Chapitre 2

Étudier un circuit électrocinétique

Étudier un circuit électrocinétique

Le but de ce chapitre est d'apprendre à étudier plus précisément un circuit électrocinétique quelconque. Nous verrons ainsi les lois fondamentales qui régissent l'électrocinétique, ce qui nous permettra de démontrer les lois du chapitre précédent. En plus de cela nous aborderons l'aspect énergétique des circuits électrocinétique.

I – Étude par lois fondamentales

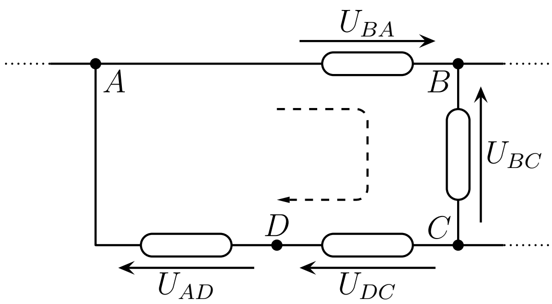
I·1 – Lois de Kirchhoff

I·1·*i* – domaine de validité

- Les lois qui suivent sont valables dans l'ARQS c'est-à-dire, en pratique, tout le temps.
- Rappelons que pour l'ARQS, il faut que la taille du circuit soit très inférieur à la distance de propagation de l'électricité (qui se propage à la vitesse c).

I·1·*ii* – lois des mailles, additivité des tensions

Loi des mailles
Dans une maille, la somme algébrique des tensions est nulle.
Ici : $U_{BA} - U_{BC} + U_{DC} + U_{AD} = 0$



Il n'y a **que** les fils qui ne comptent pas : les interrupteurs ouverts eux, comptent !

✯ démonstration

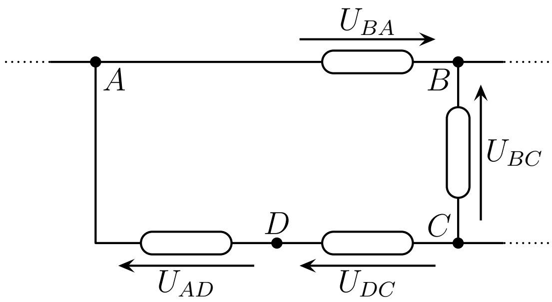
- Cela découle tout naturellement de la définition d'une tension :

$$0 = V_A - V_A = V_B - V_A + V_C - V_B + V_D - V_C + V_A - V_D = U_{BA} - U_{BC} + U_{DC} + U_{AD}$$

Remarque : c'est bien une loi physique mais elle est cachée en fait. Cette loi dit « simplement » qu'il est **possible** d'écrire une tension sous la forme d'une différence de potentiels.

Additivité des tensions

La tension entre deux points peut s'écrire sous la forme de la somme des tensions entre des points intermédiaires.

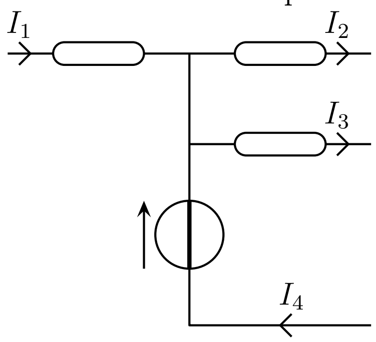


Ici $U_{BA} = -U_{AD} - U_{DC} + U_{BC}$.

I·1·*iii* – loi des nœuds

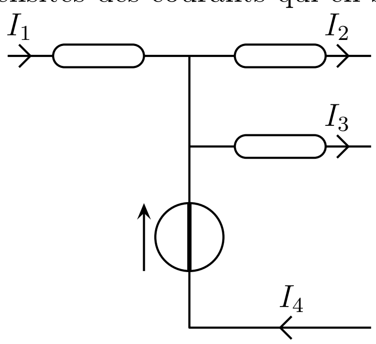
Loi des nœuds

La somme algébrique des intensités des courants qui rentrent dans un nœud est nulle.



Ici $I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0$.

La somme des intensités des courants qui rentrent dans un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui en sortent.



Ici $I_1 + I_4 = I_2 + I_3$.

I·1·*iv* – de belles lois à ne pas appliquer en l'état

✧ Les lois précédentes sont les lois fondamentales de l'électrocinétique, ce qui signifie qu'elles peuvent toujours être appliquées (dans l'ARQS).

✧ Pouvoir toujours être utilisée implique qu'elles sont très générales et donc qu'elles seront souvent relativement inefficaces : ces lois sont à utiliser en dernier recours lorsqu'il ne sera pas possible de faire autrement (transformation de circuit, . . .)

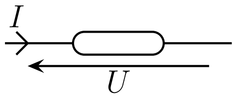
✧ Le gros problème de ces lois c'est qu'elles introduisent une énorme quantité d'inconnues. Ainsi, en les appliquant brutalement, nous devons introduire autant de tensions que de dipôles (interrupteur ouvert compris) et autant d'intensité que de branches. Cela devient très vite ingérable à moins d'avoir réduit autant que faire se peut le circuit au préalable et d'utiliser ces lois de manière efficace. Pour cela, il faut reparler des dipôles.

I·2 – Retour sur les dipôles

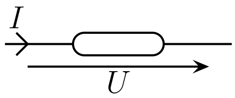
I·2·*i* – convention générateur ou récepteur

Il y a deux façons de parler de la relation courant – tension d'un dipôle. Ces deux façons sont appelées *convention générateur* et *convention récepteur*.

Un dipôles est dit en *convention récepteur* lorsque les flèches représentant la tension et le courant sont dans des sens opposés.



Un dipôle est dit en *convention générateur* lorsque les flèches représentant la tension et le courant sont dans des sens opposés.



☕ *Remarque* : la convention générateur n'est pas réservée aux générateurs même si, comme nous le verrons, elle leur est plus naturelle. Mais il est tout à fait possible d'étudier un résistor en convention générateur !

✧ Ces conventions permettent de savoir, justement, quelles sont les conventions prises pour le courant et la tension aux borne du dipôle dont nous voulons parler : ces grandeurs étant arbitraires, la relation courant – tension change suivant la convention.

I·2·*ii* – lois constitutives – caractéristique

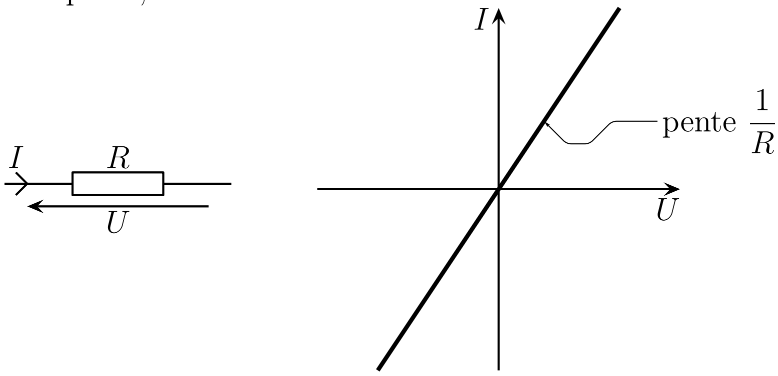
La *loi constitutive* d'un dipôle est la loi décrivant son fonctionnement.

✧ Une loi constitutive fait forcément intervenir une grandeur caractéristique du dipôle.

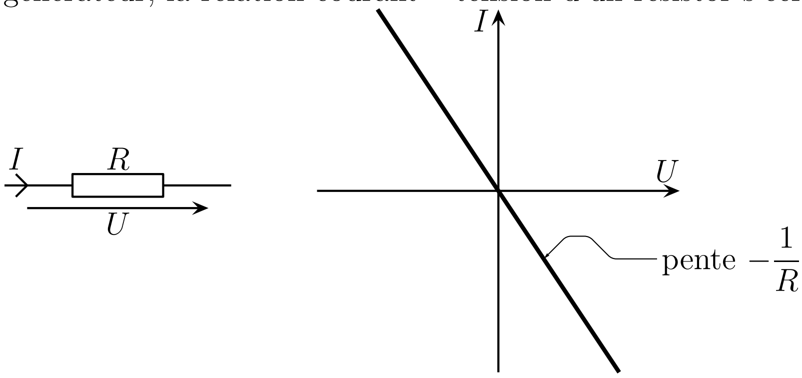
La *caractéristique* d'un dipôle est le graphe représentatif $I = f(U)$.

✯ le résistor

En convention récepteur, la relation courant – tension d'un résistor s'écrit : $U = +R\,I$.



En convention générateur, la relation courant – tension d'un résistor s'écrit : $U = -R\,I$.

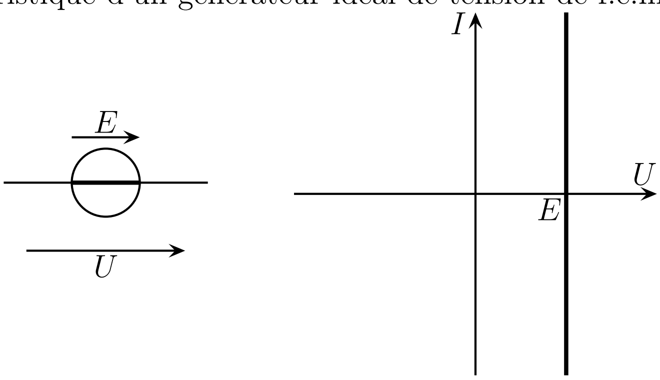


✧ Lorsqu'il faudra écrire la tension aux bornes d'un résistor, il faudra toujours faire très attention aux sens des flèches.

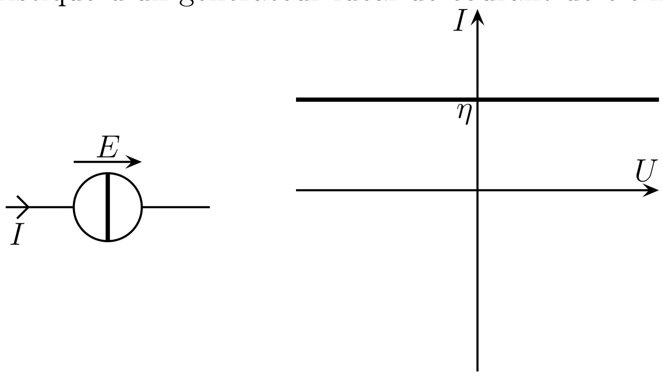
✯ les générateurs idéaux

✧ Étant donné que leurs lois constitutives ne sont pas des relations courant – tension, il n'y a pas de problème de convention pour eux.

La caractéristique d'un générateur idéal de tension de f.é.m. E est la suivante.



La caractéristique d'un générateur idéal de courant de c.é.m. η est la suivante.



I·2·*iii* – dipôle symétrique ou polarisé ?

- En TP, il faudra se poser la question : dans quel sens brancher les dipôles ?
- Il existe deux types de dipôles : ceux qui peuvent être branchés dans n'importe quel sens et ceux pour lesquels il faut faire attention au sens de branchement.

> Un dipôle pouvant être branché dans un sens quelconque est appelé *symétrique*.

- Exemples : de très nombreux appareils ménagers.

> Un dipôle pour lequel il faut faire attention au sens de branchement est appelé *polarisé*.

- Exemples : les piles dans les jouets.

✭ reconnaître un dipôle symétrique d'un dipôle polarisé

- Lorsqu'un dipôle est branché « à l'envers », $I \to -I$ et $U \to -U$. Il faut donc que sur sa caractéristique, un point situé en $-I$ soit aussi situé en $-U$ ou réciproquement.
- Cela peut s'interpréter de deux manières :
  - ➜ pour que le dipôle soit symétrique, il faut $-I = f(-U)$, *ie.* $-f(U) = f(-U)$, c'est une fonction impaire
  - ➜ géométriquement il faut que la caractéristique soit symétrique par rapport au centre (0,0).

> Les résistors sont des dipôles symétriques.

> Les générateurs idéaux sont polarisés.

I·3 – Approche maillère et lois de Kirchhoff

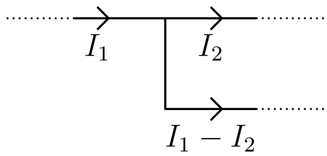
I·3·*i* – c'est quoi ?

- L'approche maillère consiste à voir le circuit comme un ensemble de mailles assemblées. Ce sont donc les lois des mailles qui vont être au cœur du raisonnement.

- Lorsqu'un circuit est étudié avec une approche maillère, s'il y a 3 mailles, il sera possible d'écrire 3 lois des mailles. Il faut donc qu'il y ait 3 inconnues de manière à obtenir un système de 3 équations à trois inconnues que nous pourrons facilement résoudre.
- Comme nous allons le voir, l'approche maillère permet de déterminer facilement des intensités. C'est donc une approche recommandée quand nous chercherons une telle grandeur.

I·3·*ii* – que faire de la loi des nœuds ?

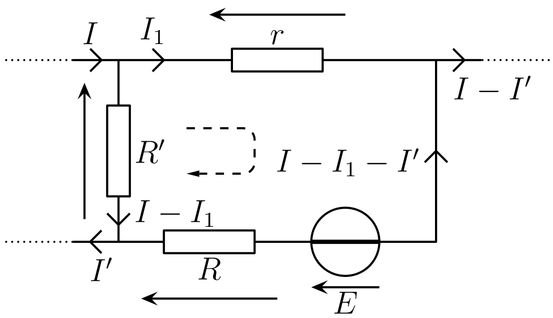
- Normalement, il faudrait autant de courant que de branches : c'est trop, beaucoup trop.
- Nous allons écrire directement les lois des nœuds sur le circuit de telle sorte que nous introduirons le nombre juste nécessaire de courant.



- Si tout est bien fait, il y aura autant de courants inconnues que de mailles : il faudra alors écrire autant de loi des mailles que de courant et le tour sera joué. Il y aura autant d'équations que d'inconnues.

I·3·*iii* – la loi des mailles en terme de courant

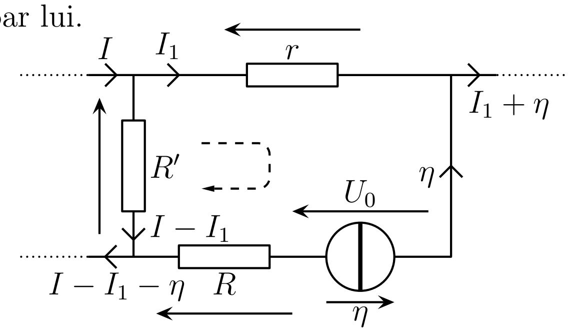
- Nous allons écrire directement la loi des mailles avec les relations courant – tensions des dipôles concernés. Pour cela il faudra faire attention à la convention. Il est possible de s'aider (au moins dans un premier temps) à mettre une flèche au-dessus des dipôles dans le sens récepteur. Mais attention : une simple flèche, pas de nom de tension !
- Commençons tout d'abord par bien écrire les lois des nœuds sur le circuit même.



- Ici la loi des mailles en terme de courants donne :

$$-r\,I_1 + E + R\,(I - I_1 - I') + R'\,(I - I_1) = 0$$

- L'approche maillère a pour but de déterminer les intensités qui circulent dans les différentes branches par l'intermédiaire des lois des mailles. Mais si un dipôle impose le courant dans sa branche (comme par exemple un générateur idéal de courant ou un interrupteur ouvert), il est alors **inutile** d'écrire une loi des mailles passant par lui.



