

Dans cette police sont écrits les raisonnements menés et autres remarques sur les méthodes employées pour trouver les réponses aux questions posées. C'est à dire à l'oral mais à ne pas écrire en DS.

## Amplificateur Opérationnel

### Le cours

1. La tension de sortie est limitée par les tensions d'alimentation : l'AO ne peut délivrer une tension supérieure à celle des alimentations.
2. L'AO est volontairement limité en intensité pour assurer sa propre sécurité : ses composants internes ne supporteraient pas des intensités de courants trop grandes.
3. Il est préférable de ne pas utiliser systématiquement un AO car non seulement celui-ci est limité en courant, d'où une faible puissance transmise, mais aussi parce que l'AO ne remplit pas bien son rôle en hautes fréquences à cause du slew rate.

### Exercice 1

Analyse physique :

- tous les circuits sont en régime quelconque
  - comme il n'y a pas de bobine ou de condensateurs, la sortie sera une fonction linéaire des tension d'entrée.
  - tous les AO sont en régime linéaire car ils possèdent tous une unique rétroaction sur leurs entrées inverseuses
  - les grandeurs pertinentes seront précisées à chaque fois
- Analyse technique. Des AO ? Et en plus il faut chercher une tension de sortie ? Approche nodale !

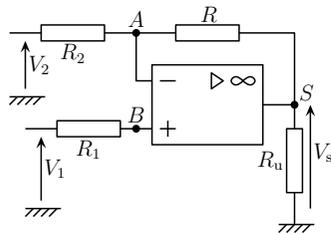
#### ► Premier circuit

Analyse physique :

- grandeurs pertinentes :  $R, R_1, R_2, R_u$  (caractéristique des composants)  $V_1$  et  $V_2$  (contrainte)
- a priori la sortie ne dépendra pas de  $R_u$  car  $R_u$  est directement reliée à la sortie de l'AO et subit donc le potentiel de sortie commandé par les entrée et contrôlé par la rétroaction.

→ Calcul direct

Analyse technique. Nous avons trois potentiels inconnus, en A, B et S donc il faut trois lois : deux lois des nœuds en terme de potentiels et la loi de fonctionnement de l'AO.



La loi des nœuds en terme de potentiel en B donne  $\frac{V_1 - V_+}{R_1} = 0$  d'où  $V_+ = V_1$ .

Comme il s'agit d'un AO idéal et en régime linéaire, nous avons  $V_- = V_+ = V_1$

Enfin la loi des nœuds en terme de potentiels au point A donne, sans oublier que  $V_- = V_1$  :

$$\frac{V_2 - V_1}{R_2} + \frac{V_s - V_1}{R} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_s = \left(1 + \frac{R}{R_2}\right) V_1 - \frac{R}{R_2} V_2$$

Nous pouvons constater que le résultat ne dépend pas de  $R_1$  ce qui n'est pas surprenant car, bien que ce résistor soit en position de commande, il n'est traversé par aucun courant.

→ Calcul par superposition

Si  $V_2$  éteint (ie.  $V_2 = 0$  et  $R_2$  à la masse) nous pouvons reconnaître un montage non inverseur (cf. figure ❶), d'où  $V_s' = \left(1 + \frac{R}{R_2}\right) V_1$ .

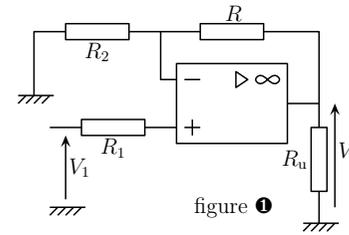


figure ❶

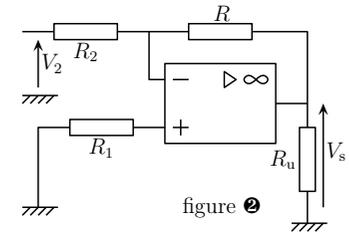


figure ❷

Si  $V_1$  éteint (ie.  $V_1 = 0$  et  $R_1$  relié à la masse) nous reconnaissons un montage inverseur (cf. figure ❷), d'où  $V_s'' = -\frac{R}{R_2} V_2$ .

