

Filtres

☼ Le cours

1. En notant $\omega_{réf1}$ et $\omega_{réf2}$ les deux pulsations utilisées, les abscisses s'écrivent :

$$x_1 = \log \frac{\omega}{\omega_{réf1}} \quad \text{et} \quad x_2 = \log \frac{\omega}{\omega_{réf2}}$$

Et ainsi :

$$x_2 = \log \left(\frac{\omega}{\omega_{réf1}} \times \frac{\omega_{réf1}}{\omega_{réf2}} \right) = \log \frac{\omega}{\omega_{réf1}} + \log \frac{\omega_{réf1}}{\omega_{réf2}} = x_1 + C^{te}$$

Dans ces conditions, les abscisses des deux graphes envisagés diffèrent par une simple constante : les deux graphiques obtenus sont donc identiques à une translation horizontale près.

Quelle que soit la pulsation de référence envisagée (et donc la translation horizontale effectuée) un filtre passe-bas reste un filtre passe-bas. Physiquement il reste le même, il n'y a que sa représentation graphique qui change.

2. Pour les filtres idéaux, la fonction de transfert peut être rigoureusement nulle sur une plage qui dépend du filtre considéré. Et comme le gain en décibels est tel que $G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$, à une amplification nulle correspond un gain en décibels de $-\infty$, ce qui n'est guère pratique à représenter. C'est d'ailleurs pour cette raison que le filtre coupe bande se représente mal dans le diagramme de BODE.

☼ Exercice 1

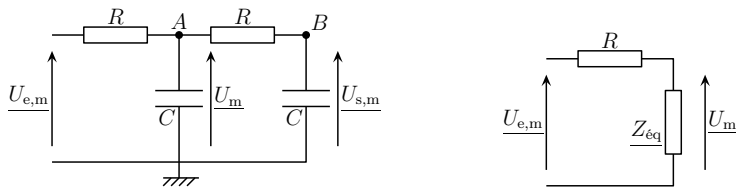
Analyse physique :

- c'est un filtre donc RSF
- le circuit est linéaire
- grandeurs pertinentes R, C (composants) U_e et ω (contraintes)
- comme le circuit est linéaire, la fonction de transfert ne dépendra pas de U_e

Analyse technique :

- circuit linéaire en RSF : notation complexe
- approche nodale puisque nous cherchons une tension en fonction d'une autre tension. Il y a deux potentiels inconnus, écrivons deux lois des nœuds en terme de potentiels.

► Détermination de la fonction de transfert



La loi des nœuds en terme de potentiel donne, en A :

$$\frac{U_{e,m} - U_m}{R} + \frac{0 - U_m}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{U_{s,m} - U_m}{R} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad U_m(2 + jRC\omega) = U_{s,m} + U_{e,m}$$

La loi des nœuds en terme de potentiels donne, en B :

$$\frac{U_{s,m} - 0}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{U_m - U_{s,m}}{R} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad U_m = (1 + jRC\omega) U_{s,m}$$

En remplaçant U_m nous obtenons :

$$U_{s,m}(2 + jRC\omega)(1 + jRC\omega) = U_{s,m} + U_{e,m} \quad \rightsquigarrow \quad U_{s,m} = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2} \times U_{e,m}$$

Finalement :
$$\boxed{T(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 3j\frac{\omega}{\omega_0}} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

► Autre méthode. Il est possible de voir le circuit comme un diviseur de tension mais attention au diviseur de tension entre U_m et $U_{e,m}$.

Nous avons ainsi tout d'abord
$$U_{s,m} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} \times U_m = \frac{1}{1 + jRC\omega} \times U_m.$$

Ensuite, à l'aide du dipôle équivalent représenté ci-dessus, nous reconnaissons un deuxième diviseur de tension entre U_m et $U_{e,m}$:
$$U_m = \frac{Z}{Z + R} \times U_{e,m}.$$

Comme $Z = C \parallel (R \oplus C) = (\dots) = \frac{Z}{1 + jRC\omega}$, nous obtenons en remplaçant Z et après

simplifications :
$$U_m = \frac{1 + jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2} \times U_{e,m}.$$
 En remplaçant U_m dans la première expression obtenue, nous arrivons bien, après simplifications au même résultat que précédemment.

► Comportement asymptotique

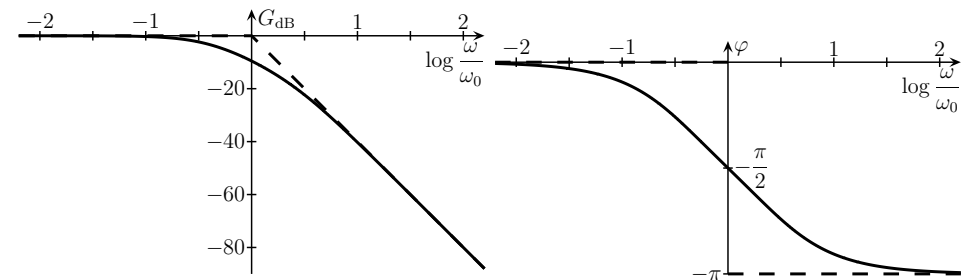
► Pour $\omega \rightarrow 0$. Nous avons $T(j\omega) \sim 1$ et ainsi
$$\begin{cases} G_{dB(\omega)} \rightarrow 0 \\ \varphi(\omega) \rightarrow 0 \end{cases}.$$
 En BF, l'asymptote est une droite horizontale d'ordonnée nulle.

► Pour $\omega \rightarrow \infty$. Nous avons $T(j\omega) \sim -\frac{1}{\omega^2}$ et ainsi
$$\begin{cases} G_{dB(\omega)} \sim -20 \log \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sim -40 \log \frac{\omega}{\omega_0} \\ \varphi(\omega) \rightarrow -\pi \end{cases}.$$

En HF, l'asymptote est une droite de pente -40 dB/déc et d'ordonnée à l'origine nulle.

► Valeur en ω_0 . $T(j\omega_0) = \frac{1}{3j}$, d'où $G_{dB(\omega_0)} = -20 \log 3 \simeq -9,54$ dB et $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$.

► Tracés



► **Recherche de la pulsation de coupure.** Comme $T_{\max} = 1$, la pulsation de coupure ω_c est la pulsation telle que : $|\underline{T}(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Cela permet d'aboutir à l'équation : $\frac{\omega^4}{\omega_0^4} + 7 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = 0$.

En notant $x \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite et $X \stackrel{\text{not}}{=} x^2$, cette équation devient $X^2 + 7X - 1 = 0$ qui a pour solution $X_1 = \frac{-7 + \sqrt{53}}{2} > 0$ et $X_2 = \frac{-7 - \sqrt{53}}{2} < 0$. En ne gardant que la solution positive, nous arrivons à $x = \sqrt{\frac{-7 + \sqrt{53}}{2}}$, soit $\omega_c = \omega_0 \sqrt{\frac{-7 + \sqrt{53}}{2}} \simeq 0,374 \omega_0$.

✿ **Exercice 2**

1. En statique, c'est-à-dire en régime continu, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts.

Ainsi, dans les deux cas, nous reconnaissons un diviseur de tension avec $U_{s1} = U_{s2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_e$.

