Électrocinétique

Chapitre 3

Circuits en régime transitoire

Circuits en régime transitoire

Dans ce chapitre nous allons voir et étudier deux nouveaux composants : la bobine et le condensateur. Au delà de leurs nouveautés en terme de relation courant – tension, au delà même des nouvelles possibilités que cela apportera dans les circuits, ce chapitre est fondamental pour deux raisons :
- ➜ nous allons apprendre à utiliser de nouveaux outils mathématiques : les équations différentielles
- ➜ les phénomènes physiques que nous verrons dans ce chapitre et qui s'appellent des évolutions d'ordre 1 ou 2, se rencontreront très souvent dans tous les autres domaines de la physique, il sera donc primordial de les maîtriser

I – Phénoménologie

I·1 – Circuits avec bobines et condensateurs

I·1·*i* – comment « sonder » un circuit ?

✧ Nous allons commencer par quelques observations afin de mieux « voir » comment réagissent des circuits dans lesquels il y a bobines et condensateurs.

✧ Pour ce faire, nous allons utiliser un logiciel de simulation : c'est un logiciel qui permet de simuler (numériquement) ce qui se passe dans un circuit électrique.

✧ Les avantages de tels logiciels sont énormes :
- ➜ l'accès à toute sorte de composants
- ➜ facilité d'utilisation
- ➜ il est possible de suivre en même temps toutes les tensions et intensités intéressantes

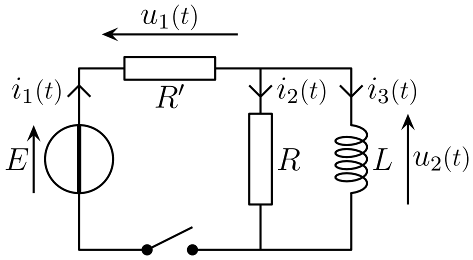
✧ L'inconvénient principal reste que ce n'est pas de l'expérimental, *ie.* un tel logiciel :
- ➜ ne permet pas de s'exercer au brochage des circuits
- ➜ ne permet pas de voir les défauts des composants réels (à moins qu'ils ne soient modélisés)

✧ Mais tous ces inconvénients seront travaillés en TP.

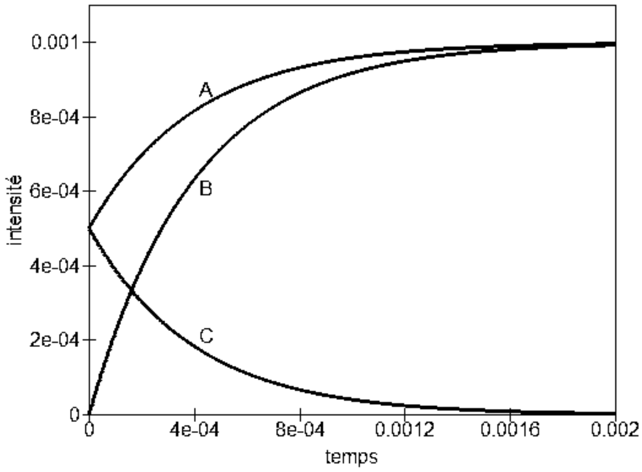
I·1·*ii* – observation de circuits du premier ordre

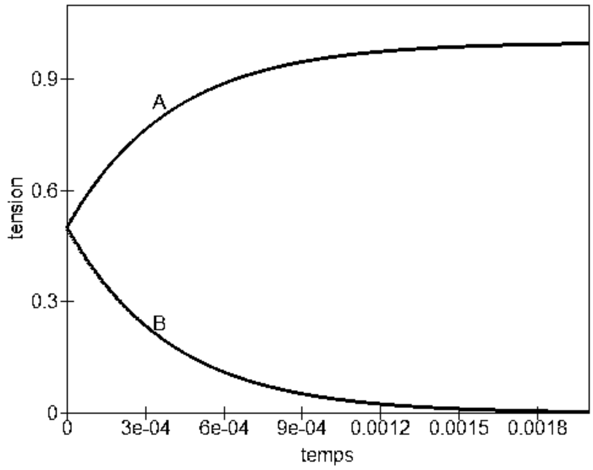
⋆ circuit avec une bobine

✧ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel nous avons $E = 1{,}0$ V ; $R = R' = 1{,}0$ kΩ et $L = 0{,}2$ H.



✧ Fermons l'interrupteur K à l'instant $t = 0$ et observons les intensités $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$ ainsi que les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$.



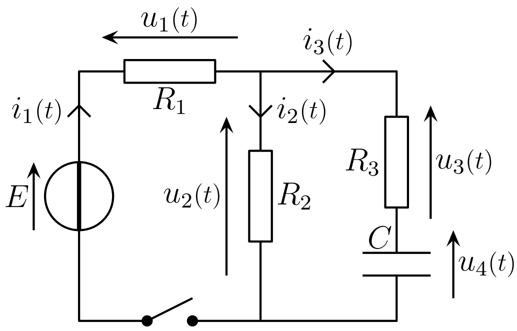


✧ Il apparaît sur ces graphiques que toutes les tensions et toutes les intensités ont des évolutions de même allure :
- ➜ évolution rapide au début
- ➜ évolution plus lente à la fin pour finir sur une asymptote
- ➜ toutes les évolutions (tension et intensité) vont à la même vitesses (elles se finissent en même temps)

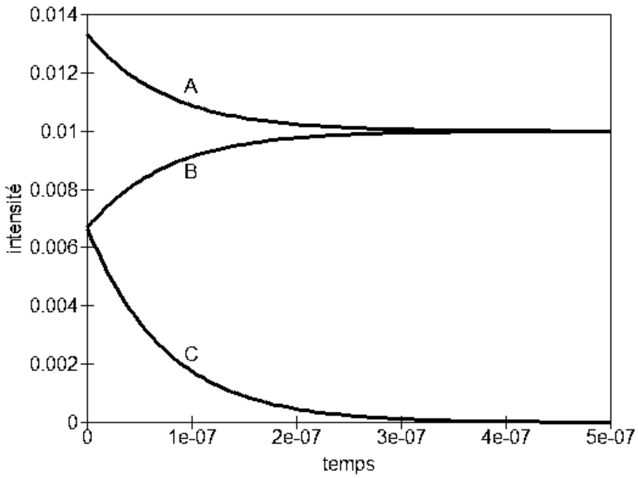
✧ Tout cela est typique des évolutions de premier ordre.

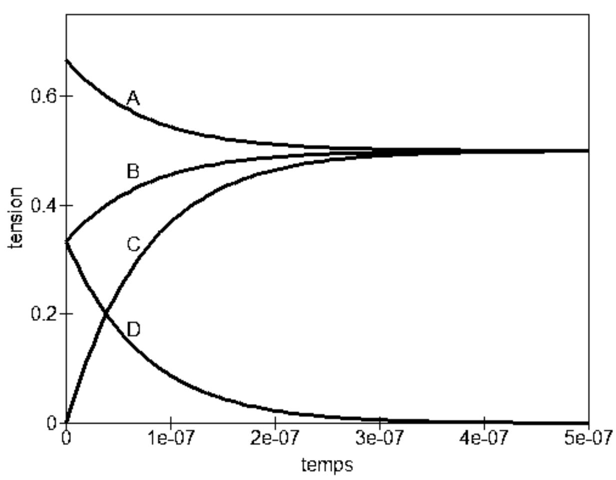
✯ circuit avec un condensateur

✧ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel nous avons $E = 1{,}0$ V ; $R_1 = R_2 = R_3 = 50\ \Omega$ et $C = 1{,}0$ nF.



✧ Fermons l'interrupteur K à l'instant $t = 0$ et observons les intensités $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$ ainsi que les tensions $u_1(t)$ à $u_4(t)$.





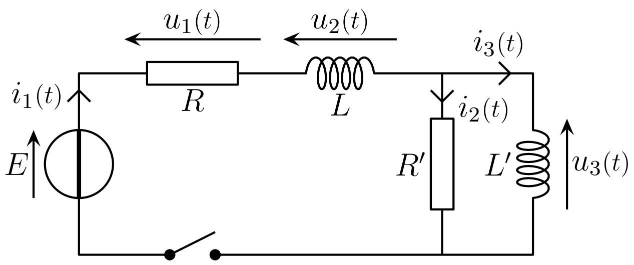
✧ Les observations sont identiques à celles du circuit précédent :
- ➜ évolution rapide au début
- ➜ évolution plus lente à la fin pour finir sur une asymptote
- ➜ toutes les évolutions (tension et intensité) vont à la même vitesses (elles se finissent en même temps)

✧ Tout cela est typique des évolutions de premier ordre.

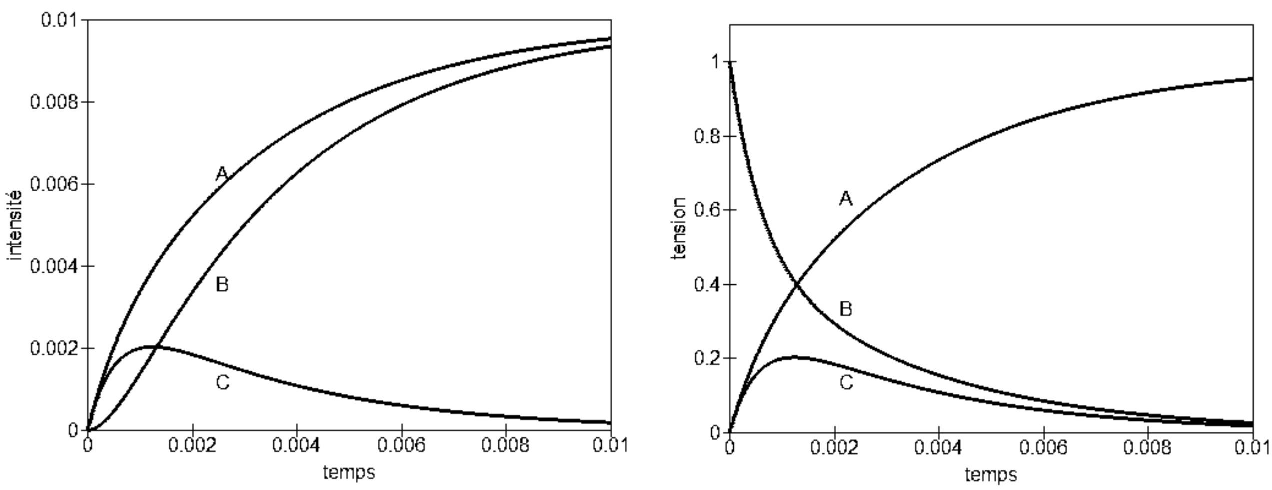
I·1·*iii* – observation de circuits du deuxième ordre

✯ circuit avec deux bobines

✧ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel nous avons $E = 1{,}0$ V ; $R = R' = 100\ \Omega$ et $L = 2\,L' = 0{,}2$ H.



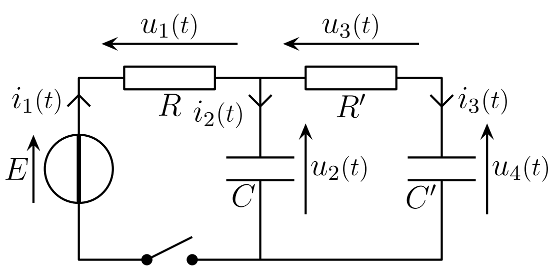
✧ Fermons l'interrupteur K à l'instant $t = 0$ et observons les intensités et les tensions.



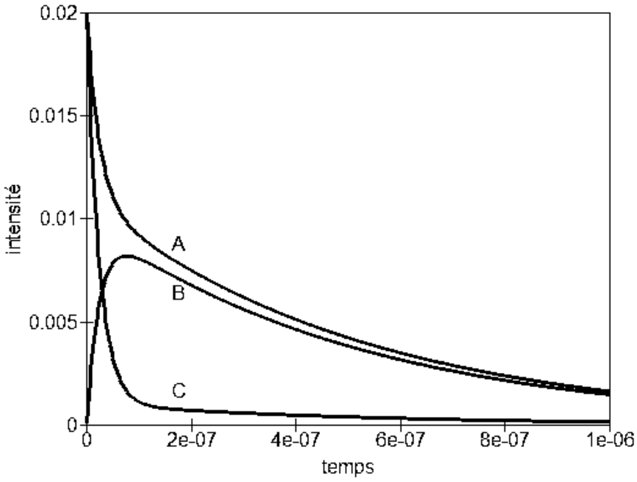
✧ Cette fois, il apparaît :
- ➜ que toutes les tensions et toutes les intensités n'ont la même allure (surtout les courbes C)
- ➜ que toutes les évolutions finissent aussi à peu près en même temps

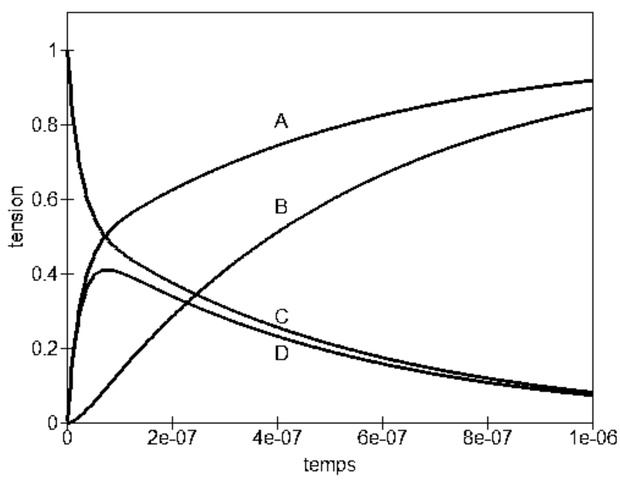
✯ circuit avec deux condensateurs

✧ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel nous avons $E = 1{,}0$ V ; $R = R' = 50\ \Omega$ et $C' = 5\,C = 5{,}0$ nF.



✧ Fermons l'interrupteur K à l'instant $t = 0$ et observons les intensités et les tensions.





✧ Cette fois, il apparaît :

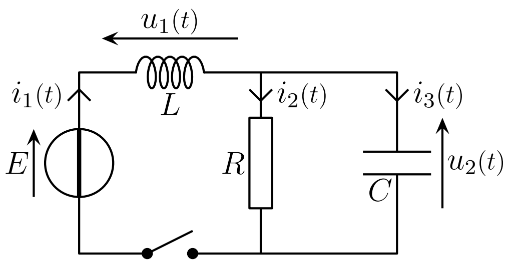
➜ que toutes les tensions et toutes les intensités n'ont la même allure (surtout les courbes C)

➜ que toutes les évolutions finissent aussi à peu près en même temps

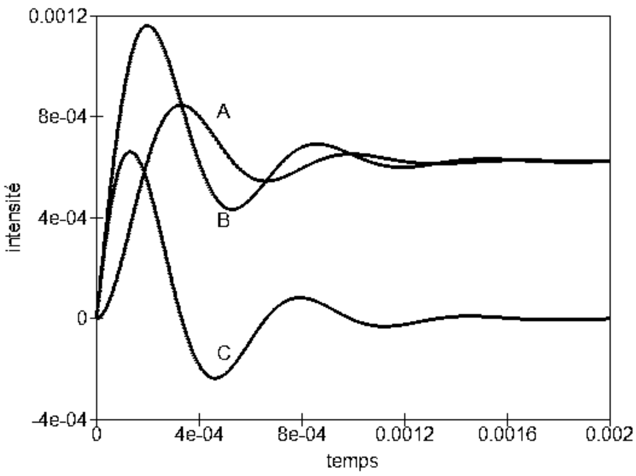
➜ qu'il semble exister deux phases dans le circuit (très visible sur les courbes A et C) ; c'est révélateur de **deux** temps caractéristiques

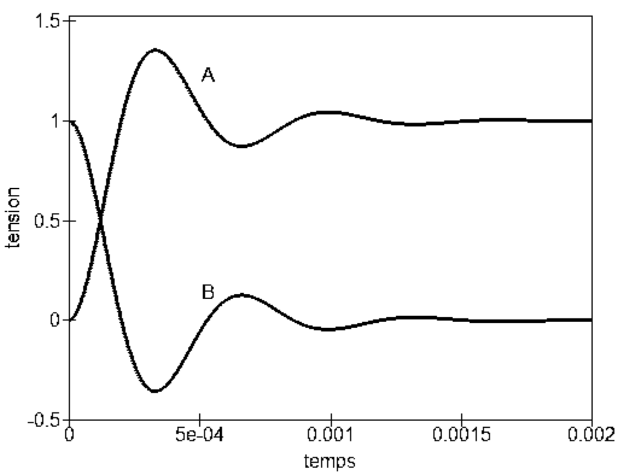
✫ circuit avec une bobine et un condensateur

✧ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel nous avons $E = 1{,}0$ V ; $R = 1{,}6$ kΩ ; $C = 100$ nF et $L = 0{,}1$ H.



✧ Fermons l'interrupteur K à l'instant $t = 0$ et observons les intensités et les tensions.





✧ Cette fois, il apparaît :

- ➜ que toutes les tensions et toutes les intensités ont à nouveau la même allure (des oscillations d'amplitude décroissantes)
- ➜ que toutes les évolutions finissent aussi à peu près en même temps

I·1·*iv* – régimes libre ou forcé, transitoire ou permanent

✧ Les phénomènes que nous avons observés sont complexes. Pour en parler, rien de tel qu'un vocabulaire précis.

