $i_{L,\mathrm{part}}(t) = \dfrac{E}{R}$ et ainsi $i_L(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{E}{r}$.

Cherchons maintenant la conditions initiale.

Comme l'intensité du courant traversant une bobine est mathématiquement continue, $i_L(0^+) = i_L(0^-)$. De plus pour $t < 0$, la bobine est un régime permanent (puisque cela dure depuis une durée « infinie »), elle se comporte donc comme un fil et le circuit est équivalent à la figure ② ci-dessus. Cela donne donc $i_L(0^-) = 0$ puis la condition initiale nécessaire à la détermination de λ.

Tous calculs faits, nous obtenons : $\boxed{i_L(t) = \dfrac{e}{r}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$.

➨ Circuit ③ Il s'agit d'un circuit à deux nœuds. L'approche nodale semble d'autant plus indiquée que la grandeur recherchée est une tension.

En imposant la masse « en bas » du circuit, la loi des nœuds en terme de potentiel s'écrit :

$$\eta_0 + \frac{0 - u_C(t)}{R} - C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad u_C(t) + R\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = R\,\eta_0$$

Sous forme canonique, cela donne :

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,u_C(t) = \frac{\eta_0}{C} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\tau = R\,C}$$

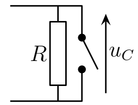
Résolvons cette équation différentielle.

La solution générale s'écrit sous la forme : $u_C(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + u_{C,\mathrm{p}}(t)$.

En cherchant $u_{C,\mathrm{p}}(t) = \mathrm{C^{te}}$, nous trouvons $u_{C,\mathrm{p}}(t) = R\,\eta_0$ et ainsi $u_C(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + R\,\eta_0$.

Comme la tension aux bornes d'un condensateur est mathématiquement continue, nous avons $u_C(0^+) = u_C(0^-)$.

Or, pour $t < 0$, le condensateur est en régime permanent (car la situation dure depuis longtemps) et se comporte comme un interrupteur ouvert. Le circuit est donc équivalent au schéma ci-dessous. Comme le courant qui traverse R est nul, la tension à ses bornes l'est aussi d'où $u_C(0^-) = 0$.



Nous pouvons alors déterminer λ et, tous calculs faits, à : $\boxed{u_C(t) = R\eta\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$.

➨ Circuit ④ Comme ci-dessus, avec un circuit à deux nœuds et une tension comme grandeur inconnue, l'approche nodale est la plus adaptée.

Faisons toutefois un peu attention en écrivant la loi de nœuds en terme de potentiel avec la bobine. En l'écrivant et en la dérivant, nous obtenons :

$$\eta_0 + \frac{0 - u_L(t)}{R} - i_L(0) - \frac{1}{L}\int_0^t u_L(t')\,\mathrm{d}t' = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{1}{R}\,\frac{\mathrm{d}u_L(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L}\,u_L(t) = 0$$

Ce qui donne, sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}u_L(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,u_L(t) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}}$$

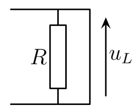
Comme il n'y a pas de second membre, la solution générale s'écrit sous la forme : $u_L(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Il ne reste qu'à déterminer la tension initiale.

Pour cela utilisons la loi des nœuds en terme de potentiel écrite pour $t = 0$.

Cela nous donne $\eta_0 - \dfrac{u_L(0)}{R} - i_L(0) - 0 = 0$.

Il faut maintenant $i_L(0^+)$.

Or nous savons que l'intensité du courant traversant une bobine est mathématiquement continue, donc $i_L(0^+) = i_L(0^-)$. De plus pour $t < 0$, la bobine est un régime permanent (car la situation dure depuis longtemps), elle se comporte comme un fil et le circuit est équivalent au schéma ci-dessous. Cela donne $i_L(0^-) = 0$, à partir de quoi nous pouvons trouver $u_L(0)$.

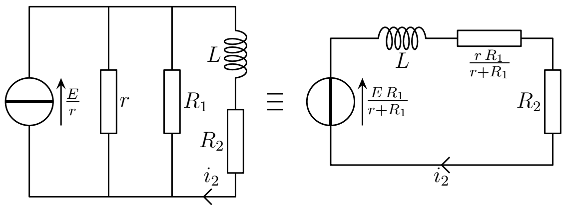


Tous calculs faits nous obtenons : $\boxed{u_L(t) = R\,\eta_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$.

Exercice 4

1. (a) Il s'agit d'un circuit à deux mailles et deux nœuds dans lequel nous cherchons une intensité ($i_1(t)$). L'approche maillère est préférable. De plus, l'approche nodale n'est pas conseillée avec la bobine.

Transformons le circuit en un circuit à une seule maille. Notons que lors des transformations, nous perdons $i_1(t)$.



L'additivité des tensions donne $\left(R_2 + \dfrac{r\,R_1}{r+R_1}\right) i_2(t) + L_2\,\dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E\,R_1}{r+R_1}$ ce qui se réécrit sous la forme canonique

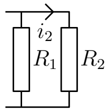
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} i_2(t) = \frac{E_0}{L_2}} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\frac{1}{\tau} \overset{\text{not}}{=} \frac{1}{L_2}\left(\frac{R_2\,r + R_2\,R_1 + r\,R_1}{r+R_1}\right)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{E_0 \overset{\text{not}}{=} \frac{E\,R_1}{r+R_1}}$$

➜ *Résolution*

Nous savons alors que la solution est du type $i_2(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + i_{2,\mathrm{p}}(t)$.

En cherchant $i_{2,\mathrm{p}}(t) = \mathrm{C^{te}}$, nous trouvons $i_2(t) = \dfrac{E\,R_1}{R_2\,r + R_2\,R_1 + r\,R_1} + \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Reste à déterminer la constante d'intégration λ.

L'intensité du courant qui traverse une bobine est mathématiquement continue donc nous avons $i_2(0^+) = i_2(0^-)$. Or pour $t < 0$, la bobine est en régime permanent (car la situation dure depuis longtemps) donc se comporte comme un fil et le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.



Nous avons donc $i(0^-) = 0$ et nous arrivons ainsi à : $\boxed{i_2(t) = \dfrac{E\,R_1}{R_2\,r + R_2\,R_1 + r\,R_1}\left[1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right]}$.

