Régimes sinusoïdaux forcés

Dans cette police sont écrits les raisonnements menés et autres remarques sur les méthodes employées pour trouver les réponses aux questions posées. C'est à dire à l'oral mais à ne pas écrire en DS.

Le cours

1. Pour 50 Hz, 1 kHz et 1 MHz, les périodes sont respectivement de 20 ms, 1 ms et 1 μs.

2. La valeur moyenne d'un signal négatif est négative car l'intégrale d'une fonction de signe constant est du même signe. Pour la valeur efficace, comme on calcule la valeur moyenne d'un carré, on aura une intégrale d'une fonction positive et donc une valeur efficace forcément positive aussi.

3. Comme $j^2 = -1$, cela $\dfrac{1}{j} = -j$ d'où $\underline{Z_C} = \dfrac{1}{jC\omega} = -j\dfrac{1}{C\omega}$.

4. Pour une impédance, nous savons que $[\underline{Z}] = \Omega$. Et comme $\left|\dfrac{1}{jC\omega}\right| = \dfrac{1}{C\omega}$, nous pouvons en déduire $\boxed{\left[\dfrac{1}{C\omega}\right] = \Omega}$ et le résultat $[C\omega] = \Omega^{-1}$. De même, comme $\underline{Z_L} = jL\omega$, nous trouvons tout de suite $\boxed{[L\omega] = \Omega}$.

5. (a) La loi des nœuds s'écrit :

$$\frac{V_A - V_M}{R_1} + \frac{V_B - V_M}{R_2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{V_M = \frac{R_2 V_A + R_1 V_B}{R_1 + R_2}}$$

Dès lors $V_M - V_A = \dfrac{R_2 V_A + R_1 V_B}{R_1 + R_2} - V_A = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}(V_B - V_A)$.

Nous reconnaissons un diviseur de tension : $U_{MA} = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} U_{BA}$.

5. (b) Pour la branche D, le courant qui y circule **forcément nul**, elle compte donc pour 0.

De plus, il ne faut pas regarder le sens des flèches (qui sont là uniquement pour tromper l'adversaire) car la loi des nœuds considère tous les courants comme « entrant ».

Nous obtenons finalement : $\boxed{\dfrac{V_A - V_M}{R_A} + \dfrac{V_B - V_M}{R_B} + \dfrac{V_C - V_M}{R_C} + 0 = 0}$.

Remarque : si vraiment, pour une raison inconnue, il fallait prendre en compte la quatrième branche, il faudrait :

- ➜ soit rajouter un terme $\dfrac{V_E - V_D}{R_D}$ avec E un point entre R_D et l'interrupteur ;
- ➜ soit rajouter $\dfrac{V_D - V_M}{R_{\text{tot}}}$ avec $R_{\text{tot}} = R_D + R_{\text{interrupteur}}$;
- ➜ ne **surtout pas** rajouter le terme $\dfrac{V_D - V_M}{R_D}$!

6. L'expression proposée est parfaitement juste du point de vue mathématique.

Si l'usage préfère systématiquement $\cos(\varphi_u - \varphi_i)$ pour avoir $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ et non $\varphi = \varphi_i - \varphi_u$, c'est par pure convention.

Cette convention peut s'avérer importante lorsque le résultat dépend du signe de φ, ce qui n'est pas le cas pour la puissance active où φ n'intervient que par l'intermédiaire de son cosinus.

7. En ce qui concerne le moteur, lorsqu'un condensateur est rajouté en parallèle, la tension à ses bornes reste identique. Comme le fonctionnement du moteur reste lui aussi identique, le courant qui traverse le moteur reste le même.

C'est uniquement le courant qui arrive dans l'ensemble de l'installation qui change.

Exercice 1

1. Comme l'écriture générale de l'impédance d'un dipôle est $\underline{Z} = R + jX$ avec R la résistance et X la réactance toutes les deux en ohms, nous avons $\boxed{[a] = \Omega}$ et $[b] = \dfrac{\Omega}{[\omega]} = \Omega.\text{s}$.

Toutefois, comme nous savons que $\underline{Z_L} = jL\omega$, nous pouvons donc dire que $\boxed{[b] = [L] = H}$.

2. En hautes fréquences, en gardant le terme prédominant dans l'impédance, nous pouvons voir que le dipôle est tel que $\underline{Z} \to jb\omega$, *ie.* se comporte comme une bobine d'inductance $b = 10$ mH.

En basses fréquences, $\underline{Z} \to a$, *ie.* se comporte comme une résistance de 50 Ω.

Nous pourrons considérer que le dipôle fonctionne en « basses fréquences » lorsque le terme $jb\omega$ sera négligeable devant le terme a. Pour cela une limite usuelle est de d'imposer $\dfrac{a}{b\omega} > 10$ ce qui donne pour $\boxed{f \leqslant 80 \text{ Hz}}$.

De même nous pourrons considérer que le dipôle fonctionne en hautes fréquence lorsque le terme a sera négligeable devant le (module du) terme $jb\omega$, c'est-à-dire pour $\dfrac{b\omega}{a} > 10$ ou encore pour $\boxed{f \geqslant 8{,}0 \text{ kHz}}$.

3. Étant donné les applications numériques précédentes, comme la fréquence est telle qu'elle ne se situe ni dans un domaine de fréquence basses, ni dans le domaine des fréquences élevées, nous sommes obligé de garder l'expression complète de $\underline{Z}$.

Ainsi $\underline{u}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}(t)$ donne en module $U_{\text{m}} = Z\,I_{\text{m}}$ et en remplaçant Z par son expression :

$$U_{\text{m}} = \sqrt{a^2 + b^2\,4\,\pi^2 f^2} \times I_{\text{eff}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{I_{\text{eff}} = \underline{2{,}}49071 \text{ A}}$$

De $\underline{u}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}(t)$, nous obtenons, en prenant l'argument, $\arg \underline{u}(t) = \arg \underline{i}(t) + \arg \underline{Z}$ et ainsi ;

$$\varphi_i - \varphi_u = -\arg \underline{Z} = -\arctan\left(\frac{b\omega}{a}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\varphi_i - \varphi_u = -\underline{51}° \, 29' \, 17'' = -\underline{0{,}8}98637 \text{ rad}}$$

4. Cette fois, nous nous situons dans le domaine basses fréquences. Nous pouvons donc assimiler le dipôle à une impédance $\underline{Z} = a$.

Nous avons alors :

- ➜ $I_{\text{m}} = \dfrac{U_{\text{m}}}{a}$ soit $\boxed{I_{\text{m}} = \underline{4{,}3}9134 \text{ A}}$
- ➜ et $\varphi_i - \varphi_u = -\arg(a)$, *ie.* $\boxed{\varphi_i - \varphi_u = 0}$

Exercice 2

La condition recherchée est simple, l'analyse technique concluera forcément à « trouvons la partie imaginaire et cherchons la condition pour qu'elle soit nulle. » Ceci dit, comme les conditions $\mathfrak{Im}(\underline{Z}) = 0$ *et* $\mathfrak{Im}(\underline{Y}) = 0$ *sont équivalentes, il faudra juste choisir quelle grandeur calculer : l'empédance ou l'admittance.*

1. (a) *Ici nous avons un dipôle du type* $(L \oplus R_1) /\!\!/ (C \oplus R_2)$ *nous allons travailler plutôt en admittance.*