✯ transitoire ou permanent ?

> Le régime est dit *transitoire* lorsqu'il est ni périodique ni continu.

✧ Exemple sonore : une explosion, la voix.

> Le régime est dit *permanent* lorsque le régime transitoire est terminé.

✧ Globalement, cela signifie qu'il n'y a pas d'évolution dans le dispositif : le régime peut être alors continu ou permanent.

Remarque : de manière tout à fait exceptionnelle, il peut y avoir des régimes permanents non périodiques. Exemple sonore : le bruit d'une cascade.

> Une évolution est soit en régime transitoire, soit en régime permanent.

✧ Sur chacun des exemples précédents, il est possible d'identifier le régime transitoire du régime permanent. Ceci dit, pour le régime permanent, il faudra se mettre d'accord car il n'est jamais vraiment totalement atteint.

✯ libre ou forcé ?

> Un dispositif est dit en *régime libre* lorsqu'aucune source ne lui apporte de l'énergie. Il est dit en *régime forcé* sinon.

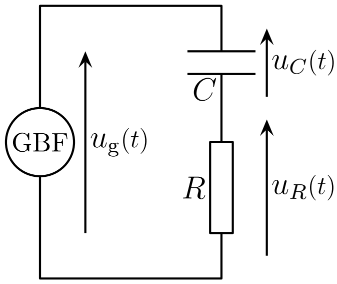
> Un dispositif est soit en régime libre, soit en régime forcé.

✧ Ici, pour tous les exemples :
- ➜ le régime est libre **avant** la fermeture de l'interrupteur
- ➜ le régime est forcé **après** la fermeture de l'interrupteur

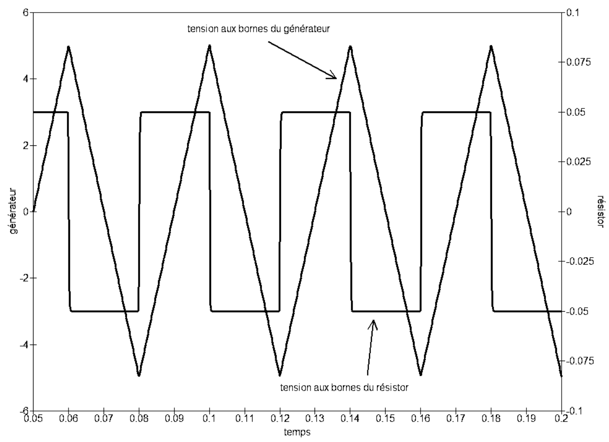
I·2 – Comportement d'un condensateur

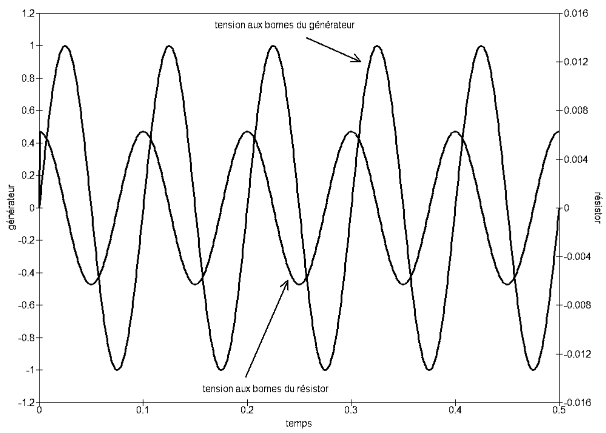
I·2·*i* – observation à l'oscilloscope

✧ Le but va être d'observer l'intensité traversant un condensateur tout en lui imposant une tension. Pour cela réalisons le montage ci-dessous avec $C = 100$ nF et $R = 1{,}0$ kΩ.



- ✧ Expérimentalement parlant, il n'est pas si simple que cela de mesurer une intensité. C'est pourquoi nous avons branché une résistance en série avec le condensateur de manière à accéder à l'intensité par la relation $u_R(t) = R\,i(t)$.
- ✧ Toutefois pour que la tension délivrée par le générateur soit celle aux bornes du condensateur, il faudra vérifier que $|u_R(t)| \ll |u_g(t)|$.
- ✧ En envoyant sucessivement une tension triangulaire puis une tension sinusoïdale, nous obtenons les résultats ci-dessous.





- ✧ Dans les deux cas, nous pouvons effectivement vérifier que la tension aux bornes du résistor (échelle de droite) est très inférieure à la tension totale.
- ✧ Nous pouvons alors observer une propriété fondamentale du condensateur : l'intensité qui le traverse est proportionnelle à la dérivée de la tension à ses bornes.

I·2·*ii* – condensateur idéal

Le *condensateur idéal* se représente de la façon ci-dessous et est tel qu'il y a proportionnalité entre l'intensité qui le traverse et la dérivée temporelle de la tension entre ses bornes.

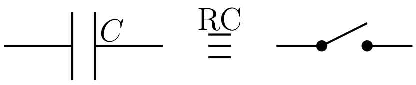
Un condensateur est caractérisé uniquement par sa conductance $C > 0$ en farad (F).

Dans la convention représentée ci-dessus, la relation constitutive s'écrit $i(t) = +C\,\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$.

- ✧ Évidemment, en convention générateur, cela donnera : $i(t) = -C\,\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$.
- ✧ Les capacité (en TP) vont du pF au μF.

I·2·*iii* – comportement en régime continu

✧ Imaginons un condensateur en régime continu. Alors la tension à ses bornes est constante dans le temps et l'intensité qui le traverse aussi. Dans ces conditions, nous pouvons constater alors que l'intensité est nulle.

> En régime continu, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.
>
> 
>

I·2·*iv* – comportement en régime transitoire

✧ Il est bien sûr hors de question que l'intensité du courant qui traverse le condensateur soit infinie. Pour cela il faut que la tension soit mathématiquement dérivable, ce qui implique :

> La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction mathématiquement continue du temps.

STOP il ne faut pas confondre les deux significations du mot « continu ».

✧ Bien que cela ne soit pas précisé, il va de soi que l'intensité du courant qui traverse un condensateur peut être discontinue. Si, par hasard, elle se trouvait être mathématiquement continue, cela serait, justement, le fruit du hasard ou de coïncidence provenant du reste du circuit.

I·2·*v* – retour sur les exemples

✧ Sans en savoir plus que les lois de Kirchhoff et le comportement d'un condensateur, nous pouvons retrouver quelles courbes correspondent à quelles grandeurs.

✧ À l'instant initial, les condensateur étaient déchargés.

✧ Circuit RC :

i_A	i_1
i_B	i_2
i_C	i_3

et

u_A	u_2
u_B	u_1
u_C	u_4
u_D	u_3

✧ Circuit d'ordre 2 :

i_A	i_1
i_B	i_3
i_C	i_2

et

u_A	u_2
u_B	u_4
u_C	u_1
u_D	u_3

I·2·*vi* – approche électrostatique du condensateur

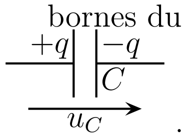
✧ Comme nous le verrons dans un des derniers chapitre de l'année :

> Un *condensateur* est constitué de deux plaques, appelées armatures, qui peuvent accumuler des charges.

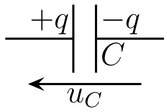
> Un condensateur est toujours globalement neutre, ce qui permet d'écrire les charges sur les armatures $+q$ et $-q$.

✧ Bien évidemment, rien n'interdit d'avoir $+q < 0$ ...

Il y a proportionnalité entre la charge portée par chaque armature et la tension entre les bornes du condensateur.



: ici $q(t) = +C\,u(t)$



: ici $q(t) = -C\,u(t)$

✧ Le signe entre la charge et la tension est le même que celui devant la charge pointée par la flèche de la tension.

STOP l'approche électrostatique est **extrêmement piégeuse** pour l'établissement de l'évolution du circuit car elle fait intervenir une nouvelle grandeur q électrocinétiquement inutile et de nouvelles conventions de signes. Cette approche est à éviter à moins d'y être contraint. Si, à un moment ou à un autre il faut chercher des charges portées par des armatures, nous raisonnerons en terme de tension tout le temps et passerons à la charge au dernier moment.

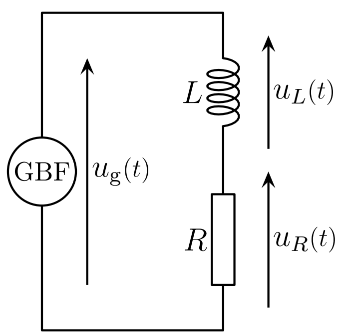
✧ Le seul intérêt de cette approche est de permettre la compréhension du vocabulaire « charge », « déchargé » que nous utiliserons pour le condensateur.

Quand un condensateur est dit *déchargé*, les charges portées par chacune de ses armature sont nulles et, donc, la tension entre ses bornes aussi.

I·3 – Comportement d'une bobine

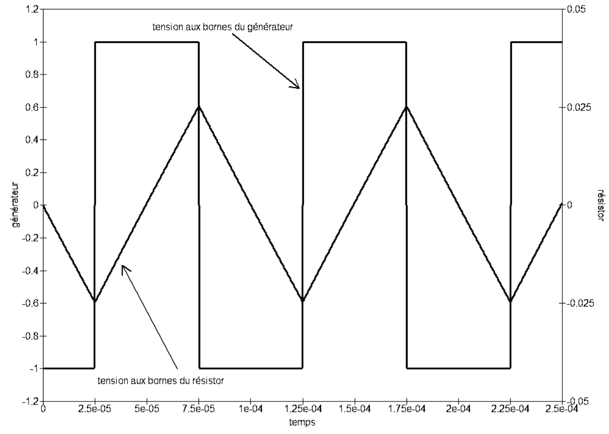
I·3·i – observation à l'oscilloscope

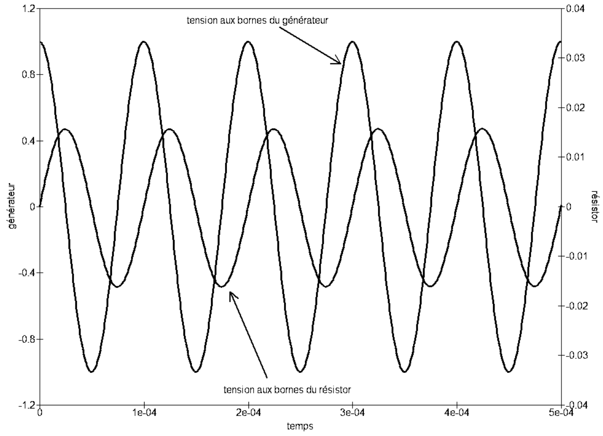
✧ Le but va être d'observer l'intensité traversant une bobine tout en lui imposant une tension. Pour cela réalisons le montage ci-dessous avec $L = 0{,}1$ H et $R = 100\ \Omega$.



✧ De même que pour le condensateur, il faudra vérifier que $|u_R(t)| \ll |u_g(t)|$.

✧ En envoyant sucessivement une tension rectangulaire puis une tension sinusoïdale, nous obtenons les résultats ci-dessous.





✧ Dans les deux cas, nous pouvons effectivement vérifier que la tension aux bornes du résistor (échelle de droite) est très inférieure à la tension totale.

✧ Nous pouvons alors observer une propriété fondamentale de la bobine : la tension à ses bornes est proportionnelle à dérivée de l'intensité qui la traverse.

I·3·*ii* – bobine idéale

Une *bobine idéale* se représente de la façon ci-dessous et est telle qu'il y a proportionnalité entre la tension à ses bornes et la dérivée temportelle de l'intensité qui la traverse.

Une bobine idéale est caractérisée uniquement par son inductance $L > 0$ en henry (H).

Dans la convention représentée ci-dessus, la relation constitutive s'écrit $u(t) = +L\,\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$.

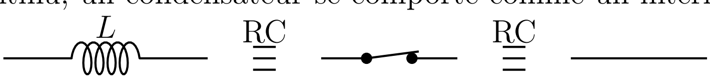
✧ Évidemment, en convention générateur, cela donnera : $u(t) = -L\,\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$.

✧ Les inductances (en TP) vont du mH au H.

I·3·*iii* – comportement en régime continu

✧ Imaginons une bobine en régime continu. Alors la tension à ses bornes est constante dans le temps et l'intensité qui le traverse aussi. Dans ces conditions, nous pouvons constater alors que la tension est nulle.

En régime continu, un condensateur se comporte comme un interrupteur fermé.



I·3·*iv* – comportement en régime transitoire

✧ Il est bien sûr hors de question que la tension aux bornes de la bobine soit infinie. Pour cela il faut que l'intensité qui la traverse soit mathématiquement dérivable, ce qui implique :

L'intensité du courant qui traverse une bobine est une fonction mathématiquement continue du temps.

- De manière analogue au condensateur, il va de soi que la tension aux bornes de la bobine peut être discontinue.

I·3·*v* – retour sur les exemples

- Nous pouvons maintenant finir de retrouver « qui est qui » dans les circuits comportant des bobines.
- À l'instant initial, les condensateur étaient déchargés et les bobines n'étaient pas traversés par des courants.
- Circuit RL :

i_A	i_1
i_B	i_3
i_C	i_2

et

u_A	u_1
u_B	u_2

- Circuit du second ordre RL :

i_A	i_1
i_B	i_3
i_C	i_2

et

u_A	u_1
u_B	u_2
u_C	u_3

- Circuit du second ordre RLC :

i_A	i_2
i_B	i_1
i_C	i_3

et

u_A	u_2
u_B	u_1

I·4 – Étudier un circuit en régime transitoire

I·4·*i* – comment déterminer *a priori* le régime ?

- Pour « libre » ou « forcé », c'est simple, il suffit de regarder le circuit : s'il y a un générateur, c'est un régime forcé, s'il n'y en a pas (ou s'il est déconnecté suite à la manipulation d'un interrupteur) c'est un régime libre.
- Pour « permanent » ou « transitoire », il faut regarder quelles sont les conditions expérimentales : les régimes sont forcés après une durée « longue » ou, au moins, « suffisamment longue ». Ainsi quand il est précisé qu'« on attend longtemps avant de fermer l'interrupteur », cela signifie qu'*avant* la fermeture de l'interrupteur, le régime est permanent. De même, lorsqu'il est demandé de préciser ce qui se passe après la fermeture de l'interrupteur, cela sous-entend qu'il faut déterminer la partie transitoire du régime.
- Dans quelques chapitre, il y aura un régime forcé qui nous intéressera tout particulièrement : le régime sinusoïdal forcé.

I·4·*ii* – comment déterminer *a priori* l'ordre d'évolution ?

- Sauf montages un peu particuliers, s'il y a une seule bobine ou un seul condensateur, le circuit sera d'ordre 1 et toutes les grandeurs auront le même type d'évolution.
- Quand il y a deux composants (bobine et condensateur), le circuit est d'ordre 2.
- Avec plus de composants, il est possible de faire des circuit d'ordre 3, mais nous n'en rencontrerons pas trop.

I·4·*iii* – approche nodale ou maillère

- Le fait que les circuits vont comporter bobines et condensateurs ne va pas changer fondamentalement les approches nodale et maillère. Il faudra juste faire un peu plus attention à l'écriture des lois.

✯ loi des mailles en terme de courant

✧ Lorsqu'une bobine est dans la maille, pas de problème, nous pouvons écrire directement la tension à ses bornes en terme de courant : $u_L(t) = \pm L \,\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$ suivant la convention.

✧ Pour le condensateur, c'est plus délicat. Pour trouver la relation, nous allons devoir **intégrer** la relation courant tension. Cela donne :

$$\int_0^t i_C(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^t C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t')}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = C\,[u_C(t')]_0^t = C\,u(t) - C\,u(0)$$

✧ Et ainsi nous obtenons :

> La tension en terme de courant s'écrit pour un condensateur :
>
> $$u(t) = u(0) \pm \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t')\mathrm{d}t'$$

✧ Il y a deux choses importantes dans cette loi :

➜ la présence du terme $u(0)$, indispensable en tant que « condition initiale »

➜ quand nous allons dériver le membre de droite (le seul écrit dans la loi des mailles en terme de courant), nous obtenons $\pm\dfrac{i_C(t)}{C}$ suivant la convention.

✧ Dans la mesure du possible, nous éviterons d'écrire cette loi. En d'autre terme, tant que nous n'aurons pas d'outils plus efficaces (c'est-à-dire pas avant quelques chapitres), nous ferons très attention pour écrire de telles lois.

✯ loi des nœuds en terme de potentiel

✧ Cette fois c'est le contraire : pour le condensateur, cela se passera bien, mais pas pour la bobine.

✧ Pour le condensateurs, nous écrirons tout simplement $i_C(t) = \pm C\,\dfrac{\mathrm{d}(V_1(t) - V_2(t))}{\mathrm{d}t}$ où les points 1 et 2 sont les bornes du condensateur.

