

Électrocinétique

Chapitre 5

Régimes sinusoïdaux forcés

Régimes sinusoïdaux forcés

Le but de ce chapitre est d'adapter à l'étude de circuits électrocinétique le nouvel outil qu'est la notation complexe.

Nous admettrons le théorème suivant :

Dans un circuit constitué uniquement de composants linéaires, s'il y a un seul générateur (de tension ou de courant) sinusoïdal, alors **toutes** les grandeurs du circuit (tension et courant) :

- sont sinusoïdales
- ont la même pulsation que celle du générateur

Le cas où un circuit possède plusieurs générateurs sinusoïdaux sera vu dans le chapitre suivant.

I – La notation complexe en électrocinétique

I.1 – En électrocinétique, c'est comme en mécanique

I.1.i – rappels

La grandeur réelle $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ est représentée par la grandeur complexe $\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$ où :

- $I_m = |\underline{I}_m| = |\underline{i}(t)|$ est l'amplitude réelle ;
- $\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe ;
- $\omega t + \varphi$ est la phase instantanée ;
- φ est la phase à l'origine des dates.

- ◇ Pour passer de la notation réelle à la notation complexe, il suffit de transformer $\cos() \longrightarrow e^{\text{j}}$.
- ◇ Pour passer de la notation complexe à la notation réelle, nous avons $i(t) = \Re(\underline{i}(t))$.
- ◇ La notation complexe n'est qu'une notation / une représentation : aucune tension, aucune intensité n'est complexe. C'est juste un outil très puissant pour étudier les régimes sinusoïdaux forcés en régime permanent.
- ◇ Rappelons que l'énorme avantage de la notation complexe, c'est la dérivation :

$$\frac{d}{dt} \longleftrightarrow \times j\omega$$

I.1.ii – quelques nouvelles définitions

Lorsque deux grandeurs s'écrivent $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ et $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$, le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$ vaut $\varphi_u - \varphi_i$.
Le déphasage est choisi tel que sa valeur soit comprise entre $-\pi$ et π .

Le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$ est l'opposé de celui de $i(t)$ par rapport à $u(t)$.

- ◇ L'avantage c'est qu'il est possible de parler de déphasage ou de comparer les phases de n'importe quelles grandeurs.

Une grandeur sinusoïdale $\xi_1(t) = \xi_{1,m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ est dite en *avance de phase* sur $\xi_2(t) = \xi_{2,m} \cos(\omega t + \varphi_2)$ lorsque $\varphi_1 > \varphi_2$ et en *retard de phase* lorsque $\varphi_1 < \varphi_2$.

- ◇ Donc bien évidemment si $\xi_1(t)$ est en avance de phase par rapport à $\xi_2(t)$, alors $\xi_2(t)$ est en retard de phase par rapport à $\xi_1(t)$.

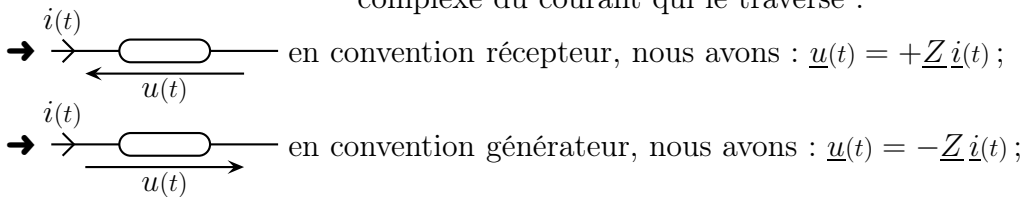
Deux grandeurs sinusoïdales $\xi_1(t) = \xi_{1,m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $\xi_2(t) = \xi_{2,m} \cos(\omega t + \varphi_2)$ sont dites *en quadrature* lorsque $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2}$.

I.2 – Décrire le comportement des dipôles en RSF

I.2.i – notion d'impédance

★ définition

L'*impédance* d'un dipôle se note \underline{Z} et est le lien entre la tension complexe et l'intensité complexe du courant qui le traverse :



- ◇ D'un point de vue dimensionnel, cela donne :

$$[\underline{Z}] = \frac{[\underline{u}(t)]}{[\underline{i}(t)]} = \frac{(\text{V})}{(\text{A})}$$

et ainsi :

L'unité de l'impédance est le ohm (Ω), comme une résistance.