Finalement nous avons bien  $V_s = V_s' + V_s''$ .

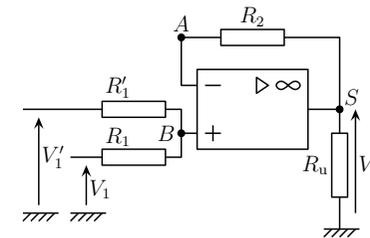
#### ► Deuxième circuit

Analyse physique :

- grandeurs pertinentes :  $R_1, R_1', R_2, R_u$  (caractéristique des composants)  $V_1$  et  $V_2$  (contrainte)
- a priori la sortie ne dépendra pas de  $R_u$  car  $R_u$  est directement reliée à la sortie de l'AO et subit donc le potentiel de sortie commandé par les entrée et contrôlé par la rétroaction.

→ Calcul direct

Analyse technique. Nous avons trois potentiels inconnus, en A, B et S donc il faut trois lois : deux lois des nœuds en terme de potentiels et la loi de fonctionnement de l'AO.



La loi des nœuds en terme de potentiels s'écrit en B :

$$\frac{V_1' - V_+}{R_1'} + \frac{V_1 - V_+}{R_1} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_+ = \frac{R_1 V_1' + R_1' V_1}{R_1 R_1'}$$

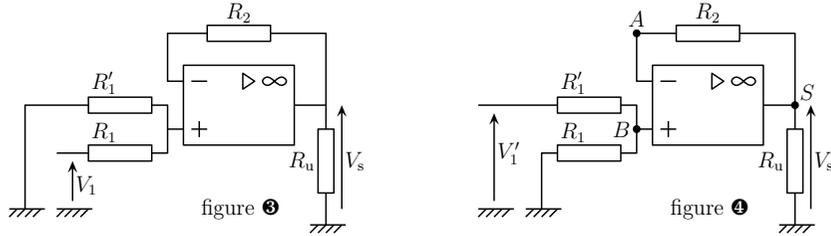
L'AO est idéal et fonctionne en régime linéaire donc  $V_- = V_+ = \frac{R_1 V_1' + R_1' V_1}{R_1 R_1'}$ .

La loi des nœuds en terme de potentiels s'écrit en A :

$$\frac{V_s - V_-}{R_2} \rightsquigarrow V_s = V_- \rightsquigarrow V_s = \frac{R_1' V_1 + R_1 V_1'}{R_1 + R_1'}$$

→ Calcul par superposition

Si  $V'_1$  éteint ( $V'_1 = 0$  et  $R'_1$  relié à la masse), nous reconnaissons un montage suiveur (cf. figure ③) dont l'entrée est un diviseur de tension  $V_e = \frac{R'_1}{R_1 + R'_1} V_1$ , d'où  $V'_s = \frac{R'_1}{R_1 + R'_1} V_1$ .



Si  $V_1$  éteint ( $V_1 = 0$  et  $R_1$  relié à la masse), nous reconnaissons un montage suiveur (cf. figure ④) dont l'entrée est un diviseur de tension  $V_e = \frac{R'_1}{R_1 + R'_1} V_1$ , d'où  $V''_s = \frac{R_1}{R_1 + R'_1} V'_1$ .

Finalement, nous avons bien  $V_s = V'_s + V''_s$ .

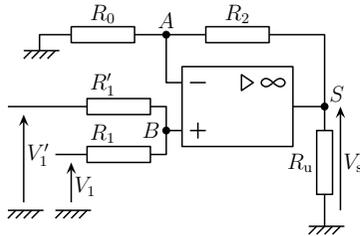
► Troisième circuit

Analyse physique :

- grandeurs pertinentes :  $R_0, R_1, R_2, R'_1, R_u$  (caractéristique des composants)  $V_1$  et  $V_2$  (contrainte)
- a priori la sortie ne dépendra pas de  $R_u$  car  $R_u$  est directement reliée à la sortie de l'AO et subit donc le potentiel de sortie commandé par les entrée et contrôlé par la rétroaction.