Calculons $\underline{Y_{AB}}$:

$$\underline{Y_{AB}} = \frac{1}{jL\omega + R_1} + \frac{1}{\dfrac{1}{jC\omega} + R_2} = \frac{1}{jL\omega + R_1} + \frac{jC\omega}{1 + jR_2C\omega}$$

$$= \frac{R_1 - jL\omega}{L^2\omega^2 + {R_1}^2} + \frac{jC\omega\,(1 - jR_2C\omega)}{1 + {R_2}^2 C^2\omega^2}$$

La condition $\mathfrak{Im}(\underline{Y_{AB}}) = 0$ donne :

$$-\frac{L\,\omega}{L^2\,\omega^2 + {R_1}^2} + \frac{C\,\omega}{1 + {R_2}^2\,C^2\,\omega^2} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad C\,\omega\,(L^2\,\omega^2 + {R_1}^2) - L\,\omega\,(1 + {R_2}^2\,C^2\,\omega^2) = 0$$

Et en regroupant les termes de même puissance de ω :

$$(L^2\,C - L\,C^2\,{R_2}^2)\,\omega^3 + ({R_1}^2\,C - L)\,\omega = 0$$

Comme il faut que cette expression soit nulle quelle que soit la pulsation ω, il faut et il suffit que les coefficents du polynôme en ω soient tous simultanément nuls. Nous aboutisson ainsi à un système qui se résout sans difficulté particulière :

$$\left\{\begin{array}{l} L = {R_1}^2\,C \\ L^2\,C = {R_2}^2\,L\,C^2 \end{array}\right. \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{R_1 = R_2 \overset{\text{not}}{=} R \text{ et } \frac{L}{R} = R\,C \overset{\text{not}}{=} \tau}$$

$\boxed{\text{1. (b)}}$ En utilisant les notations précédemment définies, nous avons :

$$\underline{Y_{AB}} = \frac{1}{\mathrm{j}\,L\,\omega + R} + \frac{\mathrm{j}\,C\,\omega}{1 + \mathrm{j}\,R\,C\,\omega} = \frac{1}{\mathrm{j}\,L\,\omega + R} + \frac{\mathrm{j}\,C\,\omega}{1 + \mathrm{j}\,\dfrac{L}{R}\,\omega}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{j}\,L\,\omega + R} + \frac{\mathrm{j}\,R\,C\,\omega}{R + \mathrm{j}\,L\,\omega} = \frac{1 + \mathrm{j}\,\dfrac{L}{R}\,\omega}{R + \mathrm{j}\,L\,\omega} = \frac{1}{R} \times \frac{R + \mathrm{j}\,L\,\omega}{R + \mathrm{j}\,L\,\omega}$$

Finalement $\underline{Y_{AB}} = \dfrac{1}{R}$ soit : $\boxed{\underline{Z_{AB}} = R}$.

Remarque : l'impédance, réelle quelle que soit la pulsation par choix, est aussi indépendante de la pulsation, ce qui n'était pas demandé au départ.

$\boxed{2.}$ Procédons de même en calculant $\underline{Z_{EF}} = (R_1 /\!\!/ L) \oplus (R_2 /\!\!/ C)$:

$$\underline{Z_{EF}} = \frac{\mathrm{j}\,L\,{R_1}^2\,\omega + L^2\,\omega^2\,R_1}{{R_1}^2 + L^2\,\omega^2} + \frac{R_2 - \mathrm{j}\,{R_2}^2\,C\,\omega}{1 + {R_2}^2\,C^2\,\omega^2}$$

La condition $\mathfrak{Im}\underline{Z_{AB}} = 0$ donne :

$$\frac{(L\,{R_1}^2\,\omega}{({R_1}^2 + L^2\,\omega^2)} - \frac{-{R_2}^2\,C\,\omega}{(1 + {R_2}^2\,C^2\,\omega^2)} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad L\,{R_1}^2\,(1 + {R_2}^2\,C^2\,\omega^2) - {R_2}^2\,C\,({R_1}^2 + L^2\,\omega^2) = 0$$

Regroupons les termes ayant la même puissance de ω :

$$(L\,{R_1}^2 - {R_1}^2\,{R_2}^2\,C) + \omega^2\,(L\,{R_1}^2\,{R_2}^2\,C^2 - {R_2}^2\,C\,L^2) = 0$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, il faut que tous les coefficients de ce polynôme en ω^2 soient simultanément nuls, cela donne ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} L\,{R_1}^2 = {R_1}^2\,{R_2}^2\,C \\ L\,{R_1}^2\,{R_2}^2\,C^2 = {R_2}^2\,C\,L^2 \end{array}\right. \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{R_1 = R_2 \overset{\text{not}}{=} R' \text{ et } \frac{L}{R} = RC \overset{\text{not}}{=} \tau'}$$

➜ *Calcul de $\underline{Z_{EF}}$*

Avec les notations définies ci-dessus, nous avons, à l'aide de quelques simplifications :

$$\underline{Z_{EF}} = \frac{\mathrm{j}\,L\,R'\,\omega}{R' + \mathrm{j}\,L\,\omega} + \frac{R'/(\mathrm{j}\,C\,\omega)}{R' + 1/(\mathrm{j}\,C\,\omega)} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\underline{Z_{EF}} = R'}$$

Remarque : l'impédance, ici aussi, réelle quelle que soit la pulsation par choix, est indépendante de la pulsation.

Exercice 3

Analyse physique. Quels que soient les états des interrupteurs les dipôles sont en série ou court-circuités, il sera donc simple de trouver l'amplitude complexe de l'intensité.

Analyse technique. Ici nous n'avons aucune condition sur la phase, nous allons donc travailler en module. De plus comme l'énoncé nous dit que nous avons 3 valeurs identiques, nous pourrons écrire deux lois avec un « = » ce qui amènera à deux relations entre r, L, ω et C.

Comme l'ampèremètre affiche les mêmes valeurs dans les trois cas, nous pouvons dire que l'intensité efficace est la même dans les trois cas.

De plus avec $I_{\text{eff}} = \dfrac{U_{\text{eff}}}{|\underline{Z}|}$, cela implique que les modules des impédances sont égaux dans les trois cas :

- ➜ pour K_1, K_2 ouverts nous avons $\underline{Z_1} = r + \mathrm{j}\,L\,\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}\,C\,\omega}$;
- ➜ pour K_1 seul ouvert, nous avons $\underline{Z_2} = r + \mathrm{j}\,L\,\omega$;
- ➜ pour K_2 seul ouvert, nous avons $\underline{Z_3} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\,C\,\omega}$.

Si les modules sont égaux, leurs carrés le sont. Nous avons donc

$$|\underline{Z_1}|^2 = |\underline{Z_2}|^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad \cancel{r^2} + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2 = \cancel{r^2} + (L\,\omega)^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega} = \pm L\,\omega$$

La solution en $+L\,\omega$ est impossible car $C > 0$. Il reste donc $2\,L\,\omega = \dfrac{1}{C\,\omega}$.

Écrivons aussi l'égalité des carrés des deux modules suivants :

$$|\underline{Z_3}|^2 = |\underline{Z_2}|^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad \left(\frac{1}{C\,\omega}\right)^2 = r^2 + (L\omega)^2$$

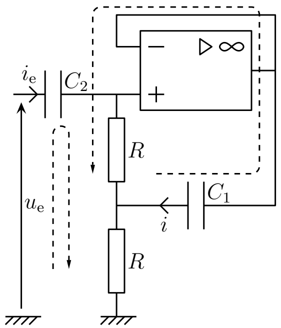
Comme $2\,L\,\omega = \dfrac{1}{C\,\omega}$, nous arrivons à $4\,L^2\,\omega^2 = r^2 + L^2\,\omega^2$ soit $r^2 = 3\,L^2\,\omega^2$.