✧ Pour la bobine, un raisonnement identique au précédent conduit à :

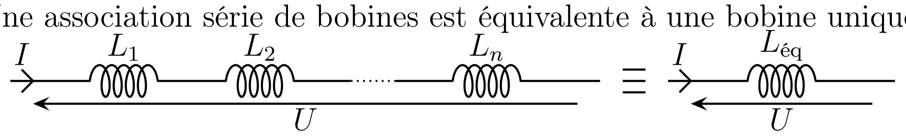
> Le courant en terme de potentiel traversant une bobine s'écrit :
>
> $$i(t) = i(0) \pm \frac{1}{L}\int_0^t u_L(t')\mathrm{d}t'$$

✧ Comme précédemment, nous ferons très attention pour écrire des lois de nœuds en terme de potentiel avec des bobines.

I·4·*iv* – association de bobines ou de condensateurs

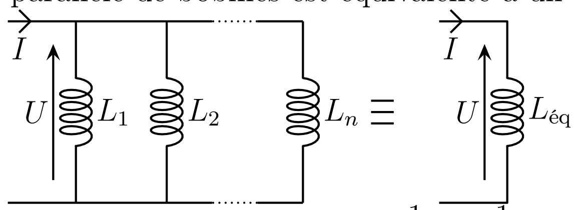
✧ Lorsque deux (ou plusieurs) bobines ou condensateurs sont en série ou en parallèle, il est possible de les associer, *ie.* de les remplacer par un seul composant électrocinétiquement équivalent.

Une association série de bobines est équivalente à une bobine unique.



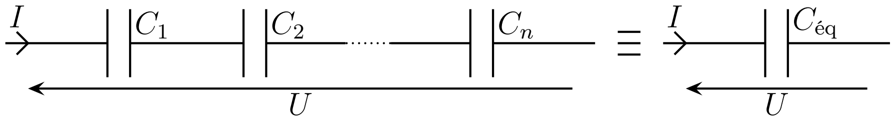
L'inductance de la bobine équivalente vaut $L_{\text{éq}} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$.

Une association parallèle de bobines est équivalente à un bobine unique.



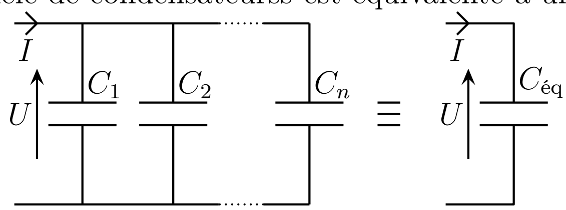
L'inductance de la bobine équivalente vaut $\dfrac{1}{L_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2} + \cdots + \dfrac{1}{L_n}$.

Une association série de condensateurs est équivalente à un condensateur unique.



La conductance du condensateur équivalent vaut $\dfrac{1}{C_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \cdots + \dfrac{1}{C_n}$.

Une association parallèle de condensateurss est équivalente à un condensateur unique.



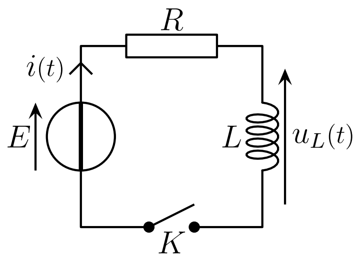
La conductance du condensateur équivalent vaut $C_{\text{éq}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$.

II – Évolution du premier ordre

II·1 – Circuit R,L soumis à un échelon de tension

II·1·i – présentation et analyse

✧ Considérons le circuit ci-dessous.



✧ À un instant, K est fermé. Cherchons l'évolution ultérieure.

✧ Analyse physique :
- ➜ les grandeurs connues sont E, R et L
- ➜ nous allons donc chercher $i(t)$ et $u_L(t)$
- ➜ il s'agit d'un circuit en régime forcé et transitoire

✧ Analyse technique :
- ➜ une seule maille → loi des mailles en terme de courant
- ➜ nous utiliserons la relation courant tension de la bobine pour obtenir $u_L(t)$.

II·1·*ii* – traduction des lois physiques

✧ La loi des mailles en terme de courant s'écrit, **une fois que l'interrupteur est fermé** :

$$E - R\,i(t) - L\,\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{L\,\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + R\,i(t) = E}$$

II·1·*iii* – interlude mathématique – équation différentielle d'ordre 1

✧ Ou plus précisément : équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants.

✧ Comment résoudre l'équation $\dfrac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}\,\alpha(t) = \mathrm{qqch}(t)$?

✫ approche physique

✧ Intéressons-nous tout d'abors à la dimension de la constante τ. Écrivons pour cela que les deux termes du membre de gauche sont de même dimension :

$$\left[\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\frac{\alpha(t)}{\tau}\right] \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{[\mathrm{d}\alpha]}{[\mathrm{d}t]} = \frac{[\alpha]}{[\tau]}$$

✧ Et comme la notation différentielle ne représente qu'une différence, nous avons $[\mathrm{d}\alpha] = [\alpha]$ et $[\mathrm{d}t] = [t]$ d'où $\boxed{[\tau] = (s) = T}$.

> La constante τ a la même dimension qu'un temps : elle est appelée *constante de temps.*

✧ Étant donné que la constante τ apparaît dans l'équation, il est normal qu'elle apparaissent dans la solution.

> La constante τ représente l'échelle de temps sur laquelle va se faire l'évolution.

✧ De plus la partie « à droite » de l'équation représente les contraintes extérieures (ici le générateur), c'est donc ce qui va être à l'origine du régime forcé.

✯ approche technique

✧ Il y a trois étapes à faire et **dans l'ordre** :
- ➜ écrire toutes les solutions possibles (mode automatique)
- ➜ chercher une solution qui marche mathématiquement parlant (mode automatique ou raisonnement physique)
- ➜ chercher **LA** solution du problème posé (raisonnement physique obligatoire)

toutes les solutions possibles

Pour l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}\,\alpha(t) = \mathrm{qqch}(t)$, **toutes** les solutions possibles s'écrivent :

$$\alpha(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \alpha_{\mathrm{p}}(t)$$

où λ est une constante à déterminer et $\alpha_{\mathrm{p}}(t)$ une solution ***p**articulière*.

✧ Nous pouvons constater que $\alpha(t) \xrightarrow{t\to+\infty} \alpha_{\mathrm{p}}(t)$, *ie.* :

La solution particulière $\alpha_{\mathrm{p}}(t)$ n'est autre que la solution en régime ***p**ermanent*.

une solution qui marche

✧ Il faut maintenant chercher une solution qui marche, *ie.* qui vérifie l'équation différentielle complète. La plupart du temps, cela revient à chercher une forme explicite de $\alpha_{\mathrm{p}}(t)$.

Pour trouver la solution **p**articulière, il est recommandé de la chercher avec la même force que celle du membre de droite.

$\mathrm{qqch}(t)$	$\alpha_{\mathrm{p}}(t)$
$\mathrm{C^{te}}$	$\mathrm{C^{te\,\prime}}$
$A\,\cos(2\,\pi\,f\,t)$	$B\,\cos(2\,\pi\,f\,t) + C\,\sin(2\,\pi\,f\,t)$
$A\,\mathrm{e}^{-t/\tau'}$	$A'\,\mathrm{e}^{-t/\tau'}$
$A + B\,t + C\,t^2 + \ldots$	$A' + B'\,t + C'\,t^2 + \ldots$

Pour trouver la solution en régime **p**ermanent, il faut étudier le circuit équivalent en régime permanent.

la solution finale

✧ C'est la dernière étape **à faire en dernier**.

Les constante d'intégration se déterminent à partir des conditions aux limites. Il doit y avoir autant de condition aux limites que de constantes d'intégration.

Quand les équations différentielles sont des équations différentielles temporelles, les conditions aux limites sont appelées *conditions initiales* lorsqu'elles correspondent à une condition à respecter à l'instant initial.

✧ Il peut parfois arriver (mais c'est rare) que la recherche d'une constante d'intégration pour une équation différentielle temporelle se fasse à un instant autre que l'instant initial.

II·1·*iv* – solution complète du problème particulier

✯ résultat physique

✧ Réécrivons l'équation différentielle sous forme canonique.

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}\,i(t) = \frac{E}{L} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau}$$

La constante de temps d'un circuit R,L est $\tau = \dfrac{L}{R}$.

✯ solution analytique

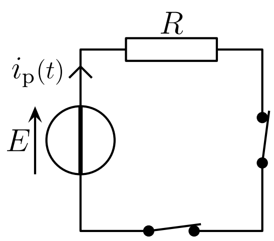
✧ Commençons par écrire la solution générale :

$$i(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + i_{\mathrm{p}}(t)$$

✧ Déterminons la solution particulière $i_{\mathrm{p}}(t)$. Pour cela, comme le second membre est constant, supposons qu'elle soit de la forme $i_{\mathrm{p}}(t) = \mu = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$ et remplaçons cette solution dans l'équation différentielle :

$$0 + \frac{1}{\tau} \times \mu = \frac{E}{L} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mu = \frac{E}{L} \times \tau = \frac{E}{\cancel{L}} \times \frac{\cancel{L}}{R} \qquad \rightsquigarrow \qquad i_{\mathrm{p}}(t) = \frac{E}{R}$$

✧ Nous aurions pu aussi déterminer la solution en régime permanent. Pour cela, schématisons le circuit lorsque le régime permanent est atteint. L'interrupteur est fermé et la bobine se comporte comme un fil. Cela donne :



et nous obtenons aussitôt $i_{\mathrm{p}}(t) = \dfrac{E}{R}$.

STOP bien que cela soit souvent le cas, les deux méthodes ne conduisent pas obligatoirement à la même expression de $i_{\mathrm{p}}(t)$. Seule les solutions finales, à la fin de la 3$^{\mathrm{e}}$ étape, doivent être identiques.

✧ La meilleure des deux méthodes est (cette fois) celle que chacun préfère.

✧ Pour l'instant la solution s'écrit $i(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{E}{R}$. Reste à déterminer λ.

> Ce seront les continuités mathématiques des intensités des courants traversant les bobines et des tensions aux bornes des condensaeurs qui permettront de trouver les conditions initiales.

✧ Et personne n'a dit que ces continuités *étaient* les conditions initiales ...
✧ Ici :
- ➜ juste avant de fermer l'interrupteur, aucun courant ne circule **dans la bobine** donc $i(0^-) = 0$
- ➜ la continuité de l'intensité du courant traversant une bobine assure $i(0^+) = i(0^-)$
- ➜ la solution que nous avons trouvée nous donne $i(0^+) = \lambda + \dfrac{E}{R}$

✧ Ces trois arguments (et il faut les trois arguments) permettent d'aboutir à $\lambda = -\dfrac{E}{R}$ et ainsi :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$

✧ C'est bien un résultat homogène !
✧ Pour déterminer $u_L(t)$, utilisons la loi constitutive de la bobine :

$$u_L(t) = L\,\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = L \times \frac{E}{R} \times \frac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{u_L(t) = E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

✧ C'est bien un résultat homogène **et** proportionnel à $i(t)$ comme nous le savons des évolutions du premier ordre.

✯ interprétation physique

✧ À la limite, $i(t) \xrightarrow{t\to\infty} \dfrac{E}{R}$ et $u_L(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$.
✧ Nous constatons que le régime permanent ne dépend pas de l'inductance de la bobine. Rien de plus normal étant donné que le régime permanent est continu qu'en régime continu la bobine se comporte comme un interrupteur fermé quelle que soit son inductance.

II·1·*v* – régime permanent

✧ La question est désormais de savoir *quand* le régime permanent est atteint.
✧ Si nous nous en tenons à la définition stricte et rigoureuse de la définition du régime permanent, comme $\mathrm{e}^{-t/\tau} \neq 0$ quel que soit t, la réponse est **jamais**.
✧ Ceci dit, en dessous d'une certaine marge, il est impossible de faire la différence entre la courbe et son asymptote, c'est pourquoi nous allons chercher quand le régime permanent est atteint à peu près.
✧ De manière tout à fait arbitraire, cherchons quand le régime permanent est atteint à mieux que 1 % près.
✧ Cela signifie que le terme en $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ vaut moins de 1 % de sa valeur initiale qui n'est autre que 1 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-t/\tau} &\leqslant \frac{1}{100}\\
\mathrm{e}^{t/\tau} &\geqslant 100\\
\frac{t}{\tau} &\geqslant \ln 100 = 2\,\ln 10\\
t &\geqslant 2\,\tau\,\ln 10 \simeq 4{,}6\,\tau
\end{aligned}$$

Au bout d'une durée de $5\,\tau$, le régime permanent est atteint à mieux que 1 % près.

✧ Avec un raisonnement identique, nous aurions obtenu :

A bout d'une durée de $3\,\tau$, le régime permanent est atteint à 5 % près.

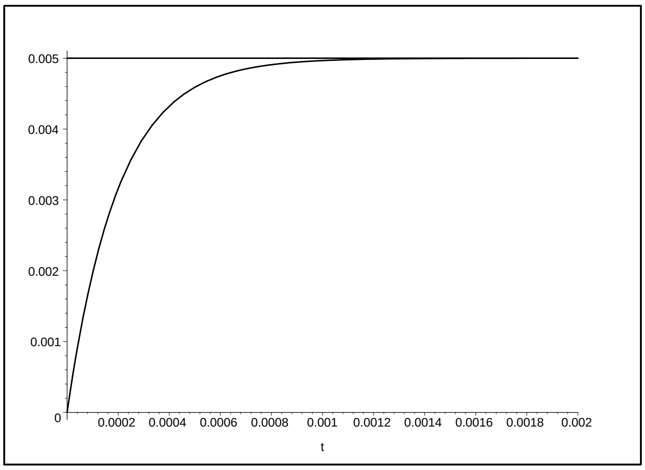
II·1·*vi* – représentation graphique et interprétation

✧ Dans toute la suite, les courbes présentées sont des courbes tracées à partir des solutions analytiques et non des simulations informatique.

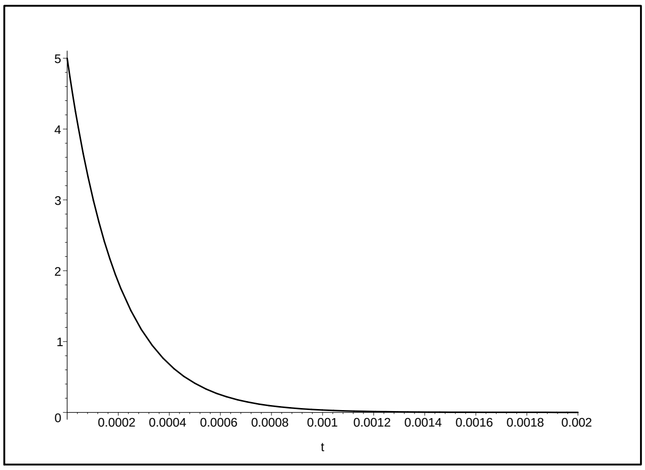
✧ Cela donne, pour les valeurs $E = 5{,}0$ V, $R = 1{,}0\ \Omega$ et $L = 0{,}2$ H :

- ➜ graphique 1 : $i(t)$
- ➜ graphique 2 : $u_L(t)$

Graphique 1



Graphique 2



L'intersection de la tangente en un point quelconque d'une évolution exponentielle se fait exactement τ plus tard que le point. C'est la méthode de la tangente n'importe où.

Expérimentalement parlant, la méthode dite de la tangente à l'origine est moins précise : faites-le.

II·1·*vii* – phénoménologie à connaître

✧ Pour le circuit R,L, il faut connaître sur le bout des doigts :

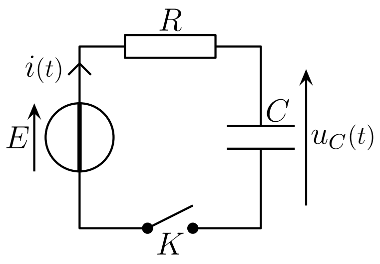
- ➜ l'expression de la constante de temps
- ➜ la représentation graphique des évolutions avec les asymptotes
- ➜ l'interprétation graphique de la constante de temps (méthode de la tangente n'importe où)

II·2 – Circuit R,C soumis à un échelon de tension

✧ Nous allons faire la même chose pour le circuit R,C. Cela ira, forcément, plus vite !

II·2·*i* – présentation et analyse

✧ Considérons le circuit ci-dessous.



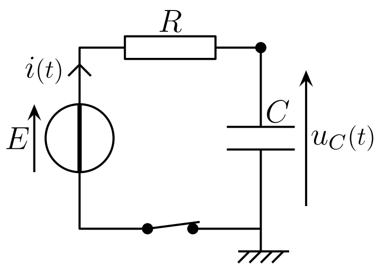
✧ À un instant, K est fermé. Cherchons l'évolution ultérieure.

✧ Analyse physique :
- ➜ les grandeurs connues sont E, R et C
- ➜ nous allons donc chercher $i(t)$ et $u_C(t)$
- ➜ il s'agit d'un circuit en régime forcé et transitoire

✧ Analyse technique :
- ➜ une seule maille → loi des mailles bof bof car il y a un condensateur et en plus on cherche l'équation différentielle en $u_C(t)$
- ➜ nous utiliserons une approche nodale

II·2·*ii* – traduction des lois physiques

✧ Plaçons la masse à un endroit adéquate.



✧ La loi des nœuds en terme de potentiels s'écrit, au point situé entre le résistor et le condensateur :

$$\frac{E - u_C(t)}{R} - C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{1}{R}\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + C\,u_C(t) = \frac{E}{R}$$

soit, sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R\,C}\,u_C(t) = \frac{E}{R\,C}$$

La constante de temps d'un circuit R,C est $\tau = R\,C$.