✧ Ici la bonne loi des mailles s'écrit :

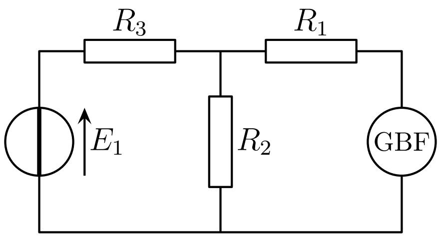
$$-r\,I_1 + U_0 + R\,\eta + R'\,(I - I_1) = 0$$

✧ Nous constatons alors que nous avons bien écrit une loi en plus, donc une équation en plus, mais avec une inconnue supplémentaire : cette loi est inutile **pour déterminer les intensités**. En fait cette loi permet de trouver la tension qu'il y a aux bornes du générateur de courant.

STOP il est souvent tentant d'écrire une loi des mailles passant par un interrupteur ouvert. Il faut se garder de cette tentation car la loi ainsi écrite est au mieux inutile et le plus souvent fausse.

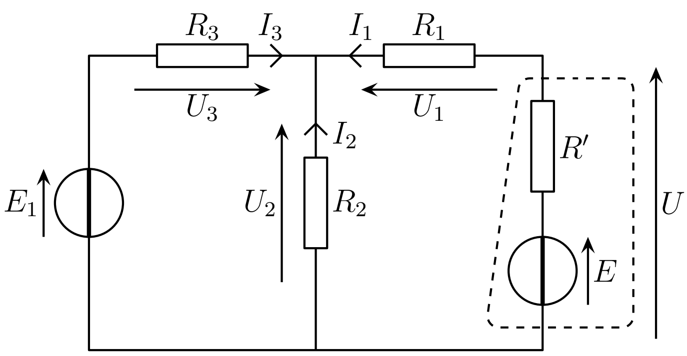
I·3·*iv* – circuit TP n°1

✧ Nous aimerions faire le circuit ci-dessous avec :
- ➜ $R_1 = 330\ \Omega$; $R_2 = 100\ \Omega$; $R_3 = 220\ \Omega$
- ➜ $E_1 = 5{,}0$ V
- ➜ le GBF initialement réglé à $E = 6{,}0$ V.



✧ Le but va être de déterminer *a priori* toutes les intensités et toutes les tensions de manière à voir si aucune n'est dangereuse pour les dipôles.

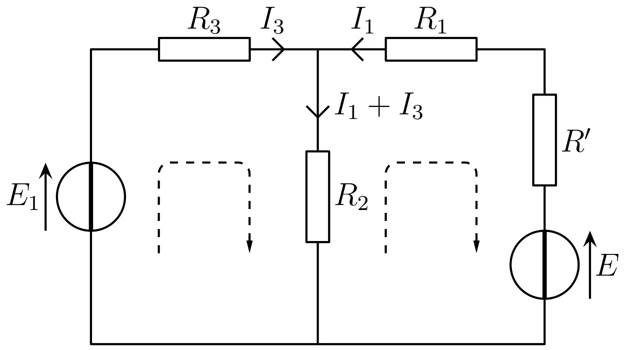
✧ La première chose à faire est de conventionner le circuit, *ie.* d'écrire dessus la manière dont nous allons parler des intensités et des tensions, tout en remplaçant le GBF par son modèle électrocinétique.



✧ Analyse physique :
- ➜ régime continu
- ➜ grandeurs pertinentes : R_1, R_2, R_3, $R' = 50\ \Omega$, E_1, E

✧ Analyse technique :
- ➜ c'est un circuit à deux mailles et cinq nœuds dont deux principaux
- ➜ étant donné que de nombreuses grandeurs sont recherchées, il risque de ne pas être très pertinant de transformer le circuit, autant en chercher le maximum d'un coup
- ➜ comme il y a deux mailles, l'approche maillère va donner deux inconnues, donc deux lois à écrire : c'est parti

✧ Conservons les deux seules inconnues I_1 et I_3, nous retrouverons tout le reste après, avec.



✧ Les deux lois des mailles en terme de courant s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} E_1 - R_3\,I_3 - R_2\,(I_1+I_3) & = & 0 \\ R_2\,(I_1+I_3) + R_1\,I_1 + R'\,I_1 - E & = & 0 \end{array}\right.$$

✧ Maintenant, ce ne sont plus que des calculs. Nous commençons par réarranger les termes : les inconnues d'un côtés, les grandeurs connues de l'autre.

$$\left\{\begin{array}{rrcl} R_2\,I_1 & +(R_2+R_3)\,I_3 & = & E_1\ (☼) \\ (R'+R_1+R_2)\,I_1 & +R_2\,I_3 & = & E\ (☀) \end{array}\right.$$

✧ Nous pouvons alors « éliminer » l'inconnue I_3 en faisant $R_2 \times (☼) - (R_2+R_3) \times (☀)$. Cela conduit à :

$$R_2{}^2\,I_1 - (R_2+R_3)\,(R'+R_1+R_2)\,I_1 = R_2\,E_1 - (R_2+R_3)\,E$$
$$\rightsquigarrow \quad \boxed{I_1 = \frac{R_2\,E_1 - (R_2+R_3)\,E}{R_2{}^2 - (R_2+R_3)\,(R'+R_1+R_2)} = 9{,}9\text{ mA}}$$

✧ Nous pouvons alors en déduire :

$$\boxed{U_1 = -R_1\,I_1 = -4{,}13\text{ V}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{U = E - R'\,I_1 = 5{,}37\text{ V}}$$

✧ À partir du système précédent, nous pouvons de même « éliminer » I_1 en faisant $(R'+R_1+R_2) \times (☼) - R_2 \times (☀)$:

$$(R_2+R_3)\,(R'+R_1+R_2)\,I_3 - R_2{}^2\,I_3 = (R'+R_1+R_2)\,E_1 - R_2\,E$$
$$\rightsquigarrow \quad \boxed{I_Y = \frac{(R'+R_1+R_2)\,E_1 - R_2\,E}{(R_2+R_3)\,(R'+R_1+R_2) - R_2{}^2} = 12{,}5\text{ mA}}$$

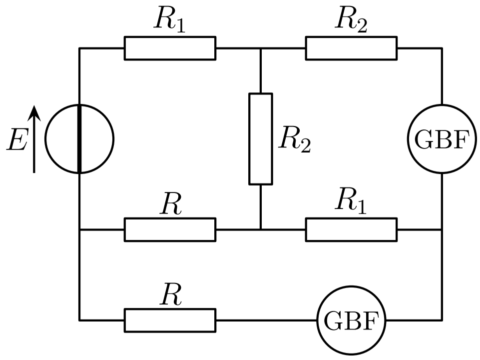
✧ Nous pouvons alors calculer les dernières grandeurs :

$$\boxed{U_3 = -R_3\,I_3 = -2{,}76\text{ V}} \quad \text{et} \quad \boxed{I_2 = -I_1 - I_3 = -22\text{ mA}} \quad \text{et} \quad \boxed{U_2 = R_2\,(I_1+I_3) = 2{,}24\text{ V}}$$

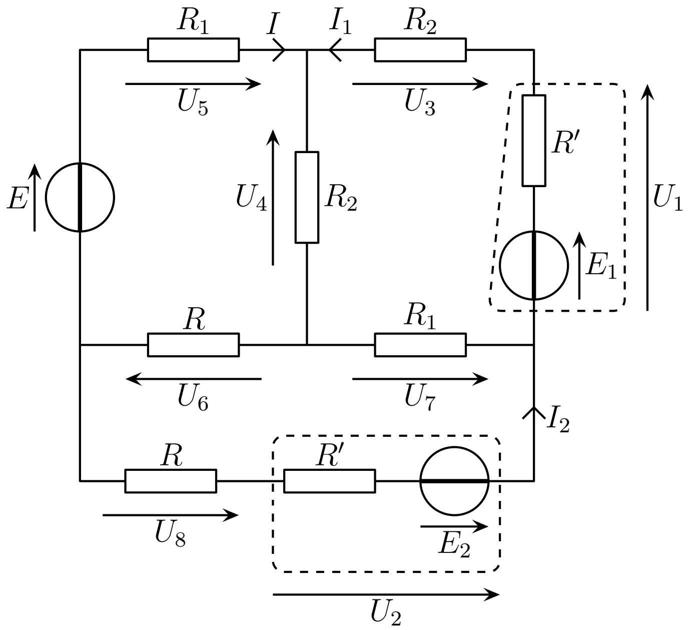
✧ Nous contrôlerons en TP ces calculs. Si ce n'est pas déjà fait !

I·3·*v* – circuit TP n°2

✧ Même chose mais en plus complexe tout en restant aussi facile.
✧ Nous aimerions faire le circuit ci-dessous avec :
- ➜ $R = 82\ \Omega$; $R_1 = 100\ \Omega$; $R_2 = 220\ \Omega$
- ➜ $E = 12{,}0$ V
- ➜ un GBF initialement réglé à $E_1 = 10{,}0$ V et l'autre à $E_2 = 8{,}0$ V



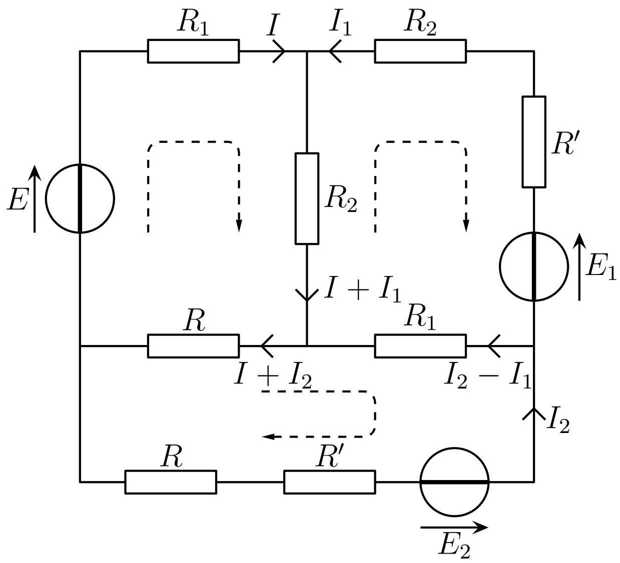
✧ Le but va être de déterminer *a priori* toutes les intensités circulant dans les générateurs et toutes les tensions de manière à voir si aucune n'est dangereuse pour les dipôles.
✧ La première chose à faire est de conventionner le circuit, *ie.* d'écrire dessus la manière dont nous allons parler des intensités et des tensions, tout en remplaçant les GBF par leur modèle électrocinétique.



✧ Analyse physique :
- ➜ régime continu
- ➜ grandeurs pertinentes : R_1, R_2, R_3, $R' = 50\ \Omega$, E, E_1 et E_2.

✧ Analyse technique :
- ➜ c'est un circuit à trois mailles et quatre nœuds principaux (9 en tout) : pas de solutions directe
- ➜ étant donné que nous cherchons de nombreuses grandeurs, il risque de ne pas être très pertinant de transformer le circuit, autant en chercher le maximum d'un coup
- ➜ comme il y a trois mailles, l'approche maillère va donner trois inconnues, donc trois lois à écrire : c'est parti

✧ Nous cherchons déjà trois intensités : I, I_1 et I_2. Ce seront nos inconnues. Normalement, toutes les autres s'en déduisent.



✧ Les trois lois des mailles en terme de courant s'écrivent donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} +E - R_1\,I - R_2\,(I+I_1) - R\,(I+I_2) & = & 0 \\ +R_2\,(I+I_1) + R_2\,I_1 + R'\,I_1 - E_1 - R_1\,(I_2 - I_1) & = & 0 \\ +R\,(I+I_2) + R_1\,(I_2 - I_1) - E_2 + R'\,I_2 + R\,I_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

✧ Maintenant, ce ne sont plus que des calculs. Nous commençons par réarranger les termes : les inconnues d'un côtés, les grandeurs connues de l'autre.

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} (R+R_1+R_2)\,I & +R_2\,I_1 & +R\,I_2 & = & E \\ R_2\,I & +(2\,R_2+R_1+R')\,I_1 & -R_1\,I_2 & = & E_1 \\ R\,I & -R_1\,I_1 & +(2\,R+R_1+R')\,I_2 & = & E_2 \end{array}\right.$$

✧ Nous pouvons résoudre cela à la main, mais cela ne présente guère d'intérêt. Nous allons plutôt utiliser un logiciel de calculs formels qui nous donne le résultat :

$$sol := \left\{ i1 = \frac{R\,R2\,e2 + 3\,R\,R1\,e1 - R\,R1\,e + R1^2\,e2 + R1^2\,e1 + R^2\,e1 - 2\,R\,R2\,e + Rp\,R2\,e1 + 2\,R\,R2\,e1 - R2\,Rp\,e + Rp\,R1\,e1 - R2\,R1\,e + R1\,R2\,e1 + R\,R1\,e2 + R1\,R2\,e2 + R\,Rp\,e1}{6\,R\,R1\,R2 + R2^2\,Rp + 4\,R\,R1\,Rp + Rp^2\,R1 + 4\,R\,Rp\,R2 + Rp^2\,R2 + 4\,R1\,Rp\,R2 + R^2\,Rp + R^2\,R1 + 2\,R\,R2^2 + R2^2\,R1 + 2\,R1^2\,R2 + 2\,R\,R1^2 + 2\,R1^2\,Rp + 2\,R^2\,R2 + R\,Rp^2}, \right.$$

$$i = \frac{-R\,R1\,e1 - R\,R1\,e2 + 2\,R\,R1\,e - 2\,R\,R2\,e1 - 2\,R\,R2\,e2 - R\,Rp\,e2 + 2\,R\,Rp\,e + 4\,R\,R2\,e + 2\,Rp\,R1\,e + 2\,R2\,R1\,e - R1\,R2\,e1 - R1\,R2\,e2 + 2\,R2\,Rp\,e - Rp\,R2\,e1 + e\,Rp^2}{6\,R\,R1\,R2 + R2^2\,Rp + 4\,R\,R1\,Rp + Rp^2\,R1 + 4\,R\,Rp\,R2 + Rp^2\,R2 + 4\,R1\,Rp\,R2 + R^2\,Rp + R^2\,R1 + 2\,R\,R2^2 + R2^2\,R1 + 2\,R1^2\,R2 + 2\,R\,R1^2 + 2\,R1^2\,Rp + 2\,R^2\,R2 + R\,Rp^2},$$

$$\left. i2 = -\frac{R2\,R1\,e - 3\,R1\,R2\,e2 - R1\,R2\,e1 - 2\,R\,R2\,e2 + 2\,R\,R2\,e - R1^2\,e2 - R\,R1\,e2 + R\,R1\,e - R\,R1\,e1 - R\,R2\,e1 - R1^2\,e1 - Rp\,R1\,e2 - Rp\,R2\,e2 - R2^2\,e2 - R\,Rp\,e2 + R\,Rp\,e}{6\,R\,R1\,R2 + R2^2\,Rp + 4\,R\,R1\,Rp + Rp^2\,R1 + 4\,R\,Rp\,R2 + Rp^2\,R2 + 4\,R1\,Rp\,R2 + R^2\,Rp + R^2\,R1 + 2\,R\,R2^2 + R2^2\,R1 + 2\,R1^2\,R2 + 2\,R\,R1^2 + 2\,R1^2\,Rp + 2\,R^2\,R2 + R\,Rp^2} \right\}$$

✧ Numériquement, nous obtenons :

$$\boxed{I = 21{,}2\text{ mA}} \qquad \boxed{I_1 = 11{,}2\text{ mA}} \qquad \boxed{I_2 = 12{,}5\text{ mA}}$$

✧ Nous pouvons alors en déduire :

$$\boxed{U_1 = E_1 - R'\,I_1 = 9{,}44\text{ V}} \qquad \boxed{U_2 = E_2 - R'\,I_2 = 7{,}37\text{ V}}$$

$$\boxed{U_3 = R_2\,I_1 = 2{,}46\text{ V}} \qquad \boxed{U_4 = R_2\,(I+I_1) = 7{,}12\text{ V}} \qquad \boxed{U_5 = -R_1\,I = -2{,}12\text{ V}}$$

$$\boxed{U_6 = -R\,(I+I_1) = -2{,}76\text{ V}} \qquad \boxed{U_7 = R_1\,(I_2 - I_1) = 0{,}134\text{ V}} \qquad \boxed{U_8 = -R\,I_2 = -1{,}03\text{ V}}$$

✧ Nous contrôlerons en TP ces calculs. Si ce n'est pas déjà fait !