→ Calcul direct

Analyse technique. Nous avons trois potentiels inconnus, en A, B et S donc il faut trois lois : deux lois des nœuds en terme de potentiels et la loi de fonctionnement de l'AO.



La loi des nœuds en terme de potentiels s'écrit en B :

$$\frac{V'_1 - V_+}{R'_1} + \frac{V_1 - V_+}{R_1} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_+ = \frac{R_1 V'_1 + R'_1 V_1}{R_1 R'_1}$$

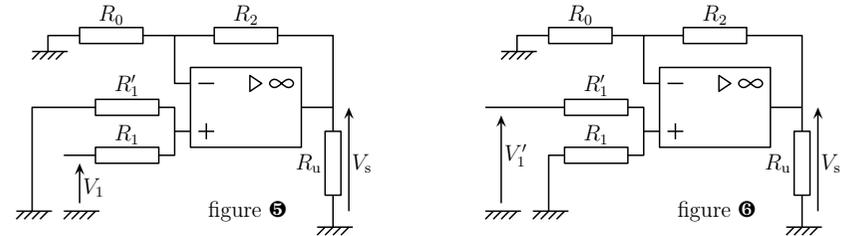
L'AO est idéal et fonctionne en régime linéaire donc  $V_- = V_+ = \frac{R_1 V'_1 + R'_1 V_1}{R_1 R'_1}$ .

La loi des nœuds en terme de potentiels s'écrit en A :

$$\frac{0 - V_-}{R_0} + \frac{V_s - V_-}{R_2} \rightsquigarrow V_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_0}\right) V_- \rightsquigarrow V_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_0}\right) \frac{R_1 V'_1 + R'_1 V_1}{R_1 R'_1}$$

→ Calcul par superposition

Si  $V'_1$  éteint ( $V'_1 = 0$  et  $R'_1$  relié à la masse), nous reconnaissons un montage non inverseur (cf. figure ⑤) dont l'entrée est un diviseur de tension  $V_e = \frac{R'_1}{R_1 + R'_1} V_1$ , d'où  $V'_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_0}\right) \frac{R'_1}{R_1 + R'_1} V_1$ .



Si  $V_1$  éteint ( $V_1 = 0$  et  $R_1$  relié à la masse), nous reconnaissons un montage non inverseur (cf. figure ⑥) dont l'entrée est un diviseur de tension  $V_e = \frac{R_1}{R_1 + R'_1} V_1$ , d'où  $V''_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_0}\right) \frac{R_1}{R_1 + R'_1} V_1$ .

Finalement, nous retrouvons bien  $V_s = V'_s + V''_s$ .

✿ Exercice 2

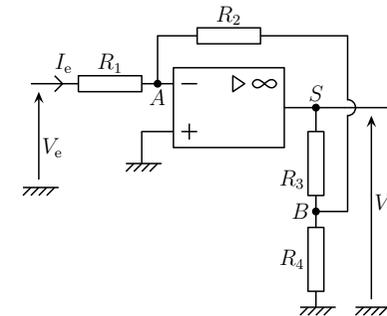
Analyse physique :

- il y a une rétroaction sur l'entrée inverseuse ici : la suite des dipôles  $R_3$  et  $R_2$  relie effectivement la sortie à l'entrée sans passer par la masse. L'AO est donc en régime linéaire.
- Comme, enfin, il n'y a pas de bobine ou de condensateur, il y aura une simple relation de proportionnalité entre la tension d'entrée et la tension de sortie.
- GP :  $R_1, R_2, R_3, R_4$  (composants) et  $V_e$  (contrainte)
- Comme aucun dipôle n'est relié directement entre la sortie et la masse, il faut s'attendre à ce que les résultats soit fonction de  $R_1, R_2, R_3$  et  $R_4$ .