1. (b) *Quand nous saurons associer bobine et résistor, nous pourrons transformer le circuit de manière à ce qu'il n'ait plus qu'une seule maille contenant $i_1(t)$. De là nous pourrions trouver l'équation différentielle vérifiée par $i_1(t)$ et la résoudre.*

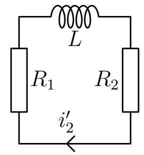
Mais ici, non seulement nous ne pouvons pas, mais en plus cela serait inutile. En effet, nous connaissons **déjà** *$i_1(t)$. Nous n'avons qu'à chercher, avec une approche maillère, un lien entre $i_1(t)$ et $i_2(t)$ et le tour sera joué.*

Dans le circuit initial, l'additivité des tensions donne : $R_1\,i_1(t) = R_2\,i_2(t) + L_2\,\dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}$.

En remplaçant $i_2(t)$ par son expression, nous arrivons (après quelques calculs qu'il est bon de refaire, rien que pour l'entraînement) à :

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E\,R_2}{R_2\,r + R_2\,R_1 + r\,R_1} + \frac{E\,r\,R_1}{(r+R_1)(R_2\,r + R_2\,R_1 + r\,R_1)}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

2. Lorsque l'interrupteur est ouvert, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.



Redéfinissons $t = 0$ l'instant de réouverture de K.

Écrivons la loi des mailles et mettons la sous forme canonique :

$$\boxed{L_2\,\frac{\mathrm{d}i'_2(t)}{\mathrm{d}t} + (R_1+R_2)\,i'_2(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}i'_2(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,i'_2(t) = 0} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\frac{1}{\tau'} \overset{\text{not}}{=} \frac{R_1+R_2}{L_2}}$$

➜ *Résolution*

La solution générale s'écrit alors $i'_2(t) = \lambda\mathrm{e}^{-t/\tau'}$. Par continuité mathématique de l'intensité du courant dans la bobine, nous avons :

$$i'_2(0) = i_2(t{=}\infty) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{i'_2(t) = \frac{E\,R_1}{R_2\,r + R_2\,R_1 + r\,R_1}\,\mathrm{e}^{-t/\tau'}}$$

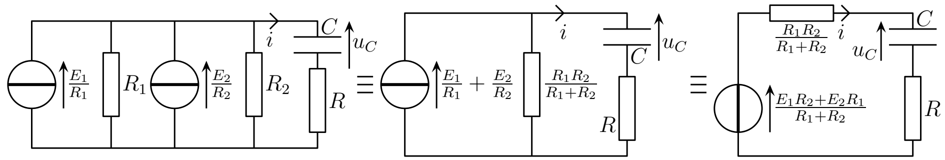
L'additivité des tensions donne aussi $u(t) = R_2\,i'_2(t) + L_2\,\dfrac{\mathrm{d}i'_2(t)}{\mathrm{d}t}$, soit, en remplaçant et après quelques calculs (tout aussi bons à refaire que le précédent) :

$$\boxed{u(t) = -\frac{{R_1}^2\,E}{R_2\,r + R_2\,R_1 + r\,R_1}\,\mathrm{e}^{-t/\tau'}}$$

Exercice 5

Il s'agit d'un circuit à deux mailles et à cinq nœuds pour lequel nous cherchons une intensité et une tension, les deux concernant un même dipôle : à partir du moment où l'un sera déterminé, l'autre sera obtenu à partir de sa loi constitutive.

Étant donné qu'il y a cinq nœuds et deux générateurs de tension, l'approche nodale semble séduisante puisqu'elle engendre deux inconnues. Toutefois, comme dans tout circuit du premier ordre, cela serait se compliquer la vie car nous pouvons (voire devons) d'abord penser à essayer de transformer le circuit.



Après la suite de modifications ci-dessus, l'additivité des tensions donne :

$$u_C(t) + \left(R + \frac{R_1\,R_2}{R_1+R_2}\right)\,i(t) = \frac{E_1\,R_2+E_2\,R_1}{R_1+R_2}$$

Et avec la loi constitutive du condensateur qui s'écrit $i(t) = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$, nous pouvons mettre l'équation d'évolution sous sa forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,u_C(t) = \frac{E_1\,R_2+E_2\,R_1}{C\,(R_1\,R+R_2\,R+R_1\,R_2)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\frac{1}{\tau} \overset{\text{not}}{=} \frac{R_1+R_2}{C\,(R_1\,R+R_2\,R+R_1\,R_2)}}$$

➜ *Résolution*

La solution est donc de la forme $u_C(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + u_{C,\mathrm{p}}(t)$.

En cherchant $u_{C,\mathrm{p}}(t) = \mathrm{C^{te}}$, nous trouvons $u_C(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{E_1\,R_2+E_2\,R_1}{R_1+R_2}$.

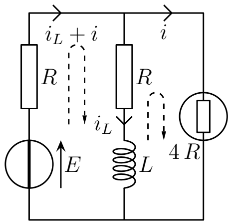
Comme la tension aux bornes d'un condensateur est mathématiquement continue, nous avons $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ (condensateur déchargé), ce qui permet de déterminer λ.

Tous calculs faits : $\boxed{u_C(t) = \dfrac{E_1\,R_2+E_2\,R_1}{R_1+R_2}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$.

Enfin, de $i(t) = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$, nous trouvons aussi $\boxed{i(t) = \dfrac{E_1\,R_2+E_2\,R_1}{R_1\,R+R_2\,R+R_1\,R_2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$.

❄ Exercice 6

1. (a) *Lorsque K est fermé, nous avons affaire avec un circuit à deux mailles et quatre nœuds et nous cherchons une intensité. L'approche maillère semble plus adaptée. Malheureusement, nous ne pouvons pas (encore) transformer le circuit car nous ne savons pas associer la bobine et le résistor.*



Les lois des mailles s'écrivent $\left\{\begin{array}{ll} E - R\,(i(t)+i_L(t)) - R\,i_L(t) - L\,\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = 0 & (☼) \\ L\,\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + R\,i_L(t) - 4\,R\,i(t) = 0 & (❋) \end{array}\right.$.

L'objectif est maintenant d'éliminer $i_L(t)$ de manière à obtenir une équation où seule l'inconnue $i(t)$ apparaît. Là, c'est un peu de la cuisine, il faut essayer. Nous verrons plus tard une méthode très puissante et très systématique.

En faisant (☼)+(❋), nous obtenons :

$$E - R\,(i(t)+i_L(t)) - 4\,R\,i(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad i_L(t) = \frac{E}{R} - 5\,i(t)$$

Et (en dérivant) cela donne $\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = -5\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$.