II·2·*iii* – solution complète du problème particulier

✯ solution analytique

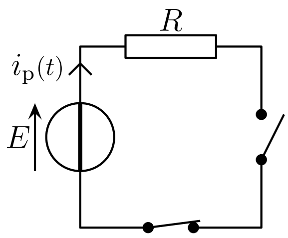
✧ Commençons par écrire la solution générale :

$$u_C(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + u_{C,\mathrm{p}}(t)$$

✧ Déterminons la solution particulière $u_{C,\mathrm{p}}(t)$. Pour cela, comme le second membre est constant, supposons qu'elle soit de la forme $u_{C,\mathrm{p}}(t) = \mu = \mathrm{C^{te}}$ et remplaçons cette solution dans l'équation différentielle :

$$0 + \frac{1}{\tau}\times\mu = \frac{E}{R\,C} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mu = \frac{E}{R\,C}\times\tau = \frac{E}{\cancel{R\,C}}\times\cancel{R\,C} \quad \rightsquigarrow \quad u_{C,\mathrm{p}}(t) = E$$

✧ Nous aurions pu aussi déterminer la solution en régime permanent. Pour cela, schématisons le circuit lorsque le régime permanent est atteint. L'interrupteur est fermé et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Cela donne :



et nous obtenons ainsi $i_\mathrm{p}(t) = 0$ et $u_{C,\mathrm{p}} = E - R\,i_\mathrm{p}(t) = E$

✧ Pour l'instant la solution s'écrit $u_C(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$. Reste à déterminer λ.

✧ Ici :
- ➜ juste avant de fermer l'interrupteur, le condensateur était déchargé, *ie.* $u_C(0^-) = 0$
- ➜ la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur assure $u_C(0^+) = u_C(0^-)$
- ➜ la solution que nous avons trouvée nous donne $u_C(0^+) = \lambda + E$

✧ Ces trois arguments (et il faut les trois arguments) permettent d'aboutir à $\lambda = -E$ et ainsi :

$$\boxed{u_C(t) = E\,\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$

✧ C'est bien un résultat homogène !

✧ Pour déterminer $i(t)$, utilisons la loi constitutive du condensateur :

$$i(t) = C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = C\times\frac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

✧ C'est bien un résultat homogène **et** proportionnel à $u_C(t)$ comme nous le savons des évolutions du premier ordre.

✯ interprétation physique

✧ À la limite, $i(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ et $u_C(t) \xrightarrow{t\to\infty} E$.

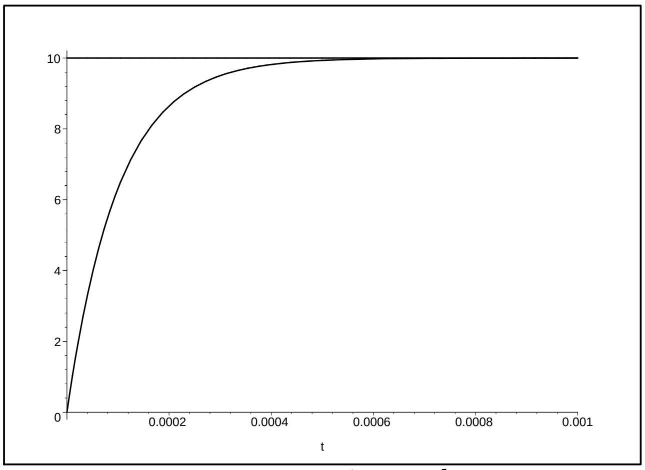
✧ Nous constatons que le régime permanent ne dépend pas de la capacité du condensateur. Comme pour la bobine, rien de plus normal étant donné que le régime permanent est continu qu'en régime continu le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert quelle que soit sa capacité.

✧ Nous pouvons aussi constater que si la charge s'arrête, ce n'est pas de la faute au condensateur dans lequel il n'y aurait plus de place pour les électrons, mais de la faute au générateur qui n'a pas la force (électromotrice) de le charger davantage.

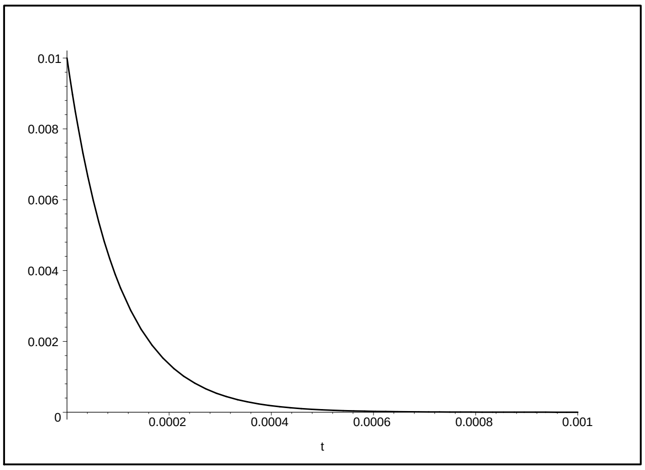
II·2·*iv* – représentation graphique et interprétation

✧ Cela donne, pour les valeurs $E = 10$ V, $R = 1{,}0\ \Omega$ et $C = 100$ nF :
- ➜ graphique 3 : $u_C(t)$
- ➜ graphique 4 : $i(t)$

Graphique 3



Graphique 4



✧ Vous pouvez mesurer expérimentalement τ.

II·2·*v* – phénoménologie à connaître

✧ Pour le circuit R,C, il faut connaître sur le bout des doigts :
- ➜ l'expression de la constante de temps
- ➜ la représentation graphique des évolutions avec les asymptotes
- ➜ l'interprétation graphique de la constante de temps (méthode de la tangente n'importe où)

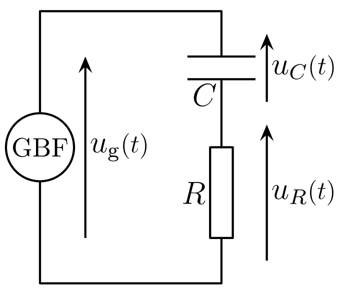
II·3 – Retour sur les simulations

II·3·*i* – visualisation expérimentale

✧ Revenons sur les simulations de la première partie et cherchons *a posteriori* les conditions nécessaire aux observations des phénomènes désirés.

✭ pour le circuit avec le condensateur

✧ Rappelons que le circuit était celui représenté ci-dessous et que le but était de mesurer la tension aux bornes du résistor afin d'observer la relation courant – tension pour la bobine.



✧ Avoir $|u_R(t)| \ll |u_g(t)|$ revient à avoir $|u_R(t)| \ll |u_C(t)|$. Ainsi nous allons chercher à quelle condition $\left| R\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \right| \ll |u_C(t)|$.

- Pour ce faire cherchons des valeurs caractéristiques. Notons tout d'abord U_0 la valeur caractéristique de la tension aux bornes du condensateur. Nous obtenons alors $|u_C(t)| \sim U_0$. Si nous notons T la durée caractéristique de l'évolution (ici, évidemment, la période), nous avons $\left|R\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right| \sim R\,C\,\dfrac{U_0}{T}$.

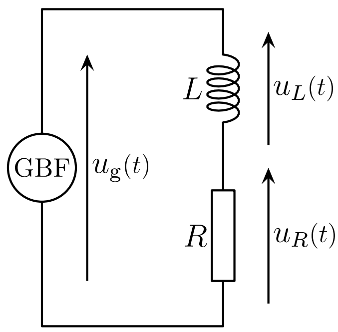
  La condition recherchée est donc :

$$R\,C\,\frac{U_0}{T} \ll U_0 \qquad \rightsquigarrow \qquad T \ll R\,C = \tau$$

- Pour que les observations se fassent bien, il fallait que la période soit grande devant la durée caractéristique du circuit R,C.
- Vérifions :
  - ➜ $\tau = R\,C = 10^3 \times 100.10^{-9} = 10^{-4}$ s
  - ➜ $T_{\text{sin}} = 10^{-1}$ s $\gg \tau$
  - ➜ $T_{\text{tri}} = 4.10^{-4}$ s $\gg \tau$

✯ pour le circuit avec la bobine

- Rappelons que le circuit était celui représenté ci-dessous et que le but était de mesurer la tension aux bornes du résistor afin d'observer la relation courant – tension pour la bobine.



- Avoir $|u_R(t)| \ll |u_{\text{g}}(t)|$ revient à avoir $|u_R(t)| \ll |u_L(t)|$. Ainsi nous allons chercher à quelle condition $|R\,i(t)| \ll \left|L\,\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right|$.
- Pour ce faire cherchons des valeurs caractéristiques. Notons tout d'abord I_0 la valeur caractéristique de l'intensité. Nous obtenons alors $|R\,i(t)| \sim R\,I_0$. Si nous notons T la durée caractéristique de l'évolution (ici, évidemment, la période), nous avons $\left|L\,\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right| \sim L\,\dfrac{I_0}{T}$. La condition recherchée est donc :

$$R\,I_0 \ll L\,\frac{I_0}{T} \qquad \rightsquigarrow \qquad T \ll \frac{L}{R} = \tau$$

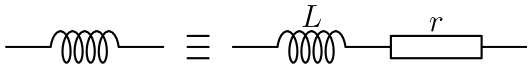
- Pour que les observations se fassent bien, il fallait que la période soit courte devant la durée caractéristique du circuit R,L.
- Vérifions :
  - ➜ $\tau = \dfrac{L}{R} = 10^{-3}$ s
  - ➜ $T_{\text{sin}} = 10^{-4}$ s $\ll \tau$
  - ➜ $T_{\text{rect}} = 10^{-4}$ s $\ll \tau$
- Nous constatons à cette occasion que le symbole $\ll$ peut parfois « simplement » représenter un facteur 10.

II·3·*ii* – bobine et condensateur réels

✧ Il faut ajouter aussi que les simulations ont été faites avec des composants idéaux. En effet, les composants réels ne sont pas idéaux.

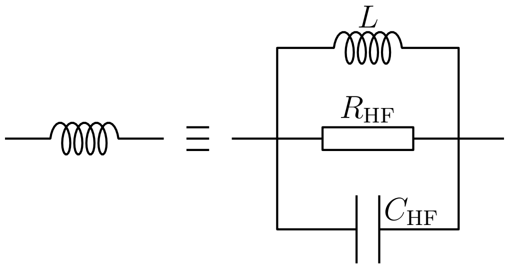
✫ modèles de bobine réelle

En basses fréquences, une bobine réelle se comporte comme une bobine idéale en série avec un résistor.



✧ r est de l'ordre de la dizaine d'ohms.

En hautes fréquences, une bobine réelle se comporte comme une bobine idéale en parallèle avec un résistor et un condensateur.

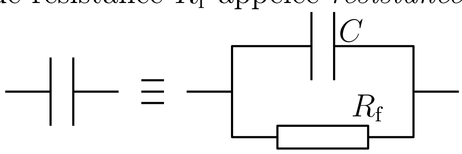


✧ C_{HF} est de l'ordre du pF et R_{HF} du MΩ.

✧ La limite hautes / basses fréquence dépend de la bobine.

✫ modèles de condensateur réel

Un condensateur réel se comporte comme un condensateur idéal en parallèle avec un résistor de résistance R_{f} appelée *résistance de fuite*.



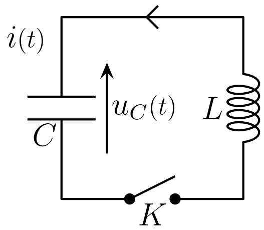
✧ La résistance de fuite des condensateurs usuel sont de l'ordre du MΩ voire bien supérieure.

III – Évolution du second ordre

III·1 – Circuit L,C en régime libre

III·1·*i* – présentation et analyse

✧ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel le condensateur est chargé sous la tension U_0.



✧ À un instant, K est fermé. Cherchons l'évolution ultérieure.

✧ Analyse physique :
- ➜ les grandeurs connues sont L, C et U_0
- ➜ nous allons donc chercher $i(t)$ et $u(t)$, grandeurs communes aux deux dipôles lorsque l'interrupteur est fermé
- ➜ il s'agit d'un circuit en régime libre et transitoire

✧ Analyse technique :
- ➜ une seule maille → loi des mailles **mais pas** en terme de courant à cause du condensateur

III·1·*ii* – traduction des lois physiques

✧ Aucune difficulté :

$$u(t) + L\,\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{et} \qquad i(t) = +C\,\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \rightsquigarrow \qquad L\,C\,\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + u(t) = 0$$

III·1·*iii* – interlude mathématique

✧ Ou comment résoudre l'équation différentielle écrite sous la forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2\,\alpha(t) = \mathrm{qqch}(t)}$$

✫ notation différentielle

✧ La place des « ^{2} » est fondamentale. En fait nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\right)$$

✧ Il est donc normal d'avoir au numérateur $\mathrm{d}^2\alpha$ et $\mathrm{d}t^2$ au dénominateur.

✫ approche physique

✧ Du point de vue des dimensions, comme précédemment, « les d ne comptent pas », ce qui donne :

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2}\right] = \frac{[\mathrm{d}^2\alpha]}{[\mathrm{d}t^2]} = \frac{[\alpha]}{[t^2]} = \frac{[\alpha]}{[t]^2}$$

✧ Ainsi, comme deux termes sommés sont homogènes :

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2}\right] = [{\omega_0}^2\,\alpha(t)] \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{[\alpha]}{[t]^2} = [\omega_0^2]\,[\alpha] \qquad \rightsquigarrow \qquad [\omega_0] = [t]^{-1} = (\mathrm{s})^{-1} = T^{-1}$$

La constante ω_0 est appelée la *pulsation propre* et s'exprime en rad.s^{-1}.

✫ approche technique

✧ En fait tout se passe comme pour les équations différentielles d'ordre 1 :
- ➜ écrire toutes les solutions possibles (mode automatique)
- ➜ chercher une solution qui marche mathématiquement parlant (mode automatique ou raisonnement physique)
- ➜ chercher **LA** solution du problème posé (raisonnement physique obligatoire)

Toutes les solutions de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2\,\alpha(t) = \text{qqch}(t)$ peuvent s'écrire sous une des deux formes équivalentes suivantes :
- ➜ $\alpha(t) = A\,\cos(\omega_0\,t) + B\,\sin(\omega_0\,t) + \alpha_{\text{p}}(t)$
- ➜ $\alpha(t) = \lambda\,\cos(\omega_0\,t + \varphi) + \alpha_{\text{p}}(t)$

où A, B, λ et φ dont des constantes d'intégration.

✧ Dans les deux cas, il y a deux constantes d'intégrations (A et B d'une part, λ et μ d'autre part) qui exigeront deux conditions initiales.

✧ Suivant les cas, nous choisirons plutôt une forme ou l'autre :
- ➜ plutôt la première lorsqu'il faudra rechercher explicitement la solution avec deux conditions initiales
- ➜ plutôt la deuxième forme lorsqu'il s'agira d'écrire la solution sans la déterminer entièrement ou lorsque les conditions ne seront pas initiales

✫ pulsation

La pulsation d'un signal périodique vaut, par définition, $\omega = 2\,\pi\,f$ où f est sa fréquence. Ainsi $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T}$ avec T la période du signal.

III·1·*iv* – solution complète du problème particulier

✧ Ici comme il n'y a pas de second membre qui permettrait un régime forcé, la solution s'écrit tout de suite :

$$u(t) = A\,\cos(\omega_0\,t) + B\,\sin(\omega_0\,t)$$

✧ Utilisons les conditions initiales. D'abord celle sur la tension aux bornes du condensateur :
- ➜ juste avant la fermeture de l'interrupteur, la tension aux bornes du condensateur valait U_0, donc $u_C(0^-) = U_0$
- ➜ la continuité mathématique de la tension aux bornes d'un condensateur implique $u_C(0^-) = u_C(0^+)$
- ➜ la solution trouvée donne, pour $t = 0^+$: $u_C(0^+) = A + 0$
- ➜ donc $A = U_0$

✧ L'autre condition initial va impliquer le courant traversant la bobine. Il convient donc de la calculer d'abord :

$$u_C(t) = U_0\,\cos(\omega_0\,t) + B\,\sin(\omega_0\,t) \qquad \text{et} \qquad i(t) = +C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

donnent $i(t) = -C\,U_0\,\omega_0\,\sin(\omega_0\,t) + B\,\omega_0\,C\,\cos(\omega_0\,t)$

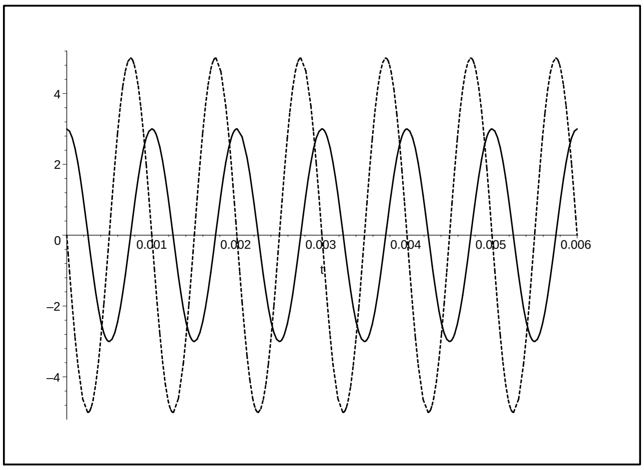
✧ Et maintenant :
- ➜ juste avant la fermeture de l'interrupteur, aucun courant ne circulait dans la bobine, donc $i(0^-) = 0$
- ➜ la continuité mathématique de l'intensité du courant traversant une bobine implique $i(0^-) = i(0^+)$
- ➜ la solution trouvée donne, pour $t = 0^+$: $i(0^+) = 0 + B\,\omega_0\,C$
- ➜ donc $B = 0$

✧ Finalement : $\boxed{u_C(t) = U_0\,\cos(\omega_0\,t)}$ et $\boxed{i(t) = -C\,U_0\,\omega_0\,\sin(\omega_0\,t)}$.