2. **Analyse physique :**

- dans les deux cas, nous avons un circuit linéaire en RSF
- dans les deux cas, les grandeurs pertinentes sont R_1, R_2, C (composants) ainsi que U_e et ω (contraintes)
- dans les deux cas, la fonction de transfert ne va pas dépendre de U_e à cause de la linéarité du circuit

Analyse technique :

- dispositif linéaire en RSF : notation complexe
- dans les deux cas nous avons un potentiel inconnu : soit nous pouvons faire une approche nodale et une loi des nœuds en terme de potentiels, soit nous pouvons faire une approche maillère avec un diviseur de tension. Au choix, vraiment.

► **Premier circuit**

Nous reconnaissons un diviseur de tension :

$$\underline{U}_{s1,m} = \frac{(R_2 // C)}{(R_2 // C) \oplus R_1} \times \underline{U}_{e,m} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{U}_{s1,m} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{1}{1 + \frac{j R_1 R_2 C \omega}{R_1 + R_2}} \times \underline{U}_{e,m}$$

Ainsi :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{A}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2}$$

► **Deuxième circuit**

Nous reconnaissons aussi un diviseur de tension :

$$\underline{U}_{s1,m} = \frac{R_2}{R_2 \oplus (R_1 // C)} \times \underline{U}_{e,m} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{U}_{s2,m} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{1 + j R_1 C \omega}{1 + \frac{j R_1 R_2 C \omega}{R_1 + R_2}} \times \underline{U}_{e,m}$$

Ainsi :

$$\underline{T}(j\omega) = A \times \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{1}{C R_1} < \omega_0$$

3. Diagrammes de BODE.

► **Premier circuit**

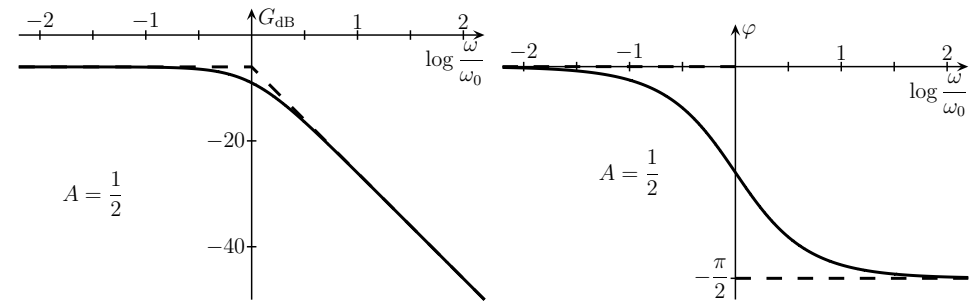
→ **Asymptotes en 0.** Lorsque $\omega \rightarrow 0$, $\underline{T}(j\omega) \sim A$, d'où $\begin{cases} G_{dB}(\omega) \rightarrow 20 \log A < 0 \quad (\text{car } A < 1) \\ \varphi(\omega) \rightarrow 0 \end{cases}$

L'asymptote pour le gain en décibel est une droite horizontale d'ordonnée $20 \log A$

→ **Valeurs en ω_0 .** On a $\underline{T}(j\omega_0) = \frac{A}{1 + j}$, d'où $\begin{cases} G_{dB}(\omega_0) = 20 \log A - 3,0 \text{ dB} \\ \varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

→ **Asymptotes en $+\infty$.** Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $\underline{T}(j\omega) \sim -j A \frac{\omega_0}{\omega}$, d'où $\begin{cases} G_{dB}(\omega) \sim 20 \log A - 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} \\ \varphi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

L'asymptote pour le gain en décibel est une droite de pente -20 dB/déc et d'ordonnée à l'origine $20 \log A$



► **Deuxième circuit**

→ **Asymptotes en 0.** Lorsque $\omega \rightarrow 0$, $\underline{T}(j\omega) \sim A$, d'où $\begin{cases} G_{dB}(\omega) \sim 20 \log A < 0 \quad (\text{car } A < 1) \\ \varphi(\omega) \rightarrow 0 \end{cases}$

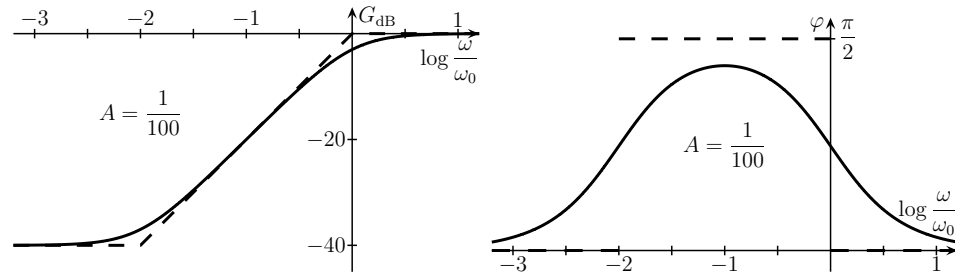
L'asymptote pour le gain en décibel est une droite horizontale d'ordonnée $20 \log A$

→ **Asymptotes en $+\infty$.** Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $\underline{T}(j\omega) \sim A \frac{\omega_0}{\omega_1}$, d'où $\begin{cases} G_{dB}(\omega) \sim 20 \log A \frac{\omega_0}{\omega_1} \\ \varphi(\omega) \rightarrow 0 \end{cases}$

L'asymptote pour le gain en décibel est une droite horizontale d'ordonnée à l'origine $20 \log A \frac{\omega_0}{\omega_1}$.

→ Si $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_0$. Lorsque $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_0$, alors :

$$\underline{T}(j\omega) \sim j A \frac{\omega}{\omega_1} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} G_{dB}(\omega) \rightarrow 20 \log A + 20 \log \frac{\omega}{\omega_1} = 0 \quad (\text{car } A = \frac{\omega_1}{\omega_0}) \\ \varphi(\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



☛ *Remarque* : une fois de plus nous pouvons constater que le diagramme réel en phase colle moins aux asymptotes que le diagramme réel du gain en décibels.

☛ **Exercice 3**

1. (a) Comme aucun courant ne circule dans le résistor de droite, nous pouvons dire que le résistor de gauche et le condensateur sont en série. Dans ces conditions, nous pouvons utiliser un diviseur de tension en remarquant que la tension aux bornes du condensateur n'est autre que V_s :

$$V_s = \frac{1}{\frac{1}{jC\omega} + R} \times V_e \quad \rightsquigarrow \quad T(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

1. (b) En notant $\omega_0 \stackrel{\text{not}}{=} \frac{1}{RC}$ et $x \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega}{\omega_0}$, nous avons :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log |T(j\omega)| = -20 \log \left| 1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right| \quad \rightsquigarrow \quad G_{dB}(\omega) = -10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

La fréquence de coupure f_c est telle que la pulsation correspondante vérifie $|T(j\omega_c)| = \frac{T_{\max}}{\sqrt{2}}$.