I·4 – Approche nodale et lois de KIRCHHOFF

I·4·*i* – c'est quoi ?

- L'approche nodale consiste à voir le circuit comme un ensemble de nœuds : ce sont donc cette dois les lois des nœuds qui vont être au cœur du raisonnement. Les inconnues seront les potentiels associés à ces nœuds.
- Lorsque nous regardons un circuit avec une approche nodale, s'il y a 3 nœuds, nous pourrons écrire 3 lois mais en fait seules 2 seront utiles. En effet : comment imaginer un circuit à un seul nœud ? C'est impossible et cela signifie qu'il y a toujours un nœud « en trop », celui nécessaire à la fermeture du circuit.
- Ainsi avec 3 nœuds, nous n'aurons que deux lois. Il faudrait alors 2 inconnues seulement ce qui semble difficilement compatible avec le fait qu'il y a trois potentiels inconnus. Mais en fait, non, tout va bien parce que le potentiel est défini à une constante arbitraire près : il suffit donc de choisir arbitrairement la valeur d'un des nœuds et les autres seront alors parfaitement définis. Pour d'évidentes raisons de simplicité, nous choisirons la valeur nulle à ce nœud si particulier et le nommera « masse ».
- Comme nous allons le voir, l'approche maillère permet de déterminer facilement des potentiels. C'est donc une approche recommandée quand nous rechercherons une tension.

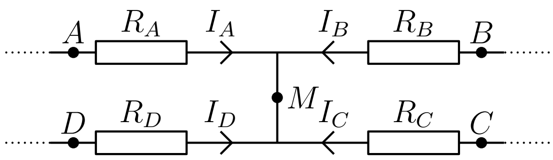
I·4·*ii* – additivité des tensions – masse d'un circuit

- Tout comme nous écrivons directement la loi des nœuds sur le circuit lors d'une approche maillère, nous allons poser arbitrairement le potentiel nul, quelque part dans le circuit.
- Le mieux, c'est à côté de générateurs de tension de telle sorte que les potentiels de l'autre côté du générateur soit connu.

> La *masse* se symbolise par et représente le point du circuit où le potentiel est nul.

I·4·*iii* – loi des nœuds en terme de potentiel

- Pour éviter d'écrire des intensités dans le circuit, nous écrira directement les relations courant – tension dans la loi des nœuds mais cette fois, avec des potentiels.
- Considérons l'exemple suivant.



- La loi des nœud s'écrit, normalement : $I_A + I_B + I_C + I_D = 0$.
- En utilisant les loi constitutives des résistors, nous obtenons, en remplaçant par des différences de potentiels :

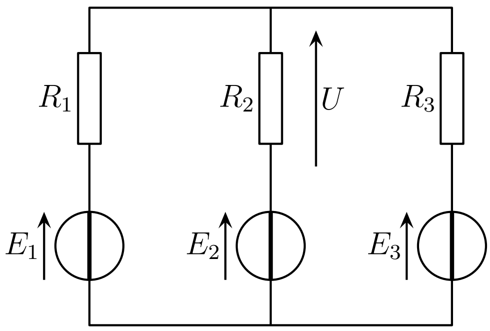
$$\frac{V_A - V_M}{R_A} + \frac{V_B - V_M}{R_B} + \frac{V_C - V_M}{R_C} + \frac{V_D - V_M}{R_D} = 0$$

- C'est un geste technique à savoir faire « les yeux fermés ».

I·4·*iv* – idoinotons

✫ idoinoton 1

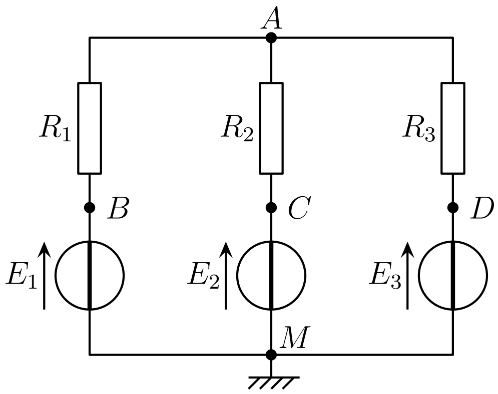
✧ Considérons le circuit ci-dessous pour lequel nous voulons déterminer la tension U.



✧ Analyse physique :
- ➜ régime continu
- ➜ grandeurs pertinentes : toutes les résistances et toutes les f.é.m.
- ➜ grandeurs inconnues : toutes les intensités circulant dans les différentes branches

✧ Analyse technique :
- ➜ c'est un circuit à deux mailles et deux nœuds principaux (5 en tout), mais où il y a plus d'un dipôle par branche : réponse pas évidente
- ➜ le but est d'obtenir une tension : l'approche nodale semble la meilleure
- ➜ avec 5 nœuds, il devrait y avoir 4 inconnues, sauf que les deux générateurs de tension en « enlève » deux, il n'en reste donc qu'une : une loi donnera immédiatement la réponse

✧ Maintenant agissons :
- ➜ fixons la masse, la plus proche possible des générateurs idéaux de tension
- ➜ nommons les points intéressants



✧ La loi des nœuds en terme de potentiels écrite en A donne donc :

$$\frac{V_B - V_A}{R_1} + \frac{V_C - V_A}{R_2} + \frac{V_D - V_A}{R_3} = 0$$

✧ Or, d'après les lois constitutives des générateurs idéaux de tension et compte tenu du fait que le potentiel est nul à la masse :

$$E_1 = V_B - V_M = V_B \qquad E_2 = V_C - V_M = V_C \qquad E_3 = V_D - V_M = V_D$$

✧ Nous arrivons alors à :

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)V_A=\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\frac{E_3}{R_3} \qquad \rightsquigarrow \qquad V_A=\frac{\dfrac{E_1}{R_1}+\dfrac{E_2}{R_2}+\dfrac{E_3}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}}$$

✧ Et enfin :

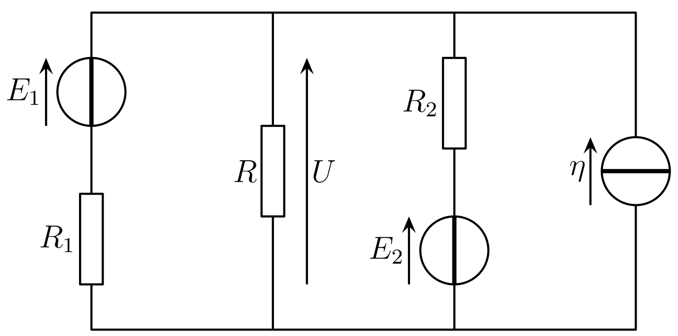
$$U=V_A-E_1 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{U=\frac{\dfrac{E_1}{R_1}+\dfrac{E_2}{R_2}+\dfrac{E_3}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}}-E_2}$$

✧ Après, « yapuka » simplifier.

✧ L'approche maillère nous aurait obligé à écrire deux lois et à résoudre un système : elle aurait été moins performante.

✯ idoinoton 2

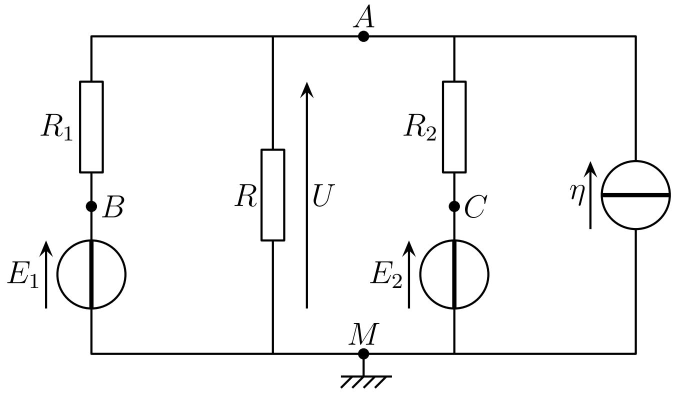
✧ Considérons le circuit ci-dessous pour lequel nous cherchons la tension U.



✧ Analyse physique :
- ➜ régime continu
- ➜ grandeurs pertinentes : toutes les résistances, toutes les f.é.m. et le c.é.m.

✧ Analyse technique :
- ➜ c'est un circuit à trois mailles et deux nœuds principaux (4 en tout), mais avec plusieurs dipôles dans certaines branches : réponse pas évidente
- ➜ le but est d'obtenir une tension : l'approche nodale semble la meilleure
- ➜ avec 4 nœuds cela donne *a priori* 3 inconnues, sauf qu'il y a 2 générateurs de tension, donc deux inconnues de moins, il en reste qu'une soit une loi des nœuds

✧ Maintenant agissons :
- ➜ fixons la masse, la plus proche possible des générateurs idéaux de tension
- ➜ nommons les points intéressants
- ➜ regroupons près du nœud intéressant les résistors



✧ Comment écrire la loi des nœuds en A ? Ce n'est pas facile avec le générateur idéal de courant. En fait si, justement, parce que c'est un générateur de courant et c'est une loi des nœuds. Elle s'écrit donc :

$$\frac{V_B - V_A}{R} + \frac{V_M - V_A}{R} + \frac{V_C - V_A}{R_2} + \eta = 0$$

✧ Comme précédemment, les lois constitutives des générateurs idéaux de tension etle potentiel nul à la masse permet d'écrire :

$$E_1 = V_B - V_M = V_B \qquad \text{et} \qquad E_2 = V_C - V_M = V_C$$

✧ Et comme $U = V_A - V_= V_A$, nous arrivons directement à :

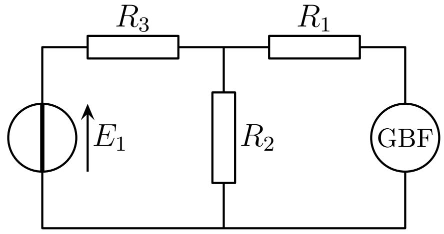
$$\boxed{u = V_A = \frac{\dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2} + \eta}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R_2}}}$$

✧ Après, « yapuka » simplifier.

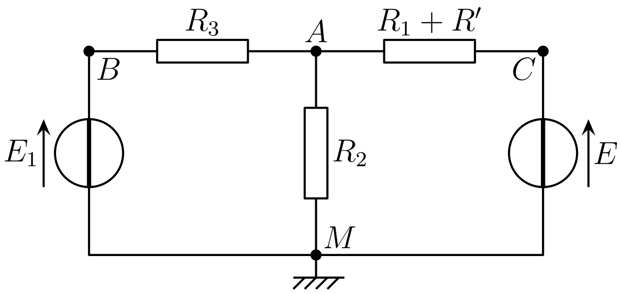
✧ Avec une approche maillère, nous n'aurions pas eu trois lois des mailles à écrire mais seulement deux car dans une des branches il y a un générateur idéal de courant qui impose l'intensité qui le traverse. Il n'en demeure pas moins que cela serait resté moins performant que l'approche nodale.

I·4·*v* – circuit TP n°1

✧ Rappelons le circuit :



✧ Il y a deux nœuds, ce qui conduit à une seule inconnue pour le potentiel. Réécrivons alors le circuit en utilisant le modèle électrocinétique pour le GBF et en associant les deux résistors :



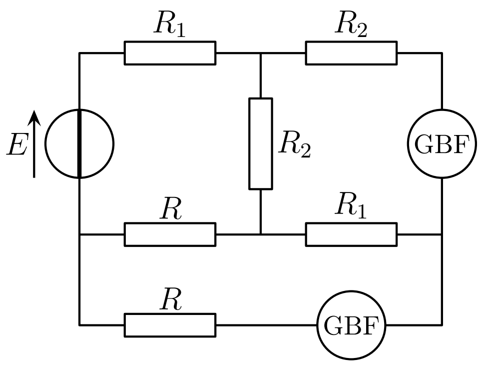
✧ Nous avons alors, en écrivant la loi des nœuds en terme de potentiels en A :

$$\frac{E_1 - V_A}{R_3} + \frac{0 - V_A}{R_2} = \frac{E - V_A}{R_1 + R'} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{V_A = U_2 = \frac{\dfrac{E_1}{R_3} + \dfrac{E}{R_1 + R'}}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_1 + R'}}}$$

✧ Avec les lois constitutives des dipôles, nous pouvons alors tout retrouver.

I·4·*vi* – circuit TP n°2

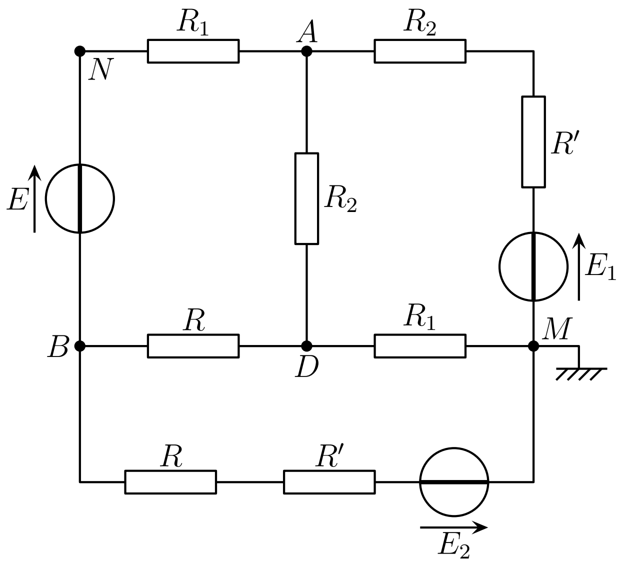
✧ Rappelons le circuit.



✧ C'est un circuit à 3 mailles et 7 nœuds dont 4 principaux. Normalement il devrait y avoir 6 inconnues, mais la présence de 3 générateurs **de tension** en supprime de fait 3. Reste 3.

✧ Par rapport à l'approche maillère, l'approche nodale ne permettra pas de gagner quelque chose (il y aura aussi 3 équations et 3 inconnues), mais, pour le fun, écrivons ces lois.

✧ Il faut tout d'abord réécrire le circuit en tenant compte du modèle électrocinétique des GBF et en choisissant la masse ... là où c'est possible. Profitons-en pour nommer les nœuds intéressants, qu'ils soient principaux ou non.



✧ Nous prendrons systématiquement comme inconnues les potentiels aux nœuds principaux.