Finalement il reste $\boxed{L\,\omega = \dfrac{r}{\sqrt{3}} \text{ et } \dfrac{1}{C\,\omega} = \dfrac{2\,r}{\sqrt{3}}}$.

Exercice 4

$\boxed{\text{1. (a)}}$ *Analyse physique. L'AO est en régime linéaire. L'impédance devrait dépendre de R, C_1 et C_2.*

Analyse technique. L'approche nodale est tentante, par pur réflexe. Toutefois, en comptant bien les potentiels inconnus, cela fait 3. 3 potentiels inconnus sachant qu'après il faudra trouver un courant $\underline{i_{\text{e}}}$. Ce n'est pas très tentant. D'autant plus qu'en introduisant les courants inconnus, nous pouvons voir qu'il n'y en a que deux. L'approche maillère est préférable ici.



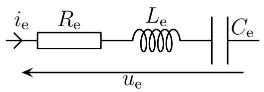
Les deux lois des mailles représentées s'écrivent, en tenant compte de la loi de fonctionnement de l'AO :

$$\begin{cases} \underline{u_e} - \dfrac{1}{\mathrm{j}\,C_2\,\omega}\,\underline{i_e} - R\,\underline{i_e} - R\,(\underline{i_e} + \underline{i}) = 0 \\ \dfrac{1}{\mathrm{j}\,C_1\,\omega}\,\underline{i} + \underbrace{0}_{=\varepsilon} - R\,\underline{i_e} = 0 \end{cases} \quad \leadsto \quad \begin{cases} \underline{u_e} = \left(\dfrac{1}{\mathrm{j}\,C_2\,\omega} + 2\,R\right)\,\underline{i_e} + R\,\underline{i} = 0 \\ \dfrac{1}{\mathrm{j}\,C_1\,\omega}\underline{i} = R\,\underline{i_e} \end{cases}$$

Seule la solution en $\underline{i_e}$ nous intéresse et nous trouvons, après calculs :

$$\boxed{\underline{u_e} = \underline{Z_e}\,\underline{i_e} \text{ avec } \underline{Z_e} = 2\,R + \frac{1}{\mathrm{j}\,C_2\,\omega} + \mathrm{j}\,R^2\,C_1\,\omega}$$

1. (b) Dans le circuit R,L,C série représenté ci-dessous, nous avons $\underline{u_e} = \left(R_e + \mathrm{j}\,L_e\,\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}\,C_e\,\omega}\right)\,\underline{i_e}$.



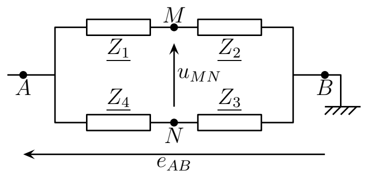
En identifiant les coefficients du polynôme en $\mathrm{j}\,\omega$, nous constatons que le circuit se comporte effectivement comme un circuit R,L,C série tel que : $\boxed{R_e = 2\,R\,;\, C_e = C_2\,;\, L_e = R^2\,C_1}$.

2. (a) Par analogie $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L_e\,C_e}}$, soit $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{R\,\sqrt{C_1\,C_2}}}$.

2. (b) Par analogie $Q_0 = L_e\dfrac{\omega_0}{R_e}$, soit $\boxed{Q_0 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{C_1}{C_2}}}$, ce qui donne $\boxed{Q_0 = 5{,}0.10^2}$. Ce facteur de qualité est considérable. Rappelons qu'en TP avec des composants usuels, nous arrivions au maximum à $Q \simeq 30$.

Exercice 5

1. Utilisons les notations ci-dessous. Nous pouvons alors reconnaître un pont de WHEASTONE.



En fixant $\underline{V_B} = 0$, nous avons $\underline{e_{AB}} = \underline{V_A}$ et nous reconnaissons deux diviseurs de tension :

$$\underline{V_M} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} \times \underline{V_A} \qquad \text{et} \qquad \underline{V_N} = \frac{\underline{Z_3}}{\underline{Z_3} + \underline{Z_4}} \times \underline{V_A}$$

Nous avons alors $\underline{u_{MN}} = \underline{V_M} - \underline{V_N} = \left(\dfrac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} - \dfrac{\underline{Z_3}}{\underline{Z_3} + \underline{Z_4}}\right)\,\underline{e_{AB}} = \dfrac{\underline{Z_2}\,\underline{Z_4} - \underline{Z_3}\,\underline{Z_1}}{(\underline{Z_1} + \underline{Z_2})(\underline{Z_3} + \underline{Z_4})} \times \underline{e_{AB}}$.

Finalement $\boxed{\text{Le pont est équilibré si } \underline{Z_2}\,\underline{Z_4} = \underline{Z_3}\,\underline{Z_1}}$.

Ici, $\underline{Z_1} = R_1$, $\underline{Z_2} = R_2$, $\underline{Z_3} = (R/\!\!/C) = \dfrac{R}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$, $\underline{Z_4} = R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\,C\,\omega}$.

La condition s'écrit donc :

$$R_2\,\left(R + \frac{1}{\mathrm{j}\,C\,\omega}\right) = \frac{R_1\,R}{1 + \mathrm{j}\,R\,C\,\omega} \quad \leadsto \quad \frac{R_2}{\mathrm{j}\,C\,\omega}(1 + \mathrm{j}\,R\,C\,\omega)^2 = R_1\,R$$

Ce qui donne $1 - R^2\,C^2\,\omega^2 + 2\,\mathrm{j}\,R\,C\,\omega = \mathrm{j}\,C\,\omega\dfrac{R_1\,R}{R_2}$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties imaginaire et réelles sont simultanément égales, d'où :

$$1 - R^2\,C^2\,\omega^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2\,R\,C\,\omega = C\,\omega\,\frac{R_1\,R}{R_2}$$

Ainsi pour équilibrer le pont, il faut $\boxed{R\,C = \dfrac{1}{\omega} \text{ et } \dfrac{R_1}{R_2} = 2}$.

2. En imposant $R_1 = 2\,R_2$ nous pouvons, en faisant varier R mesurer une fréquence.

La capacité C étant connue, il suffit alors d'équilibrer le pont en faisant varier R, puis de mesurer (avec un ohmmètre par exemple) R.

Avec la relation : $\boxed{f = \dfrac{1}{2\,\pi\,R\,C}}$ nous pouvons en déduire la fréquence.

3. Comme $R = \dfrac{1}{2\,\pi\,f\,C}$, R_{max} est atteint pour $f = 1{,}0.10^2$ Hz et R_{min} pour $f = 1{,}0$ kHz :

$$\boxed{R_{max} = 1{,}6\ \mathrm{k}\Omega} \qquad \text{et} \qquad \boxed{R_{min} = 1{,}6.10^2\ \Omega}$$

Exercice 6

1. (a) $\underline{u_{AE}} = \underline{u_{ED}}$ car les deux résistances sont égales et sont traversées par le même courant. Ces deux tensions ont, en particulier, la même phase, nous les choisirons donc comme origine des phases.

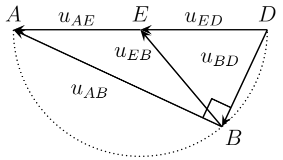
De plus $\underline{u_{AE}} + \underline{u_{ED}} = \underline{u_{AD}}$, donc $\underline{u_{AE}} = \dfrac{\underline{u_{AD}}}{2}$.