Or ici $T_{\max} = 1$, donc l'équation pour déterminer ω_c s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad f_c = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

2. (a) ► **Fonction de transfert**

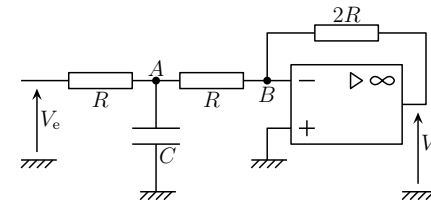
Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels en A :

$$\frac{V_{e,m} - V_A}{R} + \frac{0 - V_A}{1} + \frac{V_- - V_A}{R} = 0$$

Or $V_- = V_+$ (AO idéal en régime linéaire) et $V_+ = 0$ (montage) d'où $V_A = \frac{V_{e,m}}{2 + jRC'\omega}$.

La loi des nœuds en terme de potentiels s'écrit en B :

$$\frac{V_A - 0}{R} + \frac{V_{s,m} - 0}{2R} + 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_{s,m} = -2V_A$$



En rassemblant les deux résultats nous obtenons :

$$V_{s,m} = -2V_A = -\frac{2V_{e,m}}{2 + jRC'\omega} \quad \rightsquigarrow \quad T'(j\omega) = -\frac{1}{1 + j\frac{RC'\omega}{2}}$$

► **Gain et fréquence de coupure**

En notant $\omega'_0 = \frac{2}{RC'}$ et $x' = \frac{\omega}{\omega'_0}$, nous constatons que la fonction de transfert a une écriture strictement identique à la question précédente : $T'(j\omega) = \frac{1}{1 + jx'}$.

Par conséquent, nous pouvons reprendre les mêmes résultats :

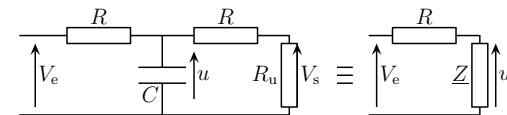
$$G'_{dB}(\omega) = -10 \log(1 + x'^2) \quad \text{et} \quad f'_c = \frac{\omega'_0}{2\pi}$$

2. (b) Pour avoir $f_c = f'_c$, il faut $\omega_0 = \omega'_0$, soit : $C' = 2C$.

3. (a) Tensions aux bornes de R_u .

► **Premier circuit.** Comme la fonction de transfert du premier circuit a été trouvée en considérant que l'intensité de sortie était nulle et comme ce n'est plus le cas lorsqu'une résistance est branchée en sortie, nous sommes obligé de trouver la nouvelle fonction de transfert en considérant la présence de R_u .

Le circuit est équivalent au schéma ci-dessous où R et $Z = (R + R_u) // C$ forment un diviseur de tension. Nous avons donc $U = \frac{Z}{Z + R} \times V_{e,m}$.



Comme R (celle de droite dans le schéma initial) est en série avec R_u nous avons aussi un diviseur de tension, ce qui donne $V_{s,m} = \frac{R_u}{R + R_u} \times U$.

En regroupant, nous obtenons $V_{s,m} = \frac{R_u}{R + R_u} \times \frac{Z}{Z + R} V_{e,m}$ et comme $Z = \frac{R + R_u}{1 + j(R + R_u)C\omega}$

nous arrivons, après simplifications, à : $H(j\omega) = \frac{R_u}{2R + R_u + jR(R + R_u)C\omega}$.

► **Deuxième circuit**

La présence de la résistance R_u ne change rien quant à la démonstration effectuée dans la question précédente car les loi des nœuds écrites aux points A et B sont inchangées. La fonction de transfert est donc la même.

3. (b) Le filtre actif est préférable au filtre passif parce que la sortie est totalement indépendante de ce avec quoi on l'utilise (R_u). L'inconvénient est que cela rajoute les défauts de l'AO (slew rate, limitation en intensité, ...).

✳ **Exercice 4**

1. Utilisons la loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse de l'AO :

$$\frac{V_e - V_-}{2R} + \frac{V_s - V_-}{2R} + 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_- = \frac{V_s + V_e}{2}$$

Et la loi des nœuds en terme de potentiels à l'entrée non inverseuse :

$$\frac{V_e - V_+}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{0 - V_+}{R} + 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_+ = \frac{jRC\omega V_e}{1 + jRC\omega}$$

Comme $V_+ = V_-$ (AO idéal en régime linéaire), cela donne :

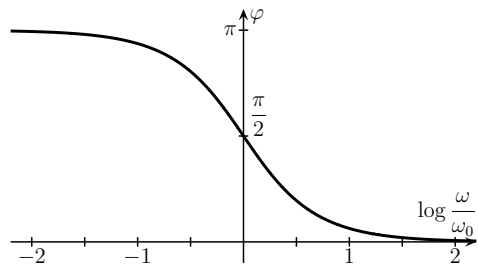
$$V_s + V_e = \frac{2jRC\omega}{1 + jRC\omega} \times V_e \quad \rightsquigarrow \quad V_s = -\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \times V_e \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{T(j\omega) = -\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}}$$

2. Nous avons $|T(j\omega)| = \left| \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \right|$ d'où nous tirons immédiatement : $\boxed{|T(j\omega)| = 1}$.

De plus :

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg T(j\omega) = \pm\pi + \arg(1 - jRC\omega) - \arg(1 + jRC\omega) \\ &= \pm\pi + 2 \arg(1 - jRC\omega) = \pm\pi - 2 \arctan(RC\omega) \end{aligned}$$

Pour avoir $\varphi(\omega)$ compris entre $-\pi$ et $+\pi$, il faut : $\boxed{\varphi(\omega) = \pi - 2 \arctan(RC\omega)}$.

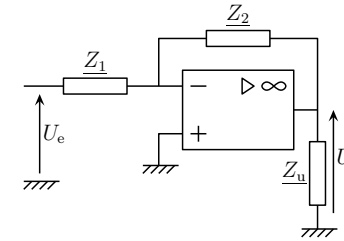


3. La fonction de transfert de ce montage ayant un module constant, ce filtre n'a pour rôle que d'introduire un déphasage entre la tension d'entrée et la tension de sortie, c'est bien un déphaseur.

✳ **Exercice 5**

1. Le circuit est équivalent au schéma ci-dessous avec :

$$\underline{Z}_1 = R_1 // C_1 = \frac{R_1}{1 + jR_1 C_1 \omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = R_2 // C_2 = \frac{R_2}{1 + jR_2 C_2 \omega}$$



Il s'agit d'un montage amplificateur inverseur généralisé dont la loi de fonctionnement est :

$$\frac{U_s}{U_e} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{1 + jR_1 C_1 \omega}{1 + jR_2 C_2 \omega}$$

Et nous trouvons :

$$\boxed{H(j\omega) = H_0 \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{H_0 = -\frac{R_2}{R_1}}; \quad \boxed{\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}}$$

2. Diagramme de BODE.

► **Étude en $\omega \rightarrow 0$.**

Quand $\omega \rightarrow 0$, $H(j\omega) \sim H_0$ et $G_{dB}(\omega) \rightarrow 20 \log |H_0|$.