✧ La loi des nœuds en terme de potentiel en D ne pose pas de problèmes particuliers :

$$\frac{V_A - V_D}{R_2} + \frac{V_B - V_D}{R} + \frac{0 - V_D}{R_1} = 0$$

✧ Pour la loi des nœuds en terme de potentiel en A, il va falloir faire intervenir le point N qui n'est **pas** une nouvelle inconnue. En effet la loi constitutive du générateur idéal de tension de f.é.m. E donne :

$$E = V_N - V_B \qquad \leadsto \qquad V_N = V_B + E$$

✧ Et ainsi la loi des nœuds en terme de potentiel en A s'écrit :

$$\frac{V_B + E - V_A}{R_1} + \frac{V_D - V_A}{R_2} + \frac{E_1 - V_A}{R_2 + R'} = 0$$

✧ Pour la loi des nœuds en terme de potentiels en B, il n'est pas possible de rechanger les dipôles de place et l'intensité du courant traversant un générateur idéal de tension n'est pas connue. Il ne reste alors plus qu'à utiliser *l'autre* dipôle de la branche considérée : R_1 branchée entre N et A. Cela donne :

$$\frac{V_A - (V_B + E)}{R_1} + \frac{V_D - V_B}{R} + \frac{-E_2 - V_B}{R + R'} = 0$$

✧ Là aussi, nous avons 3 équations et 3 inconnues. La résolution analytique n'a strictement aucun intérêt.

II – Tout est désormais possible

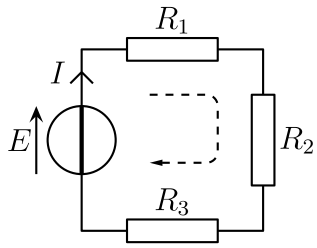
II·1 – Des lois non truquées

✧ Avec les lois fondamentales de l'électrocinétique, nous allons retrouver les lois déjà vues et déjà apprises dans le chapitre précédent. Bien évidemment, il faudra continuer à utiliser les lois rapides « telles quelles » et ne pas repasser systématiquement par les lois de Kirchhoff, ce qui serait une perte de temps.

✧ Dans ce paragraphe, nous allons montrer sur des exemples comment les lois de Kirchhoff permettent de retrouver les résultats que nous connaissons déjà. Nous en profiterons aussi pour élargir les lois d'association.

II·1·*i* – circuit à une maille – loi de Pouillet

✧ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel nous cherchons l'intensité I circulant dans la maille.



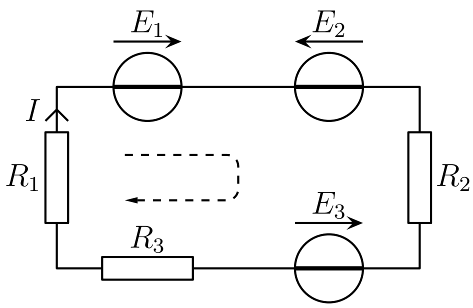
✧ La loi des mailles en terme de courant s'écrit :

$$E - R_1\,I - R_2\,I - R_3\,I = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad E = (R_1 + R_2 + R_3)\,I \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

✧ Ce dernier résultat peut se généraliser avec la loi dite de Pouillet.

✯ Loi de Pouillet

✧ Considérons le circuit à une maille ci-dessous.



✧ Analyse technique : c'est un circuit à une seule maille dans lequel nous cherchons une intensité. La loi des maille en terme de courant est donc toute indiquée puisque cela donnera une relation avec une seule inconnue, celle recherchée. Écrivons-la.

$$-R_1\,I + E_1 - E_2 - R_2\,I - E_3 - R_3\,I = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad (R_1 + R_2 + R_3)\,I = E_1 - E_2 - E_3$$

$$\rightsquigarrow \qquad I = \frac{E_1 - (E_2 + E_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Loi de Pouillet

Dans un circuit à une seule maille composée uniquement de générateurs idéaux de tension et de résistor, l'intensité circulant dans la maille est donnée par la relation :

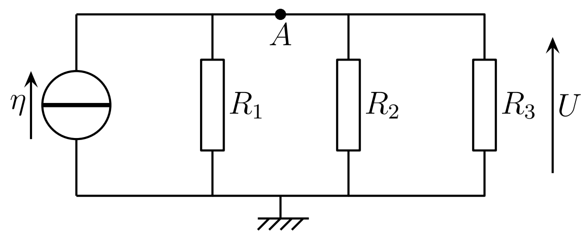
$$I = \frac{(\text{somme des f.é.m. dans le sens de } I) - (\text{somme des f.é.m. dans le sens opposé à } I)}{\text{somme des résistances}}$$

☕ *Remarque* : les f.é.m des générateurs qui sont dans le sens opposé à I sont parfois appelées *force contre électromotrice* notée f.c.é.m.

✧ Il s'agit d'une loi à appliquer, évidemment, telle quelle.

II·1·*ii* – circuit à deux nœuds

✧ Considérons le circuit à deux nœuds suivant pour lequel nous cherchons U.



✧ Analyse : c'est un circuit à deux nœuds pour lequel il y aura une seule inconnue, le potentiel en un des deux nœuds. Comme, justement, c'est ce que nous cherchons, la loi des nœuds en terme de potentiels est toute indiquée. Écrivons-la au point A en choisissant (judicieusement !) la masse en M de telle sorte que nous ayons $V_A = U$. Ainsi :

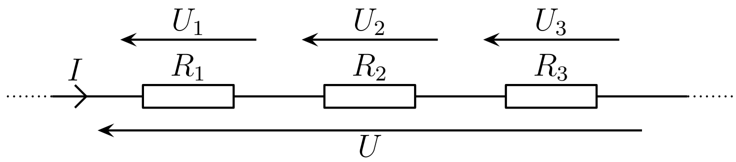
$$\eta + \frac{0-V_A}{R_1} + \frac{0-V_A}{R_2} + \frac{0-V_A}{R_3} = 0 \quad \leadsto \quad \eta = V_A\,(G_1+G_2+G_3) \quad \leadsto \quad U = \frac{\eta}{G_1+G_2+G_3}$$

II·1·*iii* – diviseurs de tension et de courant

✧ Démontrons dans ce paragraphe les lois dites des diviseurs de tension et de courant.

✯ diviseur de tension

✧ Considérons la branche suivante.



✧ L'additivité des tensions et les lois courant – tension des résistors permettent d'écrire :

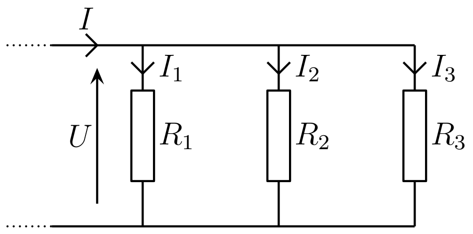
$$U = U_1+U_2+U_3 = R_1\,I + R_2\,I + R_3\,I = (R_1+R_2+R_3)\,I \quad \leadsto \quad I = \frac{U}{R_1+R_2+R_3}$$

✧ Et comme $U_1 = R_1\,I$, nous obtenons bien $U_1 = \dfrac{R_1}{R_1+R_2+R_3} \times U$

✧ Il est important de voir que la tension U n'est pas forcément « fournie » par un générateur : il peut y avoir n'importe quoi dans le reste du circuit.

✯ diviseur de courant

✧ Considérons les deux nœuds suivants.



✧ La loi des nœuds et les lois courant – tension des résistors permettent d'écrire :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = G_1\,U + G_2\,U + G_3\,U = (G_1 + G_2 + G_3)\,U \qquad \rightsquigarrow \qquad U = \frac{I}{G_1 + G_2 + G_3}$$

✧ Et comme $I_1 = G_1\,U$, nous obtenons bien $I_1 = \dfrac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \times I$.

✧ De même que précédemment, le courant d'intensité I n'est pas forcément « fournie » par un générateur : il peut y avoir n'importe quoi dans le reste du circuit.

II·1·*iv* – association de résistors

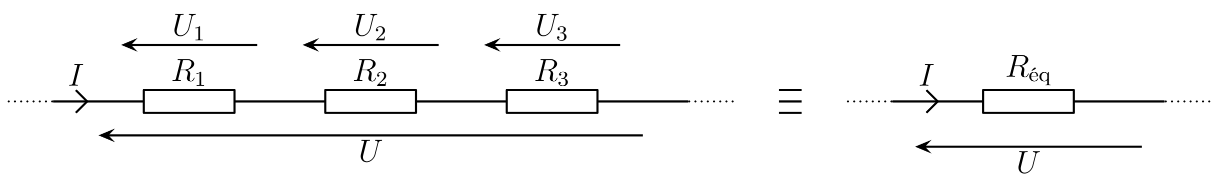
✯ idée de la démonstration

> Deux dipôles sont dits *équivalents* lorsqu'ils ont la même relation courant – tension.

✧ Pour déterminer dans quelles conditions deux dipôles sont équivalents, il faut donc trouver leurs relations courant – tension et faire en sorte qu'elles soient identiques. Bien sûr, il faudra faire attention aux conventions avec lesquelles nous écrirons ces relations.

✯ association série de résistors

✧ Considérons l'association série de résistors ci-dessous.



✧ L'additivité des tensions et les relations courant – tension des résistors donne immédiatement :

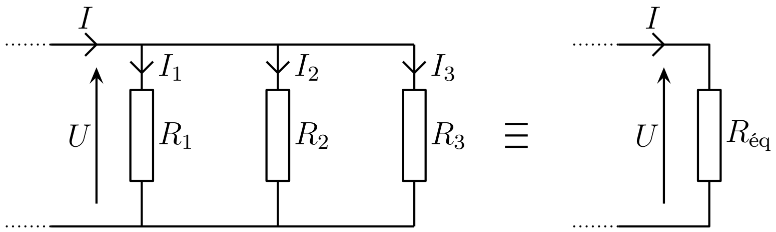
$$U = U_1 + U_2 + U_3 = R_1\,I + R_2\,I + R_3\,I = (R_1 + R_2 + R_3)\,I$$

✧ Quant à la relation courant tension du dipôle que nous souhaitons équivalent – un résistor aussi – c'est évidemment $U = R_{\text{éq}}\,I$.

✧ Par identification, nous pouvons alors déduire $\boxed{R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 + R_3}$.

✯ association parallèle

✧ Faisons la même chose avec l'association parallèle ci-dessous.



✧ La loi des nœuds et les relations courant – tension des résistors donnent :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = G_1\,U + G_2\,U + G_3\,U = (G_1 + G_2 + G_3)\,U$$

✧ Quant à la relation courant tension du dipôle que nous souhaitons équivalent – un résistor aussi – c'est évidemment $I = G_{\text{éq}}\,U$.

✧ Par identification, nous pouvons alors déduire $\boxed{G_{\text{éq}} = G_1 + G_2 + G_3}$ qui n'est autre que :

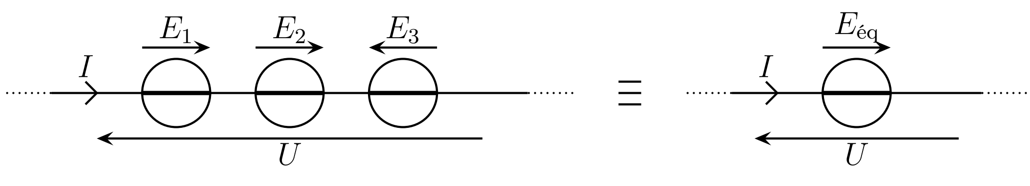
$$\boxed{\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

☕ *Remarque* : Dans le cas fréquent où il n'y a que deux résistors, nous pouvons écrire directement $R_{\text{éq}} = \dfrac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}$.

II·1·*v* – association de générateurs idéaux de tension ou de courant

✯ association série de générateurs idéaux de tension

✧ Considérons l'association série de générateurs idéaux de tension ci-dessous.



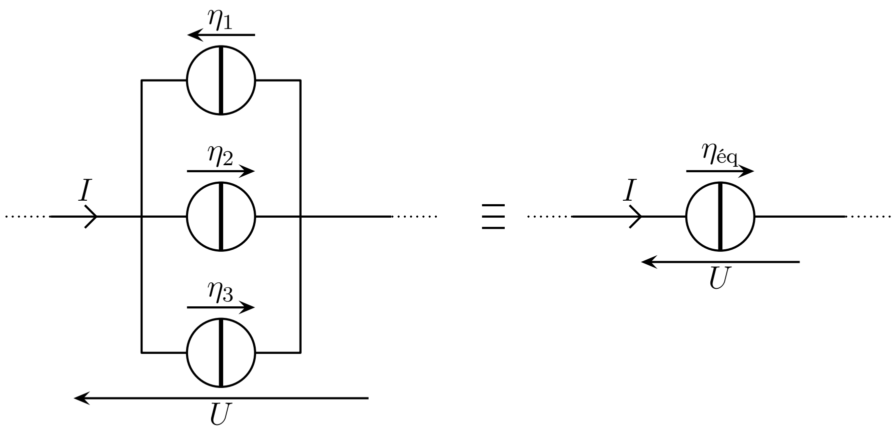
✧ L'additivité des tension et les relations constitutives des générateurs donnent immédiatement :

$$U = -E_1 - E_2 + E_3 \qquad \text{et} \qquad U = -E_{\text{éq}}$$

✧ Nous pouvons alors en déduire immédiatement $\boxed{E_{\text{éq}} = E_1 + E_2 - E_3}$.

✯ association parallèle de générateurs idéaux de courant

✧ Considérons l'association parallèle de générateurs idéaux de courant ci-dessous.



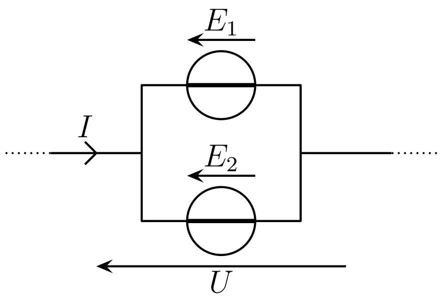
✧ La loi des nœuds et les relations constitutives des générateurs nous donnent immédiatement :

$$I = -\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \qquad \text{et} \qquad I = +\eta_{éq}$$

✧ Nous pouvons alors en déduire immédiatement $\boxed{\eta_{éq} = -\eta_1 + \eta_2 - \eta_3}$.

✯ association parallèle de générateurs idéaux de tension

✧ Considérons l'association parallèle de générateurs idéaux de tension ci-dessous.



✧ Les lois constitutives des générateurs nous donnent :

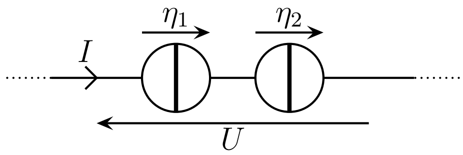
$$U = +E_1 \qquad \text{et} \qquad U = +E_2$$

✧ Ces deux relations ne peuvent pas être simultanément vérifiées car il faudrait alors, à une précision extrême $E_1 = E_2$, ce qui n'est physiquement pas possible.
✧ En conséquence de quoi ce montage ne peut pas fonctionner : il risque d'y avoir détérioration des générateurs.

Il n'est pas possible d'associer en parallèle des générateurs idéaux de tension.

✯ association série de générateurs idéaux de courant

✧ Considérons l'association série de générateurs idéaux de courant ci-dessous.



✧ Les lois constitutives des générateurs nous donnent :

$$I = +\eta_1 \qquad \text{et} \qquad I = +\eta_2$$

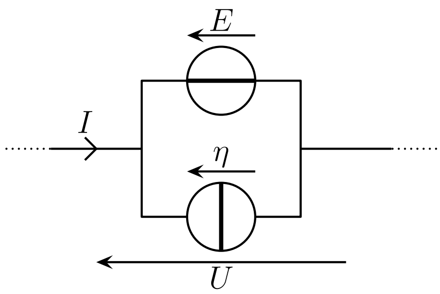
✧ Comme précédemment, ces deux relations ne peuvent pas être simultanément vérifiées.