Ainsi en remplaçant, par exemple dans (❋), nous arrivons à l'équation canonique suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,i(t) = \frac{E}{5\,L}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\frac{1}{\tau} \overset{\text{not}}{=} \frac{9}{5}\,\frac{R}{L}}$$

➜ *Résolution*

Nous savons alors que la solution est du type $i(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + i_\mathrm{p}(t)$.

En cherchant $i_\mathrm{p}(t) = \mathrm{C^{te}}$, nous trouvons $i(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{E}{9\,R}$, reste à déterminer la constante d'intégration λ.

Si la condition initiale provient de la continuité de l'intensité du courant traversant une bobine, il faut faire attention au fait que $i(t)$ n'est **pas** *un courant traversant une bobine : $i(t)$ n'est donc pas forcément mathématiquement continue.*

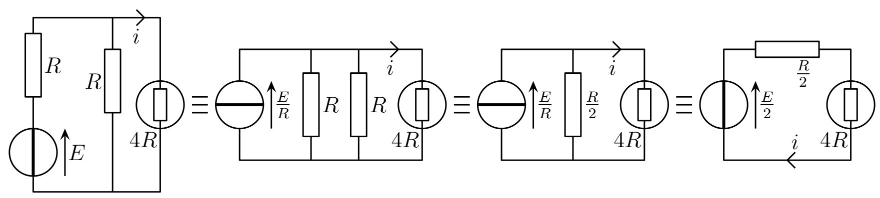
Ainsi comme $i_L(t)$ est mathématiquement continue d'où $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$.

Et comme $i_L(t) = \dfrac{E}{R} - 5\,i(t)$ est toujours vrai, nous avons en particulier à l'instant $t = 0^+$: $i(0^+) = \dfrac{E}{5\,R}$.

Cette condition initiale permet de déterminer λ : $\boxed{i(t) = \dfrac{4\,E}{45\,R}\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{E}{9\,R}}$.

1. (b) En régime permanent continu, la bobine se comporte comme un fil.

Le circuit est donc équivalent au premier schéma ci-dessous. S'agissant d'un circuit à deux mailles, nous pouvons le transformer en un circuit à une maille.

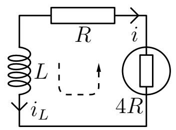


La loi de POUILLET donne alors :

$$i = \frac{\dfrac{E}{2}}{\dfrac{R}{2}+4\,R} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{i = \frac{E}{9\,R}}$$

Nous pouvons constater que (et heureusement !) l'intensité en régime permanent qui est égale à la limite de l'intensité précédente lorsque t tend vers l'infini.

1. (c) Lorsque K est réouvert, le circuit est alors équivalent au schéma ci-dessous.



C'est un circuit à une maille pour lequel nous recherchons une intensité. Écrivons la loi des mailles et mettons la sous forme canonique :

$$L\,\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + 4\,R\,i(t) + R\,i(t) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau'}\,i(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \boxed{\frac{1}{\tau'} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{5\,R}{L}}$$

Comme il n'y a pas de second membre, la solution générale s'écrit sous la forme $i(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau'}$.

Cherchons maintenant la constante d'intégration λ avec les conditions initiales.

Comme l'intensité du courant traversant une bobine est mathématiquement continue, la valeur qu'a $i(t)$ juste après la réouverture de K est la même que $-i_L(t)$ juste avant cette réouverture.

Or, d'après la question précédente nous avons, juste avant la réouverture de K, $i(t) = \dfrac{E}{9\,R}$.

Comme $i_L(t) = \dfrac{E}{R} - 5\,i(t)$, nous en déduisons que juste avant l'ouverture de K, nous avions $i_L(0^-) = \dfrac{4\,E}{9\,R}$.

Ainsi, juste après l'ouverture de K, nous avons $i(0^+) = -\dfrac{4\,E}{9\,R}$ et nous arrivons ainsi à :

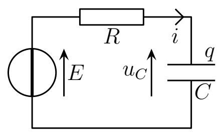
$$\boxed{i(t) = -\frac{4\,E}{9\,R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau'}}$$

2. Vu que la lampe ne s'allume que lorsque l'intensité qui la traverse dépasse une certaine valeur, autrement dit lorsque la tension à ses bornes dépasse une certaine valeur, elle se comporte comme un voyant d'alarme de surtension.

Dans le cas étudié, elle s'allume à chaque modification de l'état de K : lorsqu'on l'ouvre et lorsqu'on le ferme.

Exercice 7

Lorsque l'interrupteur est en position 2, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.



Il s'agit d'un circuit à une seule maille sans difficulté, c'est même un circuit classique R,C. La loi des mailles s'écrit :

$$u_C(t) + R\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = E \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,u_C(t) = \frac{E}{R\,C} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau \stackrel{\text{not}}{=} R\,C}$$

Et comme avec les conventions utilisées $q(t) = C\,u_C(t)$, nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,q(t) = \frac{E}{R}$$

Nous savons alors que la solution générale est de la forme $q(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + q_{\mathrm{p}}(t)$.

En cherchant $q_{\mathrm{p}}(t) = \mathrm{C^{te}}$, nous trouvons $q(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + E\,C$.

Reste à trouver λ avec les conditions initiales.

Comme la tension aux bornes d'un condensateur est mathématiquement continue, nous avons :

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$$

De là nous en déduisons $q(0^+) = C\,U_0$.

Cela permet de déterminer λ et nous obtenons, tous calculs faits $\boxed{q(t) = C\,(U_0 - E)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + E\,C}$.

Avec les conventions choisies, la relation constitutive du condensateur s'écrit :

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{i(t) = \frac{E - U_0}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

Ainsi :

➜ si $E > U_0$, $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} \geqslant 0$, la charge *algébrique* $q(t)$ augmente ;

➜ si $E < U_0$, $i(t) \leqslant 0$, la charge *algébrique* $q(t)$ diminue.

Remarque : il faut éviter ici d'employer le vocabulaire « charger » et « décharger » car le signe de $U_0 - E$ est inconnu. Si celui-ci est négatif, une augmentation algébrique de q, qu'il est tentant d'appeler « charge » correspond en fait à une *diminution* de la quantité de charges sur les armatures.

Comme $u_C(t) = \dfrac{q(t)}{C} = (U_0 - E)\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$ nous trouvons $u_C(\infty) = E$.

Il ne faut pas traduire « 99 % de la valeur en régime permanent » par « $0{,}99\,u_C(\infty)$ ».