Nous cherchons à avoir $G_{dB} \rightarrow +20$ dB, soit $20 = 20 \log |H_0|$. Il faut donc :

$$|H_0| = 10 \quad \text{et} \quad R_2 = 10 R_1 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{R_2 = 100 \text{ k}\Omega}$$

► **Étude en $\omega \rightarrow \infty$**

Quand $\omega \rightarrow \infty$, $H(j\omega) \sim H_0 \frac{\omega_2}{\omega_1}$ et $G_{dB}(\omega) \sim 20 \log \left| H_0 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right|$.

Nous cherchons à avoir $G_{dB} \rightarrow +6$ dB, soit $6 = 20 \log |H_0|$, et comme $3 \simeq 20 \log \sqrt{2}$, il faut donc :

$$\left| H_0 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right| = 2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{R_2}{R_1} \times \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2} = 2 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{C_1 = 2 C_2}$$

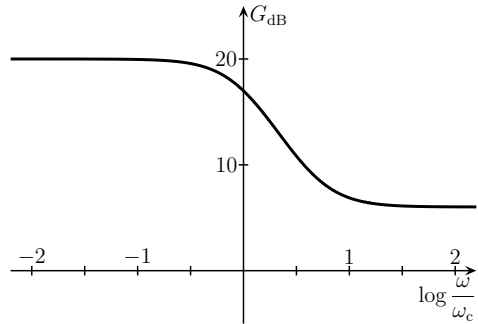
► **Étude à $\omega = \omega_c$**

Ici $H_{\max} = |H_0|$, donc nous cherchons ω_c telle que :

$$T(\omega_c) = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} = |H_0| \sqrt{\frac{1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_1^2}}{1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_2^2}}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{\omega_2^2} - 2 \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_c^2}$$

En utilisant la relation (✳), l'équation devient $\frac{1}{\omega_2^2} - 2 \frac{4}{H_0^2 \omega_2^2} = \frac{1}{\omega_c^2}$ qui a alors pour solution :

$$\omega_2 = \omega_c \sqrt{1 - \frac{8}{H_0^2}} \rightsquigarrow C_2 = \frac{1}{R_2 \omega_c \sqrt{1 - \frac{8}{H_0^2}}}$$



Finalement :

$$C_2 = \underline{1,659305 \text{ nF}}$$

et

$$C_1 = \underline{3,318610 \text{ nF}}$$

❁ Exercice 6

► Fonction de transfert

Comme R_1 et R_2 sont en série, nous pouvons utiliser la formule du diviseur de tension et ainsi :

$$\underline{V_-} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times \underline{V_s} = \beta \underline{V_s}$$

De plus, par définition de $\underline{\mu}$: $\underline{U_s} = \underline{\mu(j\omega)} \times \underline{\varepsilon} = \underline{\mu(j\omega)} (\underline{U_e} - \beta \underline{V_s})$.

Nous arrivons alors à $\frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{\underline{\mu}}{1 + \beta \underline{\mu}}$ ce qui donne, en utilisant l'expression de $\underline{\mu(j\omega)}$:

$$\underline{H(j\omega)} = \frac{\frac{\mu_0}{1 + \beta \mu_0}}{1 + j \frac{\omega}{1 + \beta \mu_0}}$$

où $x \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega}{\omega_0}$

Il s'agit de la forme canonique d'un filtre **passé-bas** : $\underline{H(j\omega)} = \frac{H_0}{1 + jx}$ avec $H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \beta \mu_0}$.

En suivant la même démarche que dans cours, nous pouvons trouver que la pulsation de coupure est $\omega_c = \omega_0 (1 + \beta \mu_0)$.

☛ Remarques :

→ Nous retrouve bien la relation d'un amplificateur non inverseur pour un AO idéal lorsque l'on fait $\mu_0 \rightarrow \infty$ et $\omega_0 \rightarrow \infty$ car alors $\underline{H(j\omega)} \rightarrow \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

→ Nous constatons de plus que le produit « gain - bande passante » est constant, *ie.* indépendant des valeurs de R_1 et R_2 : $H_0 \omega_c = \omega_0 \mu_0$.

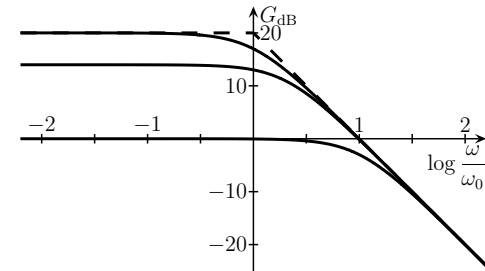
► Diagrammes de BODE

→ Asymptotes en $\omega \rightarrow 0$. Lorsque $\omega \rightarrow 0$, $\underline{H} \sim H_0$. Ainsi $G \sim H_0 \sim 20 \log \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$.

→ Asymptotes en $\omega \rightarrow \infty$. Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $\underline{H} \sim \frac{\mu_0}{jx}$. Ainsi $G \sim 20 \log \mu_0 - 20 \log x$.

Nous constatons que l'asymptote en hautes fréquences, contrairement à celle en basses fréquences, est identique pour toutes les valeurs d'amplification.

→ Tracés. Les diagrammes ci-dessous diffèrent par la valeur du coefficient d'amplification β (1, 5 et 10).



❁ Exercice 7

1. Nous reconnaissons un diviseur de tension entre l'entrée inverseuse et la sortie :

$$\underline{V_-} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times \underline{U_s} = \frac{\underline{U_s}}{A_0}$$

De plus le fonctionnement de l'AO est tel que : $\underline{U_s} = \underline{\mu} \underline{\varepsilon} = \underline{\mu} (\underline{V_+} - \underline{V_-}) = \underline{\mu} \left(\underline{V_e} - \frac{\underline{U_s}}{A_0} \right)$.

Nous avons donc $\left(\frac{1}{\underline{\mu}} + \frac{1}{A_0} \right) \underline{U_s} = \underline{U_e}$ soit, en remplaçant $\underline{\mu}$:

$$\left(\frac{1}{\underline{\mu_0}} + \frac{1}{A_0} \right) u_s(t) + \frac{1}{\mu_0 \omega_0} \frac{du_s(t)}{dt} = u_e(t)$$

2. Avec $\varepsilon(t)$.

► Fonction de transfert

Nous avons, par définition : $\underline{\varepsilon} = \underline{V_+} - \underline{V_-} = \underline{U_e} - \frac{\underline{U_s}}{A_0} = \underline{U_e} - \frac{\underline{\mu} \underline{\varepsilon}}{A_0}$ et ainsi : $\underline{H_E} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{\mu}}{A_0}}$.

Cela donne, en remplaçant $\underline{\mu}$ par son expression et en réarrangeant : $\underline{H_E} = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{\mu_0}{A_0} + 1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$.

► Équation différentielle associée

En effectuant le produit en croix de la fonction de transfert et en associant $\frac{d}{dt} \longleftrightarrow \times(j\omega)$, nous

$$\text{arrivons à } \left(\frac{\mu_0}{A_0} + 1 \right) \varepsilon(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = u_e(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{du_e(t)}{dt}$$

3. Fonctions du temps.

► **Expression de $\varepsilon(t)$**

Comme $\underline{\varepsilon} \left(\kappa + j \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \underline{u}_e \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right)$ où $\kappa \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\mu_0}{A_0} + 1$ l'équation différentielle reliant $\varepsilon(t)$ et $u_e(t)$ s'écrit : $\kappa \varepsilon(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = u_e(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{du_e(t)}{dt}$.