> Il n'est pas possible d'associer en série des générateurs idéaux de courant.

II·1·*vi* – association de générateurs idéaux de tension et de courant

✯ association parallèle

✧ Considérons l'association parallèle ci-dessous.



✧ Nous pouvons alors écrire, pour ce dipôle :

$$U = E \qquad \text{et} \qquad I = -\eta - I_0$$

où I_0 est l'intensité du courant qui traverse le générateur idéal de tension, *ie.* est totalement inconnue.

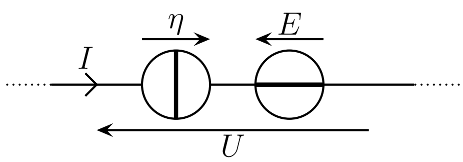
✧ Nous pouvons alors constater que ce dipôle est équivalent à un dipôle tel que $\boxed{U = +E}$

> Une association parallèle de dipôles quelconques contenant un générateur idéal de tension de f.é.m. E est équivalent à un généraleur idéal de tension unique de f.é.m. E.

✧ L'intérêt d'une telle association peut être, par exemple, de réguler la tension aux bornes du générateur de courant. C'est ce dernier qui fournirait le maximum d'énergie et c'est le générateur idéal de tension qui imposerait la tension.

✯ association série

✧ Considérons l'association série ci-dessous.



✧ Nous pouvons alors écrire, pour ce dipôle :

$$I = \eta \qquad \text{et} \qquad U = E + U_0$$

où U_0 est la tension aux bornes du générateur idéal de courant, *ie.* est totalement inconnue.

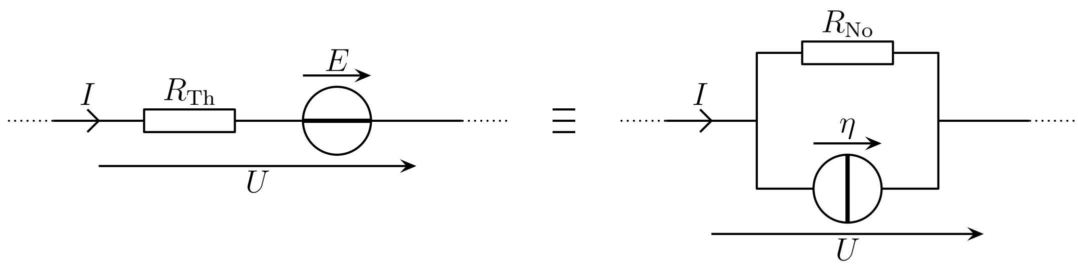
✧ Nous pouvons alors constater que ce dipôle est équivalent à un dipôle tel que $\boxed{I = +\eta}$

> Une association série de dipôles quelconques contenant un générateur idéal de courant de c.é.m. η est équivalent à un généraleur idéal de courant unique de c.é.m. E.

✧ Comme pour l'exemple précédent, l'association n'est pas forcément inutile pour des raisons énergétiques.

II·1·*vii* – Transformation Thévenin – Norton

✧ Faisons de même avec les modèles de Thévenin et de Norton du générateur réel.



✧ Pour le modèle de Thévenin, l'additivité des tensions nous donne :

$$U = -R_{\text{Th}}\, I + E$$

✧ Pour le modèle de Norton, la loi des nœuds fournit la relation :

$$I = -G_{\text{No}}\, U + \eta = -\frac{U}{R_{\text{No}}} + \eta \qquad \rightsquigarrow \qquad U = R_{\text{No}}\, \eta - R_{\text{No}}\, I$$

✧ Pour que les deux dipôles soient équivalents, il faut, par identification :

$$\begin{cases} R_{\text{No}} = R_{\text{Th}} \\ E = R_{\text{No}}\, \eta \end{cases}$$

ce qui est bien les relations connues.

II·2 – Dipôles réels

✧ Nous allons voir dans ce paragraphe comment se modélisent les comportements des dipôles réels à partir des dipôles idéaux que nous connaissons.

II·2·*i* – résistors

✧ Les résistors réels sont très peu différents des résistors idéaux.

> Un résistor réel se modélise par un résistor idéal.

II·2·*ii* – les fils

Les fils réels se modélisent par des résistor de résistance faible.

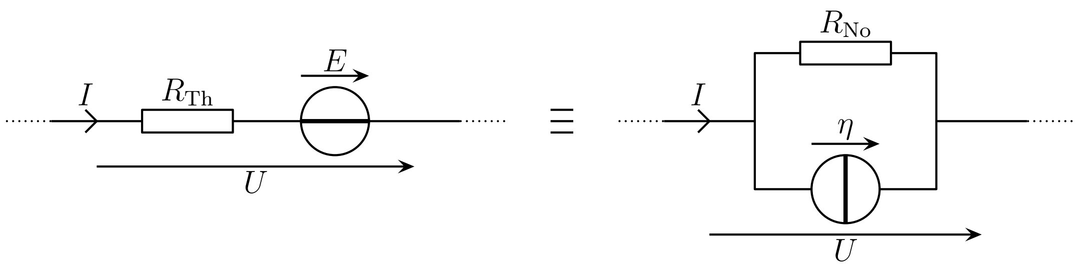
✧ La résistance des fils est de l'ordre de 0,1 Ω pour les fils simples et de quelques ohms pour les câbles coaxiaux.

Sauf dans des cas exceptionnels, les résistances des fils n'est pas prise en compte.

II·2·*iii* – générateurs

✯ la modélisation est connue

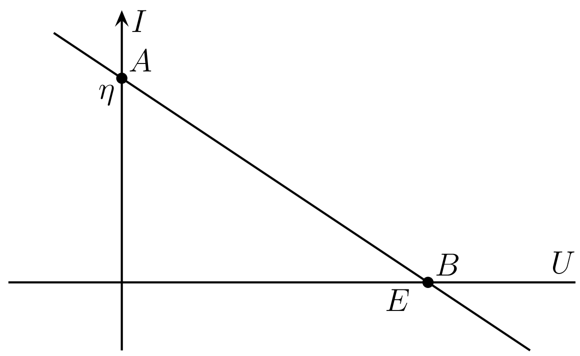
✧ Rappelons que les deux modèles de générateurs réels sont ceux de Thévenin et de Norton :



✯ caractéristique

✧ Traçons la relation courant – tension de ce générateur en convention générateur.

✧ La loi des nœuds avec le modèle de Norton donne directement $I = \eta - \dfrac{U}{R}$ soit :



✯ interprétation

✧ Le point A correspond à $U = 0$ et $I = \eta$: il s'agit du courant qui circule lorsque la tension est nulle.

Le *courant de court-circuit* d'un dipôle est le courant qui circule dans un fil reliant directement les deux bornes du dipôle.

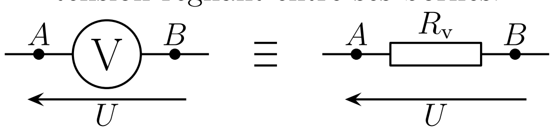
✧ Le point B correspond à $U = E$ et $I = 0$: il s'agit de la tension qui règne aux bornes du dipôle lorsqu'aucun courant ne circule, *ie.* lorsqu'il est débranché.

La *tension à vide* d'un dipôle est la tension régnant entre ses bornes lorsque le dipôle n'est pas relié à un circuit.

Si un dipôle est modélisable par un générateur réel, la connaissance du courant de court-circuit et de la tension à vide suffit à le caractériser entièrement.

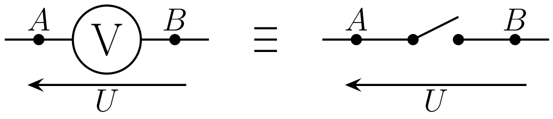
II·2·*iv* – voltmètre

Un voltmètre réel se comporte comme une résistor de résistance élevée affichant la tension régnant entre ses bornes.



✧ Suivant la qualité du voltmètre, R_v peut aller du MΩ au GΩ.

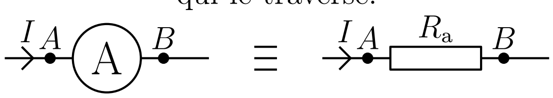
Un voltmètre idéal se comporte comme un interrupteur ouvert affichant la tension régnant entre ses bornes.



✧ La plupart du temps, un voltmètre peut être considéré comme idéal.

II·2·*v* – ampèremètre

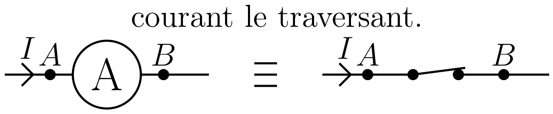
Un ampèremètre réel se comporte comme une résistor affichant l'intensité I du courant qui le traverse.



✧ La résistance R_a varie fortement suivant le calibre utilisé, *ie.* suivant la valeur de l'intensité mesurée.

La tension aux bornes d'un ampèremètre réel est de l'ordre de 0,2 V.

Un ampèremètre idéal se comporte comme un interrupteur fermé affichant l'intensité du courant le traversant.

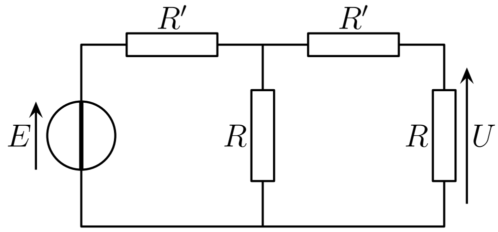


✧ La plupart du temps, il est possible de considérer l'ampèremètre idéal.

II·3 – De nouveaux exemples

II·3·i – ponts à la chaîne

✧ Considérons le circuit ci-dessous constitué de deux ponts successifs et pour lequel nous cherchons U.

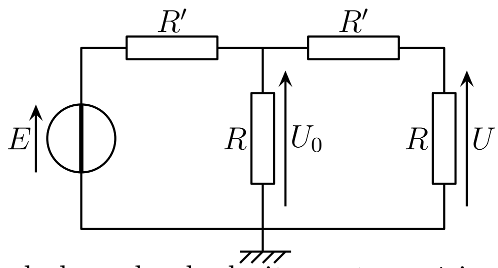


✧ Analyse physique :
- ➜ régime continu
- ➜ grandeurs pertinentes : R, R' et E
- ➜ grandeurs inconnues : U et toutes les intensités des courants.

✧ Analyse technique :
- ➜ circuit à 2 mailles et 4 nœuds (dont 2 principaux) $\rightarrow$ c'est un circuit facile
- ➜ la grandeur recherchée n'est pas une grandeur directement calculable

✧ Nous pouvons procéder de différentes manières :
- ➜ par transformation de circuit $\rightarrow$ bof car circuit simple
- ➜ par approche maillère avec ses deux inconnues $\rightarrow$ bof car le but est de trouver une tension
- ➜ par approche nodale avec ses deux inconnues $\rightarrow$ oui pour trouver **la grandeur** inconnue, *ie.* le potentiel à l'un des deux nœuds

✧ Réécrivons le circuit avec les grandeurs intéressantes.



✧ Comme les résistors R et R' de la branche de droite sont en série, nous pouvons utiliser le diviseur de tension :

$$U = \frac{R}{R+R'} \times U_0$$

✧ Pour déterminer U_0, nous allons tout simplement utiliser la loi des nœuds en terme de potentiels :

$$\frac{E-U_0}{R'} + \frac{0-U_0}{R} + \frac{0-U_0}{R+R'} = 0$$

✧ En multipliant par $R\,R'\,(R+R')$ et en isolant U_0, nous obtenons :

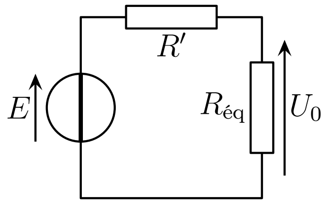
$$E\,R\,(R+R') = U_0\left(R\,(R+R') + R'\,(R+R') + R\,R'\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad U_0 = \frac{R\,(R+R')}{R^2+R'^2+3\,R\,R'} \times E$$

✧ Nous pouvons remarquer qu'il est plus intéressant de prendre, dans la branche de droite, les deux résistors de manière à obtenir une équation comportant seulement la grandeur inconnue U_0.

✧ Et avec le résultat précédent sur U, nous obtenons finalement : $\boxed{U = \dfrac{R^2}{R^2+R'^2+3\,R\,R'} \times E}$, ce qui est bien un résultat homogène.

✯ autre méthode pour trouver U_0.

✧ Il n'est pas possible d'appliquer un diviseur de tension directement entre U_0 et E car les résistors R et R' de gauche ne sont pas en série. En revanche, en associant les trois résistors de droite $R_{\text{éq}} = R /\!\!/ (R \oplus R')$ nous obtenons le circuit équivalent suivant (circuit dans lequel la tension U est perdue) :



où $R_{\text{éq}} = R /\!\!/ (R \oplus R') = \dfrac{R\,(R+R')}{R+(R+R')} = \dfrac{R\,(R+R')}{2\,R+R'}$

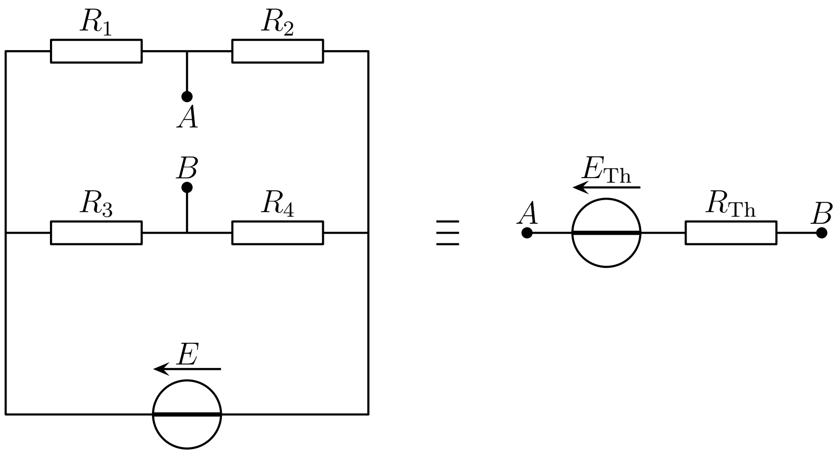
✧ Cette fois $R_{\text{éq}}$ et R' sont en série et nous pouvons appliquer un diviseur de tension :

$$U_0 = \frac{R_{\text{éq}}}{R'+R_{\text{éq}}} \times E = \frac{\dfrac{R\,(R+R')}{2\,R+R'}}{R' + \dfrac{R\,(R+R')}{2\,R+R'}} \times E = \frac{R\,(R+R')}{R'\,(2R+R')+R\,(R+R')} \times E$$

✧ Et nous retrouvons bien le résultat précédent $U_0 = \dfrac{R\,(R+R')}{R^2+R'^2+3\,R\,R'} \times E$.

II·3·*ii* – pont de Wheastone

✧ Considérons le dipôle AB ci-dessous. Le but est de trouver son modèle de Thévenin équivalent.



✧ Analyse physique :
- ➜ grandeurs pertinentes : les résistances et la f.é.m.
- ➜ grandeurs inconnues : toutes les potentiels et intensités

✧ Analyse technique :
- ➜ aucun dipôle n'est associé avec un autre en série ou en parallèle → pas de transformation de circuit
- ➜ nous pouvons déterminer E_{th} en cherchant la tension U_{AB} à vide
- ➜ nous ne pouvons pas déterminer R_{Th} par transformation
- ➜ nous pouvons trouver η_{No} en déterminant le courant de court-circuit et en déduire R_{Th}

✯ tension à vide E_{th}

✧ Cherchons la tension à vide U_{AB}.