Analyse technique :

- 'est un AO, approche nodale!
- pour la seconde question où, pourtant, il va falloir déterminer un courant nous utiliserons quand même une approche nodale. Ce courant sera déterminé connaissant tous les potentiels de chaque point à l'aide de la relation constitutive du résistor  $R_1$ .

1. Il y a trois points de potentiels inconnus A, B et S, il faut donc trois lois.



Comme l'AO est idéal et en régime linéaire, nous avons  $V_- = V_+ = 0$ .  
La loi des nœuds en terme de potentiels en  $A$  s'écrit (sans oublier que  $V_- = 0$ ) :

$$\frac{V_e - 0}{R_1} + \frac{V_B - 0}{R_2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_B = -\frac{R_2}{R_1} V_e$$

La loi des nœuds en terme de potentiels en  $B$  s'écrit (en n'oubliant pas que  $V_B$  est déjà connu) :

$$\frac{V_s - V_B}{R_3} + \frac{0 - V_B}{R_4} + \frac{0 - V_B}{R_2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_s = \left(1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_3}{R_2}\right) V_B$$

Et ainsi  $\frac{V_s}{V_e} = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \left(1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_3}{R_2}\right)$ .

2. Connaissant tous les potentiels, nous pouvons maintenant écrire la loi constitutive du résistor  $R_1$ . Cela donne  $I_e = \frac{V_e - 0}{R_1}$  puis  $\boxed{R_e = R_1}$ .

3. Pour un inverseur classique, ie. sans les résistances  $R_3$  et  $R_4$ , le gain aurait été de  $-\frac{R_2}{R_1}$ . Ici, il y a un gain multiplicatif supplémentaire de  $\left(1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_3}{R_2}\right)$ .

4.  $\boxed{\text{A.N. : } \frac{V_s}{V_e} = -1,1.10^2}$ .

❖ Exercice 3

Analyse physique :

→ les deux AO possèdent des rétroactions de leurs sorties sur leurs entrées inverseuses, ils sont donc tous les deux en régime linéaire.

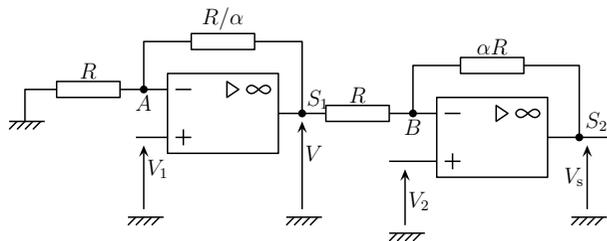
→ GP :  $R, \alpha$  (composants),  $V_1$  et  $V_2$  (contraintes)

→ étant donné la forme du résultat et les résistors en présence, nous pouvons imaginer que le résultat, d'un point de vue dimensionnel sera tel que  $A$  ne dépende que de  $\alpha$  et pas de  $R$ . De plus, parce que l'AO est en régime linéaire, la sortie sera une fonction linéaire des contraintes.

Analyse technique :

→ approche nodale, évidemment !

→ Nous avons 4 potentiels inconnus, il faudra donc 4 lois dont deux lois de fonctionnement des AO.



L'AO de gauche est idéal et fonctionne en régime linéaire, nous avons donc  $V_A = V_1$ .

La loi des nœuds en terme de potentiel au point  $A$  s'écrit

$$\frac{0 - V_1}{R} + \frac{V - V_1}{R/\alpha} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V = \frac{1 + \alpha}{\alpha} V_1$$

L'AO de gauche est idéal et fonctionne en régime linéaire, nous avons donc  $V_B = V_2$ .