Ici on considère un échelon de tension, donc $\frac{du_e}{dt} = 0$ et ainsi, en simplifiant l'équation différentielle nous obtenons la solution (faire attention à la condition initiale) :

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \omega_0 \kappa \varepsilon(t) = \omega_0 E \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\varepsilon(t) = \frac{E}{\kappa} \left[1 - e^{-t/\tau} \right]} \quad \text{avec : } \tau = \frac{1}{\kappa \omega_0}$$

En considérant que le régime permanent est atteint en 5τ , cela signifie qu'ici le régime permanent est atteint au bout de la durée $T = 7,96.10^{-7}$ s. Aux échelles de temps considérées, nous pouvons dire que le régime permanent est atteint instantanément.

► **Expression de $u_s(t)$**

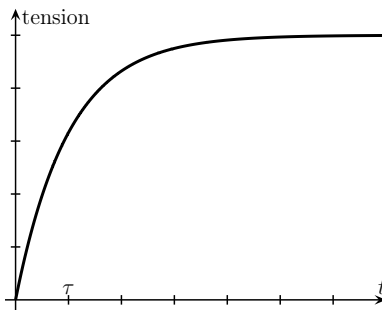
Pour ce faire, nous disposons de deux équations différentielles, une reliant $u_s(t)$ à $u_e(t)$ (cf. question 1) et l'autre reliant $u_s(t)$ à $\varepsilon(t)$ (la définition de $\underline{\mu}$). L'une et l'autre sont, *a priori*, équivalentes. Mais l'expression de $\varepsilon(t)$ trouvée provient d'une équation différentielle qui a été simplifiée à cause de la forme particulière de $u_e(t)$. L'équation reliant $u_s(t)$ à $u_e(t)$ n'a fait l'objet, elle, d'aucune simplification à quelque moment que ce soit. C'est donc cette dernière qu'il faut préférer.

Nous avons ainsi $\frac{du_s(t)}{dt} + \omega_0 \kappa u_s(t) = \mu_0 \omega_0 E$ qui a pour solution (en respectant les conditions initiales) :

$$\boxed{u_s(t) = \frac{\mu_0 E}{\kappa} \left[1 - e^{-t/\tau} \right]} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{1}{\kappa \omega_0}}$$

Comme la constante de temps est identique à celle de la tension $\varepsilon(t)$, la conclusion est identique : nous pouvons dire que le régime permanent de $u_s(t)$ est atteint instantanément.

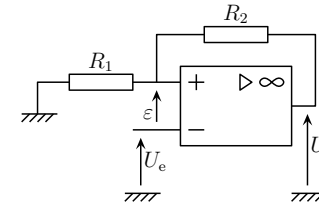
En unités arbitraires, les tracés de $\varepsilon(t)$ et de $u_s(t)$ ont la même allure représentée ci-dessous.



4. Les conditions initiales choisies ne sont pas cohérentes : si $\varepsilon(0) = 0$ alors le courant $i(0)$ circulant dans la résistance R_1 de la masse vers l'entrée inverseuse vaut $i(0) = E/R_1$ et comme $i_- = 0$ (AO idéal) nous arrivons tout de suite à $u_s(0) = A_0 u_e(0) \neq 0$.

Cela n'a guère d'importance en pratique car même si les conditions initiales ne sont pas celles utilisées, comme nous avons vu que la constante de temps faisait que le régime était atteint « instantanément » par rapport aux échelles de temps, nous pouvons parfaitement négliger cet écart entre la

tension « vraie » avec les bonnes conditions initiales et le résultat précédent dont nous savons qu'il n'est pas forcément juste.



5. L'AO est maintenant branché comme sur le schéma ci-contre.

► **Nouvelle expression de $u_s(t)$**

→ *Fonction de transfert.* Nous avons toujours

$$\underline{U}_s = \underline{\mu} \underline{\varepsilon} = \underline{\mu} (\underline{V}_+ - \underline{V}_-) = \underline{\mu} \left(\frac{1}{A_0} \underline{U}_s - \underline{U}_e \right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(-1 - j \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\mu_0}{A_0} \right) \underline{U}_s = \mu_0 \underline{U}_e$$

Ainsi $\boxed{H'(j\omega) = \frac{\mu_0}{\kappa' - j \frac{\omega}{\omega_0}}}$ avec $\boxed{\kappa' = \frac{\mu_0}{A_0} - 1}$.

→ *Équation différentielle.* Nous avons $\kappa' u_s(t) - \frac{1}{\omega_0} \frac{du_s(t)}{dt} = \mu_0 u_e(t)$, et en associant $\frac{d}{dt} \leftrightarrow \times(j\omega)$ nous

obtenons : $\boxed{\frac{du_s(t)}{dt} - \omega_0 \kappa' u_s(t) = -\omega_0 \mu_0 u_e(t)}$ (//)

► **Nouvelle expression de $\varepsilon(t)$**

→ *Fonction de transfert.* Nous avons toujours :

$$\underline{\varepsilon} = (\underline{V}_+ - \underline{V}_-) = \left(\frac{\underline{U}_s}{A_0} - \underline{U}_e \right) = \left(\frac{\underline{\mu} \underline{\varepsilon}}{A_0} - \underline{U}_e \right) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{H}'_E = \frac{1}{\underline{\mu}/A_0 - 1}$$

Et en remplaçant $\underline{\mu}$ par son expression, nous arrivons à $\boxed{H'_E(j\omega) = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}{\kappa' - j \frac{\omega}{\omega_0}}}$.

→ *Équation différentielle.* En associant $\frac{d}{dt} \leftrightarrow \times(j\omega)$ nous arrivons à :

$$\kappa' \varepsilon(t) - \frac{1}{\omega_0} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = u_e(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{du_e(t)}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{d\varepsilon(t)}{dt} - \omega_0 \kappa' \varepsilon(t) = -\omega_0 u_e(t) - \frac{du_e(t)}{dt}}$$

► **Système instable ?**

La solution de l'équation différentielle (//) est, en choisissant $u_s(t) = 0$:

$$u_s(t) = \frac{\mu_0}{\kappa'} E \left[1 - \exp \left(+ \frac{t}{\tau'} \right) \right] \quad \text{avec} \quad \tau' = \frac{1}{\omega_0 \kappa'}$$

Nous constatons que, dans ces conditions, $u_s(t) \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$. $u_s(t)$ atteindra donc la valeur limite V_{sat} et l'AO fonctionnera en régime de saturation, le système est bien instable et ne peut donc pas fonctionner en régime linéaire bien longtemps.

✿ Exercice 8

1. Entre $U_{s,m}$ et $U_{e,m}$, nous pouvons reconnaître un diviseur de tension, soit :

$$\underline{U}_{s,m} = \frac{(R//C)}{(R//C) \oplus (R \oplus C)} \times \underline{U}_{e,m} \rightsquigarrow (\dots) \rightsquigarrow \underline{U}_{s,m} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + (1 + jRC'\omega)^2} \times \underline{U}_{e,m}$$

Ainsi $\underline{T}(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 3j \frac{\omega}{\omega_0}}$ avec $\omega_0 \stackrel{\text{not}}{=} \frac{1}{RC}$.