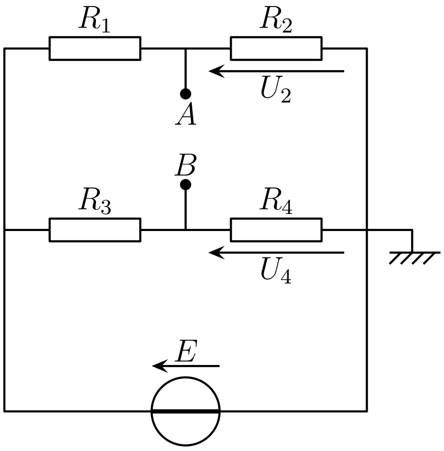
✧ Analyse technique :

➜ il s'agit d'un circuit à deux mailles et deux nœuds → nous allons préférer l'approche nodale car le but est de trouver une tension

➜ par additivité des tensions, nous pouvons écrire $E_{\text{th}} = -U_4 + U_2$

➜ fixons la masse à un nœud crucial

✧ Nous obtenons alors le circuit suivant.



✧ Dans ce circuit, nous pouvons appliquer deux diviseurs de tension : entre R_1 et R_2 d'une part et entre R_3 et R_4 d'autre part car ces deux couples de résistors sont en série. Nous obtenons :

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}\,E \quad \text{et} \quad U_4 = \frac{R_4}{R_3+R_4}\,E \qquad \leadsto \qquad E_{\text{Th}} = U_2 - U_4 = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_4}{R_3+R_4}\right) E$$

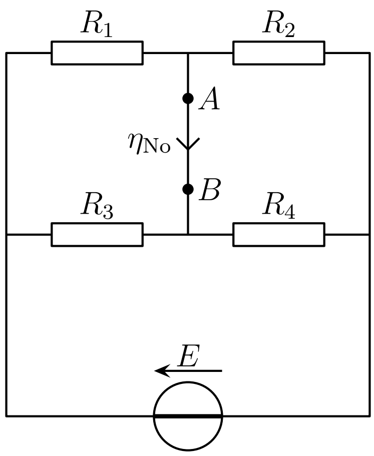
✧ Nous pouvons alors simplifier en réduisant au même dénominateur :

$$E_{\text{Th}} = \frac{R_2\,(R_3+R_4) - R_4\,(R_1+R_2)}{(R_3+R_4)\,(R_1+R_2)}\,E = \frac{R_2\,R_3 + \cancel{R_2\,R_4} - R_1\,R_4 - \cancel{R_2\,R_4}}{(R_3+R_4)\,(R_1+R_2)}\,E$$

✧ Nous obtenons alors $\boxed{E_{\text{Th}} = \dfrac{R_2\,R_3 - R_1\,R_4}{(R_3+R_4)\,(R_1+R_2)}\,E}$

✯ courant de court-circuit η_{No}

✧ Nous devons déterminer le courant qui circule de A vers B dans le fil qui court-circuite le dipôle AB. Cela donne le circuit suivant.



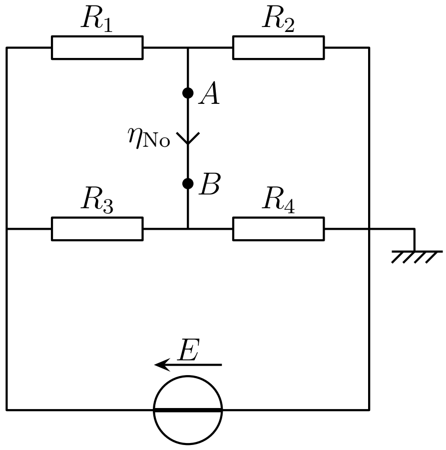
✧ Analyse technique :

➜ c'est un circuit à trois mailles et trois nœuds → pas de solution directes

➜ aucun couple de dipôles n'est associé en série ou en parallèle → pas de transformation possible

➜ il y aura soit trois inconnues en courant soit deux inconnues en tension. Comme le potentiel d'un nœud est tout de suite connu grâce au générateur de tension U_0, cela ne laissera qu'une seule inconnue en tension → nous utiliserons l'approche nodale.

✧ Positionnons la masse à un endroit adéquat et n'oublions pas le courant η_{No}.



✧ La loi des nœuds en terme de potentiels au point A (ou B) s'écrit :

$$\frac{E-V_A}{R_1}+\frac{E-V_A}{R_3}+\frac{0-V_A}{R_2}+\frac{0-V_A}{R_4}=0 \quad \rightsquigarrow \quad V_A=\frac{\dfrac{E}{R_1}+\dfrac{E}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}}=\frac{(G_1+G_2)\,E}{G_1+G_2+G_3+G_4}$$

✧ Pour déterminer η_{No}, nous allons écrire une loi qui parle de courant, donc, ici, une loi des nœuds. Bien sûr, il faut que cette loi des nœuds en terme de potentiels. Écrivons cette loi en A :

$$\frac{E-V_A}{R_1}+\frac{0-V_A}{R_2}-\eta_{\text{No}}=0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \eta_{\text{No}}=\frac{E}{R_1}-V\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=G_1\,E-(G_1+G_2)\,V_A$$

✧ Il ne reste plus qu'à remplacer V_A par son expression :

$$\begin{aligned}
\eta_{\text{No}} &= \frac{G_1\,(G_1+G_2+G_3+G_4)-(G_1+G_2)\,(G_1+G_3)}{G_1+G_2+G_3+G_4}\times E \\
&= \frac{\cancel{G_1{}^2}+\cancel{G_1\,G_2}+\cancel{G_1\,G_3}+G_1\,G_4-\cancel{G_1{}^2}-\cancel{G_1\,G_3}-\cancel{G_2\,G_1}-G_2\,G_3}{G_1+G_2+G_3+G_4} \\
&= \frac{G_1\,G_4-G_2\,G_3}{G_1+G_2+G_3+G_4}=\frac{\dfrac{1}{R_1}\,\dfrac{1}{R_4}-\dfrac{1}{R_2}\,\dfrac{1}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}}\times E
\end{aligned}$$

✧ Et en multipliant par $R_1\,R_2\,R_3\,R_4$:

$$\boxed{\eta_{\text{No}}=\frac{(R_2\,R_3-R_1\,R_4)}{R_1\,R_2\,(R_3+R_4)+R_3\,R_4\,(R_1+R_2)}\times E}$$

✯ détermination de R_{Th}

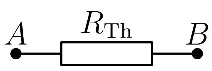
✧ Les équivalences entre modèles permettent d'écrire $R_{\text{Th}} = \dfrac{E_{\text{Th}}}{\eta_{\text{No}}}$, ce qui donne, ici :

$$R_{\text{Th}} = \frac{E_{\text{Th}}}{\eta_{\text{No}}} = \frac{\dfrac{\cancel{R_2\,R_3 - R_1\,R_4}}{(R_3+R_4)\,(R_1+R_2)}\cancel{E}}{\dfrac{\cancel{R_2\,R_3 - R_1\,R_4}}{R_1\,R_2\,(R_3+R_4)+R_3\,R_4\,(R_1+R_2)}\cancel{E}}$$
$$= \frac{R_1\,R_2\,(R_3+R_4)+R_3\,R_4\,(R_1+R_2)}{(R_3+R_4)\,(R_1+R_2)}$$
$$= \frac{R_1\,R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3\,R_4}{R_3+R_4}$$

✧ Ou encore : $\boxed{R_{\text{Th}} = (R_1/\!\!/R_2) \oplus (R_3/\!\!/R_4)}$.

✯ comme c'est étrange ...

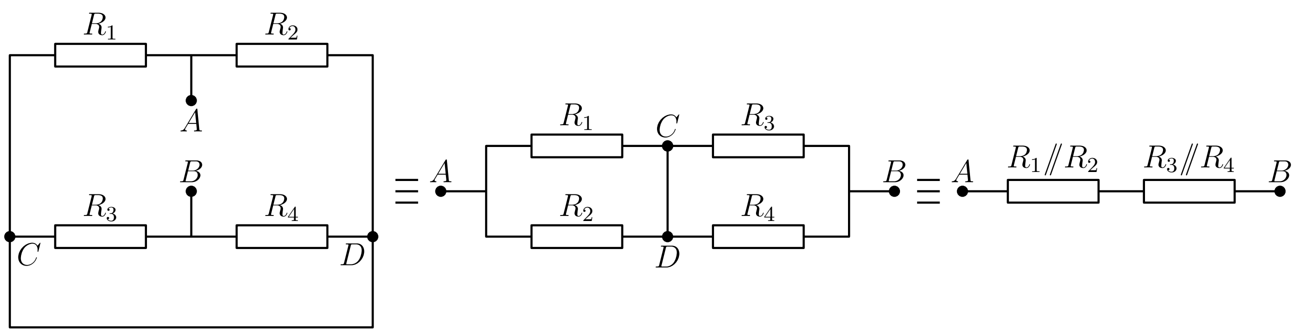
✧ Lorsque nous imposons $E_{\text{Th}} = 0$, ce qui revient à « remplacer » le générateur idéal de tension par un fil, le modèle équivalent se réduit à :



c'est-à-dire que le dipôle dans son ensemble est équivalent à une résistance unique.

✧ Imposons alors, dans le dipôle initial $E_{\text{Th}} = 0$ en faisant $E = 0$ et cherchons la résistance équivalente.

✧ En réécrivant bien le circuit (en s'aidant des points C et D), nous obtenons :

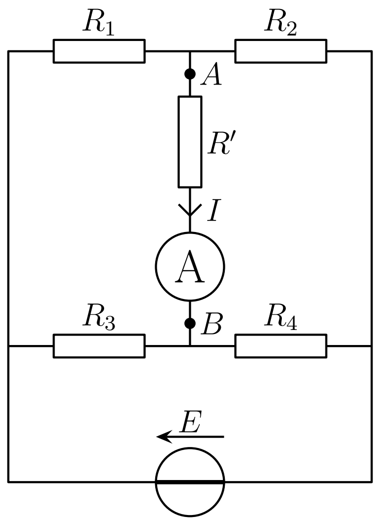


et pouvons alors rapidement constater que nous obtenons bien le résultat attendu, à savoir que la résistance équivalente entre A et B n'est autre que $R_{\text{éq}} = (R_1/\!\!/R_2) \oplus (R_3/\!\!/R_4)$.

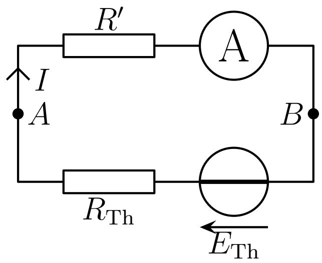
STOP la méthode précédente qui consiste à éteindre des générateurs est généralisable et très puissante mais devient dangereuse. Elle est donc déconseillée à l'emploi. Nous l'avons vu uniquement pour la culture. Pour notre part, nous nous limiterons aux transformations de circuit ou, si le pire des cas arrive, à la détermination de la tension à vide et du courant de court-circuit.

✯ utilité de ce pont

✧ Ce genre de pont permet de déterminer précisément la valeur d'une résistance R de la manière suivante. Il suffit de commencer par insérer une résistance R' et un ampèremètre entre les points A et B.



✧ L'équivalence du dipôle AB nous permet alors de transformer le circuit obtenu de la manière suivante :



✧ Il s'agit d'un circuit à une maille et, en considérant l'ampèremètre idéal, nous avons alors :

$$I = \frac{E_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R'}$$

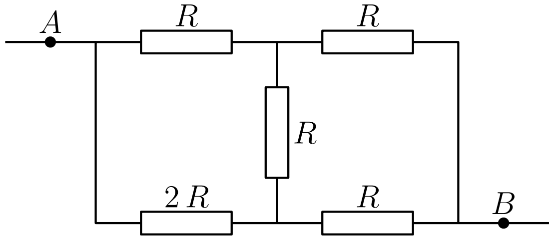
✧ Or E_{Th} est proportionnel à $(R_1\,R_4 - R_2\,R_3)$. Donc si $R_2\,R_3 = R_1\,R_4$, I sera forcément nul.

✧ Il ne reste plus qu'à régler R_2 (ou tout autre résistance) jusqu'à obtenir $I = 0$ pour en déduire R_1 : le pont est alors dit *équilibré*.

✧ Et pourquoi mesurer une résistance R ? Parce que les résistances peuvent dépendre de différentes contraintes (température, déformations, ...) et que cela permet, justement, de remonter à ces grandeurs intéressantes. C'est bien pour ça que l'exemple persiste dans le cours : c'est très utilisé en SI !

II·3·*iii* – dipôle équivalent à un résistor

✧ Le but est de rechercher la résistance équivalente au dipôle ci-dessous.



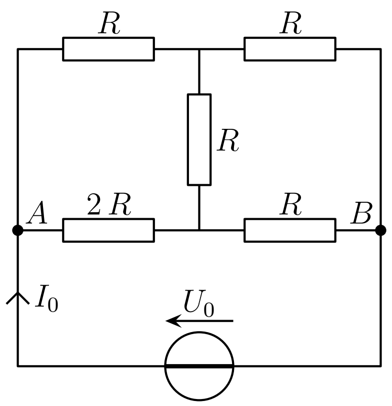
✧ Analyse physique :
- ➜ la seule grandeur pertinente est R
- ➜ le résultat sera proche de R car toutes les résistances ont des valeurs proches de R

✧ Analyse technique :

➜ aucun couple de résistances n'est associé en série ou en parallèle → pas de transformation de circuits

➜ il va falloir revenir à la définition même d'une résistance équivalente, *ie.* trouver la relation courant – tension de l'ensemble

✧ Pour trouver la relation courant tension, nous allons imposer la tension U_0 aux bornes du dipôle AB et en notant I_0 le courant entrant par la borne A, nous allons chercher $R_{\text{éq}}$ tel que $U_0 = +R_{\text{éq}}\, I$.

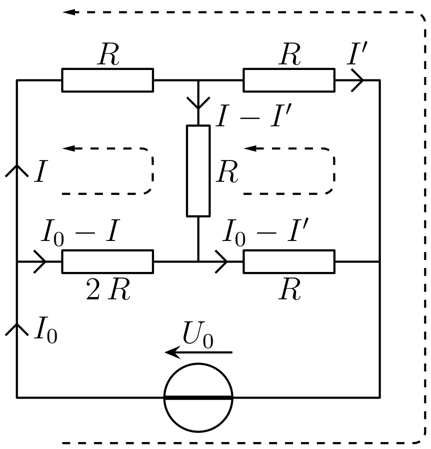


✧ Analyse technique :

➜ c'est un circuit à trois mailles et quatre nœuds : quelle que soit l'approche, il y aura 3 inconnues. Toutefois, comme U_0 est (fitivement fixé) alors que I_0 est indéterminé, l'approche maillère va être préférable : il va donc falloir chercher I_0 en fonction de U_0.

➜ nous allons veiller à ce que les courants soient bien placés de telle sorte que l'écriture de U_0 soit simplifiée.

✧ Nous obtenons le circuit suivant.