III·1·v – représentation graphique et interprétation

✧ Sur le graphique 5, nous pouvons voir :
- ➜ la tension aux bornes du condensateur
- ➜ l'intensité traversant le circuit

Graphique 5



✧ Pour retrouver qui est qui, aucune raison physique ne peut les départager car les évolutions sont similaires. Toutefois ici, avec les conditions initiales :
- ➜ la tension aux bornes du condensateur est la courbe en trait plein
- ➜ l'intensité traversant le circuit est la courbe en tirets

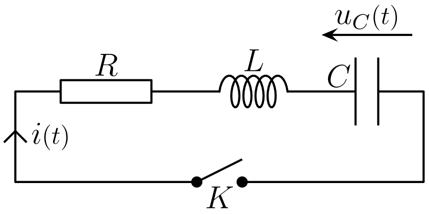
III·1·vi – phénoménologie à connaître

✧ Pour le circuit L,C, il faut connaître sur le bout des doigts :
- ➜ l'expression de pulsation propre
- ➜ la représentation graphique des évolutions, savoir en particulier qu'elles sont sinusoïdales

III·2 – Circuit R,L,C série en régime libre, première étape

III·2·i – présentation et analyse

✧ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel le condensateur est chargé sous la tension U_0.



✧ À un instant, K est fermé. Cherchons l'évolution ultérieure.

✧ Analyse physique :
- ➜ les grandeurs connues sont L, C, R et U_0
- ➜ nous allons donc chercher $u_C(t)$ lorsque l'interrupteur est fermé
- ➜ il s'agit d'un circuit en régime libre et transitoire

✧ Analyse technique :
- ➜ une seule maille → loi des mailles **mais pas** en terme de courant à cause du condensateur, il faudra donc penser à la relation constitutive du condensateur

III·2·*ii* – traduction des lois physiques

✧ Aucune difficulté :

$$u_C(t) + L\,\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + R\,i(t) = 0 \quad \text{et} \quad i(t) = +C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \quad \rightsquigarrow \quad u_C(t) + L\,C\,\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

III·2·*iii* – interlude mathématique

✧ Ou comment résoudre les équations différentielle linéaires, d'ordre deux, à coefficients constant.

✧ Adoptons l'écriture canonique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,\alpha(t) = \mathrm{qqch}(t)$$

✫ approche physique

✧ Pour des raisons similaires à celles évoquées précédemment, ω_0 a la même dimension qu'avant. Ici aussi ω_0 s'appelle la pulsation propre.

✧ Cherchons la dimension de Q.

$$\left[\frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\right] = [{\omega_0}^2\,\alpha(t)] \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\cancel{[\omega_0]}\,\cancel{[\alpha]}}{[Q]\,[t]} = [\omega_0]^{\cancel{2}}\,\cancel{[\alpha]} \quad \text{et} \quad [Q] = \frac{1}{[\omega_0]\,[t]} = \emptyset$$

La constante Q est un nombre sans dimension et s'appelle le *facteur de qualité*. Il caractérise le type d'évolution du dispositif.

✫ approche technique

✧ En fait tout se passe comme pour les équations différentielles d'ordre 1 :
- ➜ écrire toutes les solutions possibles (mode automatique)
- ➜ chercher une solution qui marche mathématiquement parlant (mode automatique ou raisonnement physique)

➜ chercher **LA** solution du problème posé (raisonnement physique obligatoire)

Pour trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\,\dfrac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,\alpha(t) = \text{qqch}(t)$, il faut d'abord calculer le discriminant Δ de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,r + {\omega_0}^2 = 0$$

qui vaut $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\,{\omega_0}^2$.

III·2·*iv* – grandeurs caractéristiques

✧ Cherchons l'expression de la pulsation propre et du facteur de qualité d'un circuit R,L,C série.
✧ Réécrivons d'abord l'équation sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L\,C}\,u_C(t) = 0$$

et identifions terme à terme :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L} \\ {\omega_0}^2 = \dfrac{1}{L\,C} \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L\,C}} \\ Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \end{array}\right.$$

Pour un circuit R,L,C série, la pulsation propre vaut $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L\,C}}$ et le facteur de qualité vaut $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

III·3 – Circuit R,L,C série en régime libre et apériodique

III·3·*i* – solution générale de l'équation différentielle

Lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique est strictement positif, il existe deux solutions distinctes r_1 et r_2. Les solutions de l'équation différentielles s'écrivent alors :

$$\alpha(t) = A\,\mathrm{e}^{r_1\,t} + B\,\mathrm{e}^{r_2\,t} + \alpha_{\mathrm{p}}(t)$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

✧ Cherchons la condition sur le facteur de qualité pour que le discriminant soit positif :

$$\Delta > 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{{\omega_0}^2}{Q^2} - 4\,{\omega_0}^2 > 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{Q^2} > 4 \quad \rightsquigarrow \quad Q < \frac{1}{2}$$

Le discriminant Δ de l'équation caractéristique est strictement positif si et seulement si le facteur de qualité est strictement inférieur à $\dfrac{1}{2}$.

Lorsque le facteur de qualité est inférieur à $\dfrac{1}{2}$, le régime est dit *apériodique*.

III·3·*ii* – solution complète du problème particulier

✫ solutions de l'équation caractéristique

✧ L'équation caractéristique étant $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}\,r + {\omega_0}^2 = 0$, les deux racines s'écrivent :

➜ $r_1 = \dfrac{-\dfrac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2} = -\dfrac{\omega_0}{2\,Q} + \omega_0\,\sqrt{\dfrac{1}{4\,Q^2} - 1}$

➜ $r_2 = \dfrac{-\dfrac{\omega_0}{Q} - \sqrt{\Delta}}{2} = -\dfrac{\omega_0}{2\,Q} - \omega_0\,\sqrt{\dfrac{1}{4\,Q^2} - 1}$

✧ Prouvons que les deux racines sont négatives. Pour r_2 c'est évident. Pour r_1, soit nous le « voyons » en constatant que le terme rajouté est inférieur au terme retranché, soit nous le prouvons en nous rappelant que l'équation caractéristique peut s'écrire :

$$r^2 - S\,r + P = 0$$

où S est la somme des deux racines et P leur produit. Avec $P > 0$ et $S < 0$, les deux racines sont forcément négatives.

✧ Comme les racines sont négatives, nous pouvons les noter $r_1 = -\dfrac{1}{\tau_1}$ et $r_2 = -\dfrac{1}{\tau_2}$ ce qui permet d'écrire la solution sous la forme :

$$u_C(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + B\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}$$

✫ détermination des constantes d'intégration

✧ Procédons comme d'habitude, *ie.* en faisant intervenir la continuité de la tension aux bornes du condensateur et la continuité de l'intensité du courant traversant la bobine.

✧ Pour le condensateur, ça sera simple car $u_C(t)$ n'est autre que la tension entre ses bornes. Cela donne :

➜ juste avant la fermeture de l'interrupteur, la tension aux bornes du condensateur valait U_0, donc $u_C(0^-) = U_0$

➜ la continuité mathématique de la tension aux bornes d'un condensateur implique $u_C(0^-) = u_C(0^+)$

➜ la solution trouvée donne, pour $t = 0^+$: $u_C(0^+) = A + B$

➜ donc $A + B = U_0$

✧ L'autre condition initial va impliquer le courant traversant la bobine. Il convient donc de la calculer d'abord :

$$u_C(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + B\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2} \qquad \text{et} \qquad i(t) = +C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

donnent $i(t) = -\dfrac{A\,C}{\tau_1}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - \dfrac{B\,C}{\tau_2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}$

✧ Et maintenant :
- ➜ juste avant la fermeture de l'interrupteur, aucun courant ne circulait dans la bobine, donc $i(0^-) = 0$
- ➜ la continuité mathématique de l'intensité du courant traversant une bobine implique $i(0^-) = i(0^+)$
- ➜ la solution trouvée donne, pour $t = 0^+$: $i(0^+) = -\dfrac{A\,C}{\tau_1} + \dfrac{B\,C}{\tau_2}$
- ➜ donc $\dfrac{A}{\tau_1} + \dfrac{B}{\tau_2} = 0$

✧ Nous obtenons ainsi un système de deux équations deux inconnues qui ne pose aucune difficulté de résolution :

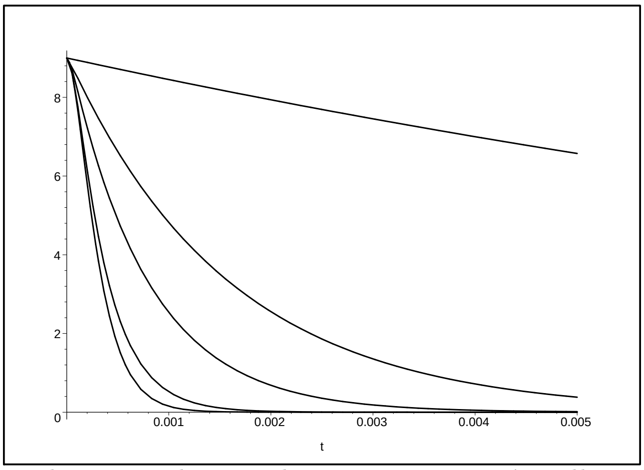
$$\left\{\begin{array}{l} A + B = U_0 \\ \tau_2\,A + \tau_1\,B = 0 \end{array}\right. \qquad \rightsquigarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\,U_0 \\ B = \dfrac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}\,U_0 \end{array}\right.$$

✧ Finalement : $u_C(t) = \dfrac{U_0}{\tau_1 - \tau_2}\,\left(\tau_1\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - \tau_2\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right)$

III·3·*iii* – représentation graphique et interprétation

✧ Sur le graphique 6 nous pouvons voir 5 régimes apériodiques différant uniquement sur le facteur de qualité Q prenant les valeurs 0,49, 0,4, 0,2, 0,1 et 0,01

Graphique 6

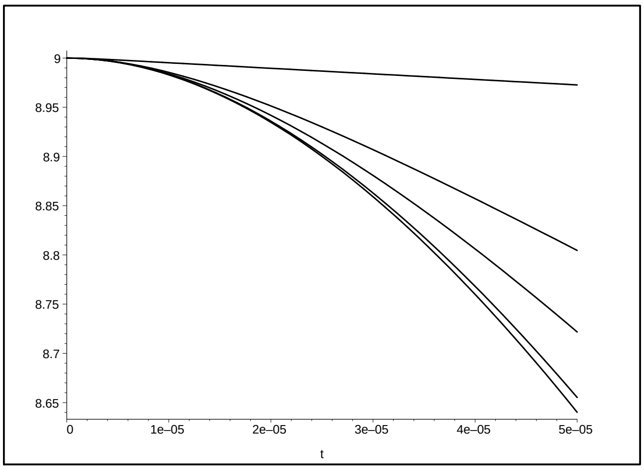


✧ Nous pouvons constater que, dans tous les cas, la tension $u_C(t)$ n'oscille pas, d'où le nom *apériodique*.

✧ La question est qui est qui ? Ou plutôt qui est où ?
- ➜ la courbe la plus haute met longtemps avant de diminuer
- ➜ c'est une somme d'exponentielles, donc l'un des deux termes doit avoir une constante de temps τ_1 ou τ_2 très grande
- ➜ ça implique que r_1 ou r_2 quasi nul
- ➜ il ne peut s'agit que de r_1 quasi nul
- ➜ nous pouvons alors constater que r_1 tend vers 0 pour Q tend vers 0 → c'est bon !

✧ Sur le graphique 7 nous pouvons voir des zooms sur l'instant initial

Graphique 7



✧ En effet la dérivée de $u_C(t)$ est proportionnelle à $i(t)$ et est donc nulle à l'instant initial. Et si effectivement c'est bel et bien le cas, lorsque nous regardons à une échelle d'évolution adapté, cela ne se voit pas.

III·3·*iv* – cas particulier $Q \ll 1$

✯ régime permanent

✧ Estimons la durée au bout de laquelle le régime permanent est atteint dans le cas où $Q \ll 1$.

✧ La tension étant une somme de deux exponentielles différentes, le régime permanent sera atteint lorsque l'évolution *de plus grande constante de temps* sera terminée.

✧ Comme nous l'avons vu dans le sous-paragraphe précédent, il s'agit de τ_1. Nous allons donc exprimer r_1 en fonction de Q.

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2\,Q} + \omega_0\,\sqrt{\frac{1}{4\,Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2\,Q}\,\left(1 - \sqrt{1 - 4\,Q^2}\right)$$

✧ Pour simplifier l'expression précédente, nous allons utiliser une technique ultra puissante, ultra utilisée et ultra facile : les développements limités. Sans entrer dans la théorie, pour l'instant nous avons juste besoin de savoir que :

Lorsque $|\text{qqch}| \ll 1$, nous avons $\sqrt{1 + \text{qqch}} = 1 + \dfrac{1}{2}\,\text{qqch}$.

✧ Cela nous conduit à :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2\,Q}\,\left(1 - (1 - 2\,Q^2)\right) = -\frac{\omega_0}{2\,Q} \times 2\,Q^2 = -\omega_0\,Q$$

✧ Avec $\tau_1 = -\dfrac{1}{r_1} = \dfrac{1}{\omega_0\,Q}$, la durée recherchée vaut :

$$5\,\tau_1 = \frac{5}{\omega_0\,Q} = \frac{5}{\dfrac{2\,\pi}{T_0}\,Q} = \frac{5\,T_0}{2\,\pi\,Q} \simeq \frac{T_0}{Q}$$

> Pour un régime apériodique tel que $Q \ll 1$ le régime permanent est atteint au bout de la durée $\dfrac{T_0}{Q}$ où T_0 est la période propre.

✧ Nous pouvons alors vérifier que plus le facteur de qualité est petit, plus le régime transitoire est long.

✫ simplification de la solution

✧ Calculons la constante τ_2 à partir de l'expression de r_2 :

$$r_2 = -\frac{\omega_0}{2\,Q} - \frac{\omega_0}{2\,Q}\sqrt{1-4\,Q^2} = -\frac{\omega_0}{2\,Q} - \frac{\omega_0}{2\,Q} = -\frac{\omega_0}{Q}$$

✧ Ce qui implique $\tau_2 = \dfrac{Q}{\omega_0}$.

✧ Dans ces conditions, avec $\tau_1 = \dfrac{1}{Q\,\omega_0}$, nous pouvons voir que $\tau_2 \ll \tau_1$, ce qui implique que le terme exponentielle en τ_2 est fini largement avant τ_1 ou encore que la tension peut s'écrire sous la forme :

$$u_C(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}$$

✧ Dans les exemples initiaux, nous avons effectivement constaté l'existence de deux constantes de temps significativement différentes.

✫ question de simplification

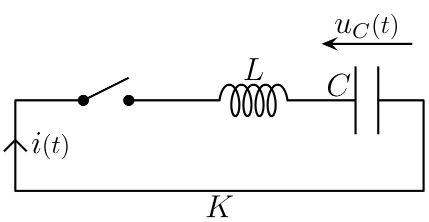
✧ Pourquoi avons-nous utilisé des développements limités pour τ_1 et pas pour τ_2 ?

✧ Parce que pour τ_2, l'utilisation de développements limités aurait amené à un résultat avec **deux** termes parmi lesquels nous aurions gardé que le prédominant : celui qui correspond à un développement à l'ordre 0.

✧ Quand l'ordre de développement est inconnu, *a priori* nous développerons à l'ordre 1. Dans un certains nombres de cas assez facilement prévisibles, nous développerons à l'ordre 2. Enfin, dans des cas rarissimes, nous développerons à l'ordre 3 ou 4.

✫ cas limite

✧ Lorsque $R \to +\infty$, alors $Q \to 0$ et le circuit devient :



✧ Nous pouvons alors constater que $i \to 0$ et $u_C \simeq \mathrm{C^{te}}$, ce qui est cohérent avec un régime apériodique au facteur de qualité extrêmement faible.