2. Nous avons :

$$\frac{\underline{U}_{s,m}}{\underline{U}_{e,m}} = \frac{jRC\omega}{1 + (j\omega)^2 R^2 C^2 + 3(j\omega)RC} \rightsquigarrow (j\omega)^2 R^2 C^2 \underline{U}_{s,m} + 3(j\omega)RC \underline{U}_{s,m} + \underline{U}_{s,m} = (j\omega)RC \underline{U}_{e,m}$$

En associant $\frac{d}{dt} \longleftrightarrow \times(j\omega)$ nous arrivons à :

$$R^2 C^2 \frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + 3RC \frac{du_{s,m}(t)}{dt} + u_{s,m}(t) = RC \frac{du_{e,m}(t)}{dt}$$

Puis, sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du_s(t)}{dt} + \frac{1}{R^2 C^2} u_{s,m}(t) = \frac{1}{RC} \frac{du_e(t)}{dt}$$

3. Par définition, $T(\omega) = |\underline{T}(j\omega)|$. Nous avons donc

$$T(\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + 9 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \rightsquigarrow T(x) = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 9x^2}} \text{ avec } x \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega}{\omega_0}$$

Nous avons aussi par définition :

$$\varphi(\omega) = \arg[\underline{T}(\omega)] \rightsquigarrow \varphi(\omega) = \arg\left(\frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 3j \frac{\omega}{\omega_0}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 3j \frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Or $1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 3j \frac{\omega}{\omega_0} = j \left[3 \frac{\omega}{\omega_0} + j \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \right]$ d'où :

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \arg\left[3 \frac{\omega}{\omega_0} + j \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \right] \rightsquigarrow \varphi(x) = -\arctan\left(\frac{x^2 - 1}{3x}\right)$$

4. Nous avons $T(x) = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 9x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 + 9}}$.

Comme le numérateur est constant, $T(x)$ est maximum lorsque son dénominateur est minimum, i.e. pour $\left(\frac{1}{x} - x\right)^2$ minimum. C'est un nombre positif et dont le minimum est trivialement en $x = 1$.

Ainsi $T_{\max} = T(1) = \frac{1}{3}$. Dans ces conditions, $\omega_{\max} = \omega_0$, d'où $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

5. Les pulsations de coupure ω_c sont telles que $T(x_c) = \frac{T_{\max}}{\sqrt{2}}$, soit : $\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x_c} - x_c\right)^2 + 9}}$.

Après réarrangement, nous arrivons à l'équation $\left(\frac{1}{x_c} - x_c\right)^2 = 9$, soit $\frac{1}{x_c} - x_c = \varepsilon 3$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Ainsi l'équation à résoudre est $x_c^2 + \varepsilon 3x_c - 1 = 0$.

Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 13$, d'où $x_{c1} = \frac{-\varepsilon 3 + \sqrt{13}}{2}$ et $x_{c2} = \frac{-\varepsilon 3 - \sqrt{13}}{2}$.

En ne gardant que les solutions positives (car $x < 0$ correspond à $\omega < 0$ ce qui n'a pas de sens physique) $x_{c1} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \simeq 0,303$ et $x_{c2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \simeq 3,30$. Et finalement :

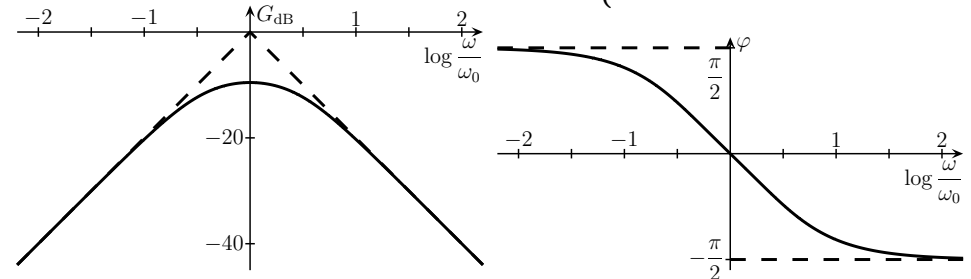
$$f_{c1} = \frac{\omega_0}{2\pi} \times \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \quad f_{c2} = \frac{\omega_0}{2\pi} \times \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad \Delta f = \frac{3\omega_0}{2\pi}$$

6. Diagrammes de BODE.

→ Asymptotes en 0. Lorsque $x \rightarrow 0$, $\underline{T}(jx) \sim jx \rightsquigarrow \begin{cases} G_{dB}(x) \sim 20 \log x \\ \varphi(x) \sim \frac{\pi}{2} \end{cases}$

→ Valeurs en $x = 1$. $\underline{T}(j) = \frac{1}{3} \rightsquigarrow \begin{cases} G_{dB}(1) = -20 \log 3 \\ \varphi(1) = 0 \end{cases}$

→ Asymptotes en ∞ . Lorsque $x \rightarrow \infty$, $\underline{T}(jx) \sim -\frac{j}{x} \rightsquigarrow \begin{cases} G_{dB}(x) \sim -20 \log x \\ \varphi \sim -\frac{\pi}{2} \end{cases}$



✿ Exercice 9

1. Analyse physique :

→ l'AO est en régime linéaire, c'est un filtre, donc RSF

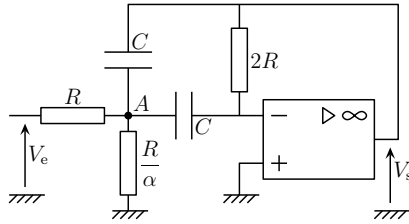
→ étant donné le circuit, la fonction de transfert devrait dépendre de R , C et α (composants) et de ω (contrainte) mais pas de U_e car le circuit est linéaire

→ dimensionnellement, nous pouvons d'ores et déjà dire que la pulsation caractéristique qui va apparaître est en $\frac{1}{RC}$

Analyse technique :

→ nous cherchons une fonction de transfert de gain en tension, le but est donc de trouver $V_{s,m}$ soit une tension : l'approche nodale nous tend les bras

→ il y a trois potentiels inconnus : en A, en V_- et en sortie de l'AO, ce qui donnera 3 lois à écrire.



L'AO est idéal et en régime linéaire donc $V_- = V_+$. Or $V_+ = 0$ donc $V_- = 0$.

La loi des nœuds en terme de potentiel en A s'écrit

$$\frac{V_e - V_A}{R} + \frac{0 - V_A}{R/\alpha} + \frac{V_s - V_A}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{0 - V_A}{\frac{1}{jC\omega}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_e + jRC\omega V_s = V_A(1 + \alpha + 2jRC\omega)$$

En B celle-ci s'écrit :

$$\frac{V_A - 0}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{V_s - 0}{2R} - 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_A = -\frac{V_s}{2jRC\omega}$$

En remplaçant dans l'expression précédente, nous arrivons, après quelques manipulations à :

$$\underline{H_1(j\omega)} = -\frac{2jRC\omega}{1 + \alpha + 2jRC\omega + 2(jRC\omega)^2} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{H_1(j\omega)} = -\frac{1}{1 + \frac{1+\alpha}{2jRC\omega} + jRC\omega}$$

Il s'agit d'un filtre **passse-bande** car $|\underline{H_1(j\omega)}| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ et $|\underline{H_1(j\omega)}| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$.