En effet, non seulement cela n'aurait de signification que si u_C augmente, mais aussi si (par hasard) nous avions $u_C(0) = U_0 = 0{,}996\,E$, cela n'aurait plus aucun sens du tout. Il faut en fait comprendre la question comme la durée au bout de laquelle la tension a varié de 99 % de sa variation totale.

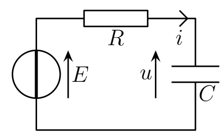
Notons t_0 l'instant recherchée, *ie.* celui tel que : $u_C(t_0) - u_C(0) = 0{,}99\,\big[u_C(\infty) - u_C(0)\big]$.

En remplaçant, nous obtenons :

$$\Big[(U_0 - E)\,\mathrm{e}^{-t_0/\tau} + E\Big] - U_0 = 0{,}99\,(E - U_0) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{t_0 = 2\,\tau\,\ln 10 = 4{,}61\,\tau}$$

Exercice 8

1. Lorsque l'interrupteur est fermé et $t > 0$, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous. Il s'agit d'un circuit R,C classique à une maille, ne présentant pas de difficulté particulière.



La loi des mailles s'écrit $u(t) + R\,i(t) = E$ et comme le condensateur impose $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$, nous arrivons à l'équation canonique :

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,u(t) = \frac{E}{R\,C} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = R\,C}$$

Nous savons alors que la solution générale s'écrit $u(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + u_{\mathrm{p}}(t)$.

En cherchant $u_{\mathrm{part}}(t) = \mathrm{C^{te}}$, nous trouvons $u(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$.

Pour déterminer la constante d'intégration λ, nous devons étudier les conditions initiales.

Nous savons que la tension aux bornes d'un condensateur est mathématiquement continue, *ie.* que $u(0^+) = u(0^-)$.

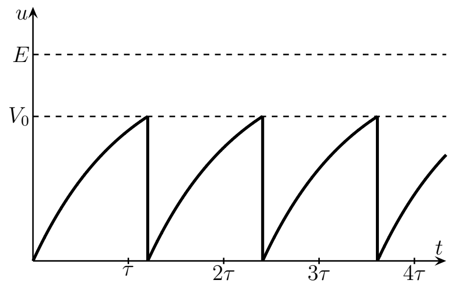
De plus comme le condensateur est initialement déchargée (il est branchée depuis une durée infinie), $u(0^-) = 0$.

Cela permet de déterminer λ et d'arriver à $\boxed{u(t) = E\,\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$.

2. Tant que $u(t) < V_0$, la lampe se comporte comme un interrupteur ouvert, *ie.* tout se passe comme dans la situation précédente et ainsi $u(t) = E\,\left[1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right]$.

Or $u(0) = 0$ et $u(\infty) = E > V_0$, donc il existe un instant t_0 tel que $u(t_0) = V_0$.

À cet instant, le condensateur se décharge totalement et nous sommes ramenés à la situation à $t = 0$. Le processus recommence et le circuit subit des oscillations.



[3.] Comme la décharge est instantanée, la période T est en fait égale à la durée de la charge.

Nous cherchons donc T tel que $u(T) = V_0$, ce qui s'écrit : $E\left[1 - \mathrm{e}^{-T/\tau}\right] = V_0$.

Après résolution, nous trouvons : $\boxed{T = \tau\,\ln\left(\dfrac{E}{E - V_0}\right)}$.

☕ *Remarque* : La période peut être très grande si E (*ie.* la valeur limite de $u(t)$) est proche de V_0, valeur à atteindre pour la décharge. Constatons aussi que la formule n'a aucun sens pour $V_0 > E$, ce qui ne fait que traduire le fait que dans un tel cas la tension de décharge n'est jamais atteinte.

Exercice 9

[1.] ➧ **Équation d'évolution de** $u(t)$

Il s'agit d'un circuit à trois nœuds (dont deux principaux) et deux mailles. Nous cherchons une tension donc l'approche nodale semble la plus adaptée car elle conduit à deux inconnues en potentiels (ou en tension en choisissant bien la position de la masse) par comparaison à l'approche maillère qui conduit à deux inconnues en intensité alors que nous cherchons l'équation vérifiée par une tension.

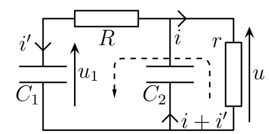
Ici, dans un soucis pédagogique, les deux méthodes seront exposées même si l'approche nodale est plus que vivement conseillée (car adaptée à cette situation).

Commençons par le « pire ».

➜ *Approche maillère « je tape et ça marche »*. Considérons le circuit ci-dessous sur lequel nous avons écrit les lois des nœuds.

Les lois des mailles et les relations constitutives forment le système suivant :

$$\begin{cases} i'(t) = C_1\,\dfrac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} & (☁) \\ i'(t) + i(t) = -C_2\,\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} & (🌧) \\ u(t) - R\,i'(t) - u_1(t) = 0 & (🌤) \\ r\,i(t) = u(t) & (🌨) \end{cases}$$



Le but est maintenant d'éliminer toutes les inconnues sauf $u(t)$. Mieux vaut réfléchir avant . . .

(🌨) implique que $i(t)$ est remplaçable immédiatement par $u(t)$. Sachant cela, (🌧) implique que $i'(t)$ sera aussi remplaçable par du $u(t)$. Enfin (☁) nous apprend que la dérivée de *$u_1(t)$ sera remplaçable par $i'(t)$ donc par du $u(t)$.*

Toutes les grandeurs se ramenant à du $u(t)$ « yapuka » le faire dans la dernière équation, (🌤).

Ainsi, successivement :

➜ de (🌧), nous tirons

$$i'(t) = -i(t) - C_2\,\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{u(t)}{r} - C_2\,\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

➜ en remplaçant dans (🌤), nous obtenons

$$u(t) + \frac{R}{r}\,u(t) + R\,C_2\,\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} - u_1(t) = 0$$

➜ en dérivant cette dernière équation, nous trouvons

$$R\,C_2\,\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{r+R}{r}\right)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{i'(t)}{C_1} = 0$$

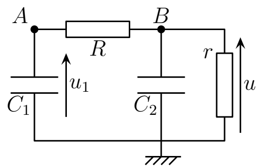
➜ nous utilisons (🌧) et (🌨) pour arriver à l'équation canonique suivante

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,u(t) = 0} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\frac{\omega_0}{Q} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{r\,C_1 + R\,C_1 + r\,C_2}{r\,R\,C_1\,C_2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{{\omega_0}^2 \stackrel{\text{not}}{=} \frac{1}{r\,R\,C_1\,C_2}}$$

☕ *Remarque* : il est bon de vérifier l'homogénéité des relations précédentes : « ${\omega_0}^2 = \dfrac{1}{R^2\,C^2} = \dfrac{1}{\tau^2}$ » et « $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R\,C}{R^2\,C^2} = \dfrac{1}{R\,C} = \dfrac{1}{\tau}$ ». Tout va bien !