III·3·v – phénoménologie à connaître

✧ Pour le circuit R,L,C en régime apériodique il faut connaître sur le bout des doigts :
- ➜ la condition sur Δ et sur Q
- ➜ la relation entre Q et la durée du régime transitoire dans le cas où $Q \ll 1$

III·4 – Circuit R,L,C série en régime libre et pseudopériodique

III·4·i – solution générale de l'équation différentielle

Lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique est strictement négatif, il existe deux solutions complexes conjuguées. En les notant sous la forme $r_{\text{c}} = -\dfrac{1}{\tau} \pm \text{j}\,\omega_{\text{p}}$, les solutions de l'équation différentielles s'écrivent :

$$\alpha(t) = \text{e}^{-t/\tau}\,\Big(A\,\cos(\omega_{\text{p}}\,t) + B\,\sin(\omega_{\text{p}}\,t)\Big) + \alpha_{\text{p}}(t)$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

✧ Cherchons la condition sur le facteur de qualité pour que le discriminant soit négatif :

$$\Delta < 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{{\omega_0}^2}{Q^2} - 4\,{\omega_0}^2 < 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{Q^2} > 4 \quad \rightsquigarrow \quad Q > \frac{1}{2}$$

Le discriminant Δ de l'équation caractéristique est strictement négatif si et seulement si le facteur de qualité est strictement supérieur à $\dfrac{1}{2}$.

Lorsque le facteur de qualité est supérieur à $\dfrac{1}{2}$, le régime est dit *pseudopériodique*.

III·4·ii – solution complète du problème particulier

✯ solutions de l'équation caractéristique

✧ L'équation caractéristique étant $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}\,r + {\omega_0}^2 = 0$, les racines s'écrivent :

$$r_{\text{c}} = -\frac{\omega_0}{2\,Q} \pm \text{j}\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2\,Q} \pm \frac{\text{j}}{2}\,\sqrt{4\,{\omega_0}^2 - \frac{{\omega_0}^2}{Q_4}} = -\frac{\omega_0}{2\,Q} \pm \text{j}\,\omega_0\,\sqrt{1 - \frac{1}{4\,Q^2}}$$

✧ Nous obtenons donc $\boxed{\tau = \dfrac{2\,Q}{\omega_0}}$ et $\boxed{\omega_{\text{p}} = \omega_0\,\sqrt{1 - \dfrac{1}{4\,Q^2}}}$

✧ La tension aux bornes du condensateur s'écrit donc :

$$u_C(t) = \text{e}^{-t/\tau}\,\Big(A\,\cos(\omega_{\text{p}}\,t) + B\,\sin(\omega_{\text{p}}\,t)\Big)$$

✯ détermination des constantes d'intégration

✧ Procédons comme d'habitude, *ie.* en faisant intervenir la continuité de la tension aux bornes du condensateur et la continuité de l'intensité du courant traversant la bobine.

✧ Pour le condensateur, ça sera simple car $u_C(t)$ n'est autre que la tension entre ses bornes. Cela donne :

➜ juste avant la fermeture de l'interrupteur, la tension aux bornes du condensateur valait U_0, donc $u_C(0^-) = U_0$

- ➜ la continuité mathématique de la tension aux bornes d'un condensateur implique $u_C(0^-) = u_C(0^+)$
- ➜ la solution trouvée donne, pour $t = 0^+$: $u_C(0^+) = A$
- ➜ donc $A = U_0$

✧ L'autre condition initial va impliquer le courant traversant la bobine. Il convient donc de la calculer d'abord :

$$u_C(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau} \Big(U_0 \cos(\omega_\mathrm{p}\, t) + B \sin(\omega_\mathrm{p}\, t) \Big) \qquad \text{et} \qquad i(t) = +C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

donnent $i(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau} \left[-\dfrac{U_0 \cos(\omega_\mathrm{p}\, t) + B \sin(\omega_\mathrm{p}\, t)}{\tau} - U_0\, \omega_\mathrm{p} \sin(\omega_\mathrm{p}\, t) + B\, \omega_\mathrm{p} \cos(\omega_\mathrm{p}\, t) \right]$

✧ Et maintenant :

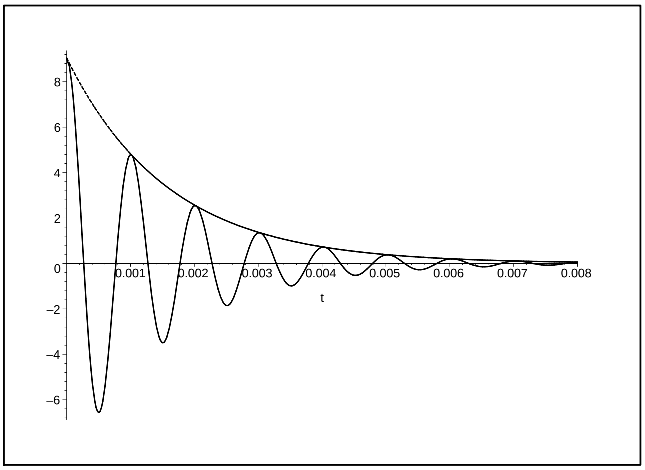
- ➜ juste avant la fermeture de l'interrupteur, aucun courant ne circulait dans la bobine, donc $i(0^-) = 0$
- ➜ la continuité mathématique de l'intensité du courant traversant une bobine implique $i(0^-) = i(0^+)$
- ➜ la solution trouvée donne, pour $t = 0^+$: $i(0^+) = -\dfrac{U_0}{\tau} + B\,\omega_\mathrm{p}$
- ➜ donc $B = \dfrac{U_0}{\tau\,\omega_\mathrm{p}}$

✧ Finalement : $u_C(t) = U_0\, \mathrm{e}^{-t/\tau} \left(\cos(\omega_\mathrm{p}\, t) + \dfrac{\sin(\omega_\mathrm{p})}{\tau\,\omega_\mathrm{p}} \right)$

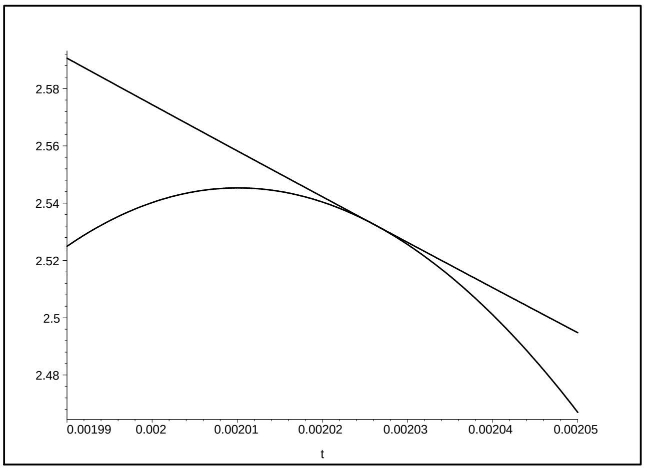
III·4·*iii* – représentation graphique et interprétation

✧ Sur le graphique 8 nous pouvons voir un régime pseudo-périodique de facteur de qualité $Q = 5$.

Graphique 8



Graphique 9



✧ Sur ce graphique nous avons représenté l'enveloppe exponentielle en $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ qui limite les oscillations. Notons, comme le montre le graphique 9 que les points de contact entre l'enveloppe et la courbe ne sont pas aux sommet des oscillations.

✧ Nous pouvons constater qu'il existe des oscillations mais que celles-ci sont amorties. La tension n'est donc pas tout à fait périodique. Cela explique le nom de *pseudo-périodique*

✧ Ces oscillations ont pour pulsation $\omega_\mathrm{p} = \omega_0 \sqrt{1 - \dfrac{1}{4\,Q^2}} \neq \omega_0$.

La grandeur $T = \dfrac{2\,\pi}{\omega_{\text{p}}}$ est appelée la *pseudo-période*.

✯ décrément logarithmique

✧ Pour parler de l'enveloppe exponentielle, nous rencontrerons parfoit la grandeur appelée décrément logarithmique.

Le *décrément logarithmique* noté δ caractéristique la diminution de l'amplitude des pseudo-oscillations pendant la durée d'une pseudo-oscillation.
Si $\alpha(t)$ est la grandeur pseudo-oscillante, il se calcule de la manière suivante avec n un entier quelconque :

$$\delta = \frac{1}{n}\,\ln\left(\frac{x(t_0)}{x(t_0+n\,T)}\right)$$

✧ Par définition, $\delta > 0$.

✧ Dans notre cas :

$$\delta = \frac{1}{n}\,\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{-t_0/\tau}\,\cancel{\left(\cos(\omega_{\text{p}}\,t_0) + \dfrac{\sin(\omega_{\text{p}}\,t_0)}{\tau\,\omega_{\text{p}}}\right)}}{\mathrm{e}^{-(t_0+n\,T)/\tau}\,\cancel{\left(\cos(\omega_{\text{p}}\,t_0+2\,\pi\,n) + \dfrac{\sin(\omega_{\text{p}}\,t_0+2\,\pi\,n)}{\tau\,\omega_{\text{p}}}\right)}}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\,\ln \mathrm{e}^{n\,T/\tau} = \frac{T}{\tau}$$

✧ Avec $\tau = \dfrac{2\,Q}{\omega_0}$ et $T = \dfrac{2\,\pi}{\omega_{\text{p}}}$ nous obtenons :

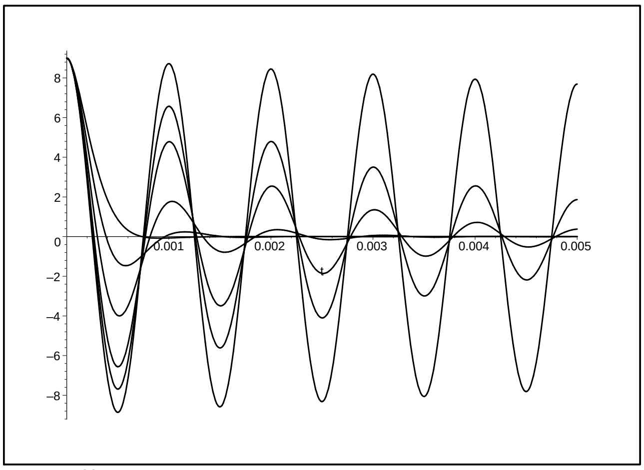
$$\delta = \frac{\pi}{Q\,\sqrt{1-\dfrac{1}{4\,Q^2}}} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{4\,Q^2-1}}$$

✧ Plus le décrément logarithmique est petit, plus la perte d'amplitude est faible.

✯ comparaison de régimes pseudo-périodiques

✧ Sur le graphique 10 nous pouvons voir des évolutions pseudo-périodiques de facteur de qualité 0,6 ; 1 ; 2 ; 5 ; 10 et 100.

Graphique 10



✧ Pour retrouver qui est qui, il suffit de penser à l'enveloppe exponentielle qui limite les oscillation et dont la constante de temps est $\tau = \dfrac{2\,Q}{\omega_0}$: plus le facteur de qualité est grand, plus la constante de temps associée est grande, plus les oscillations dureront longtemps.
✧ C'est cohérent avec l'expression du décrément logarithmique.
✧ Dans les exemples initiaux, nous pouvons constater qu'il y a très peu d'oscillations : le facteur de qualité semble valoir environ 2.

III·4·*iv* – cas particulier $Q \gg 1$

✯ simplification de ω_{p}

✧ Lorsque $Q \gg 1$, alors $\omega_{\text{p}} \longrightarrow \omega_0$.

> Quand le facteur de qualité est très grand devant 1, la pseudo-pulsation se confond avec la pulsation propre.

✯ régime permanent

✧ Estimons la durée au bout de laquelle le régime permanent est atteint dans le cas où $Q \gg 1$.
✧ Comme la tension est limitée par l'enveloppe exponentielle, la réponse est immédiate : au bout de $5\,\tau$

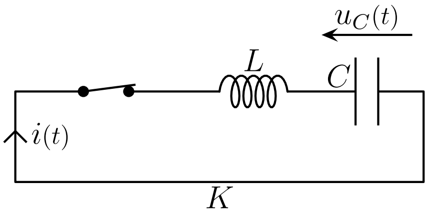
$$5\,\tau = \frac{10\,Q}{\omega_0} = \frac{10\,Q\,T_0}{2\,\pi} = 2\,Q\,T_0$$

> Pour un régime pseudopériodique tel que $Q \gg 1$ le régime permanent est atteint au bout de la durée $2\,Q\,T_0$ où T_0 est la période propre.

✧ Nous pouvons alors vérifier que plus le facteur de qualité est grand, plus le régime transitoire est long.

✯ cas limite

✧ Lorsque $R \to 0$, alors $Q \to +\infty$ et le circuit devient :



✧ Nous pouvons alors constater que ce circuit se comporte comme un L,C, *ie.* oscille sans fin. C'est cohérent avec un régime pseudo-périodique dont le facteur de qualité serait extrêmement faible.

III·4·v – phénoménologie à connaître

✧ Pour le circuit R,L,C en régime apériodique il faut connaître sur le bout des doigts :
- ➜ la condition sur Δ et sur Q
- ➜ la relation entre Q et la durée du régime transitoire dans le cas où $Q \ll 1$

III·5 – Circuit R,L,C série en régime libre et critique

III·5·i – solution générale de l'équation différentielle

Lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique est nul, il existe une racine double r_0 de l'équation caractéristique. Les solutions de l'équation différentielles s'écrivent :

$$\alpha(t) = \mathrm{e}^{r_0\,t}\,(A + B\,t) + \alpha_{\mathrm{p}}(t)$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

Le discriminant Δ de l'équation caractéristique est nul si et seulement si le facteur de qualité vaut $\dfrac{1}{2}$.

Lorsque le facteur de qualité est égal à $\dfrac{1}{2}$, le régime est dit *critique*.

III·5·ii – solution complète du problème très particulier

✫ solutions de l'équation caractéristique

✧ Comme le discriminant est nul, la solution double vaut $r_0 = -\dfrac{\omega_0}{2\,Q} = -\omega_0$ car $Q = \dfrac{1}{2}$.

✧ La tension s'écrit alors :

$$u_C(t) = \mathrm{e}^{-\omega_0\,t}\Big(A + B\,t\Big)$$

✯ détermination des constantes d'intégration

✧ Procédons comme d'habitude, *ie.* en faisant intervenir la continuité de la tension aux bornes du condensateur et la continuité de l'intensité du courant traversant la bobine.

✧ Pour le condensateur, ça sera simple car $u_C(t)$ n'est autre que la tension entre ses bornes. Cela donne :

- ➜ juste avant la fermeture de l'interrupteur, la tension aux bornes du condensateur valait U_0, donc $u_C(0^-) = U_0$
- ➜ la continuité mathématique de la tension aux bornes d'un condensateur implique $u_C(0^-) = u_C(0^+)$
- ➜ la solution trouvée donne, pour $t = 0^+$: $u_C(0^+) = A$
- ➜ donc $A = U_0$

✧ L'autre condition initiale va impliquer le courant traversant la bobine. Il convient donc de la calculer d'abord :

$$u_C(t) = \mathrm{e}^{-\omega_0\,t}\left(U_0 + B\,t\right) \qquad \text{et} \qquad i(t) = +C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

donnent $i(t) = \mathrm{e}^{-\omega_0\,t}\,\left(-\omega_0\,U_0 - B\,\omega_0\,t + B\right)$

✧ Et maintenant :

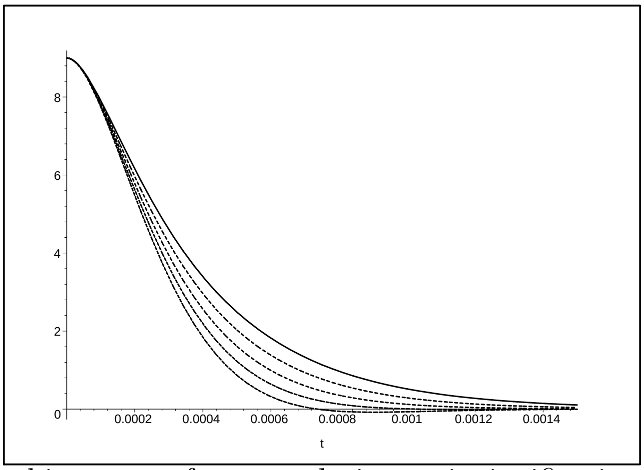
- ➜ juste avant la fermeture de l'interrupteur, aucun courant ne circulait dans la bobine, donc $i(0^-) = 0$
- ➜ la continuité mathématique de l'intensité du courant traversant une bobine implique $i(0^-) = i(0^+)$
- ➜ la solution trouvée donne, pour $t = 0^+$: $i(0^+) = -U_0\,\omega_0 + B$
- ➜ donc $B = \omega_0\,U_0$

✧ Finalement : $u_C(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-\omega_0\,t}\left(1 + \omega_0\,t\right)$

III·5·*iii* – représentation graphique et comparaison

✧ Sur le graphique 11, nous avons représenté 5 évolutions de facteur de qualité 0,40 ; 0,45 ; 0,5 ; 0,55 et 0,6

Graphique 11



✧ Nous pouvons constater que bien que sa forme analytique soit significativement différente des régimes apériodique et pseudopériodique, la représentation graphique, elle, est sensiblement identique.

✯ pourquoi est-il si intéressant ?

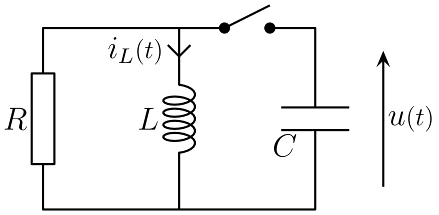
> Le régime critique est le régime qui atteint le plus vite son asymptote sans osciller.

✧ En SI, vous verrez qu'il existe des régimes pseudo-périodique qui peuvent atteindre plus vite leurs asymptotes, mais, bien sûr, en oscillant.