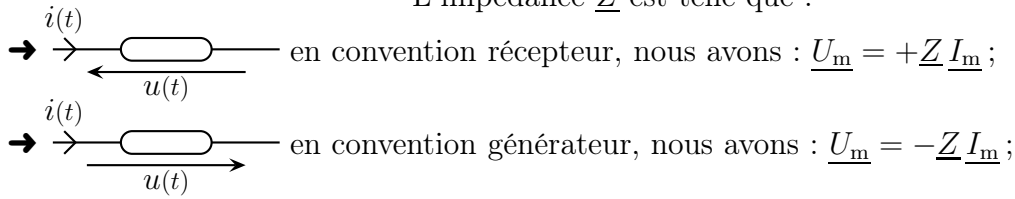
- ◇ En fait, l'impédance est analogue à une résistance, mais en version notation complexe.

Un dipôle d'impédance \underline{Z} impose un déphasage $\varphi = \arg(\underline{Z})$ de la tension entre ses bornes par rapport à l'intensité du courant qui le traverse.

★ avec les amplitudes complexes

- ◇ Comme nous avons $\underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}$ et $\underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t}$, nous obtenons :

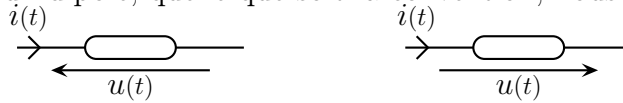
L'impédance \underline{Z} est telle que :



★ avec les amplitudes réelles

◇ Nous avons $U_m = |\underline{U}_m|$ et $I_m = |\underline{I}_m|$ et donc, en prenant le module des relations précédentes :

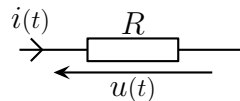
Pour un dipôle, quelle que soit la convention, nous avons :



$$U_m = Z I_m \quad \text{où} \quad Z = |\underline{Z}|$$

I.2.ii – impédance du résistor

◇ Considérons le résistor ci-dessous pour lequel $u(t) = U_m \cos(\omega t)$.



◇ Écrivons la relation constitutive du résistor et passons la en complexe :

$$i(t) = +\frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{i}(t) = \frac{U_m}{R} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = U_m e^{j\omega t}$$

◇ Ainsi : $\underline{Z}_R = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = R$.

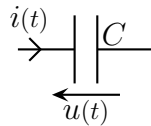
Pour un résistor, l'impédance vaut : $\underline{Z}_R = R$.

En convention récepteur, la tension aux bornes d'un résistor est en phase avec l'intensité du courant qui le traverse.

I.2.iii – condensateur idéal

★ impédance

◇ Considérons le condensateur ci-dessous pour lequel $u(t) = U_m \cos(\omega t)$.



◇ Écrivons la relation constitutive du condensateur et passons la en complexe :

$$i(t) = +C \frac{du(t)}{dt} = -C U_m \omega \sin(\omega t) = C U_m \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\rightsquigarrow \underline{i}(t) = \underline{U}_m C \omega e^{j(\omega t + \pi/2)} = \underline{U}_m C \omega e^{j\omega t} \underbrace{e^{j\pi/2}}_{=j} = jC\omega \underline{U}_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}$$

◇ Ainsi : $\underline{Z}_C = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{1}{jC\omega}$.

Pour un condensateur idéal, l'impédance vaut : $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$.

En convention récepteur, la tension aux bornes d'un condensateur est en quadrature avec l'intensité du courant qui le traverse : la tension est en retard par rapport à l'intensité.

★ méthode rapide pour retrouver l'impédance

◇ D'après la relation constitutive du condensateur, nous avons $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$.

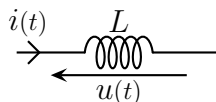
◇ Nous savons que la notation complexe de la dérivée n'est autre que la dérivée de la notation complexe, ainsi :

$$\underline{i}(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C \frac{d\underline{u}(t)}{dt} = C \underline{U}_m \frac{de^{j\omega t}}{dt} = jC\omega \underline{U}_m e^{j\omega t}$$

◇ Le résultat est alors immédiat.

I.2.iv – bobine idéale

◇ Considérons la bobine ci-contre pour laquelle $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.



◇ D'après la relation constitutive de la bobine, nous avons $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$.

◇ En utilisant le fait que la notation complexe de la dérivée n'est autre que la dérivée de la notation complexe, cela donne :

$$\underline{u}(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d\underline{i}(t)}{dt} = L \underline{I}_m \frac{de^{j\omega t}}{dt} = \underbrace{jL\omega \underline{I}_m}_{\underline{U}_m} e^{j\omega t} \rightsquigarrow \underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = jL\omega$$

Pour une bobine idéale, l'impédance vaut : $\underline{Z}_L = j L \omega$.

En convention récepteur, la tension aux bornes d'une bobine est en quadrature avec l'intensité du courant qui le traverse : la tension est en avance par rapport à l'intensité.