➜ *Approche nodale « quand la méthode est adaptée, ça marche mieux »* Comme le circuit est à trois nœuds, il y a deux inconnues qui nous tendent les bras : $u_1(t)$ et $u(t)$.

Écrivons les deux lois des nœuds en terme de potentiels avec ces deux inconnues.



$$\text{en } B : \frac{u_1(t) - u(t)}{R} - C_2\,\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{0 - u(t)}{r} = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{en } A : -C_1\,\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u(t) - u_1(t)}{R} = 0$$

Nous constatons alors très rapidemment que la première loi permet d'écrire $u_1(t)$ en fonction de $u(t)$ et de ses dérivées et que la 2^e loi nous permet d'écrire $u(t)$ en fonction de $u_1(t)$ et de ses dérivées. Pour obtenir une équation en $u(t)$ il suffit de remplacer $u_1(t)$ dans la 2^e équation, pour obtenir une équation en $u_1(t)$, il suffit de remplacer $u(t)$ dans la première équation. Cette approche est vraiment très puissante.

Remplaçons donc $u_1(t) = \left(1 + \dfrac{R}{r}\right)u(t) + R\,C_2\,\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ dans la 2^e équation :

$$-C_1\left(1 + \frac{R}{r}\right)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} - R\,C_1\,C_2\,\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{u(t)}{r} - C_2\,\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{r\,C_2 + C_1\,(r+R)}{R\,C_1\,r\,C_2}\right)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{r\,R\,C_1\,C_2}\,u(t) = 0$$

Remarque : c'est quand même plus rapide, non ? ☺

Résolution de l'équation

➜ *Détermination du type de solution*

Le type de solution pour $u(t)$ dépend du signe du discriminant de l'équation caractéristique, il est donc **impératif** d'en calculer sa valeur numérique.

$$x^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,x + {\omega_0}^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \Delta = \frac{{\omega_0}^2}{Q^2} - 4\,{\omega_0}^2 \overset{\text{num}}{=} \underline{36},4025 \text{ s}^{-2} > 0$$

Notons $\Delta \overset{\text{not}}{=} \delta^2$. Comme le discriminant de l'équation caractéristique est positif, le régime est *a périodique* et les solutions pour $u(t)$ s'écrivent donc, avec x_1 et x_2 les solutions de l'équation caractéristique :

$$u(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{x_1\,t} + \mu\,\mathrm{e}^{x_2\,t} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{x_1 = -\frac{\omega_0}{2\,Q} + \frac{\delta}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = -\frac{\omega_0}{2\,Q} - \frac{\delta}{2}}$$

Puisque $x_1\,x_2 = {\omega_0}^2 > 0$ et $-(x_1 + x_2) = \dfrac{\omega_0}{Q} > 0$, cela signifie que x_1 et x_2 sont toutes les deux négatives.

Nous préférerons donc noter : $\boxed{x_1 \overset{\text{not}}{=} -\dfrac{1}{\tau_1}}$ et $\boxed{x_2 \overset{\text{not}}{=} -\dfrac{1}{\tau_2}}$. Finalement : $\boxed{u(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + \mu\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}}$

➜ *Détermination des constantes d'intégration*

Il faut pour cela utiliser les conditions initiales, donc la continuité mathématique des tensions aux bornes des condensateurs.

Nous en sommes à $u(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + \mu\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}$.

Cela donne $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\lambda}{\tau_1}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - \dfrac{\mu}{\tau_2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}$.

De plus, comme la tension aux bornes des condensateurs est mathématiquement continue, les conditions initiales donnent $u(0^+) = u(0^-) = 0$ et $u_1(0^+) = u_1(0^-) = V_0$.

Exploiter la première ne pose aucune difficulté : de $u(0) = 0$ nous obtenons la première équation $\lambda + \mu = 0$.

➜ **Avec l'approche maillère.** De () nous tirons $r\,i(0) = u(0)$ et $i(0) = 0$.

Avec () $u(0) - R\,i'(0) - u_1(0) = 0$, nous en déduisons :

$$i'(0) = -\frac{u_1(0)}{R} \qquad \rightsquigarrow \qquad i'(0) = -\frac{V_0}{R}$$

Et finalement avec () :

$$i'(0) + i(0) = -C_2\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) \quad \rightsquigarrow \quad -C_2\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = -\frac{V_0}{R} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{V_0}{R\,C_2}$$

➜ **Avec l'approche nodale.** La première loi des nœuds donne tout de suite, avec $u_1(0) = V_0$ et $u(0) = 0$:

$$C_2\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{V_0}{R}$$

Oui, c'est déjà fini. L'approche nodale c'est vraiment trop trop fort ! ☺

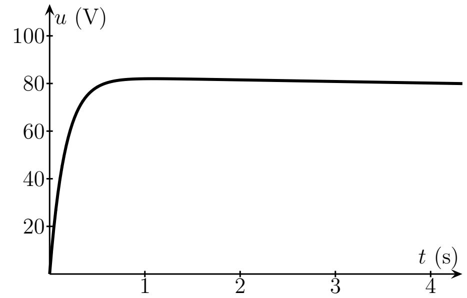
Nous trouvons donc $\dfrac{V_0}{R\,C_2} = -\dfrac{\lambda}{\tau_1} - \dfrac{\mu}{\tau_2}$.

Les deux constantes d'intégrations sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \dfrac{\lambda}{\tau_1} + \dfrac{\mu}{\tau_2} = -\dfrac{V_0}{R\,C_2} \end{cases} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\lambda = \frac{\tau_1\,\tau_2\,V_0}{R\,C_2\,(\tau_1 - \tau_2)} = -\mu}$$

Et ainsi $\boxed{u(t) = \lambda\,\left[\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - \mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right]}$.