En notant $\underline{i}$ le courant circulant à travers C et R dans le sens A vers D, nous avons :

$$\underline{u_{AB}} = \frac{1}{\mathrm{j}\,C\,\omega}\,\underline{i} \quad \text{et} \quad \underline{u_{BD}} = R\,\underline{i} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{u_{AB}} = \frac{1}{\mathrm{j}\,C\,\omega}\,\frac{\underline{u_{BD}}}{R}$$

Les tensions $\underline{u_{AB}}$ et $\underline{u_{BD}}$ sont donc en quadrature de phase ($\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$), $\underline{u_{AB}}$ étant en retard par rapport à $\underline{u_{BD}}$ ($\arg \underline{u_{AB}} = \arg \underline{u_{BD}} - \dfrac{\pi}{2}$).

Finalement, la construction de FRESNEL est représentée ci-dessous.



$\boxed{\text{1. (b)}}$ Comme le triangle ADB est rectangle en B, le point B est sur le cercle de diamètre AD. De plus E est le milieu de $[AD]$, c'est donc le centre du cercle, et EB en est un des rayons.

Ainsi lorsque C, R, ou ω varie, le point B se déplace sur le cercle, mais l'amplitude $\underline{u_{AB}}$, elle, ne change pas.

Quelles que soient les valeurs de C, R ou ω, l'amplitude de $\underline{u_{EB}}$ est constante et vaut $\left|\dfrac{\underline{u_{AD}}}{2}\right|$.

$\boxed{2.}$ Nous reconnaissons deux diviseurs de tension :

$$\underline{u_{AE}} = \frac{R'}{R'+R'} \times \underline{u_{AD}} \qquad \text{et} \qquad \underline{u_{AB}} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\,C\,\omega}}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\,C\,\omega} + R} \times \underline{u_{AD}}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}\underline{u_{BE}} = \underline{u_{AE}} - \underline{u_{AB}} &= \frac{1}{2}\,\underline{u_{AD}} - \frac{1}{1+\mathrm{j}\,R\,C\,\omega}\,\underline{u_{AD}} \\ &= \frac{1+\mathrm{j}\,R\,C\,\omega - 2}{2\,(1+\mathrm{j}\,R\,C\omega)} \times \underline{u_{AD}} = \frac{-1+\mathrm{j}\,R\,C\,\omega}{2\,(1+\mathrm{j}\,R\,C\,\omega)} \times \underline{u_{AD}}\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$|-1+\mathrm{j}\,R\,C\,\omega| = |1+\mathrm{j}\,R\,C\,\omega| \quad \rightsquigarrow \quad |\underline{u_{BE}}| = \frac{|\underline{u_{AD}}|}{2} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

❆ Exercice 7

$\boxed{1.}$ Impédances d'entrée.

➨ **Premier dipôle**

Analyse physique :

➜ *comme le sujet parle d'« impédance » c'est que le circuit est en RSF. Toutefois, comme il n'y a ni condensateur, ni bobine dans le montage, nous pouvons tout de suite utiliser la notation réelle et chercher la résistance d'entrée R_e définie par $V_e = R_e\,I_e$*

➜ *l'AO est en régime linéaire car il ne possède qu'une rétroaction sur son entrée inverseuse*

➜ *les grandeurs pertinentes sont R_1, R_2 et R_3 (composants) V_e et ω (contrainte) mais nous pouvons d'ores et déjà dire que la résistance d'entrée ne dépendra pas de V_e car c'est une contrainte extérieure et que le circuit est en régime linéaire et elle ne dépendra pas non plus de ω pour des raisons d'homogénéité*

Analyse technique :

➜ *la notation complexe ne se justifie pas, car toutes les impédances sont réelles*

➜ *ici nous cherchons un courant. Avec deux potentiels inconnus en approche nodale et deux courants inconnues, nous avons le choix. Utilisons ici, plus par habitude que par véritable intérêt, l'approche nodale.*

La loi de fonctionnement de l'AO s'écrit, puisqu'il est idéal **et** en régime linéaire : $V_+ = V_-$. De plus ici $V_- = V_e$.

La loi des nœuds en terme de potentiels écrite en V_+ donne :

$$\frac{0 - V_+}{R_3} + \frac{V_s - V_e}{R_4} - 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) V_e$$

Nous pouvons alors trouver I_e en écrivant la loi des nœuds à l'entrée inverseuse :

$$I_e + \frac{V_s - V_e}{R_1} - 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad I_e = -\frac{R_2}{R_3\,R_1}\,V_e \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{R_e = -\frac{R_3 R_1}{R_2}}$$

➨ **Deuxième dipôle** *Analyse physique :*

➜ *le circuit est en RSF (cf. utilisation du vocabulaire « impédance »)*

➜ *l'AO est en régime linéaire (une seule rétroaction sur l'entrée inverseuse)*

➜ *grandeurs pertinentes : R_4, R_5 et C (composants) V_e et ω (contrainte) mais l'impédance d'entrée ne dépendra pas de V_e (contrainte d'un dispositif linéaire)*

Analyse technique :

➜ *ici nous allons clairement utiliser la notation complexe*

➜ *comme précédemment, l'approche nodale et l'approche maillère amènent à deux inconnues. Utilisons l'approche nodale par pure habitude.*

La loi de fonctionnement de l'AO donne, puisqu'il est idéal et en régime linéaire : $V_+ = V_-$. Or ici $V_+ = 0$ donc $V_- = 0$.

En notant V_s le potentiel de la borne de sortie, la loi des nœuds en terme de potentiels s'écrit, à l'entrée inverseuse de l'AO :

$$\frac{\underline{V'_e} - 0}{R_5} + \frac{\underline{V_s} - 0}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\,C\,\omega}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V_s} = -\frac{\underline{V'_e}}{\mathrm{j}\,C\,\omega R_5}$$

Pour trouver $\underline{I'_e}$, écrivons la loi des nœuds à l'entrée inverseuse et utilisons l'expression de $\underline{V_s}$ trouvée juste précédemment :

$$\underline{I'_e} + \frac{0 - \underline{V'_e}}{R_5} + \frac{\underline{V_s} - \underline{V'_e}}{0} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{I'_e} = \underline{V_e}\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{\mathrm{j}\,R_4\,R_5\,C\,\omega}\right)$$

L'impédance d'entrée vaut donc :

$$\boxed{\underline{Z'_e} = \frac{1}{\underline{Y'_e}}} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\underline{Y'_e} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{\mathrm{j}\,R_4\,R_5\,C\,\omega}}$$

$\boxed{2.}$ Ne nous posons pas de questions, n'essayons surtout pas de dessiner le montage, faisons simple : comme les deux dipôles sont associés en parallèle, nous avons :

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{Z_{\text{e}}} + \underline{Y}'_{\text{e}} = -\frac{R_2}{R_1\,R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{\mathrm{j}\,R_4\,R_5\,C\,\omega}$$

Pour simuler une inductance pure, il faut avoir $\Re(\underline{Y}_{\text{eq}}) = 0$ soit $\boxed{-\dfrac{R_2}{R_1\,R_3} + \dfrac{1}{R_5} + \dfrac{1}{R_4} = 0}$.

Avantage : l'inductance simulée peut être importante. Ici $L_{\text{eq}} = R_4\,R_5\,C = 10$ H !

Inconvénients :

➜ il n'y a pas de champ magnétique (donc ce n'est pas utilisable pour les électroaimants) ;

➜ l'utilisation limitée par les AO (en courant et en fréquence).