I.2.v – cas général

★ impédance

L'impédance \underline{Z} d'un dipôle quelconque s'écrit sous la forme :

$$\underline{Z} = R + j X \quad \text{où :}$$

- $R > 0$ est la *résistance* du dipôle et s'exprime en Ω ;
- $X \geq 0$ est la *réactance* du dipôle et s'exprime en Ω .

★ admittance

L'*admittance* complexe \underline{Y} d'un dipôle d'impédance \underline{Z} est définie par :

$$\underline{Y} \triangleq \frac{1}{\underline{Z}}$$

L'admittance \underline{Y} d'un dipôle quelconque s'écrit sous la forme :

$$\underline{Y} = G + j B \quad \text{où :}$$

- $G > 0$ est la *conductance* du dipôle et s'exprime en S ;
- $B \geq 0$ est la *susceptance* du dipôle et s'exprime en S.

⊛ Attention à la définition de la conductance : $R \neq \frac{1}{G}$ car $\Re(\underline{Y}) \neq \frac{1}{\Re(\underline{Z})}$.

I.2.vi – comportement phénoménologique des dipôles

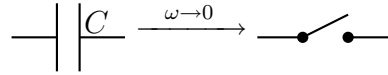
- ◇ En ce qui concerne les résistors, aucune surprise, cela reste un résistor, même en RSF.
- ◇ Regardons les impédance d'un condensateur et d'une bobine :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j C \omega} = -\frac{j}{C \omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_L = j L \omega$$

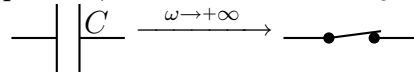
- ◇ Nous pouvons constater que la réactance d'un condensateur est négative alors que celle d'une bobine est positive : ils ont donc des comportements absolument pas analogues mais qui peuvent éventuellement se compenser à certaines fréquences particulières.

★ hautes et basses fréquences

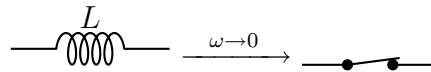
En basses fréquences, $\omega \rightarrow 0$ et ainsi $Z_C \rightarrow +\infty$ ou encore :



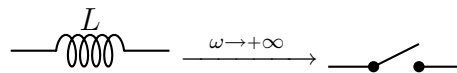
En hautes fréquences, $\omega \rightarrow +\infty$ et ainsi $Z_C \rightarrow 0$ ou encore :



En basses fréquences, $\omega \rightarrow 0$ et ainsi $Z_L \rightarrow 0$ ou encore :



En hautes fréquences, $\omega \rightarrow +\infty$ et ainsi $Z_L \rightarrow +\infty$ ou encore :



I.3 – Étudier un circuit en régime sinusoïdal forcé

- ◇ Le but de ce paragraphe est de transcrire les lois physiques en notation complexe.

I.3.i – les lois

★ additivité des tensions

L'additivité des tensions $u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t) = u(t)$ s'écrit en notation complexe :

→ $\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) + \dots + \underline{u}_n(t) = \underline{u}(t)$ en grandeurs instantanées

→ $\underline{U}_{1,m} + \underline{U}_{2,m} + \dots + \underline{U}_{n,m} = \underline{U}_m$ en amplitudes complexes

- ◇ Nous avons :

$$\begin{aligned} \Re(\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) + \dots + \underline{u}_n(t)) &= \Re(\underline{u}_1(t)) + \Re(\underline{u}_2(t)) + \dots + \Re(\underline{u}_n(t)) \\ &= u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t) \\ &= u(t) \quad \text{additivité des tensions} \\ &= \Re(\underline{u}(t)) \end{aligned}$$

- ◇ Et en remarquant que seules les parties réelles ont une signification physique, nous pouvons effectivement poser :

$$\underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) + \dots + \underline{u}_n(t) = \underline{u}(t)$$

◇ Cela donne en termes d'amplitudes complexes :

$$\underline{U}_{1,m} e^{j\omega t} + \underline{U}_{2,m} e^{j\omega t} + \dots + \underline{U}_{n,m} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{U}_{1,m} + \underline{U}_{2,m} + \dots + \underline{U}_{n,m} = \underline{U}_m$$

★ loi des nœuds

La loi des nœuds $i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) = i(t)$ s'écrit en notation complexe :

→ $\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \dots + \underline{i}_n(t) = \underline{i}(t)$ en grandeurs instantanées

→ $\underline{I}_{1,m} + \underline{I}_{2,m} + \dots + \underline{I}_{n,m} = \underline{I}_m$ en amplitudes complexes