La loi des nœuds en terme de potentiel au point  $B$  s'écrit (sans oublier que nous connaissons  $V$ ) :

$$\frac{1 + \alpha}{R} V_1 - V_2 + \frac{V_s - V_2}{\alpha R} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{V_s = (1 + \alpha)(V_2 - V_1)}$$

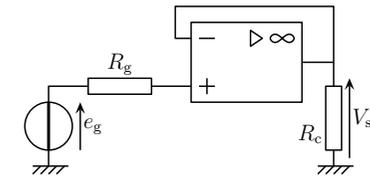
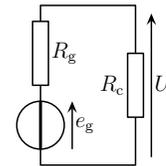
Il s'agit bien du résultat attendu avec  $\boxed{A = 1 + \alpha}$ .

❖ Exercice 4

1. La puissance reçu par le résistor s'écrit  $P = \frac{U_c^2}{R_c}$ .

Nous reconnaissons un diviseur de tension, donc :

$$U_c = \frac{R_c}{R_c + R_g} e_g \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{P = \frac{R_c}{(R_c + R_g)^2} \times e_g^2}$$



2. Nous avons  $P_s = \frac{V_s^2}{R_c}$ .

L'AO est idéal et fonctionne en régime linéaire  $V_+ = V_- = V_s$ .

En remarquant que  $e_g = V_+$ , nous arrivons à  $\boxed{P_s = \frac{e_g^2}{R_c}}$ .

3. Nous pouvons aisément constater que  $\frac{P_s}{P} = \left(1 + \frac{R_g}{R_c}\right)^2 > 1$ . La résistance de charge reçoit donc davantage de puissance avec le montage à AO.

❖ Remarque : notons que ce n'est plus  $e_g$  qui fournit physiquement l'énergie, mais l'alimentation de l'AO. En fait, ce qui a été évité par ce montage, ce sont les pertes par effet Joule dans la résistance  $R_g$ .

❖ Exercice 5

Analyse physique :

→ il y a deux rétroactions, une sur chaque entrée, mais l'énoncé précise bien que l'AO est en régime linéaire. Tout va bien. La tension  $u(t)$  semble mal définie, mais comme l'AO est idéal et en régime linéaire, cela ne changera pas grand chose que  $u(t)$  soit  $v_+(t)$  ou  $v_-(t)$ .

→ Nous pouvons voir que l'AO est commandé par  $u(t)$  et que son circuit de commande contient  $R'$ ,  $R_1$  et  $R_2$ , les résultats devront en dépendre, mais surtout il n'y aura pas besoin a priori de s'occuper de  $R, L$  et  $C$ .

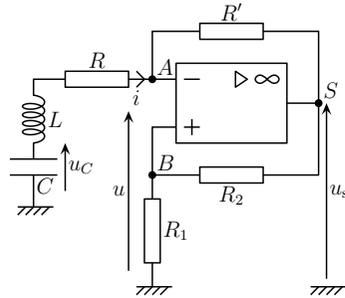
Analyse technique :

→ Approche nodale, évidemment !

→ En ce qui concerne  $i(t)$ , nous chercherons d'abord les potentiels inconnus et utiliserons une loi constitutive adaptée.

1. (a) Ici les grandeurs pertinentes sont donc  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R'$  en tant que composants et  $u(t)$  en tant que contrainte.

Techniquement, en ce qui concerne l'AO, nous avons deux potentiels inconnus : celui en A et celui en S. Il faut donc écrire deux lois pour trouver tous les potentiels.



La loi constitutive de  $R'$  s'écrit  $i(t) = \frac{v_-(t) - v_s(t)}{R'}$ . Reste à déterminer ces deux potentiels. L'AO est idéal et en régime linéaire donc  $v_-(t) = v_+(t) = u(t)$ . La loi des nœuds en B s'écrit :

$$\frac{0 - u(t)}{R_1} + \frac{v_s(t) - u(t)}{R_2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v_s(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u(t)$$

En remplaçant  $v_-(t)$  et  $v_s(t)$  par leurs expressions, nous arrivons à :  $u(t) = -\frac{R' R_1}{R_2} i(t)$ .