Exercice 8

1. La loi d'association des dipôles en parallèle donne directement :

$$\frac{1}{\underline{Z_{AB}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\,L\,\omega} + \mathrm{j}\,C\,\omega = \frac{\mathrm{j}\,L\,\omega + R - L\,C\,\omega^2\,R}{\mathrm{j}\,L\,R\omega}$$

Ainsi : $\underline{Z_{AB}} = \dfrac{\mathrm{j}\,L\,R\omega}{\mathrm{j}\,L\,\omega + R - L\,C\,\omega^2\,R} = \dfrac{R}{1 + \mathrm{j}\,R\,C\,\omega - \mathrm{j}\,\dfrac{R}{L\,\omega}}$, ce qui est bien la forme recherchée avec $\boxed{Z_0 = R}$ et, par identification (possible grâce à la présence du « 1 » au dénominateur) :

$$\left\{\begin{array}{l} R\,C = \dfrac{Q}{\omega_0} \\ \dfrac{R}{L} = Q\,\omega_0 \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\left\{\begin{array}{l} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L\,C}} \\ Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} \end{array}\right.}$$

Remarque : nous reconnaissons la pulsation propre et le facteur de qualité d'un circuit R,L,C parallèle, ce qui n'est pas étonnant, vu le dipôle.

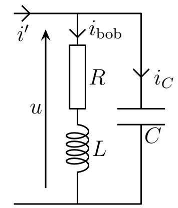
2. (a) Le module de l'impédance vaut $Z_{AB} = \dfrac{Z_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ qui est maximal lorsque son dénominateur est minimal, *ie.* pour $\dfrac{\omega_{\text{a}}}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega_{\text{a}}} = 0$ ou encore pour $\boxed{\omega_{\text{a}} = \omega_0}$.

2. (b) À cette pulsation, $\underline{Z_{AB}} = R$: le dipôle est purement résistif.

Remarque : si cette résistance est très élevée, pour une même valeur de tension à ses bornes, l'intensité du courant traversant le dipôle sera très basse ; c'est la raison pour laquelle on parle de circuit bouchon : parce qu'il « bloque » le courant à une certaine fréquence.

Exercice 9

1. *Avant toute chose, un bon schéma de la situation : l'électroaimant visiblement modélisé par une bobine idéale en série avec un résistor et un condensateur en parallèle de l'ensemble en faisant bien attention aux notations et notamment à i' qui représente l'intensité alimentant l'ensemble de l'installation.*



Analyse physique :

➜ *le circuit est linéaire en RSF*

➜ *grandeurs pertinentes : L, R, (composants) ω et I_{eff} (contraintes) : C n'est pas vraiment une grandeur pertinente puisque c'est celui que nous devons rechercher pour satisfaire à la contrainte de minimalité du courant d'alimentation*

Analyse technique :

➜ *ici, vu la situation, mieux vaut oublier* FRESNEL *et se concentrer sur la notation complexe.*

➜ *étant donné que les contraintes sont sur les intensités plus que sur les tensions, nous allons plutôt travailler avec les admittances*

Nous voulons exprimer une intensité $i'(t)$ en fonction d'une autre i_{bob}, quoi de mieux qu'un diviseur de courant ? Notons $\underline{Y}$ l'admittance de la branche contenant le dipôle $L \oplus R$.

$$\underline{I_{\text{bob,m}}} = \frac{\underline{Y}}{\mathrm{j}\,C\,\omega + \underline{Y}}\,\underline{I'_{\text{m}}} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \underline{I'_{\text{m}}} &= \left(1 + \frac{\mathrm{j}\,C\,\omega}{\underline{Y}}\right)\underline{I_{\text{bob,m}}} = \big(1 + \mathrm{j}\,C\,\omega\,(R + \mathrm{j}\,L\,\omega)\big)\,\underline{I_{\text{bob,m}}} \\ &= \big(1 - L\,C\,\omega^2 + \mathrm{j}\,R\,C\,\omega\big)\,\underline{I_{\text{bob,m}}} \end{aligned}$$

Au lieu de chercher le minimum de I'_{m}, cherchons le minimum de ${I'_{\text{m}}}^2$ lorsque C varie.

$${I'_{\text{m}}}^2 = {I_{\text{bob,m}}}^2\left((1 - L\,C\,\omega^2)^2 + R^2\,C^2\,\omega^2\right) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}{I'_{\text{m}}}^2}{\mathrm{d}C} = {I_{\text{bob,m}}}^2\left(-2\,L\,\omega^2\,(1 - L\,C\,\omega^2) + 2\,R^2\,C\,\omega^2\right)$$

Ainsi : $\dfrac{\mathrm{d}{I'_{\text{m}}}^2}{\mathrm{d}C} = 0$ donne $\boxed{C = \dfrac{L}{R^2 + L^2\,\omega^2} = \underline{5{,}0}6606 \times 10^{-7}\ \text{F}}$

Remarque : il s'agit ici d'un exercice classique de redressement de facteur de puissance. Avec la condition usuelle que le dipôle $(R \oplus L) /\!\!/ C$ est purement résistif (pour avoir un facteur de puissance égal à 1) nous arriverions à la même chose.

2. En considérant uniquement la branche correspondant à l'électroaimant, nous avons directement

$$\underline{U_{\text{m}}} = R\,\underline{I_{\text{m}}} + \mathrm{j}\,L\,\omega\,\underline{I_{\text{m}}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{U_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}\sqrt{R^2 + L^2\,\omega^2} = \underline{47}{,}1239\ \text{kV}}$$

En reprenant l'expression trouvée à la première question entre $\underline{I_{\text{bob,m}}}$ et $\underline{I'_{\text{m}}}$:

$$\boxed{I'_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}\sqrt{(1 - L\,C\,\omega)^2 + R^2\,C^2\,\omega^2} = \underline{9{,}5}4930\ \text{mA}}$$

Remarque : l'intensité efficace qui traverse l'électroaimant est relativement élevée (30 A) alors l'intensité efficace délivrée par le réseau est 1000 fois plus faible !

Seule le résistor consomme, en moyenne, de l'énergie. La puissance totale fournie par le réseau vaut donc $P_{\text{fournie}} = {I_{\text{bob,eff}}}^2\,\Re(\underline{Z_R})$ soit $\boxed{P_{\text{fournie}} = R\,{I_{\text{eff}}}^2 = 4{,}5\ \text{hW}}$.

Remarque : cette énergie est dissipée en « chaleur » (mot à éviter, voir chapitre 3 de thermodynamique). Une telle puissance de chauffage correspond à un élément peu chauffant de type sèche-serviette.

Exercice 10

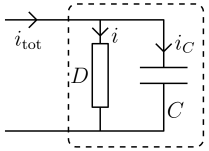
Cet exercice est un exercice très classique sur la puissance : association d'un moteur (une installation inductive) avec un condensateur. Il ne faut jamais perdre de vue que la situation est physiquement très simple et que la seule difficulté réside dans la compréhension (et donc dans l'utilisation) des formules employées.

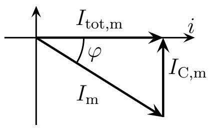
$\boxed{\text{1. (a)}}$ *Rechercher le facteur de puissance d'un dipôle (ou d'une association de dipôle) revient à chercher une de ses caractéristiques. En effet un dipôle peut être entièrement décrit soit par deux nombres : le module et argument de son impédance complexe ou bien la puissance active consommée et son facteur de puissance. Avoir l'un des deux couples de nombres c'est pouvoir trouver l'autre couple. Ici comme nous avons déjà P nous allons chercher $\cos\varphi$ à partir de lois contenant la puissance.*

Comme $P = U_{\text{eff}}\,I_{\text{eff}}\,\cos\varphi$, nous avons $\cos\varphi = \dfrac{P}{U_{\text{eff}}\,I_{\text{eff}}}$ et $\boxed{\cos\varphi = 0{,}60}$.