En reprenant la forme canonique vue en cours $\underline{H(j\omega)} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)}$ et en identifiant,

nous trouvons $\underline{H_0} = -1$, $\frac{Q}{\omega_p} = RC$ et $Q\omega_p = \frac{1+\alpha}{2RC}$.

Cela donne le facteur de qualité et la pulsation centrale suivants :

$$Q = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} = 2,34521 \quad \text{et} \quad \omega_p = \frac{1}{RC} \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} = 14,6575 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{ou} \quad f_p = 2,33282 \text{ kHz}$$

☛ Remarque : pour identifier, mieux vaut développer la forme canonique et identifier $Q\omega_p$ et $\frac{Q}{\omega_p}$ plutôt qu'essayer de factoriser la fonction de transfert par le bon Q.

2. Nous reconnaissons un montage sommateur (normalement il faudrait le redémontrer comme dans le cours) : $V_s = -(U + V_e) = -(H_1 V_e + V_e)$.

Ainsi, en remplaçant par la forme canonique de la fonction de transfert, nous arrivons après quelques manipulations à

$$\underline{H_2} = -\frac{1}{1 + \frac{1}{jQ\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)}}$$

Il s'agit d'un filtre **coupe-bande** de fréquence centrale celle trouvée précédemment.

Numériquement, les pulsations de coupure vérifiant $\underline{H_2(j\omega_c)} = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$ où $H_{\max} = |H_0| = 1$, sont :

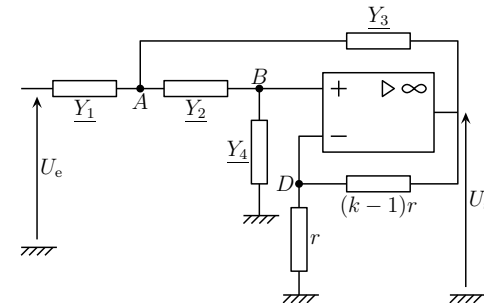
$$\rightarrow x_{c1} = \frac{\omega_{c1}}{\omega_p} = 0,809274; \omega_{c1} = 11,8620 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}; f_{c1} = 1,88789 \text{ kHz.}$$

$$\rightarrow x_{c1} = \frac{\omega_{c2}}{\omega_p} = 1,23568; \omega_{c2} = 18,1120 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}; f_{c2} = 2,88261 \text{ kHz.}$$

☛ Exercice 10

1. Analyse physique. C'est un filtre donc le circuit va s'étudier en RSF. Comme la fonction de transfert est donnée, nul besoin de savoir a priori de quelle grandeur elle va dépendre mais nous pouvons constater qu'elle dépend des grandeurs caractéristiques des dipôles (sauf de r) et de k (qui est aussi une caractéristique d'un dipôle).

Analyse technique. C'est un AO et nous cherchons une amplification en tension, l'approche nodale va alors de soi. Nous pouvons compter 4 potentiels inconnus en A, B, D et en sortie de l'AO. Cela signifie 4 lois dont 3 lois des nœuds en terme de potentiels et une loi de fonctionnement de l'AO.



La loi des nœuds en terme de potentiel s'écrit, en A :

$$\underline{Y_1}(U_e - V_A) + \underline{Y_3}(U_2 - V_A) + \underline{Y_2}(V_B - V_A) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{Y_1}U_e + \underline{Y_3}U_s + \underline{Y_2}V_B = V_A(\underline{Y_1} + \underline{Y_2} + \underline{Y_3})$$

Cette même loi écrite au point B donne :

$$\underline{Y_2}(V_A - V_B) + \underline{Y_4}(0 - V_B) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{Y_2}V_A = (\underline{Y_2} + \underline{Y_4})V_B$$

Ainsi en éliminant V_A dans la première expression :

$$\underline{Y_2} \underline{Y_1} U_e + \underline{Y_2} \underline{Y_3} U_s + \underline{Y_2} \underline{Y_2} V_B = (\underline{Y_2} + \underline{Y_4})(\underline{Y_1} + \underline{Y_2} + \underline{Y_3}) V_B$$

Comme l'AO est idéal et en régime linéaire nous avons $\underline{V_B} = \underline{V_D}$.

Enfin, nous reconnaissons un diviseur de tension entre r et $(k-1)r$, ce qui donne $\underline{V}_D = \frac{U_s}{k}$.

Finalement, en remplaçant dans l'expression précédente et après une ou deux manipulations algébriques, nous arrivons bien au résultat proposé.

2. (a) Comme $\underline{Z}_i = \frac{1}{\underline{Y}_i}$, la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{k \frac{1}{R^2}}{\frac{1}{R^2} + (1-k) \frac{jC\omega}{R} + jC\omega \left(\frac{2}{R} + jC\omega \right)} \rightsquigarrow \boxed{\underline{H}_1(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 R^2 C^2 + j(3-k)\omega RC}}$$

Il s'agit d'un filtre **passé-bas** car $|\underline{H}_1(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} k \neq 0$ et $|\underline{H}_1(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$.

Nous pouvons alors identifier avec la forme canonique vue en cours $\underline{H}_1 = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_p}}$.

Nous trouvons $H_0 = k$, $\omega_p = \frac{1}{RC} = 6,25000 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ et $Q = \frac{1}{3-k} = 0,694444$.

En reprenant les résultats du cours, que normalement il faudrait redémontrer, nous voyons qu'il n'y a pas de phénomène de résonance puisque $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Numériquement, nous trouvons, pour la pulsation de coupure $x_c = \frac{\omega_c}{\omega_p} = 0,981772$ soit :

$$\omega_c = 6,13608 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \rightsquigarrow \boxed{f_c = 9,76587 \times 10^2 \text{ Hz}}$$

2. (b) La fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{k}{1 + (3-k)RCj\omega + R^2C^2j\omega^2}$$

Le polynôme en $(j\omega)$ du dénominateur a tous ses coefficients de même signe (en l'occurrence positif) pourvu que $3-k > 0$. Le filtre n'est donc stable que pour $(1 < k < 3)$, la condition $1 < k$ assurant simplement que la résistance de rétroaction a une valeur positive.

3. ► **Fonction de transfert.** En remplaçant par les admittances proposées, nous obtenons :

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{k(jC\omega)^2}{(jC\omega)^2 + (1-k) \frac{jC\omega}{R} + \frac{1}{R} \left(2jC\omega + \frac{1}{R} \right)}$$

Puis, après manipulations : $\boxed{\underline{H}_2(j\omega) = -\frac{kR^2C^2\omega^2}{1 - R^2C^2\omega^2 + j(3-k)RC\omega}}$.

Il s'agit d'un filtre **passé-haut** car $|\underline{H}_2(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ et $|\underline{H}_2(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} k \neq 0$.