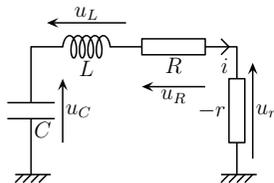
1. (b) Le dipôle constitué par l'AO et les trois résistances est orienté en convention récepteur, donc il se comporte comme un résistor si nous pouvons écrire  $u(t) = R_{eq} i(t)$ .

Compte tenu de la relation précédente, nous pouvons voir que nous avons bien :

$$u(t) = -r i(t) \text{ avec } r = \frac{R' R_1}{R_2}$$

Remarque : il s'agit bien ici d'une résistance négative au sens où elle peut injecter de l'énergie dans le circuit. Il ne faut pas confondre ce  $u(t) = -r i(t)$  avec la relation constitutive d'un résistor en convention générateur qui représente un dipôle uniquement consommateur d'énergie.

2. (a) Le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.



Il s'agit d'un circuit  $R, L, C$  série assez classique. L'additivité des tensions donne :

$$u_C(t) = u_r(t) + u_R(t) + u_L(t)$$

Avec les relations constitutives  $i(t) = -C \frac{du_C(t)}{dt}$ ;  $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ ;  $u_R(t) = R i(t)$  et  $u_r(t) = -r i(t)$  nous arrivons, après substitutions et simplifications à :

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \left(\frac{R-r}{L}\right) \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0$$

2. (b) Avec les notations canoniques, l'équation caractéristique de cette équation différentielle est :

$$x^2 + \frac{\omega_0}{Q} x + \omega_0^2 = 0$$

Nous avons toujours  $\omega_0 > 0$  mais ici  $Q$  peut être positif ou négatif. Le discriminant vaut

$$\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

En choisissant  $|Q|$  suffisamment grand, les solutions de l'équation caractéristique sont imaginaires ce qui implique des oscillations pour  $u_C$ . Les solutions de l'équation caractéristique sont donc

$$x_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + j\omega_0 \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}}{2} \stackrel{\text{not}}{=} -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_{osc} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - j\omega_0 \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}}{2} \stackrel{\text{not}}{=} -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_{osc}$$

Ainsi  $u_C(t) = e^{-\omega_0/(2Q)t} (\lambda \cos \omega_{osc} t + \mu \sin \omega_{osc} t)$ .

Nous pouvons donc voir que si  $Q < 0$ , l'amplitude des oscillations est exponentiellement croissante.

Il faut que  $r$  soit supérieur à  $R$  pour avoir des solutions en exponentielle croissante. Il y a alors apparition d'oscillations.

Remarque : en pratique l'amplitude des oscillations reste limitée par l'AO car la sortie de ce dernier est limitée en courant et en tension. De plus si  $r$  est très grande, autrement dit si  $r$  est nettement différente de  $R$ , les oscillations sont déformées et ne sont plus sinusoïdales, toujours à cause de l'AO.

### Exercice 6

1. Analyse physique :

→ il y a une rétroaction sur l'entrée inverseuse, donc l'AO fonctionne en régime linéaire.

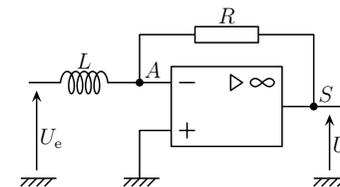
→ il y a une bobine donc la relation entre l'entrée et la sortie sera d'ordre 1.

→ GP : L et R (composants) et  $U_e$  (contrainte)

Analyse technique :

→ Approche nodale !

→ Bon, ici la loi des nœuds risque d'être délicate mais ça ne sera que temporaire : avec la notation complexe ça deviendra trop facile. Il y a deux potentiels inconnus donc il faut deux lois.



L'AO étant idéal et en régime linéaire nous avons  $V_- = V_+ = 0$ .