Détermination du maximum de $u(t)$



Le maximum est atteint en t_0 tel que $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t_0) = 0$, ce qui s'écrit :

$$0 = -\frac{\lambda}{\tau_1}\mathrm{e}^{-t_0/\tau_1} + \frac{\lambda}{\tau_2}\mathrm{e}^{-t_0/\tau_2} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{t_0 = \frac{\ln(\tau_1/\tau_2)}{1/\tau_2 - 1/\tau_1}}$$

Et comme $u_{\max} = u(t_0)$, nous obtenons, tous calculs et toutes simplifications faites (et il y en a beaucoup) :

$$\boxed{u_{\max} = \lambda\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}}\left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1}\right)}$$

Applications numériques

Même si vous n'avez pas réussi à résoudre ce problème il est plus que très vivement conseillé d'essayer de retrouver les valeurs numériques ci-dessous. Il s'agit là d'un excellent entraînement à l'utilisation de la calculatrice. N'hésitez pas à venir me voir en cas de résultat non concordants.

Les données ne permettent pas de laisser plus de deux chiffres significatifs donc :

- ➜ $\omega_0 = \underline{0,22}3607$ rad.s^{-1} ; $Q = \underline{3,7}9598 \times 10^{-2}$;
- ➜ $\tau_1 = \underline{1,20}834 \times 10^2$ s ; $\tau_2 = \underline{0,16}5526$ s ;
- ➜ $\lambda = \underline{82},8713$ V ; $\mu = -\underline{82},8713$ V ;
- ➜ $t_0 = \underline{1,0}9276$ s ; $u_{\max} = \underline{82},0128$ V.

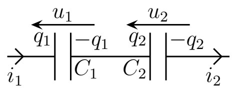
❈ Exercice 10

$\boxed{1.}$ Avec les notations du schéma ci-dessous, nous avons $i_1(t) = \dfrac{\mathrm{d}q_1(t)}{\mathrm{d}t}$ et $i_2(t) = \dfrac{\mathrm{d}q_2(t)}{\mathrm{d}t}$.

Comme $i_1(t) = i_2(t)$, nous pouvons en déduire :

$$\frac{\mathrm{d}q_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q_2(t)}{\mathrm{d}t} \quad \rightsquigarrow \quad q_1(t) = q_2(t) + \mathrm{C^{te}}$$

Comme lors du montage du circuit, *ie*. à un instant très éloigné dans le passé, les deux condensateurs étaient déchargés, cela conduit à $q_1(-\infty) = q_2(-\infty) = 0$, et ainsi $\mathrm{C^{te}} = 0$ et $q_1(t) = q_2(t) \overset{\text{not}}{=} q(t)$.



L'additivité des tension donne $u_1(t) + u_2(t) = 2\,E$, soit :

$$\frac{q(0)}{C_1} + \frac{q(0)}{C_2} = E \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{q(0) = \frac{2\,E\,C_1\,C_2}{C_1 + C_2}}$$

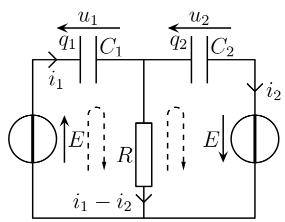
$\boxed{2.}$ Au bout d'une durée infinie, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts et donc tous les courants sont nuls. Avec les lois des mailles, cela donne directement

$$\boxed{i = 0} \quad \boxed{i_1 = 0} \quad \boxed{i_2 = 0} \quad \boxed{q_1 = C_1\,E} \quad \boxed{q_2 = C_2\,E}$$

$\boxed{3.}$ *Le circuit à étudier est un circuit à deux mailles et deux nœuds non transformable*[2]*. Comme les grandeurs recherchées sont des intensité, rien de tel qu'une approche maillère et ce d'autant plus que des intensités sont recherchées.*

Les lois des mailles et les lois constitutives forment le système ci-dessous :

$$\begin{cases} E - u_1(t) - R\,(i_1(t) - i_2(t)) = 0 & (❈) \\ R\,(i_1(t) - i_2(t)) - u_2(t) + E = 0 & (✎) \\ i_1(t) = C_1\,\dfrac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} \\ i_2(t) = C_2\,\dfrac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$



(❈)+(✎) donne : $u_1(t) + u_2(t) = 2\,E$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}$.

Puis avec (❈) nous arrivons à :

$$u_1(t) + R\,C_1\,\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} + R\,C_2\,\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} = E \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,u_1(t) = \frac{E}{R\,C_1 + R\,C_2} \text{ avec } \boxed{\tau = R\,(C_1 + C_2)}$$

Nous savons que la solution générale est donc du type $u_1(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + u_{1,\mathrm{p}}(t)$.

En cherchant $u_{1,\mathrm{p}}(t) = \mathrm{C^{te}}$, nous trouvons $u_1(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$. Reste à déterminer la constante d'intégration.

Comme la tension aux bornes d'un condensateur est mathématiquement continue, nous avons :

2. Du moins pour l'instant

$$u_1(0^+) = u_1(0^-) = \frac{q(0)}{C_1} = \frac{2\,E\,C_2}{C_1 + C_2}$$

Cela nous permet de déterminer λ. Nous arrivons ainsi, après simplifications à :

$$u_1(t) = E\,\frac{C_2 - C_1}{C_2 + C_1}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$$

Comme $i_1(t) = C_1\,\dfrac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t}$ nous trouvons finalement : $\boxed{i_1(t) = \dfrac{E\,C_1\,(C_1 - C_2)}{R\,(C_1 + C_2)^2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$.

Nous avons aussi $i_2(t) = C_2\,\dfrac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} = -C_2\,\dfrac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t}$ et donc (après calculs) :

$$\boxed{i_2(t) = \frac{E\,C_2\,(C_2 - C_1)}{R\,(C_1 + C_2)^2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

Enfin, comme $i(t) = i_1(t) - i_2(t)$ nous trouvons $\boxed{i(t) = \dfrac{E}{R}\left(\dfrac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}}$.

$\boxed{4.}$ Procédons par ordre.