$\boxed{\text{1. (b)}}$ *Analyse technique. Étant donné que les deux dipôles sont en parallèle, une bonne construction de* FRESNEL *sera parfaite pour répondre à la question. Le tout étant de bien interpréter les différentes phases et notamment ne pas oublier que puisque le moteur est inductif, l'intensité qui le traverse est en retard par rapport à la tension à ses bornes.*

Le réseau électrique et la construction de FRESNEL associée sont représentés ci-dessous.





Comme la tension est la même avec ou sans condensateur, le courant $i(t)$ traversant l'installation (représentée par le dipôle D) a toujours une valeur efficace de 20 A.

En module, nous pouvons écrire $I_{C,\text{m}} = C\,\omega\,U_{\text{m}}$ et pour avoir le courant $i_{\text{tot}}(t)$ en phase avec la tension $u(t)$, nous voyons sur la construction de FRESNEL qu'il faut $I_{C,\text{m}} = I_{\text{m}}\,\sin\varphi$, ce qui donne :

$$C = \frac{I_{\text{m}}}{\omega\,U}\,\sin\varphi \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{C = \frac{I_{\text{eff}}}{2\,\pi\,f\,U_{\text{eff}}}\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \underline{1{,}0}1859\times 10^{-5}\ \text{F}}$$

$\boxed{\text{1. (c)}}$ Comme nous pouvons le voir sur la construction de FRESNEL, la nouvelle amplitude de l'intensité parvenant à l'installation vaut :

$$I_{\text{tot,m}} = I_{\text{m}}\,\cos\varphi \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{I_{\text{tot,eff}} = I_{\text{eff}}\,\cos\varphi = \underline{12}\ \text{A}}$$

$\boxed{\text{1. (d)}}$ Nous savons que les pertes énergétiques dans les lignes acheminant l'électricité sont proportionnelles à ${I_{\text{ligne,eff}}}^2$, car elles peuvent être considérées comme des résistances dissipant par effet JOULE une puissance de $R\,{I_{\text{ligne,eff}}}^2$.

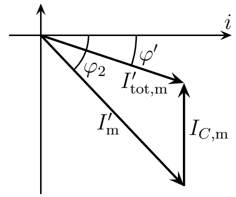
Ici, en notant ΔPerte la variation relative des pertes dues au transport du courant dans les lignes électriques, nous avons :

$$\Delta\text{Perte} = \frac{{I_{\text{eff}}}^2 - {I_{\text{tot,eff}}}^2}{{I_{\text{eff}}}^2} = 1 - \cos^2\varphi = \underline{0{,}64}$$

$\boxed{\text{Les pertes ont donc diminué de 64 \%.}}$ Remarquons que si les pertes ont diminué de manière très sensible, cela ne change rien pour l'utilisateur.

$\boxed{\text{2.}}$ *Analyse technique. Utilisons là aussi* FRESNEL *étant donné que les dipôle restent encore en parallèle.*

Représentons la construction de FRESNEL. La flèche représentant l'intensité traversant l'installation est modifiée, mais pas celle représentant le condensateur.



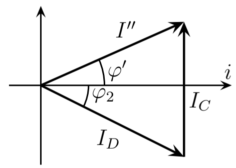
Calculons le nouveau facteur de puissance du moteur : $\cos\varphi_2 = \dfrac{P'}{U_{\text{eff}}\,I'_{\text{eff}}} = 0{,}40$.

En notant $i'_{\text{tot}}(t)$ le courant alimentant l'installation mise en parallèle avec le condensateur, nous constatons avec la construction de Fresnel, que (Pythagore) :

$$I'_{\text{tot,eff}} = \sqrt{{I'_{\text{eff}}\,\cos\varphi_2}^2 + (-I'_{\text{eff}}\,\sin\varphi_2 + C\,\omega\,U_{\text{eff}})^2} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{I'_{\text{tot,eff}} = \underline{12}{,}1568\ \text{A}}$$

Et le facteur de puissance vaut $\boxed{\cos\varphi' = \dfrac{I'_{\text{eff}}\,\cos\varphi_2}{I'_{\text{tot,eff}}} = \underline{0{,}82}2585}$.

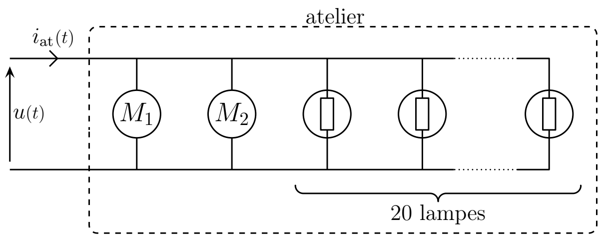
Remarque : le fait que $C\,\omega\,U_{\text{m}} < I'_{\text{eff}}\,\sin\varphi_2$ montre que la « vraie » construction de Fresnel est celle présentée ci-dessus et non pas celle-ci dessous. Ceci dit, même avec la « fausse » nous arriverions au bon résultat étant donné que les relations géométriques utilisées sont identiques dans les deux cas.



Exercice 11

$\boxed{\text{1.}}$ *Dans cette question, nous cherchons une intensité et un facteur de puissance. Pour avoir l'intensité c'est usuel une fois le circuit posé. Quant au facteur de puissance ce n'est qu'une caractéristique du dipôle « atelier ». En d'autres termes, ce qu'il faut avant toute autre chose, c'est un bon schéma.*

Dans un atelier, c'est comme ailleurs : les différents appareils sont branchés en parallèleles les uns des autres.



Tout étant en parallèle, l'approche nodale est clairement plus adaptée. C'est pourquoi, pour caractériser les moteurs et l'atelier dans son ensemble, nous allons plutôt utiliser l'admittance que l'impédance.

Calculons l'intensité efficace en procédant par étapes.

➜ *Caractérisation des moteurs*

Nous allons exprimer le module de l'admittance ainsi que les parties réelle et imaginaire des deux moteurs en fonction de leur puissance absorbée, de la tension efficace à leurs bornes et de leur facteur de puissance.

Pour chacun des moteurs, nous avons :

$$P = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\, \cos\varphi \quad \text{et} \quad I_{\text{eff}} = Y\, U_{\text{eff}} \quad \rightsquigarrow \quad Y = \frac{P}{{U_{\text{eff}}}^2 \cos\varphi}$$

De plus $\mathfrak{Re}(\underline{Y}) = Y\, \cos\varphi$ et $\mathfrak{Im}(\underline{Y}) = -Y\, \sin\varphi$.

moteur	Y	$\mathfrak{Re}(\underline{Y})$	$\mathfrak{Im}(\underline{Y})$
1	96,50824 mS	71,41610 mS	−64,91210 mS
2	187,9371 mS	142,8322 mS	−122,1447 mS

Remarque : le signe − vient du fait que les moteurs sont de type inductif, *ie.* se comportent comme des bobines. Ce qui normal, car un moteur fonctionne (entre autre) avec des électroaimants qui ne sont autre que des bobines. Ainsi $\mathfrak{Im}(\underline{Y}) = -Y\sqrt{1-\cos^2\varphi}$.

➜ *Caractérisation des lampes*

Les lampes se comportent comme des résistances. Ainsi $P = \dfrac{{U_{\text{eff}}}^2}{R}$, d'où $R = \dfrac{{U_{\text{eff}}}^2}{P}$.