✧ Les trois lois des mailles représentées s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} -U_0 + R\,I' + R\,I = 0 \\ -2\,R\,(I_0 - I) + R\,(I - I') + R\,I = 0 \\ -R\,(I_0 - I') + R\,I' - R\,(I - I') = 0 \end{array}\right.$$

✧ Réécrivons-les de manière à mettre les inconnues d'un côté et la tension (connue) de l'autre.

$$\left\{\begin{array}{llll} R\,I & +R\,I' & & = U_0 \text{ (☼)} \\ 4\,R\,I & -R\,I' & -2\,R\,I_0 & = 0 \text{ (◒)} \\ -R\,I & +3\,R\,I' & -R\,I_0 & = 0 \text{ (●)} \end{array}\right.$$

✧ Seul I_0 nous intéresse. Nous allons donc éliminer successivement les inconnues intéressantes. Écrivons ce qu'il reste :

$$\left\{\begin{array}{rclll} 4(\text{☼}) - (\text{◒}) & \rightarrow & 5\,R\,I' & +2\,R\,I_0 & = 4\,U_0 \;(\text{▦}) \\ (\text{☼}) + (\text{●}) & \rightarrow & 4\,R\,I' & -\,R\,I_0 & = U_0 \;(\text{▤}) \end{array}\right.$$

✧ Pour obtenir I_0 il ne reste plus donc qu'à faire :

$$4(\text{▦}) - 5(\text{▤}) \rightarrow 13\,R\,I_0 = 11\,U_0 \qquad \rightsquigarrow \qquad U_0 = \frac{13}{11}\,R\,I_0 \quad \text{et} \quad \boxed{R_{\text{éq}} = \frac{13}{11}\,R}$$

☕ *Remarque* : le système s'est bien résolu car il y avait de nombreuses simplifications grâce aux valeurs des résistances des résistors.

III – Aspect énergétique

III·1 – Approche de la puissance et de l'énergie

III·1·*i* – que représente ces grandeurs ?

✧ L'énergie est un concept bien compliqué à définir en physique. Disons simplement que c'est une grandeur bien spécifique qui peut prendre différents aspects : énergie cinétique, potentielle, électrique, magnétique, chimique, ...

> L'énergie se conserve : elle ne peut ni se créer ni se détruire, seulement s'échanger ou changer de forme.
> Elle s'exprime en joule noté J.

✧ C'est une des lois physiques les plus fondamentales : elle a notamment permis la découverte du neutrino. Lors d'une expérience nucléaire, il « manquait de l'énergie ». Il a alors été postulé l'existence d'une particule inconnue et non détectée : le neutrino. La suite a mis en évidence l'existence de cette particule.

✧ Hormis à la définir par son mode de calcul, il est très difficile de se la représenter tellement l'énergie peut prendre de formes différentes.

✧ En électrocinétique, nous parlerons de l'énergie électrique, celle qui permet de faire fonctionner des appareils électriques : celle qui passe par le réseau EDF.

✧ La puissance, n'est autre que la vitesse à laquelle s'échange une énergie. Elle représente donc une sorte de flux / flot d'énergie. Plus la puissance est élevée, plus il peut y avoir d'énergie rapidement. D'ailleurs la notion de puissance est bien connue (voiture, lampes de bureau, ...)

III·1·*ii* – aspect physique : caractère générateur ou récepteur ?

✧ L'énergie est un des concepts les plus physique, nous aurons l'occasion d'en reparler tout au long de l'année. Et si certains paradoxes ou choses bizarres apparaîtront ici ou là, ce sera rarement le cas en ce qui concerne l'énergie qui reste, somme toute, très intuitive : il existe ceux qui fournissent l'énergie et ceux qui l'utilisent.

> Un dipôle qui fournit effectivement de l'énergie électrique au reste du circuit possède un *caractère générateur.*

> Un dipôle qui reçoit effectivement de l'énergie électrique de la part du reste du circuit possède un *caractère récepteur*.

✧ Nous verrons que si les générateur ont pour rôle premier d'avoir un caractère générateur, ce n'est pas automatiquement et obligatoirement le cas. Exemple de générateur ayant un caractère récepteur : les batteries de mobile lors de la recharge.

✧ De même, certains dipôles qui ne s'appellent pas « générateurs » peuvent avoir un caractère générateur. Les condensateurs par exemple, peuvent stocker de l'énergie (sous forme électrostatique) pour la restituer plus tard, c'est de cette manière que sont conçues certaines mini lampes à LED.

✧ Il ne faut pas oublier que le caractère générateur ou récepteur traduit une réalité physique. Pour un problème donné, tout le monde doit donc trouver la même chose.

III·1·*iii* – aspect conventionnel : reçu ou fourni ?

✧ Comme l'énergie va principalement s'échanger (et pour cause !), il faudra bien préciser le sens dans lequel nous allons compter les transferts.

> L'*énergie reçue* par un dipôle est une grandeur algébrique telle que :
> ➜ elle est positive si le dipôle reçoit effectivement de l'énergie (caractère récepteur)
> ➜ elle est négative si le dipôle fournit effectivement de l'énergie (caractère générateur)

> Une grandeur est dite *algébrique* lorsqu'elle peut être positive et négative **et** que le signe a une signification physique.

> L'*énergie fournie* par un dipôle n'est autre que l'opposée de l'énergie reçue, a savoir :
> ➜ elle est positive si le dipôle fournit effectivement de l'énergie (caractère générateur)
> ➜ elle est négative si le dipôle reçoit effectivement de l'énergie (caractère récepteur)

✧ Il n'y aura rien de difficile là dedans mais certaines fois, ce sera un peu complexe car il faudra bien prendre en compte toutes les conventions.électrique

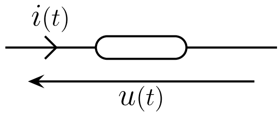
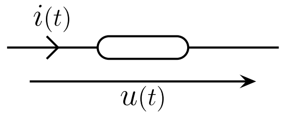
✧ Comme d'habitude, en réfléchissant *a priori* au caractère générateur ou récepteur, il est possible alors de choisir en conséquence les conventions (générateur ou récepteur) et les grandeurs calculées (fournie ou reçue) qui seront, alors, positivie. C'est possible mais ce n'est ni nécessaire ni plus efficace : quelles que soient les conventions choisies et la méthode d'étude du problème, l'interprétation des résultats, *ie.* les résultats physiques, seront les mêmes !

III·2 – Déterminer des puissances

III·2·*i* – expression des puissances reçue et fournie

✧ Nous montrerons dans longtemps le résultat suivant.

Soit un dipôle quelconque. Alors la puissance échangée est proportionnelle au produit de la tension entre ses bornes par l'intensité du courant qui le traverse.

	convention récepteur	convention générateur
		
puissance reçue	$\mathscr{P}_{\text{r}}(t) = +u(t)\,i(t)$	$\mathscr{P}_{\text{r}}(t) = -u(t)\,i(t)$
puissance fournie	$\mathscr{P}_{\text{f}}(t) = -u(t)\,i(t)$	$\mathscr{P}_{\text{f}}(t) = +u(t)\,i(t)$

La puissance s'exprime en watt noté W.

✧ La méthode de calcul de la puissance est logique puisque :
- ➜ la tension représente la perte énergétique de chaque charge qui traverse le dipôle
- ➜ l'intensité repréente la quantité de charge qui traverse le dipôle

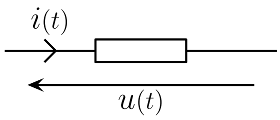
✧ Du point de vue dimensionnel, nous pouvons constater que 1 W = 1 V × 1 A.

✧ Au niveau des dipôles de TP, l'ordre de grandeurs des puissances fournie ou reçue est le watt. La plupart des résistors fondent s'ils reçoivent plus d'un quart de watt de puissance.

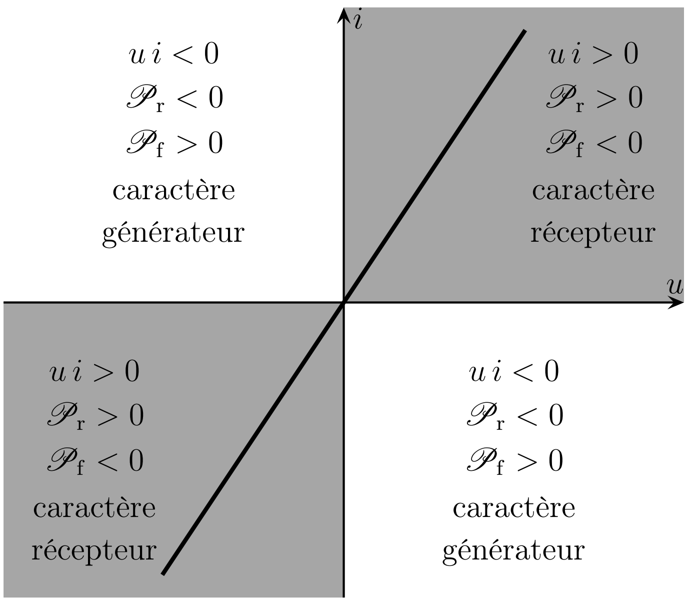
III·2·*ii* – interprétation des caractéristiques graphiques

✭ exemple du résistor en convention récepteur

✧ Considérons le résistor ci-dessous.



✧ Étant donné qu'il est en convention récepteur, sa relation courant – tension s'écrit $i(t) = \dfrac{u(t)}{R}$, ce qui nous permet de tracer sa caractéristique.



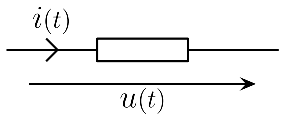
✧ Sur cette caractéristique, il est possible de distinguer deux types de cadrans :
- ➜ les grisés qui sont tels que :
  - ➙ le produit $u\,i$ soit positif

  - ➜ la puissance reçue soit positive
  - ➜ la puissance fournie soit négative
  - ➜ le dipôle présente un caractère récepteur
- ➜ les clairs qui sont tels que :
  - ➜ le produit $u\,i$ soit négatif
  - ➜ la puissance reçue soit négative
  - ➜ la puissance fournie soit positive
  - ➜ le dipôle présente un caractère générateur

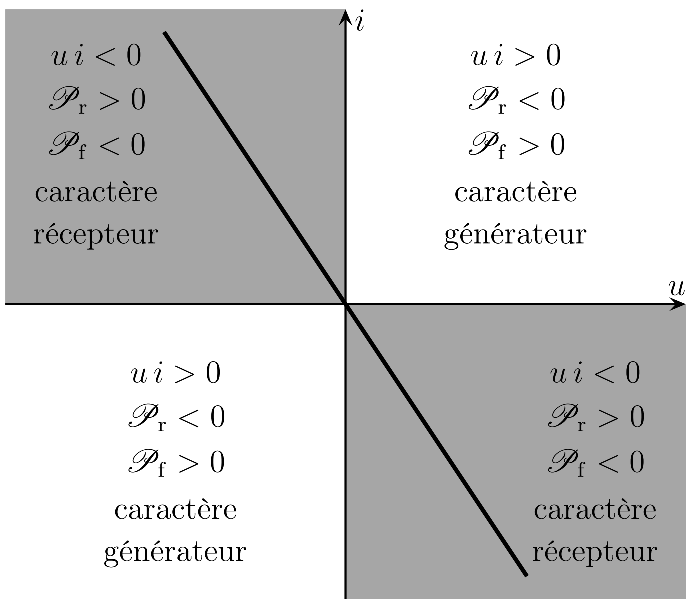
✧ Nous pouvons alors constater que le résistor présente **toujours** un caractère récepteur.

✯ exemple du résistor en convention générateur

✧ Considérons le résistor ci-dessous.



✧ Étant donné qu'il est en convention générateur, sa relation courant – tension s'écrit $i(t) = -\dfrac{u(t)}{R}$, ce qui nous permet de tracer sa caractéristique.

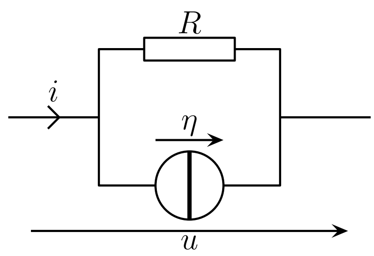


✧ Sur cette caractéristique, il est possible de distinguer deux types de cadrans :
- ➜ les grisés qui sont tels que :
  - ➜ le produit $u\,i$ soit négatif
  - ➜ la puissance reçue soit positive
  - ➜ la puissance fournie soit négative
  - ➜ le dipôle présente un caractère récepteur
- ➜ les clairs qui sont tels que :
  - ➜ le produit $u\,i$ soit positif
  - ➜ la puissance reçue soit négative
  - ➜ la puissance fournie soit positive
  - ➜ le dipôle présente un caractère générateur

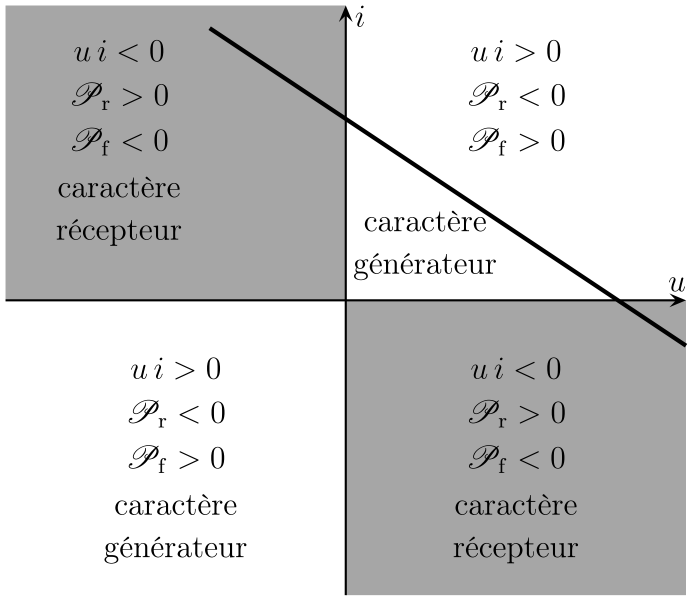
✧ Nous pouvons alors constater que le résistor présente **toujours** un caractère récepteur.

✯ exemple du générateur réel

✧ Considérons le modèle de Norton d'un générateur réel en convention générateur.



✧ La loi des nœuds nous permet d'écrire directement $i = \eta - \dfrac{u}{R}$ et tracer la caractéristique suivante.



✧ Nous pouvons alors constater ce que nous savions déjà : un générateur peut fort bien avoir un caractère récepteur, *ie.* il peut parfois recevoir de l'énergie.

III·2·*iii* – l'énergie n'est jamais perdue . . .

✧ La conservation de l'énergie est vraie à chaque instant ce qui signifie que toute l'énergie ce qui est donnée par un dipôle est instantanément reçue par les autres.

> À chaque instant, la somme des puissance fournies par certains dipôles est égale à la somme des puissances reçues par tous les autres dipôles.

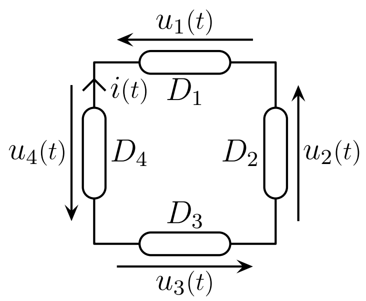
✧ En généralisant :

> À chaque instant, la somme de toutes les puissance reçues des dipôles est nulle.

✯ idée de démonstration

✧ La démonstration générale est lourde, mais nous pouvons la faire dans deux cas particuliers : un circuit à une maille et un circuit à deux nœuds. La démonstration est donc valable pour tout circuit qui peut s'y ramener.

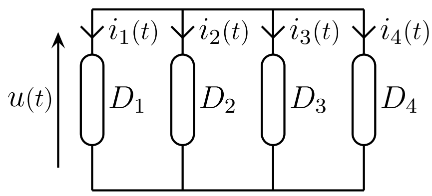
✧ Considérons le circuit à une maille ci-dessous.