➡ Calculons l'énergie fournie par les générateurs

➔ *Énergie fournie par le générateur traversé par* $i_1(t)$

Le générateur est en convention générateur, la puissance fournie instantannée vaut donc :

$$\mathscr{P}_{\mathrm{f1}}(t) = +u_{\mathrm{g1}}(t) \cdot i_1(t)$$

Ainsi :

$$\mathscr{E}_{\mathrm{f1}} = \int_0^\infty \mathscr{P}_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty E \times \frac{E\,C_1\,(C_1 - C_2)}{R\,(C_1 + C_2)^2}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t = (\cdots) = E^2\,\frac{C_1\,(C_1 - C_2)}{C_1 + C_2}\,(C_1 - C_2)$$

➔ *Énergie fournie par le générateur traversé par* i_2

Le générateur est en convention générateur, nous avons donc de même $\mathscr{P}_{\mathrm{f2}}(t) = +u_{\mathrm{g2}}(t) \cdot i_2(t)$ et :

$$\mathscr{E}_{\mathrm{f2}} = \int_0^\infty \mathscr{P}_{\mathrm{f2}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty E \times \frac{E\,C_2\,(C_2 - C_1)}{R\,(C_1 + C_2)^2}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t = (\cdots) = E^2\frac{C_2\,(C_2 - C_1)}{C_1 + C_2}\,(C_2 - C_1)$$

➔ *Énergie totale fournie*

En simplifiant :

$$\mathscr{E}_{\mathrm{ftot}} = \mathscr{E}_{\mathrm{f1}} + \mathscr{E}_{\mathrm{f2}} = (\cdots) = E^2\,\frac{(C_1 - C_2)^2}{C_1 + C_2}$$

☕ *Remarque* : notons que si $\mathscr{E}_{\mathrm{f,tot}}$ est clairement positive, ce n'est pas le cas ni de $\mathscr{E}_{\mathrm{f1}}$ ni de $\mathscr{E}_{\mathrm{f2}}$ dont les signes dépendent de $C_2 - C_1$. Autrement dit dans les deux générateurs, l'un aura effectivement fourni de l'énergie alors que l'autre en aura effectivement reçu.

➡ Calculons l'énergie reçue par les différents récepteurs

➔ *Énergie reçue par* C_1

L'énergie reçue par un condensateur C_1 entre deux instants t_1 et t_2 vaut

$$\mathscr{E}(t_1,t_2) = \frac{1}{2}\,C_1\,{u_1}^2(t_2) - \frac{1}{2}\,C_1\,{u_1}^2(t_1)$$

Et donc en particulier ici entre les instants $t_1 = 0$ et $t_2 = \infty$, en simplifiant :

$$\mathscr{E}_{\text{r1}} = \frac{1}{2}\,C_1\,{u_1}^2(\infty) - \frac{1}{2}\,C_1\,{u_1}^2(0) = \frac{E^2\,C_1\,(C_1+3\,C_2)\,(C_1-C_2)}{2\,(C_1+C_2)^2}$$

➜ *Énergie reçue par C_2*
Nous avons de même

$$\mathscr{E}_{\text{r2}} = \frac{1}{2}\,C_2\,{u_2}^2(\infty) - \frac{1}{2}\,C_2\,{u_2}^2(0) = (\cdots) = \frac{E^2\,C_2\,(3\,C_1+C_2)(C_2-C_1)}{2\,(C_1+C_2)^2}$$

➜ *Énergie reçue par les deux condensateurs*
En simplifiant nous trouvons :

$$\mathscr{E}_C = \mathscr{E}_{\text{r1}} + \mathscr{E}_{\text{r2}} = (\cdots) = \frac{E^2}{2}\,\frac{(C_1-C_2)^2}{C_1+C_2}$$

➜ *Énergie reçue par le résistor*
Il est en convention récepteur, donc $\mathscr{P}_{\text{r3}}(t) = +u_R(t)\cdot i(t)$ d'où :

$$\mathscr{E}_{\text{r3}} = \int_0^\infty \mathscr{P}_{\text{r3}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty R\,i^2(t)\,\mathrm{d}t = (\cdots) = \frac{E^2}{2}\,\frac{(C_1-C_2)^2}{C_1+C_2}$$

➜ *Énergie totale reçue*
Nous avons $\mathscr{E}_{\text{r,tot}} = \mathscr{E}_C + \mathscr{E}_{\text{r3}} = E^2\,\dfrac{(C_1-C_2)^2}{C_1+C_2}$.

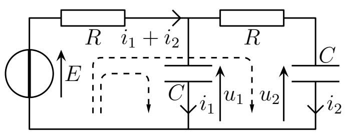
➨ **Rassemblement des résultats**
Nous constatons avec un soulagement intense que $\mathscr{E}_{\text{f,tot}} = \mathscr{E}_{\text{r,tot}}$, c'est-à-dire que l'énergie totale fournie est bien égale à l'énergie totale reçue. (Ouf !)

Exercice 11

Il s'agit d'un circuit à deux mailles et deux nœuds. Nous cherchons des intensités, l'approche maillère semble tout indiquée.

➨ **Approche maillère.** Les lois des mailles et les lois constitutives forment le systèmes ci-dessous.

$$\begin{cases} E - R\,(i_1(t)+i_2(t)) - u_1(t) = 0 & (////) \\ E - R\,(i_1(t)+i_2(t)) - R\,i_2(t) - u_2(t) = 0 & (\bullet) \\ i_1(t) = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} \\ i_2(t) = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$



Manipulons :
➜ en faisant (////)−(●), nous trouvons :

$$u_1(t) = u_2(t) + R\,i_2(t) = u_2(t) + R\,C\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}$$

➜ comme $i_1(t) = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t}$, cela donne

$$i_1(t) = C\,\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} + R\,C^2\,\frac{\mathrm{d}^2u_2(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

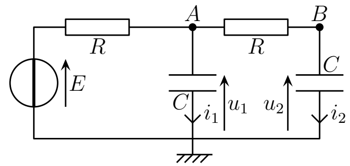
➜ l'équation (●) s'écrit $R\,i_1(t) + 2\,R\,i_2(t) + u_2(t) = E$
➜ en remplaçant $i_1(t)$ et $i_2(t)$ par leur expression en fonction de $u_2(t)$, nous arrivons à l'équation canonique suivante

$$\frac{\mathrm{d}^2u_2(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,u_2(t) = \frac{E}{R^2\,C^2} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\frac{\omega_0}{Q} \overset{\text{not}}{=} \frac{3}{R\,C}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{R\,C}}$$

Nous trouvons là une équation en $u_2(t)$. Nous pourrions la dériver pour trouver une équation différentielle en $i_2(t)$ que nous aurions à rédoudre. Ou alors nous pouvons résoudre en $u_2(t)$ et en déduire $_2(t)$. Nous allons privilégier cette approche car au moins une des conditions initiales est rapide à trouver pour $u_2(t)$ étant donné qu'il s'agit d'une tension aux bornes d'un condensateur et qu'en tant que telle, elle est mathématiquement continue.