Nous pouvons alors identifier avec la forme canonique vue en cours $\underline{H}_1(j\omega) = -\frac{H_0 \frac{\omega^2}{\omega_p^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_p}}$

et nous trouvons $H_0 = k$, $\omega_p = \frac{1}{RC} = 6,25000 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ et $Q = \frac{1}{3-k} = 0,694444$.

Les résultats du cours, que normalement il faudrait redémontrer, nous indiquent qu'il n'y a pas de phénomène de résonance puisque $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Numériquement, nous trouvons, pour la pulsation de coupure $x_c = \frac{\omega_c}{\omega_p} = 1,01857$:

$$\omega_c = 6,36604 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \rightsquigarrow \boxed{f_c = 1,01319 \text{ kHz}}$$

► **Stabilité.** Ici aussi le polynôme en $(j\omega)$ du dénominateur de $\underline{H}_2(j\omega)$ a tous ses coefficients de même signe (positifs) pourvu que $3-k > 0$. La conclusion est donc identique à celle obtenue pour le filtre précédent, à savoir que le filtre n'est stable que pour $(1 < k < 3)$.

4. ► **Fonction de transfert.** En remplaçant par les admittances proposées, nous obtenons

$$\underline{H}_3(j\omega) = \frac{k \frac{1}{R} jC\omega}{\frac{1}{R} jC\omega + (1-k) \frac{jC\omega}{R} + \left(jC\omega + \frac{1}{R} \right) \left(\frac{2}{R} + jC\omega \right)}$$

Soit, après manipulations : $\boxed{\underline{H}_3(j\omega) = \frac{kjRC\omega}{2 + (5-k)jRC\omega - R^2C^2\omega^2}}$.

Il s'agit d'un filtre **passé-bande** car $|\underline{H}_3(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ et $|\underline{H}_3(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$.

Pour identifier avec la forme canonique vue en cours $\underline{H}_3(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right)}$, réécrivons

d'abord la fonction de transfert sous la forme $\underline{H}_3(j\omega) = \frac{k}{5-k} \times \frac{1}{1 + \frac{jRC\omega}{5-k} + \frac{2}{(5-k)jRC\omega}}$.

Nous trouvons $H_0 = \frac{k}{5-k}$, $\frac{RC}{5-k} = \frac{Q}{\omega_p}$ et $\frac{2}{(5-k)RC} = Q\omega_p$, ce qui donne une pulsation

centrale $\omega_{\text{cent}} = \omega_p = \frac{\sqrt{2}}{RC} = 8,83883 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$, soit $\boxed{f_{\text{cent}} = 1,40674 \text{ kHz}}$ et un facteur de

qualité $Q = \frac{\sqrt{2}}{5-k} = 0,471404$.

Les résultats du cours nous indiquent qu'il n'y a pas de phénomène de résonance puisque $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Numériquement, on trouve, pour les pulsations de coupure :

$$\rightarrow x_{c1} = \frac{\omega_{c1}}{\omega_p} = 0,397078; \omega_{c1} = 3,50971 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } \boxed{f_{c1} = 5,58587 \times 10^2 \text{ Hz}}$$

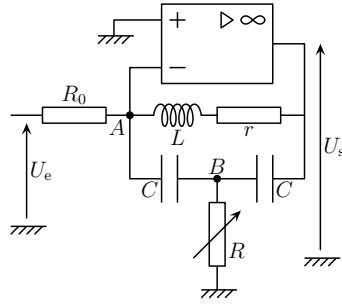
$$\rightarrow x_{c2} = \frac{\omega_{c2}}{\omega_p} = 2,51840; \omega_{c2} = 22,2597 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } \boxed{f_{c2} = 3,54374 \times 10^3 \text{ Hz}}$$

► **Stabilité.** Comme $\underline{H}_3(j\omega) = \frac{kjRC\omega}{2 + (5-k)jRC\omega + R^2C^2(j\omega)^2}$, nous voyons que les coefficients du polynôme en $(j\omega)$ du dénominateur sont de même signe (positif) pourvu que $5-k > 0$. Cela signifie que le filtre n'est stable que pour $(1 < k < 5)$.

✿ Exercice 11

1. **Analyse physique.** C'est un filtre donc nous allons étudier le circuit en RSF. Étant donnée la présence d'une bobine et de deux condensateurs, nous pouvons penser que le filtre sera d'ordre 3.

Analyse technique. Ici, cela sera une approche nodale, de par l'AO et la recherche d'une tension en sortie. Comme nous pouvons voir la bobine associée en série avec r , nous pouvons dire qu'il n'y a que 3 potentiels inconnus : en A, B et en sortie de l'AO. Cela donne trois lois : 2 lois des nœuds en terme de potentiels et la loi de fonctionnement de l'AO.



L'AO est idéal et en régime linéaire donc $V_- = V_+$. Or ici $V_+ = 0$ donc nous avons $V_- = 0$
 La loi des nœuds en terme de potentiel en A s'écrit en tenant du fait que $V_A = V_- = 0$:

$$\frac{U_e - 0}{R_0} + \frac{U_s - 0}{jL\omega + r} + \frac{V_B - 0}{\frac{1}{jC\omega}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{U_e}{R_0} + \frac{U_s}{jL\omega + r} = -jC\omega V_B$$

La loi des nœuds en terme de potentiels écrite en B donne :

$$\frac{0 - V_B}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{U_s - V_B}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{0 - V_B}{R} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad jRC\omega U_s = V_B(1 + 2jRC\omega)$$

En éliminant V_B entre ces deux expressions, nous arrivons après quelques manipulations à :

$$\underline{H(j\omega)} = -\frac{1}{R_0} \times \frac{(1 + 2jRC\omega)(jL\omega + r)}{1 + 2RC(j\omega) + RrC^2(j\omega)^2 + RC^2L(j\omega)^3}$$

Comme $|\underline{H}(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{r}{R_0} \neq 0$ et $|\underline{H}(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$, nous pouvons dire qu'il s'agit d'un filtre

passé-bas.

2. Pour qu'il y ait un phénomène de résonance, il faut qu'il existe une valeur de ω qui permette de minimiser le dénominateur.

Or le dénominateur s'écrit $1 - RrC^2\omega^2 + j[2\omega RC - \omega^3 RC^2L]$. Il nous faut donc chercher le cas limite tel que les parties imaginaire et réelle soient nulles en même temps.

Cela donne les deux conditions $1 = RrC^2\omega^2$ et $\omega^3 RC^2L = 2RC\omega$. Cette dernière condition donne $\omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}$, qui n'est autre que la pulsation de résonance.

L'autre condition donne, en utilisant l'expression de la pulsation de résonance $R = \frac{L}{2rC}$. Cette dernière valeur correspond à celle qu'il faudrait donner à R pour assurer une amplification infinie. En pratique nous chercherons simplement à se rapprocher de celle-ci par valeur supérieure afin d'assurer la stabilité du filtre.

☛ *Remarque* : une étude plus poussée, comme celle faite en cours, permet de montrer que si R a une valeur inférieure à celle trouvée ci-dessus, le régime est instable. Nous ne pouvons pas utiliser ici le critère « tous les coefficients du dénominateur sont de même signe » car il s'agit d'un filtre d'ordre 3; le critère précédent ne s'appliquant qu'aux filtres d'ordre 1 et 2.