✧ Écrivons la loi des mailles et multiplions celle-ci par $i(t)$. Nous voyons alors apparaître immédiatement la loi de conservation de l'énergie.

$$u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + u_4(t) = 0$$
$$u_1(t)\,i(t) + u_2(t)\,i(t) + u_3(t)\,i(t) + u_4(t)\,i(t) = 0$$
$$\mathscr{P}_{\text{r1}}(t) + \mathscr{P}_{\text{r2}}(t) + \mathscr{P}_{\text{r3}}(t) + \mathscr{P}_{\text{r4}}(t) = 0$$

✧ Il en est de même avec le circuit à deux nœuds ci-dessous.



✧ En multipliant la loi des nœuds par $u(t)$, la loi de conservation de l'énergie apparaît.

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 0$$
$$u(t)\,i_1(t) + u(t)\,i_2(t) + u(t)\,i_3(t) + u(t)\,i_4(t) = 0$$
$$\mathscr{P}_{\text{r1}}(t) + \mathscr{P}_{\text{r2}}(t) + \mathscr{P}_{\text{r3}}(t) + \mathscr{P}_{\text{r4}}(t) = 0$$

✧ Le point crucial de cette démonstration tient dans le fait que pour le circuit à une maille $i(t)$ est le même partout et dans le circuit à deux nœuds, $u(t)$ est aussi le même pour tous les dipôles : c'est grâce à l'ARSQ.

✧ Lorsqu'un jour l'ARQS ne sera plus valide (en spé), il faudra prendre en compte aussi l'énergie « en train de voyager ».

III·2·*iv* – … même si elle peut s'échapper

✧ Que l'énergie se conserve ne signifie pas que l'énergie électrique se conserve ! Comme nous l'avons vu, les résistors ne font que recevoir de l'énergie électrique. La question est : que font-ils de cette énergie ? La réponse est simple : ils la transforment en une autre forme d'énergie, l'énergie interne, qui a pour conséquence bien connue d'augmenter la température.

La chaleur n'est pas un type d'énergie : les résistors ne peuvent donc pas dissiper l'énergie électrique en chaleur !

Une énergie d'un certain type est dite *dissipée* lorsqu'un dispositif la transforme en un autre type qui n'est plus récupérable.

Le fait que les résistors dissipent l'énergie électrique est appelé *effet Joule*.
La puissance électrique reçue (et donc la puissance dissipée par effet Joule) vaut :

$$\mathscr{P}_{\mathrm{r}} = +R\,i^2(t) = \frac{u^2(t)}{R}.$$

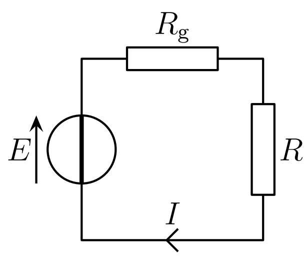
- ✧ De manière générale, ce sont les générateurs qui ont pour rôle d'injecter de l'énergie dans le circuit électrique et, notamment, de compenser les dissipations d'énergie électrique (volontaires ou non) causées par les résistors.

III·2·*v* – utiliser au mieux d'un générateur

- ✧ Étant donné l'effet Joule, la question est de savoir s'il est possible de rendre maximale l'énergie transférée à la partie utile du circuit électrique.

Il y a *adaptation d'impédance* lorsque la puissance reçue par la partie utile d'un montage de la part d'un générateur donné est maximale.

- ✧ Impédance est un mot que nous reverrons (beaucoup) dans quelques mois.
- ✧ Étudions le cas le plus simple : celui d'un générateur réel relié à un montage (complexe) qui se comporte comme un résistor de résistance R.



- ✧ Analyse physique :
  - ➜ grandeurs connues : les résistances et la f.é.m.
  - ➜ grandeur inconnue : I
- ✧ Analyse technique :
  - ➜ circuit à une maille → pas de problème
- ✧ La puissance reçue par le résistor R vaut : $\mathscr{P}_{\mathrm{r}} = R\,I^2 = R\left(\dfrac{E}{R+R_{\mathrm{g}}}\right)^2 = \dfrac{R}{(R_{\mathrm{g}}+R)^2}\,E^2$.
- ✧ Écrivons la puissance sous une forme plus mathématique (pour la première et la dernière fois) : $a \overset{\text{not}}{=} E^2$, $x \overset{\text{not}}{=} R$ et $x_0 \overset{\text{not}}{=} R_{\mathrm{g}}$. Le problème revient alors à trouver le maximum de la fonction $f(x) = \dfrac{a\,x}{(x+x_0)^2}$. C'est une fonction qui tend vers 0 en $x = 0$ et en $x = +\infty$. Étant donné son écriture, la fonction est positive : elle admet donc un maximum.
- ✧ Calculons sa dérivée et cherchons le point où elle s'annule.

$$f'(x) = a\,\frac{(x+x_0)^2 - 2\,x\,(x+x_0)}{(x+x_0)^4} = a\,\frac{x_0 - x}{(x+x_0)^3} \qquad \rightsquigarrow \qquad f'(x) = 0 \text{ pour } x = x_0$$

✧ Traduction : le transfert de puissance sera optimal pour $\boxed{R = R_g}$ et vaut 50 %.

> Dans un circuit purement résistif, il y a adaptation d'impédance quand la résistance de la partie utile du circuit est égal à la résistance du générateur.

☕ *Remarque* : c'est bien la dernière fois que nous transposons en notation mathématique un problème physique.

III·3 – Déterminer des énergies

III·3·i – lien entre la puissance et l'énergie – dériver en physique

> La puissance reçue (resp. fournie) est la vitesse à laquelle s'échange l'énergie reçue (resp. fournie). Ainsi :
>
> $$\mathscr{P}_r(t) = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_r(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{P}_f(t) = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_f(t)}{\mathrm{d}t}$$

✧ Techniquement, la puissance est la dérivée de l'énergie *par rapport au temps* et se note $\mathscr{P}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}$.

✯ la notation différentielle

✧ En physique, dans quasiment tous les cas, nous allons noter la dérivée sous la forme différentielle $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ pour plusieurs raisons :

- ➜ cela permet de savoir par rapport *à quelle variable* nous dérivons car, en physique, nous allons dériver par rapport à un peu tout
- ➜ cela permet une interprétation physique physique de la dérivée et facilite les raisonnements
- ➜ cela simplifie les calculs

✯ variable par rapport à laquelle nous dérivons

✧ En physique, il y a toujours beaucoup de grandeurs différentes. Prenons l'exemple précédent.

✧ La puissance reçue par le résistor R s'écrit : $\mathscr{P}_r = \dfrac{R}{(R+R_g)^2}\,E^2$.

✧ En cherchant le maximum *à générateur fixé*, *ie.* en supposant que R pouvait varier, nous avons dérivé $\mathscr{P}_r$ par rapport à R pour, justement, étudier les variations en fonction de R. Nous aurions alors pu écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}_r}{\mathrm{d}R} = \frac{(R_g+R)^2 - 2\,R\,(R+R_g)}{(R+R_g)^4}\,E^2 = \frac{R_g - R}{(R+R_g)^3}\,E^2$$

et nous obtenons bien le résultat qu'il faut dorénavant connaître : il y a adaptation d'impédance pour $R = R_g$.

✧ Imaginons maintenant que R soit fixé et que nous cherchions le générateur optimal. Il faut alors chercher comment $\mathscr{P}_{\text{r}}$ varie en fonction de R_{g}. Dérivons donc par rapport à R_{g} :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}_{\text{r}}}{\mathrm{d}R_{\text{g}}} = -\frac{2\,E^2}{(R+R_{\text{g}})^3}\,E^2$$

✧ Nous pouvons alors constater que la dérivée est toujours négative, ce qui signifie :
- ➜ qu'il n'y a pas de valeur optimale de R_{g}
- ➜ que plus R_{g} augmente, plus la puissance reçue est faible

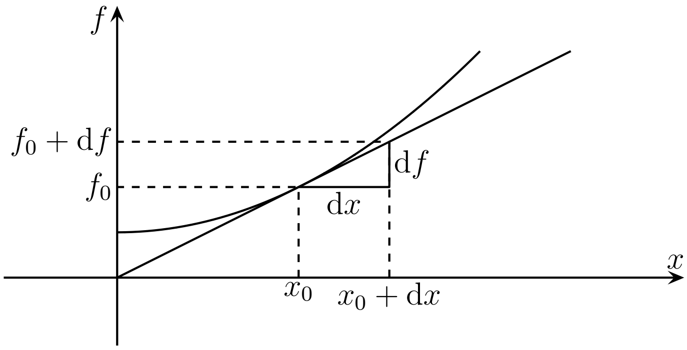
ce qui permet de conclure que la meilleure valeur est $R_{\text{g}} = 0$, ce qui, finalement, est normal : la puissance reçue par la partie utile sera maximale lorsque la puissance dissipée inutile sera nulle !

✧ Il est donc très important de toujours préciser ce par rapport à quoi nous dérivons et de bien en comprendre la signification.

✧ Il y a une seule exception pour la notation de la dérivée : les dérivée temporelles qui, parfois, s'écrivent avec des points (et pas des primes) car c'était la notation de Newton. Exemple : $\mathscr{P}_{\text{r}}(t) = \dot{\mathscr{E}}_{\text{r}}(t)$ L'avantage de cette notation c'est qu'elle est rapide. L'inconvénient c'est que c'est son seul avantage, elle est donc à réserver pour des intermédiaires de calculs.

✯ interprétation « physique » de la dérivée

✧ Pour cela repartons de l'interprétation graphique de la dérivée.



✧ La dérivée en un point x_0 n'est autre que la pente de la tangente en ce point.

✧ En prenant deux points très proches sur la courbes, nous pouvons voir que la courbe se confond avec sa tangente et ainsi la pente de la tangente vaut bien $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ où $\mathrm{d}f$ est le petit écart de valeur de f entre les deux points et $\mathrm{d}x$ l'écart entre les deux points.

✧ En fait, cela correspond bien à la limite du taux d'accroissement :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} \overset{\text{not}}{=} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

✧ Ce genre de raisonnement permettra ultérieurement de raisonner pendant une durée $\mathrm{d}t$ très courte afin de voir ce qui s'y produit.

> Les quantités notées « d » sont appelées *infinitésimales* ou parfois *élémentaire*.

✯ simplification des calculs

✧ C'est plus de l'habitude qu'autre chose et ce sera utilisé tout au long de l'année :

Les « d droits » peuvent se manipuler comme des fractions bien que cela ne soit pas des fractions.

✧ Comme ce sont des fractions, nous pouvons alors en déduire le lien entre les joules et les watts. En effet, puisque $\mathscr{P}_{\mathrm{r}} = \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}$, nous obtenons $\boxed{1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J} \cdot 1\ \mathrm{s}^{-1}}$.

✧ C'est aussi extrêmement utile pour les dérivées composées, mais nous verrons cela au fur et à mesure des choses.

III·3·*ii* – lien entre énergie et puissance – intégrer en physique

L'énergie reçue entre les instants t_1 et t_2 n'est autre que la somme de toutes les énergies reçues pendant des durées élémentaire $\mathrm{d}t$ entre t_1 et t_2.

✧ Pendant la durée $\mathrm{d}t$, l'énergie reçue est infime et vaut $\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{r}} = \mathscr{P}_{\mathrm{r}}(t)\,\mathrm{d}t$ car, justement, les notations différentielles peuvent se manipuler comme des fractions. Pour **additionner** toutes ces petites énergies, nous devons donc calculer :

$$\mathscr{E} = \sum \mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{r}} = \sum \mathscr{P}_{\mathrm{r}}(t)\,\mathrm{d}t$$

✧ Techniquement, lorsque nous devons additionner des nombres infinitésimaux, comme des différentielles, nous n'utiliserons pas le symbole $\sum$ qui permet d'additionner des paquets bien connus mais le symbole $\displaystyle\int$. Et ainsi :

$$\mathscr{E}_{\mathrm{r}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P}_{\mathrm{r}}(t)\,\mathrm{d}t$$

L'intégrale en physique représente la sommation de quantités élémentaires.

✧ Même si, techniquement, pour calculer une intégrale, il faut calculer une primitive, il conviendra de ne pas confondre intégrale et primitive : une intégrale représente une sommation (pour le physicien), une primitive n'est qu'un outil de calcul.

III·3·*iii* – puissance moyenne

✫ définition

La *puissance moyenne* reçue (resp. fournie) par un dipôle entre deux instants est le rapport entre l'énergie reçue (resp. fournie) par ce dipôle entre ces deux instants par la durée séparant ces deux instants.

$$P_{\mathrm{r}} = \frac{\mathscr{E}_{\mathrm{r}}(t_1,t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P}_{\mathrm{r}}(t)\,\mathrm{d}t$$

✧ En fait, ce n'est ni plus ni moins que la définition de la valeur moyenne d'une fonction appliquée à la puissance.

✫ exemple du régime sinusoïdal

✧ Considérons un résistor traversé par un courant $i(t) = I_0 \cos(2\pi f t + \varphi)$ et calculons la valeur moyenne de la puissance qu'il reçoit sur une période.

✧ En appliquant la définition de la puissance sur la période $[0,T]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
P_\mathrm{m} &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{P}_\mathrm{r}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T R\,i^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T R\,{I_0}^2\cos^2(2\pi f t+\varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{R\,{I_0}^2}{T}\int_0^T \frac{\cos(4\pi f t + 2\varphi)+1}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{R\,{I_0}^2}{2T}\left[\frac{\sin(4\pi f t + 2\varphi)}{4\pi f} + t\right]_0^T = \frac{R\,{I_0}^2}{2T}\left(\frac{\sin(4\pi f T + 2\varphi) - \sin(2\varphi)}{4\pi f} + T\right] \\
&= \frac{R\,{I_0}^2}{2T}\left(\frac{\cancel{\sin(4\pi + 2\varphi)} - \cancel{\sin(2\varphi)}}{4\pi f} + T\right] = \frac{R\,{I_0}^2}{2T}\times T \\
&= \frac{R\,{I_0}^2}{2}
\end{aligned}$$

Étudier un circuit électrocinétique

Au niveau du cours

✯ Les définitions

✧ Sont à savoir :
- ➜ convention générateur / récepteur, caractère générateur / récepteur, caractéristique
- ➜ tension à vide, courant de court-circuit
- ➜ puissance, énergie, adaptation d'impédance

✯ Les grandeurs

✧ Connaître les unités de :
- ➜ puissance, énergie

✧ Connaître les liens entre watt, volt et ampère et entre joule et seconde.

✯ Les lois

✧ Sont à savoir :
- ➜ les lois des mailles et des nœuds
- ➜ les modèles des différents dipôles réels
- ➜ ce qu'est l'effet Joule

Au niveau de l'analyse

✯ Analyse technique

✧ Il faut savoir repérer un circuit simplifiable d'un circuit non simplifiable et identifier l'approche (maillère ou nodale) la plus adéquate.

Au niveau des savoir-faire

✯ petits gestes

✧ Savoir :
- ➜ retrouver l'expression de l'énergie à partir du raisonnement différentiel
- ➜ retrouver le caractère générateur ou récepteur d'un dipôle à partir de sa caractéristique graphique tracée dans le plan (u,i)

✯ exercices classiques

✧ Savoir retrouver :
- ➜ la condition d'adaptation d'impédance pour un circuit purement résistif
- ➜ la puissance moyenne reçue par un résistor en régime sinusoïdal

Table des matières