➨ **Approche nodale.** *Quitte à trouver une équation en tension et à la résoudre pour trouver $i_1(t)$ et $i_2(t)$, autant essayer d'utiliser l'approche nodale.*

Nous avons un circuit à quatre nœuds et un générateur de tension donc deux inconnues : nous allons naturellement écrire deux lois des nœuds en terme de potentiels.



Les lois des nœuds en terme de potentiels s'écrivent :

$$\text{en } A : \frac{E-u_1(t)}{R} + \frac{u_2(t)-u_1(t)}{R} - C\,\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{en } B : \frac{u_1(t)-u_2(t)}{R} - C\,\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

De la 2^e loi nous tirons l'expression de $u_1(t)$: $u_1(t) = u_2(t) + R\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}$ qu'il n'y a plus qu'à remplacer dans la première loi :

$$\frac{E}{R} - \frac{u_2(t)}{R} - C\,\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} - 0 - C\,\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} - C\,\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} - R\,C^2\,\frac{\mathrm{d}^2u_2(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0$$
$$\rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2u_2(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{R\,C}\,\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_2(t)}{R^2\,C^2} = \frac{E}{R^2\,C^2}$$

☕ *Remarque* : Il s'agit évidemment de la même équation. Mais obtenue plus rapidemment ! Comme quoi quand l'objectif est de trouver une tension, c'est bien plus rapide en approche nodale.

➨ **Résolution**
L'équation caractéristique est $x^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}\,x + {\omega_0}^2 = 0$.

Le discriminant $\Delta = \dfrac{5}{R^2\,C^2}$ étant positif, les solutions sont réelles (et le régime apériodique).

Comme leur somme vaut $-\dfrac{\omega_0}{Q} < 0$ et leur produit ${\omega_0}^2 > 0$, elles sont toutes les deux négatives (comme d'habitude) et nous les noterons $-\dfrac{1}{\tau_1}$ et $-\dfrac{1}{\tau_2}$.

Après résolution, nous trouvons :

$$\boxed{\frac{1}{\tau_1} = \frac{\omega_0}{2}(3+\sqrt{5})} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\frac{1}{\tau_2} = \frac{\omega_0}{2}(3-\sqrt{5})}$$

La solution générale s'écrit donc $u_2(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + \mu\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2} + u_{2,\mathrm{p}}(t)$.

En cherchant $u_{2,\mathrm{p}}(t) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$, nous trouvons $u_{2,\mathrm{p}}(t) = E$.

Reste maintenant à trouver les constantes d'intégration.

Pour cela, servons nous des conditions initiales. Comme la tension aux bornes d'un condensateur est mathématiquement continue, à $t = 0$, nous avons :

$$u_2(0^+) = u_2(0^-) = 0 \qquad \text{et} \qquad u_1(0^+) = u_1(0^-) = 0$$

L'une des deux fournit une information intéressante pour $u_2(t)$ mais pas l'autre. Cherchons encore …

Avec l'approche maillère. Comme $u_1(t) = u_2(t) + R\,i_2(t)$, nous obtenons $i_2(0) = 0$, d'où l'autre condition sur u_2 s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

Avec l'approche maillère. La deuxième loi des nœuds en terme de potentiel donne tout de suite, avec $u_1(0)$ et $u_2(0) = 0$: $\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}(0) = 0$. Là aussi, c'est plus rapide.

Ainsi, comme $\dfrac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\lambda}{\tau_1}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - \dfrac{\mu}{\tau_2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}$ les constantes d'intégrations λ et μ vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu + E = 0 \\ -\dfrac{\lambda}{\tau_1} - \dfrac{\mu}{\tau_2} = 0 \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{3\sqrt{5}-5}{10}E > 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mu = -\frac{3\sqrt{5}+5}{10}E < 0}$$

Finalement $u_2(t) = E\left[\dfrac{3\sqrt{5}-5}{10}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - \dfrac{3\sqrt{5}+5}{10}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2} + 1\right]$.

Et comme $i_2(t) = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}$ nous arrivons, après simplifications à :

$$\boxed{i_2(t) = \frac{E}{\sqrt{5}\,R}\left[-\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + \mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right]}$$

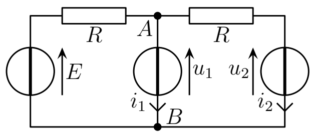
Pour trouver $i_1(t)$, quelle que soit l'approche utilisée, nous pouvons écrire :

$$i_1(t) = \frac{E}{R} - \frac{u_2(t)}{R} - 2\,i_2(t)$$

Cela donne après calculs et simplifications :

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{R}\left[\frac{5-\sqrt{5}}{10}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right]}.$$

➨ **Petite vérification** À $t = 0$, les condensateurs se comportent comme des générateur idéaux de tension avec une tension nulle (parce que les condensateurs sont déchargés). Ainsi, à $t = 0$, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous avec $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$.



Nous trouvons sans aucune difficulté que dans ces conditions, $i_2(0) = 0$ et $i_1(0) = \dfrac{E}{R}$, ce qui est bien vérifié (heureusement !) par les expressions de $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

➨ **À revoir plus tard : approche nodale en complexe.**

Pour les circuits d'ordre 2 ou plus, l'approche complexe est bien plus rapide **et** facile. Pour les circuits d'ordre 1 ça se discute. Voyons ce qu'il en est ici.

Cherchons l'équation différentielle vérifiée par $u_2(t)$ en utilisant la notation complexe.

En appliquant la loi des nœuds en terme de potentiel en A, nous obtenons (en imposant la masse en B) :

$$\underline{U_1} = \frac{E/R + 0 \times \mathrm{j}\,C\,\omega + \underline{U_2}/R}{\mathrm{j}\,C\,\omega + 2/R}$$

e plus entre u_1 et u_2, nous reconnaissons un diviseur de tension, ce qui donne :

$$\underline{U_2} = \frac{1/(\mathrm{j}\,C\,\omega)}{1/(\mathrm{j}\,C\,\omega) + R}\,\underline{U_1} = \frac{1}{\mathrm{j}\,R\,C\,\omega + 1} \times \frac{E + \underline{U_2}}{\mathrm{j}\,R\,C\,\omega + 2} \quad \rightsquigarrow \quad \left[(\mathrm{j}\,R\,C\,\omega)^2 + 1 + 3\,\mathrm{j}\,R\,C\,\omega\right]\underline{U_2} = E$$

D'où l'équation différentielle vérifiée par $u_2(t)$ en revenant en notation réelle.