III·6 – Circuit R,L,C parallèle en régime libre

III·6·i – présentation et analyse

✧ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel le condensateur est chargé sous la tension U_0.



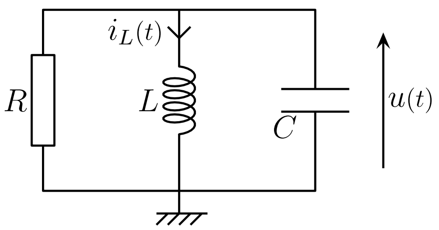
✧ À un instant, K est fermé. Cherchons l'évolution ultérieure.

✧ Analyse physique :
- ➜ il s'agit d'un circuit en régime libre et transitoire
- ➜ c'est un circuit à deux mailles et deux nœuds
- ➜ les grandeurs pertinentes sont L, C, R et U_0

✧ Analyse technique :
- ➜ nous allons chercher $i_L(t)$ lorsque l'interrupteur est fermé
- ➜ il y a deux nœuds → loi des nœuds en terme de potentiels mais en faisant attention à la bobine.

III·6·ii – rien à refaire ?

✧ Pas de difficulté particulière pour trouver l'équation différentielle régissant l'évolution de $i_L(t)$. Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels au nœud supérieur.



$$\frac{0-u(t)}{R} - i(0) - \frac{1}{L}\int_0^t u(t')\,\mathrm{d}t' - C\,\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

donne en dérivant $\dfrac{1}{R}\,\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{L}\,u(t) + C\,\dfrac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0$

✧ Ce qui s'écrit, sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R\,C}\,\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L\,C}\,u(t) = 0$$

III·6·*iii* – rien à refaire !

✧ Une fois trouvés la pulsation propre et le facteur de qualité, non, il n'y aura rien à refaire : les résultats précédents sont applicables à **n'importe quel** dispositif obéissant à cette équation différentielle. C'est tout l'intérêt de ce chapitre d'ailleurs …

✧ Ici, en identifiant avec la forme canonique $\dfrac{\mathrm{d}^2 i_L(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\,\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\, i_L(t) = 0$, nous obtenons :

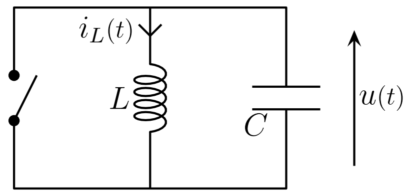
$$\left\{\begin{array}{l} {\omega_0}^2 = \dfrac{1}{L\,C} \\ \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{R\,C} \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L\,C}} \\ Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} \end{array}\right.$$

La pulsation propre du circuit R,L,C parallèle est $\dfrac{1}{\sqrt{L\,C}}$.

Son facteur de qualité est inverse de celui du circuit R,L,C série : $Q_{/\!/} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

✫ cas limite

✧ Lorsque $R \to +\infty$, alors $Q \to +\infty$ et le circuit devient :



✧ Nous pouvons alors constater que ce circuit se comporte comme un L,C, *ie.* oscille sans fin. C'est cohérent avec un régime pseudo-périodique dont le facteur de qualité serait extrêmement faible.

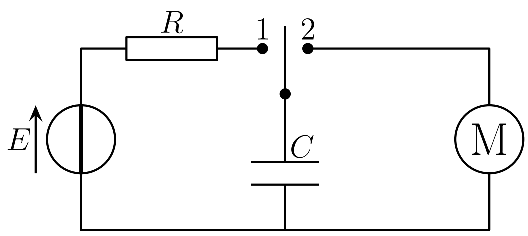
IV – Aspect énergétique

IV·1 – Deux réservoirs d'énergie

IV·1·*i* – monstrations expérimentales

✫ avec le condensateur

✧ Dans le montage présenté, un condensateur peut être relié soit à un générateur, soit à un petit moteur électrique par l'intermédiaire d'un commutateur. Le schéma équivalent est représenté ci-dessous.



✧ Lorsque dans un premier temps le commutateur est sur la position 1, nous avons affaire avec un circuit R,C, *ie.* le condensateur va se charger sous la tension E. Au bout de la durée $5\,\tau = 5\,R\,C$, la charge sera terminée : le courant sera nul.

✧ Nous pourrons alors débrancher le condensateur et passer le commutateur en position 2. Le générateur n'étant pas relié au moteur, s'il se passe quelque chose, ce sera de la « faute » du condensateur.

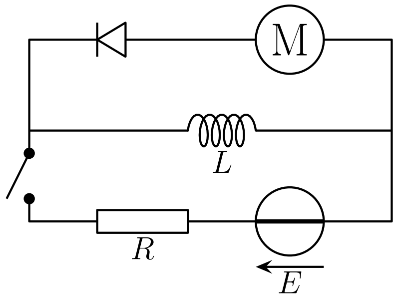
✧ En effet nous constatons que :
- ➜ la masse monte
- ➜ plus la tension initiale est grande, plus la masse monte
- ➜ si on change R, la masse ne monte pas plus
- ➜ plus on attend dans la commutation, moins la masse monte

✧ Comme il faut de l'énergie pour faire bouger quelque chose, et qu'il n'y en avait évidemment pas dans le moteur (sinon la masse serait montée avant), c'est qu'il y en avait dans le condensateur.

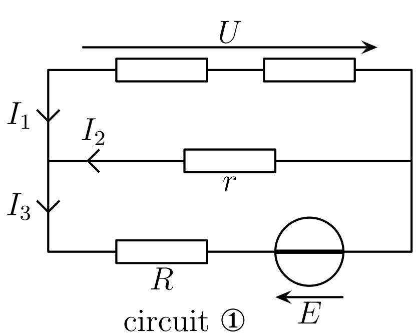
✫ avec la bobine

✧ Pour montrer qu'il existe de l'énergie dans une bobine, c'est un peu plus délicat car il n'est pas possible de débrancher une bobine (à cause de la continuité du courant). Pour la transporter, il faudrait la court-circuiter, mais en la court-circuitant, cela la transforme en un simple circuit r,L où r est sa propre résistance. Avec $r = 10\ \Omega$ et $L = 0{,}1$ H, cela donne une constante de temps de $\tau = 10^{-2}$: on a moins de 5 centièmes de secondes pour la transporter et la relier à un autre circuit : impossible.

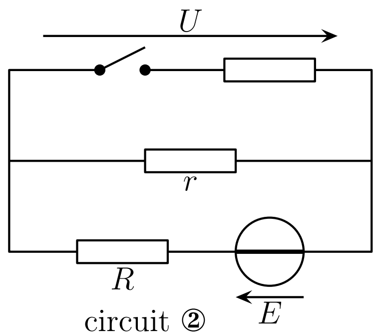
✧ C'est la raison pour laquelle nous allons utiliser un composant que nous reverrons plus tard : une diode. La diode sert à de multiples choses, mais nous allons l'utiliser en tant que contrôleur du sens du courant. En effet, le courant électrique, le réel, le physique, ne peut traverser la diode que dans un sens. Cela nous permet de réaliser le montage suivant.



✧ En régime permanent, la diode se comporte soit comme un interrupteur ouvert, soit comme une (très faible) résistance. Ainsi, une fois l'interrupteur fermé, soit nous aurons affaire au circuit ①, soit au circuit ②.



circuit ①



circuit ②

✧ Le circuit ①, par la présence de la diode, implique $I_1 > 0$. Nous en déduisons alors $U > 0$ puis $I_2 > 0$. Dès lors, cela implique $I_3 > 0$ et l'énergie reçue par le générateur positive. Ce qui n'est pas possible étant donné qu'il n'y a que des résistors dans le circuit. Par conséquent le circuit ① est impossible, c'est le circuit ② qui s'impose.

✧ À la réouverture de l'interrupteur, cette fois, nous aurons un circuit avec un moteur, une bobine et une diode placée de telle façons que la continuité du courant peut être assurée.

✧ Une diode placée de cette manière, *ie.* de façon à assurer la continuité du courant dans une bobine lors de l'ouverture d'un interrupteur est appelée *diode de roue libre.*

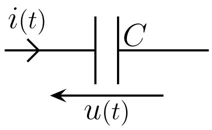
✧ En faisant l'expérience, nous constatons que :
- ➜ la masse monte
- ➜ plus la tension initiale est grande, plus la masse monte
- ➜ plus la résistance est faible, plus la masse monte

✧ Cela laisse suggérer l'idée que la bobine contient de l'énergie fonction de l'intensité du courant qui la traverse.

IV·1·*ii* – énergie contenue dans le condensateur et la bobine

✯ dans le condensateur

✧ Considérons un condensateur en convention récepteur.



✧ Nous savons que la puissance qu'il reçoit s'écrit $\mathscr{P}_{\mathrm{r}}(t) = +u(t)\,i(t)$ qui peut s'écrire, grâce à la relation constitutive du condensateur : $\mathscr{P}_{\mathrm{r}}(t) = +C\,u(t)\,\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ ou encore, avec $a\,f\,f' = \left(\dfrac{1}{2}\,a\,f^2\right)'$:

$$\mathscr{P}_{\mathrm{r}}(t) = +\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,C\,u^2(t)\right)$$

✧ En rapprochant l'écriture de la puissance de la forme $\mathscr{P}_{\mathrm{r}}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{r}}(t)}{\mathrm{d}t}$, nous pouvons dire que l'énergie reçue entre les instants t et 0 vaut donc : $\mathscr{E}_{\mathrm{r}}(t) = \dfrac{1}{2}\,C\,u^2(t) - \dfrac{1}{2}\,C\,u^2(0)$.

✧ Cette dernière expression peut se réinterpréter différemment. En constatant que l'énergie reçue entre deux instants est la différence de deux énergies relatives au condensateur **entre ces mêmes instants**, nous pouvons voir dans ces énergies, l'énergie *contenue* dans le condensateur à des instants précis.

> Un condensateur est un réservoir d'énergie dont le niveau est repéré par $u^2(t)$.
> L'énergie contenue dans un condensateur à un instant t s'écrit $\mathscr{E}_{\mathrm{c}}(t) = \dfrac{1}{2}\,C\,u^2(t)$.

✧ Peu importe la convention utilisée pour la tension aux bornes du condensateur car elle est élevée au carrée.

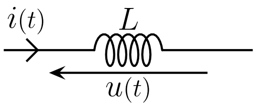
✧ Cela permet de mieux comprendre l'expérience :
- ➜ augmenter E permettait d'obtenir une tension finale plus grande donc plus d'énergie dans le condensateur
- ➜ changer R ne changer que la durée de charge mais pas la charge finale, donc c'était normal que la masse ne monte pas trop plus
- ➜ attendre lors de la commutation permettait au condensateur de se décharger un peu, donc de perdre de l'énergie

> En terme de charges, l'énergie contenue à l'instant t dans un condensateur s'écrit
> $$\mathscr{E}_{\text{c}}(t) = \frac{q^2(t)}{2\,C}.$$

◇ L'énergie n'est pas vraiment électrique mais conservée sous forme d'un champ électrostatique.

✭ dans la bobine

◇ Considérons une bobine en convention récepteur.



◇ De la même manière que pour le condensateur, nous pouvons écrire :

$$\mathscr{P}_{\text{r}}(t) = +u(t)\,i(t) = +L\,i(t)\,\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = +\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,L\,i^2(t)\right)$$

◇ De manière tout à fait analogue au cas étudié pour le condensateur, nous pouvons alors dire :

> Une bobine est un réservoir d'énergie dont le niveau est repéré par $i^2(t)$ où $i(t)$ est l'intensité du courant qui la traverse.
> L'énergie contenue dans une bobine à un instant t s'écrit $\mathscr{E}_{\text{c}}(t) = \dfrac{1}{2}\,L\,i^2(t)$.

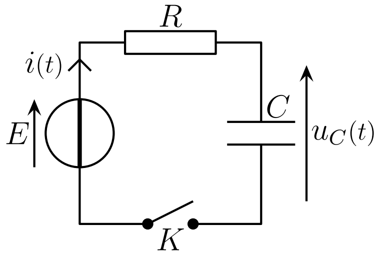
◇ Peu importe la convention utilisée pour l'intensité du courant traversant la bobine car elle est élevée au carrée.
◇ Cela permet de mieux comprendre l'expérience :
- ➜ augmenter E permettait d'obtenir une intensité finale plus grande donc plus d'énergie dans la bobine
- ➜ diminuer R permettait d'obtenir une intensité finale plus grande donc plus d'énergie dans la bobine

◇ L'énergie n'est pas vraiment électrique mais conservée sous forme magnétique.

IV·2 – Bilans pour les évolutions du premier ordre

IV·2·i – analyse du circuit R,C

◇ Rappelons le montage :



◇ À l'instant initial, le condensateur n'est pas chargé, il ne contient pas d'énergie.
◇ En régime permanent :

➜ la tension aux bornes du condensateur est E donc il contient de l'énergie
➜ le courant est nul donc il n'y a plus d'effet Joule
➜ le courant est nul donc le générateur ne fournit plus d'énergie.

✧ En conséquence de quoi, nous pouvons déterminer les énergies échangées entre les différents dipôles de l'instant initial jusqu'au régime permanent.

IV·2·*ii* – bilan du circuit R,C

✯ rappel des résultats

✧ Nous avons trouvé :

➜ la tension aux bornes du condensateur : $u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ avec $\tau = R\,C$

➜ l'intensité du courant parcourant la maille : $i(t) = \dfrac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$

✧ Comme nous l'avons vu dans le deuxième chapitre, pour déterminer une énergie reçue entre les instants t_1 et t_2, nous devons calculer :

$$\mathscr{E}_{\mathrm{r}}(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P}_{\mathrm{r}}(t)\,\mathrm{d}t$$

✯ énergie fournie par le générateur

✧ L'expression de l'énergie fournie par un dipôle est la même que ci-dessus mais avec la puissance fournie, évidemment. Cela donne, pour le générateur :

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\mathrm{f,g}} &= \int_0^{\infty} \mathscr{P}_{\mathrm{f,g}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} E\,i(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{E^2}{R}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\left[-\tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]_0^{\infty} = \frac{E^2}{R}\times\tau \qquad \leadsto \qquad \boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{f,g}} = C\,E^2}\end{aligned}$$

✯ énergie reçue par le résistor

✧ Faisons de même pour l'énergie reçue par le résistor.

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\mathrm{r,r}} &= \int_0^{\infty} \mathscr{P}_{\mathrm{r,r}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} R\,i^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R}\,\mathrm{e}^{-2\,t/\tau}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{E^2}{R}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2\,t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}\,\mathrm{e}^{-2\,t/\tau}\right]_0^{\infty} = \frac{E^2}{2\,R}\times\tau \qquad \leadsto \qquad \boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{r,r}} = \frac{C\,E^2}{2}}\end{aligned}$$

✯ énergie reçue par le condensateur

✧ Pour le condensateur, cela va vite étant donné que nous connaissons l'énergie qui y est contenue à chaque instant :

$$\mathscr{E}_{\mathrm{r,c}} = \mathscr{E}_{\mathrm{c}}(\infty) - \mathscr{E}_{\mathrm{c}}(0) = \frac{1}{2}\,C\,u^2(\infty) - \frac{1}{2}\,C\,u^2(0) \qquad \leadsto \qquad \boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{r,c}} = \frac{C\,E^2}{2}}$$

✯ décompte et interprétation

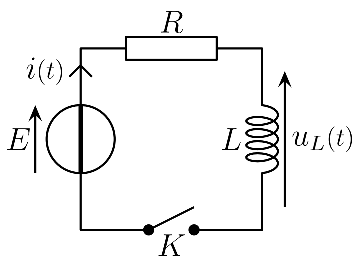
✧ Nous pouvons constater aisément que le bilan énergétique est bien vérifié, *ie.* que nous avons :

$$\boxed{\mathscr{E}_{\text{f,g}} = \mathscr{E}_{\text{r,r}} + \mathscr{E}_{\text{r,c}}}$$

✧ Nous pouvons alors remarquer que cette fois, la résistance du résistor n'intervient pas dans le bilan énergétique : quelle que soit la résistance choisie, l'énergie gagnée par le condensateur sera la même (ça, on le savait déjà) et l'énergie perdu

IV·2·*iii* – analyse du circuit R,L

✧ Rappelons le montage :



✧ À l'instant initial, aucun courant ne circule, la bobine ne contient donc pas d'énergie.

✧ En régime permanent :
- ➜ le courant est non nul donc la bobine a accumulé une certaine quantité d'énergie
- ➜ le courant est non nul donc il n'y un effet JOULE continuellement compensé par un apport énergétique de la part du générateur

✧ En conséquence de quoi, nous ne pouvons pas déterminer les énergies échangées entre les différents dipôles de l'instant initial jusqu'au régime permanent. Il va falloir s'arrêter à un instant t_0 quelconque.