➜ *Détermination du courant*

Le courant complexe qui arrive à l'installation n'est autre que la somme des courants complexes traversant chacun des dipôles. Ainsi :

$$\begin{aligned}\underline{I_{\text{at,m}}} &= \sum \underline{I_{\text{m}}} = \underline{U_{\text{m}}} \sum \underline{Y} = \underline{U_{\text{m}}}\left(20\, \underline{Y_{\text{lampes}}} + \underline{Y_{\text{moteur 1}}} + \underline{Y_{\text{moteur 2}}}\right)\\ &= \underline{U_{\text{m}}}\left(\frac{20}{R} + Y_1\, \cos\varphi_1 + Y_2\, \cos\varphi_2 - \text{j}\,\left(Y_1\, \sin\varphi_1 + Y_2\, \sin\varphi_2\right)\right) \stackrel{\text{not}}{=} \underline{U_{\text{m}}} \times \underline{Y_{\text{at}}}\end{aligned}$$

Nous avons donc $\boxed{I_{\text{eff}} = U_{\text{eff}}\sqrt{\mathfrak{Re}^2(\underline{Y_{\text{eq}}}) + \mathfrak{Im}^2(\underline{Y_{\text{eq}}})}}$ avec

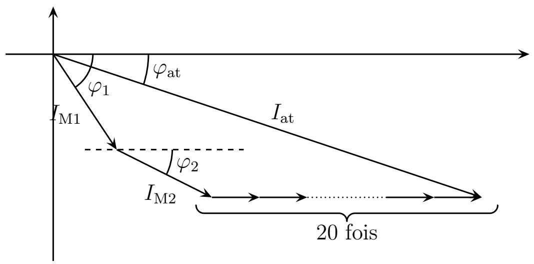
$$\boxed{\mathfrak{Re}(\underline{Y_{\text{eq}}}) = \frac{20}{R} + Y_1\, \cos\varphi_1 + Y_2\, \cos\varphi_2} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathfrak{Im}(\underline{Y_{\text{eq}}}) = Y_1\, \sin\varphi_1 + Y_2\, \sin\varphi_2}$$

Numériquement $\boxed{\textbf{A.N. :}\ I_{\text{at,eff}} = 67{,}94274\ \text{A}}$.

En prenant $\underline{u}(t)$ comme origine des phases et φ_{at} le facteur de puissance de l'ensemble de l'installation, nous $\varphi_{\text{at}} = \arg \underline{i_{\text{at}}}$, soit $\varphi_{\text{at}} = \underbrace{\arg \underline{u}}_{=0} + \arg \underline{Y_{\text{at}}}$, d'où $\boxed{\cos\varphi_{\text{at}} = \dfrac{\mathfrak{Re}(\underline{Y_{\text{eq}}})}{Y_{\text{eq}}} = 0{,}7806522}$.

➨ **Vision** FRESNEL

Étant donné que tout est en parallèle, nous allons faire une construction de FRESNEL en intensité.



Les calculs après sont identiques à la version en notation complexe car (en module) :

$$I_{\text{M1}} = Y_{\text{M1}}\, U_{\text{m}} \qquad I_{\text{M2}} = Y_{\text{M2}}\, U_{\text{m}} \qquad I_{\text{lampe}} = Y_{\text{lampe}}\, U_{\text{m}}$$

2. ➨ **Version complexe.**

Trouver un facteur de puissance c'est trouver une certaine caractéristique d'un dipôle, ici le dipôle constitué de l'atelier en parallèle avec un condensateur. Il va donc falloir se concentrer sur l'impédance, ou plutôt l'admittance puisque l'association est parallèle, équivalente.

Notons $\cos\varphi_0$ le nouveau facteur de puissance recherché. Nous savons que nous avons, en notant $\underline{Y_{\text{éq}}}$ le dipôle équivalent à l'association parallèle de l'atelier et du condensateur : $\cos\varphi_0 = \dfrac{\mathfrak{Re}(\underline{Y_{\text{éq}}})}{Y_{\text{éq}}}$.

Déterminons $\underline{Y_{\text{éq}}}$.

En mettant C en parallèle avec l'installation, nous avons : $\underline{Y_{\text{eq}}} = \underline{Y_{\text{at}}} + \text{j}\, C\, \omega$, d'où :

$$\mathfrak{Re}(\underline{Y_{\text{éq}}}) = \mathfrak{Re}(\underline{Y_{\text{at}}}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Im}(\underline{Y_{\text{eq}}}) = \mathfrak{Im}(\underline{Y_{\text{at}}}) + C\, \omega$$

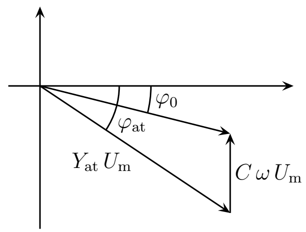
Ainsi $\cos\varphi_0 = \dfrac{\mathfrak{Re}(\underline{Y_{\text{eq}}})}{\sqrt{\mathfrak{Re}^2(\underline{Y_{\text{eq}}}) + \mathfrak{Im}^2(\underline{Y_{\text{eq}}})}}$.

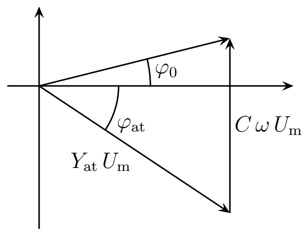
En isolant C nous trouvons $C = \dfrac{1}{2\,\pi\, f}\left(-\mathfrak{Im}(\underline{Y_{\text{at}}}) \pm \mathfrak{Re}(\underline{Y_{\text{at}}})\sqrt{1-\cos^2\varphi_0}\right)$. Le signe ± vient de l'étape où nous prenons la racine carrée.

Des deux solutions numériques : $C = 8{,}433356 \times 10^{-4}$ F et $\boxed{C = 3{,}465047 \times 10^{-4}\ \text{F}}$ nous gardons celle nécessitant une capacité plus faible.

➨ **Vision en** FRESNEL

L'association atelier / condensateur étant en parallèle, faisons une construction de FRESNEL en intensité.





Nous pouvons constater qu'il existe deux valeurs possibles pour C permettant de réaliser un facteur de qualité de φ_0.

Exercice 12

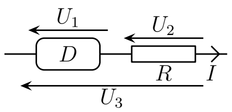
1. *Analyse physique. Le circuit est en RSF et le résultat va dépendre de U_1, U_2, U_3 et R. Il ne dépendra pas de ω bien que cela soit* a priori *possible pour deux raisons : déjà il n'y a pas de bobines ou de condensateurs dont l'impédance s'écrit avec un ω mais aussi d'un point dimensionnel ce n'est pas possible.*

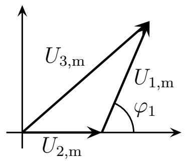
Analyse technique. Déterminer la puissance reçue par un dipôle revient à déterminer son impédance ou, du moins, une partie de son impédance (l'argument). Normalement l'impédance est « donnée » avec la source est c'est à nous de détermnier U_1 et U_2. Ici l'impédance n'est pas donnée, nous la recherchons, MAIS nous avons deux contraintes : U_1 et U_2. Deux contraintes, deux inconnues, ça devrait passer. Maintenant, quelle approche ? La notation complexe va marcher, forcément. Mais ici FRESNEL *fonctionnera bien aussi étant donné que les dipôles sont associés en série.*

➨ **Version** FRESNEL

Pour ne pas confondre les amplitudes et les valeurs efficaces, nous noterons U_1, U_2 et U_1 les valeurs lues sur les voltmètres (donc des valeurs efficaces) et $U_{1,\text{m}}$, $U_{2,\text{m}}$ et $U_{1,\text{m}}$ les amplitudes.