La loi des nœuds en terme de potentiel au point  $A$  donne (sans oublier que  $V_- = 0$ ) :

$$i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t (U_e(t') - 0) dt' + \frac{U_s(t) - 0}{R} = 0$$

Et en dérivant par rapport au temps :

$$\frac{1}{L} U_e(t) + \frac{1}{R} \frac{dU_s(t)}{dt} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad U_e(t) = -\frac{L}{R} \frac{dU_s(t)}{dt}$$

2. Comme dans beaucoup de circuits, il est préférable d'utiliser des condensateurs plutôt que des bobines parce qu'il est plus facile de fabriquer un bon condensateur qu'une bonne bobine. En d'autres termes l'utilisation d'une bobine est malaisée par les défauts (dus à sa non idéalité) qu'elle engendre.

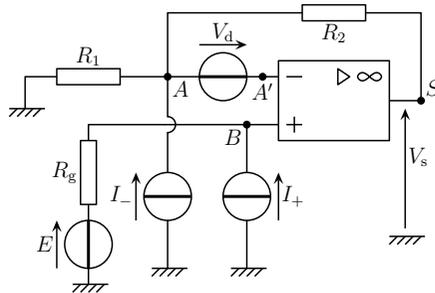
⊛ **Exercice 7**

1. Analyse physique :

- l'AO idéal possède une rétroaction sur l'entrée inverseuse, il fonctionne donc en régime linéaire
- les grandeurs pertinentes sont  $R_1, R_2$  (composants)  $I_+, I_-, V_d$  (modélisation AO) et  $E, R_g$  (modélisation de la contrainte)

Analyse technique :

- l'approche nodale, il n'y a que ça de vrai avec les AO
- maintenant il reste trois potentiels inconnus, ça veut dire trois lois



La loi des nœuds en terme de potentiels en  $B$  donne :

$$\frac{E - V_+}{R_g} + I_+ = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_+ = E + R_g I_+$$

L'AO est idéal et en régime linéaire donc  $V_{A'} = V_- = V_+ = E + R_g I_+$ .

La loi constitutive du générateur  $V_d$  donne  $V_{A'} - V_A = V_d$  et donc  $V_A = E + R_g I_+ - V_d$ .

La loi des nœuds en terme de potentiels en  $A$  donne :

$$\frac{0 - V_A}{R_1} + \frac{V_s - V_A}{R_2} + I_- = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_s = V_A \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - R_2 I_-$$

Et avec l'expression de  $V_A$  :

$$V_s = E \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + (R_g I_+ - V_d) \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - R_2 I_-$$

☛ Remarque : le modèle d'AO réel n'est pas le même modèle que celui vu en cours, cela n'a pas à choquer.

2. Pour un AO idéal, nul n'est besoin de recommencer les calculs : il suffit de reprendre le résultat avec  $I_+ = I_- = 0$  et  $V_d = 0$ , ce qui donne  $V_{s, idéal} = E \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$ .

L'erreur relative est  $\varepsilon = \left| \frac{V_{s, idéal} - V_s}{V_{s, idéal}} \right|$  soit  $\varepsilon = 8,1 \%$ . Cet écart montre que l'erreur commise n'est pas totalement négligeable, mais peut ne pas être considérée pour une première approximation.

La raison principal de cet écart significatif est que la tension d'entrée  $E$  est sensiblement égale à la tension de décalage. Avec une tension  $E$  plus élevée, nul doute que l'erreur deviendrait bien plus négligeable.

⊛ **Exercice 8**

Il est possible de ressortir tout ce qui est analyse physique et technique, mais faisons bien plus simple. Utilisons des résultats connus.

Nous reconnaissons un montage non inverseur dont l'entrée est  $-V_d$ , la sortie vaut donc :

$$V_s = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \times (-V_d) \quad \rightsquigarrow \quad V_s = - \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) V_d$$