IV·2·*iv* – bilan du circuit R,L

✯ rappel des résultats

✧ Nous avons trouvé :
- ➜ l'intensité du courant parcourant la maille : $i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ avec $\tau = \dfrac{L}{R}$.
- ➜ la tension aux bornes de la bobine : $u_L(t) = E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$

✯ énergie fournie par le générateur

✧ Comme précédemment :

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\text{f,g}}(t_0) &= \int_0^{t_0} \mathscr{P}_{\text{f,g}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} E\,i(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \frac{E^2}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{E^2}{R}\int_0^{t_0}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\Big[t + \tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\Big]_0^{t_0} = \frac{E^2}{R} \times \left(t_0 + \tau\,\mathrm{e}^{-t_0/\tau} - \tau\right)\end{aligned}$$

✧ Et ainsi $\boxed{\mathscr{E}_{\text{f,g}}(t_0) = \dfrac{E^2}{R}\left(t_0 + \dfrac{L}{R}\,\mathrm{e}^{-t_0/\tau} - \dfrac{L}{R}\right)}$

✯ énergie reçue par le résistor

✧ Faisons de même pour l'énergie reçue par le résistor.

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\mathrm{r,r}}(t_0) &= \int_0^{t_0} \mathscr{P}_{\mathrm{r,r}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} R\,i^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \frac{E^2}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{E^2}{R}\int_0^{t_0}\left(1+\mathrm{e}^{-2\,t/\tau}-2\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\left[t-\frac{\tau}{2}\,\mathrm{e}^{-2\,t/\tau}+2\,\tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]_0^{t_0} \\ &= \frac{E^2}{R}\left(t_0-\frac{\tau}{2}\,\mathrm{e}^{-2\,t_0/\tau}+\frac{\tau}{2}+2\,\tau\,\mathrm{e}^{-t_0/\tau}-2\,\tau\right)\end{aligned}$$

✧ Et ainsi $\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{r,r}}(t_0) = \dfrac{E^2}{R}\left(t_0-\dfrac{L}{2\,R}\,\mathrm{e}^{-2\,t_0/\tau}+2\,\dfrac{L}{R}\,\mathrm{e}^{-t_0/\tau}-\dfrac{3\,L}{2\,R}\right)}$

✯ énergie reçue par la bobine

✧ Pour la bobine, cela va vite étant donné que nous connaissons l'énergie qui y est contenue à chaque instant :

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\mathrm{r,b}}(t_0) &= \mathscr{E}_{\mathrm{b}}(\infty)-\mathscr{E}_{\mathrm{b}}(0) = \frac{1}{2}\,L\,i^2(\infty)-\frac{1}{2}\,L\,i^2(0) \\ &= \frac{1}{2}\,L\,\frac{E^2}{R^2}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{R}\,\frac{L}{2\,R}\left(1-\mathrm{e}^{-2\,t_0/\tau}-2\,\mathrm{e}^{-t_0/\tau}\right)\end{aligned}$$

✧ Et ainsi $\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{r,b}}(t_0) = \dfrac{E^2}{R}\left(\dfrac{L}{2\,R}\,\mathrm{e}^{-2\,t_0/\tau}-\dfrac{L}{R}\,\mathrm{e}^{-t_0/\tau}+\dfrac{L}{2\,R}\right)}$

✯ décompte et interprétation

✧ En rassemblant les termes en $\mathrm{e}^{-2\,t_0/\tau}$, en $\mathrm{e}^{-t_0/\tau}$ en t_0 et en τ, nous pouvons constater que le bilan énergétique est bien vérifié, *ie.* que nous avons :

$$\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{f,g}}(t_0) = \mathscr{E}_{\mathrm{r,r}}(t_0)+\mathscr{E}_{\mathrm{r,b}}(t_0)}$$

✧ Nous pouvons alors remarquer que si la bobine accumule une quantité limitée d'énergie, le générateur, lui, en fournit continuellement.

✯ petit paradoxe

✧ En régime permanent le circuit est équivalent au schéma ① donc au schéma ②.

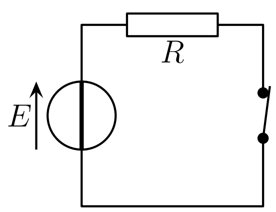


schéma ①

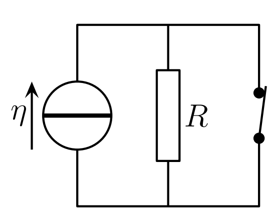


schéma ②

✧ Or dans le schéma ②, il n'y a pas d'effet JOULE. Comment cela se fait-il ?

✧ En fait l'équivalence entre les deux circuits se fait entre deux générateurs réels, *ie.* pour les deux couples de dipôles (E,R) d'une part et (η,R) d'autre part. Le premier **dipôle** ne fournit pas d'énergie à autrui (il « dissipe » de l'énergie en interne, mais ça, c'est son problème) et il en est de même pour le second dipôle qui ne fournit pas **non plus** d'énergie au reste du monde.

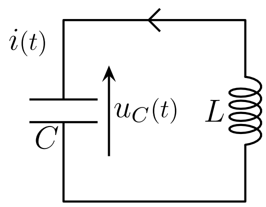
✧ Ensuite que les deux représentation aient des comportement internes différents, c'est normal car le but de ces équivalences n'est pas de respecter le fonctionnement interne mais le fonctionnement externe.

IV·3 – Bilans pour les évolutions du second ordre

IV·3·i – oscillation dans le circuit L,C

✯ rappel des résultats

✧ Rappelons le montage.



✧ Nous avons trouvé :

$$u_C(t) = U_0\,\cos(\omega_0\,t) \qquad \text{et} \qquad i(t) = -C\,U_0\,\omega_0\,\sin(\omega_0,t)$$

✯ énergie contenue dans le condensateur

✧ Avec l'expression de l'énergie contenue dans le condensateur, nous obtenons directement :

$$\mathscr{E}_{\text{c}}(t) = \frac{1}{2}\,C\,{u_C}^2(t) = \frac{1}{2}\,C\,{U_0}^2\,\cos^2(\omega_0\,t)$$

✧ Et avec une formule trigonométrique qui-va-bien :

$$\mathscr{E}_{\text{c}}(t) = \frac{1}{2}\,C\,{U_0}^2\,\frac{1+\cos(2\,\omega_0\,t)}{2}$$

✯ énergie contenue dans la bobine

✧ Avec l'expression de l'énergie contenue dans le condensateur, nous obtenons directement :

$$\mathscr{E}_{\text{b}}(t) = \frac{1}{2}\,L\,i^2(t) = \frac{1}{2}\,L\,{U_0}^2\,C^2\,{\omega_0}^2\cos^2(\omega_0\,t)$$

✧ Avec une formule trigonométrique qui-va-bien et l'expression de la pulsation propre :

$$\mathscr{E}_{\text{b}}(t) = \frac{1}{2}\,C\,{U_0}^2 \times \frac{1-\cos(2\,\omega_0\,t)}{2}$$

✯ énergie totale, représentation

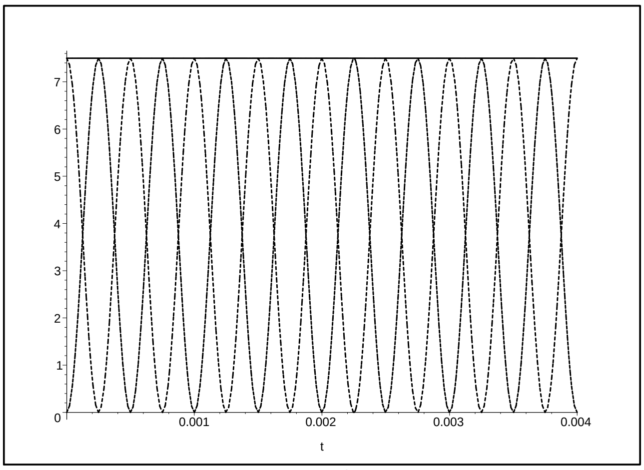
✧ Nous pouvons alors constater $\boxed{\mathscr{E}_{\text{b}}(t) + \mathscr{E}_{\text{c}}(t) = \dfrac{1}{2}\,C\,{U_0}^2}$.

✧ Cela signifie que l'énergie est constante dans le circuit ce qui est normal étant donné qu'il n'y a pas de dipôle qui pourrait dissiper de l'énergie (résistor) ou en engrenger sous une autre forme (générateur par exemple).

✧ De même, nous pouvons constater l'importance physique de charger initialement le condensateur : apporter de l'énergie dans le circuit pour qu'il puisse se passer quelque chose.

✧ Sur le graphique 12, nous avons représenter les énergies instantannées contenues dans le condensateur et la bobine ainsi que l'énergie totale.

Graphique 12



✧ Pour pouvoir distinguer qui est qui, impossible : il faut connaitre les conditions initiales.

✯ interprétation fondamentale

> Pour qu'il y ait oscillations, il faut qu'il y ait un échange énergétique entre deux formes différentes.

✧ Ici les deux formes sont magnétique (dans la bobine) et électrostatique (dans le condensateur).

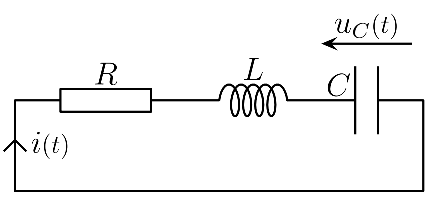
✧ Dans les circuits du tout début du chapitre, ceux dans lesquels il y avait uniquement des bobines ou uniquement des condensateurs, il ne pouvait donc pas y avoir d'oscillation. Le régime était forcément apériodique ou critique.

☕ *Remarque* : Je recherche une « démonstration » physique de cette loi **fondamentale**.

IV·3·*ii* – circuit R,L,C série, régime pseudopériodique

✯ rappel des résultats et adaptation au cas $Q \gg 1$

✧ Rappelons le montage.



✧ Nous avons trouvé :

$$u_C(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(\cos(\omega_\mathrm{p}\,t) + \frac{\sin(\omega_\mathrm{p})}{\tau\,\omega_\mathrm{p}}\right) \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{2\,Q}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \omega_\mathrm{p} = \omega_0\,\sqrt{1-\frac{1}{4\,Q^2}}$$

✧ Pour $Q \gg 1$ nous obtenons :

$$\omega_\mathrm{p} = \omega_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tau\,\omega_\mathrm{p}} = \frac{1}{2\,Q} \ll 1 \qquad \leadsto \qquad u_C(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\cos(\omega_0\,t)$$

✧ Utilisons la relation constitutive du condensateur pour obtenir l'intensité :

$$\begin{aligned} i(t) &= C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = C\,U_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(-\frac{\cos(\omega_0\,t)}{\tau} - \omega_0\,\sin(\omega_0\,t)\right) \\ &= -C\,U_0\,\omega_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(\frac{\cos(\omega_0\,t)}{\tau\,\omega_0} + \sin(\omega_0\,t)\right) \end{aligned}$$

✧ Et ainsi, avec les mêmes approximations que pour la tension, $i(t) = -C\,U_0\,\omega_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\sin(\omega_0\,t)$

✯ énergie totale

✧ Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_\mathrm{c}(t) = \mathscr{E}_\mathrm{b}(t) &= \frac{1}{2}\,C\,{u_C}^2(t) + \frac{1}{2}\,L\,i^2(t) \\ &= \frac{1}{2}\,C\,{U_0}^2\,\mathrm{e}^{-2\,t/\tau}\,\cos^2(\omega_0\,t) + \frac{1}{2}\,\underbrace{L\,C^2\,{U_0}^2\,{\omega_0}^2}_{C\,{U_0}^2}\,\mathrm{e}^{-2\,t/\tau}\,\sin^2(\omega_0\,t) \\ &= \frac{1}{2}\,C\,{U_0}^2\,\mathrm{e}^{-2\,t/\tau}\left(\cos^2(\omega_0\,t) + \sin^2(\omega_0\,t)\right) \end{aligned}$$

✧ Et ainsi : $\boxed{\mathscr{E}(t) = \frac{1}{2}\,C\,{U_0}^2\,\mathrm{e}^{-2\,t/\tau}}$

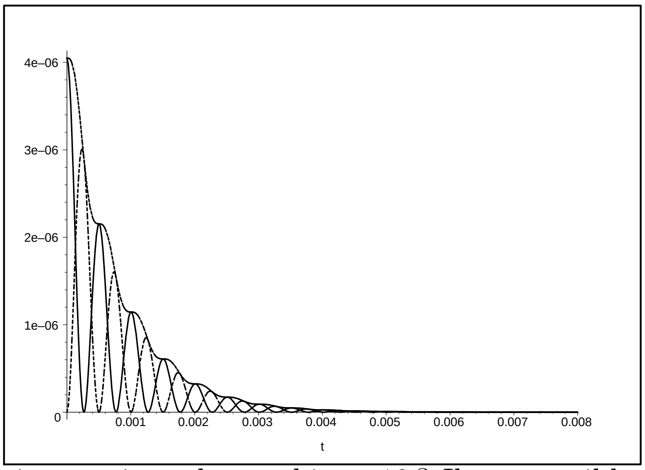
✧ L'énergie totale contenue dans le circuit diminue. Rien de plus normal avec le résistor et son effet joule.

✧ La constante de temps de décroissance de l'énergie vaut $\dfrac{\tau}{2} = \dfrac{Q}{\omega_0}$, *ie.* est d'autant plus grande que le facteur de qualité est grand. C'est normal aussi puisque le facteur de qualité est relié à la résistance du résistor

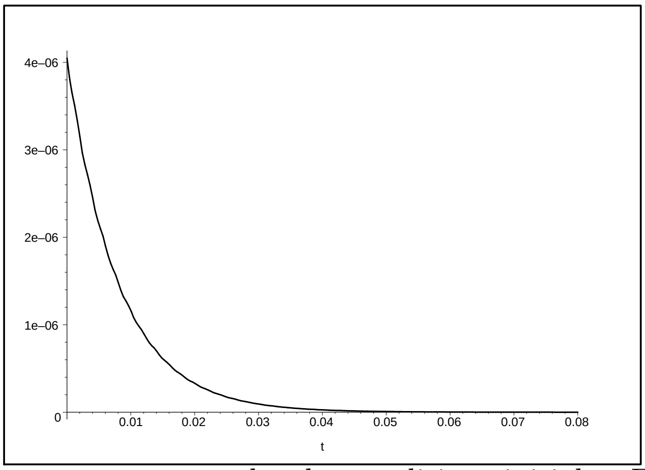
✯ représentation

✧ Sur le graphiques 13 nous pouvons voir les énergies contenues dans le condensateur, dans la bobine et la somme des deux pour un circuit de facteur de qualité 5.

Graphique 13



Graphique 14



✧ Qui est qui sur le graphique 13 ? Il est possible de trouver sans parler des conditions initiales. En effet, nous pouvons constater que l'énergie totale diminue fortement à certains moment : c'est lorsque du courant circule, *ie.* lorsque l'énergie contenue dans la bobine est maximale.

✧ Sur le graphique 14, nous pouvons voir l'énergie totale pour un circuit de facteur de qualité 50. Si pour le graphique 13 l'évolution n'était sensiblement pas exponentielle, pour le graphique 14, cette fois, elle l'est.

Circuits en régime transitoire

Au niveau du cours

✯ Les définitions

✧ Sont à savoir :
- ➜ régime transitoire / permanent, régime libre / forcé
- ➜ pulsation, pseudo-période

✯ Les grandeurs

✧ Connaître les unités de :
- ➜ inductance, capacité,
- ➜ pulsation propre, facteur de qualité

✧ Connaître les liens entre farad, henry et rad.s^{-1}, entre henry, farad et ohm.

✯ Les lois

✧ Sont à connaître :
- ➜ les lois constitutives de la bobine et du condensateur
- ➜ l'approche électrostatique du condensateur
- ➜ les modèles du condensateur réel, de la bobine réelle
- ➜ le comportement en régime continu du condensateur, de la bobine
- ➜ les continuités mathématiques de grandeurs concernant le condensateur et la bobine

✯ la phénoménologie

✧ Connaître :
- ➜ le comportement de circuits d'ordre 1, d'ordre 2
- ➜ les constantes de temps des circuits R,C et R,L
- ➜ la durée au bout de laquelle une évolution exponentielle est terminée
- ➜ la phénoménologie des circuits R,C et R,L
- ➜ la pulsation propre et le facteur de qualité des circuits R,L,C série et parallèle
- ➜ la phénoménologie des régimes apériodique, pseudopériodique et critique
- ➜ la durée au bout de laquelle des évolutions transitoires apériodique ou pseudopériodique sont terminées

Au niveau de l'analyse

✯ Analyse physique

✧ Il faut savoir déterminer *a priori* quel est le régime du circuit étudié.

✯ Analyse technique

✧ Il faut savoir déterminer la meilleure approche (maillère ou nodale) compte tenu de la présence de condensateurs ou de bobines.

Au niveau des savoir-faire

✯ outils mathématiques

✧ Connaître parfaitement :

- ➜ l'expression approchée de $\sqrt{1 + \text{qqch}}$
- ➜ la méthode de résolution des équations différentielles d'ordre 1 et 2
- ➜ l'écriture des solutions des équations différentielles d'ordre 1
- ➜ l'écriture des solutions des équations différentielles d'ordre 2 suivant le type de régime
- ➜ l'expression de $\cos^2(\text{npq})$ et $\sin^2(\text{npq})$ en fonction de $\cos(2\,\text{npq})$.

✯ exercices classiques

✧ Savoir refaire :

- ➜ tout le circuit R,C (avec le bilan énergétique)
- ➜ tout le circuit R,C (avec le bilan énergétique)
- ➜ tout le circuit R,L,C (avec le bilan énergétique)

Table des matières