Les dipôles étant en série, faisons une construction de FRESNEL en tension. L'intensité est naturellement prise comme origine des phases.





Nous cherchons $P = U_1\,I_{\text{eff}}\,\cos\varphi_1$. Or $I_{\text{eff}} = \dfrac{U_2}{R}$ et ainsi $P = \dfrac{U_1\,U_2}{R}\,\cos\varphi_1$. Il ne reste qu'à déterminer $\cos\varphi_1$ grâce à la construction ci-dessus.

Géométriquement, nous voyons que nous avons :

$$\vec{u}_3 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad\rightsquigarrow\quad \vec{u}_3{}^2 = \left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right)^2 \quad\rightsquigarrow\quad U_{3,\text{m}}{}^2 = U_{1,\text{m}}{}^2 + U_{2,\text{m}}{}^2 + 2\,U_{1,\text{m}}\,U_{2,\text{m}}\,\cos\varphi_1$$

En divisant par 2, de manière à faire apparaître des valeurs efficaces :

$$U_3{}^2 = U_1{}^2 + U_2{}^2 + 2\,U_1\,U_2\,\cos\varphi_1 \quad\rightsquigarrow\quad \cos\varphi_1 = \frac{U_3{}^2 - U_1{}^2 - U_2{}^2}{2\,U_1\,U_2}$$

En introduisant ce résultat dans l'expression de P, nous arrivons à $\boxed{P = \dfrac{U_3{}^2 - U_1{}^2 - U_2{}^2}{2\,R}}$.

➨ **Version complexe.**

Travaillons en amplitude complexe sans perdre de vu que, pour calculer la puissance reçue par le dipôle il faut calculer son impédance $\underline{Z}$. Nous avons ainsi :

$$\underline{U_{3,\text{m}}} = \underline{U_{2,\text{m}}} + \underline{U_{1,\text{m}}} \qquad \underline{Z} = \frac{\underline{U_{1,\text{m}}}}{\underline{I_{\text{m}}}} \qquad \text{et} \qquad \underline{U_{2,\text{m}}} = R\,\underline{I_{\text{m}}}$$

De là, nous en déduisons d'abord $\underline{Z} = R\,\dfrac{\underline{U_{1,\text{m}}}}{\underline{U_{2,\text{m}}}}$ et $Z = R\,\dfrac{U_{1,\text{m}}}{U_{2,\text{m}}}$.

Comme $\underline{Z} = Z\,\text{e}^{\text{j}\,\varphi}$, nous avons aussi :

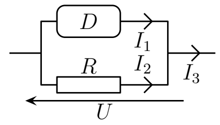
$$\underline{U_{3,\text{m}}} = \left(\frac{\underline{Z}}{R} + 1\right)\underline{U_{2,\text{m}}} = \left(\frac{U_{1,\text{m}}}{U_{2,\text{m}}}\,\text{e}^{\text{j}\,\varphi} + 1\right)\underline{U_{2,\text{m}}} \quad\rightsquigarrow\quad U_{3,\text{m}}{}^2 = U_{2,\text{m}}{}^2\left(1 + \frac{U_{1,\text{m}}{}^2}{U_{2,\text{m}}{}^2} + 2\,\frac{U_{1,\text{m}}}{U_{2,\text{m}}}\,\cos\varphi\right)$$

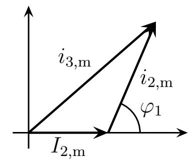
De là, nous en déduisons $\cos\varphi = \dfrac{U_{3,\text{m}}{}^2 - U_{2,\text{m}}{}^2 - U_{1,\text{m}}{}^2}{2\,U_{1,\text{m}}\,U_{2,\text{m}}}$ et le reste est identique.

$\boxed{2.}$ Comme à la question précédente, notons I_1, I_2 et I_3 les valeurs efficaces lues sur les ampèremètres et $I_{1,\text{m}}$, $I_{2,\text{m}}$ et $I_{3,\text{m}}$ les amplitudes.

➨ **Version** FRESNEL

Les dipôles étant en parallèle, nous allons faire une construction de FRESNEL en intensité en choisissant la tension $u(t)$ comme origine des phases.





Nous cherchons $P = U_{\text{eff}}\,I_1\,\cos\varphi_1$. Comme $U_{\text{eff}} = R\,I_2$, cela revient à chercher $P = R\,I_1\,I_2\,\cos\varphi_1$. Avec la construction de FRESNEL représentée ci-dessus, nous pouvons voir que nous avons

$$\vec{\imath}_3 = \vec{\imath}_1 + \vec{\imath}_2 \quad\rightsquigarrow\quad \vec{\imath}_3{}^2 = \left(\vec{\imath}_1 + \vec{\imath}_2\right)^2 \quad\rightsquigarrow\quad I_{3,\text{m}}{}^2 = I_{1,\text{m}}{}^2 + I_{2,\text{m}}{}^2 + 2\,I_{1,\text{m}}\,I_{2,\text{m}}\,\cos\varphi_1$$

En divisant par 2 de manière à faire apparaître des valeurs efficaces :

$$I_3{}^2 = I_1{}^2 + I_2{}^2 + 2\,I_1\,I_2\,\cos\varphi_1 \quad\rightsquigarrow\quad \cos\varphi_1 = \frac{I_3{}^2 - I_1{}^2 - I_2{}^2}{2\,I_1\,I_2}$$

Et avec l'expression de la puissance, nous obtenons $\boxed{P = \dfrac{R}{2}\left(I_3{}^2 - I_1{}^2 - I_2{}^2\right)}$.

➨ **Version complexe**

C'est l'exact analogue de la question précédente. Sauf que maintenant il faut plutôt travailler en intensité qu'en tension et, donc, avec l'admittance qu'avec l'impédance.

Nous avons tout d'abord les lois :

$$\underline{I_{3,\text{m}}} = \underline{I_{1,\text{m}}} + \underline{I_{2,\text{m}}} \qquad \underline{I_{2,\text{m}}} = \frac{\underline{U_{\text{m}}}}{R} \qquad \underline{Y} = \frac{\underline{I_{1,\text{m}}}}{\underline{U_{\text{m}}}}$$

De là, nous en tirons $\underline{Y} = \dfrac{1}{R}\,\dfrac{\underline{I_{1,\text{m}}}}{\underline{I_{2,\text{m}}}}$ et $Y = \dfrac{1}{R}\,\dfrac{I_{1,\text{m}}}{I_{2,\text{m}}}$.

Ainsi, avec $\underline{Y} = Y\,\text{e}^{-\text{j}\,\varphi}$, nous avons :

$$\underline{I_{3,\text{m}}} = \left(\underline{Y}\,R + 1\right)\,\underline{I_{2,\text{m}}} = \left(\frac{I_{1,\text{m}}}{I_{2,\text{m}}}\,\text{e}^{-\text{j}\,\varphi} + 1\right)\underline{I_{2,\text{m}}} \quad\rightsquigarrow\quad I_{3,\text{m}}{}^2 = I_{2,\text{m}}{}^2\left(1 + \frac{I_{1,\text{m}}{}^2}{I_{2,\text{m}}{}^2} + 2\,\frac{I_{1,\text{m}}}{I_{2,\text{m}}}\,\cos\varphi\right)$$

De là, nous en déduisons $\cos\varphi = \dfrac{I_{3,\text{m}}{}^2 - I_{2,\text{m}}{}^2 - I_{1,\text{m}}{}^2}{2\,I_{1,\text{m}}\,I_{2,\text{m}}}$ et le reste est identique.