◇ Nous avons :

$$\begin{aligned} \Re(\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \dots + \underline{i}_n(t)) &= \Re(\underline{i}_1(t)) + \Re(\underline{i}_2(t)) + \dots + \Re(\underline{i}_n(t)) \\ &= i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) \\ &= i(t) \quad \text{loi des nœuds} \\ &= \Re(\underline{i}(t)) \end{aligned}$$

◇ Et en remarquant que seules les parties réelles ont une signification physique, nous pouvons effectivement poser :

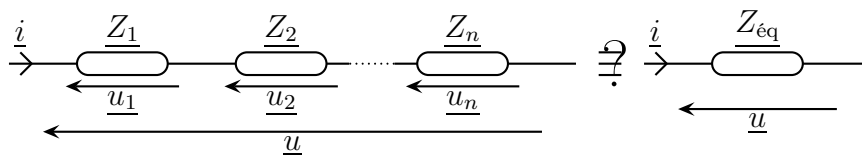
$$\underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + \dots + \underline{i}_n(t) = \underline{i}(t)$$

◇ Cela donne :

$$\underline{I}_{1,m} e^{j\omega t} + \underline{I}_{2,m} e^{j\omega t} + \dots + \underline{I}_{n,m} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{I}_{1,m} + \underline{I}_{2,m} + \dots + \underline{I}_{n,m} = \underline{I}_m$$

I.3.ii – association de dipôles

★ loi d'association



◇ Les relations constitutives des dipôles donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_1(t) = \underline{Z}_1 \underline{i}(t) \\ \underline{u}_2(t) = \underline{Z}_2 \underline{i}(t) \\ \vdots \\ \underline{u}_n(t) = \underline{Z}_n \underline{i}(t) \end{array} \right\} \rightarrow \sum \underline{u}_k(t) = \left(\sum \underline{Z}_k \right) \underline{i}(t)$$

◇ Finalement, avec ce qui précède, nous obtenons :

$$\underline{u}(t) = \left(\sum \underline{Z}_k \right) \underline{i}(t) = \underline{Z}_{\text{éq}} \underline{i}(t)$$

et donc :

L'association série de dipôles d'impédance \underline{Z}_k est équivalente à un dipôle unique d'impédance :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \cdots + \underline{Z}_n$$

🔍 retrouvailles

◇ Pour des résistances en série, la loi précédente donne directement :

$$R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

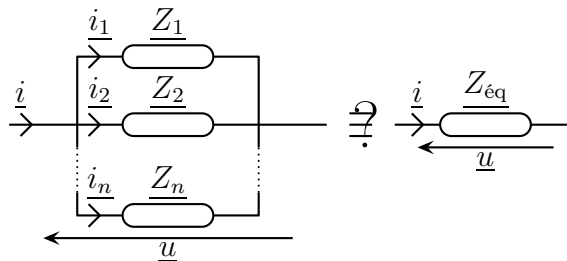
◇ Pour des bobines en série, la loi précédente donne :

$$j L_{\text{éq}} \omega = j L_1 \omega + j L_2 \omega + \cdots + j L_n \omega \quad \longrightarrow \quad L_{\text{éq}} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

◇ Pour des condensateurs en série, la loi précédente donne :

$$\frac{1}{j C_{\text{éq}} \omega} = \frac{1}{j C_1 \omega} + \frac{1}{j C_2 \omega} + \cdots + \frac{1}{j C_n \omega} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

★ en parallèle



◇ Les relations constitutives des dipôles donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{i}_1(t) = \underline{Y}_1 \underline{u}(t) \\ \underline{i}_2(t) = \underline{Y}_2 \underline{u}(t) \\ \vdots \\ \underline{i}_n(t) = \underline{Y}_n \underline{u}(t) \end{array} \right\} \longrightarrow \sum \underline{i}_k(t) = \left(\sum \underline{Y}_k \right) \underline{u}(t)$$

◇ Finalement, avec ce qui précède, nous obtenons :

$$\underline{i}(t) = \left(\sum \underline{Y}_k \right) \underline{u}(t) = \underline{Y}_{\text{éq}} \underline{u}(t)$$

et donc :

L'association parallèle de dipôles d'admittance \underline{Y}_k est équivalente à un dipôle unique d'admittance :

$$\underline{Y}_{\text{éq}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_n$$

🔍 retrouvailles

◇ Pour des résistances en parallèle, la loi précédente donne directement :

$$R_{\text{éq}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

◇ Pour des bobines en parallèle, la loi précédente donne :

$$\frac{1}{jL_{\text{éq}}\omega} = \frac{1}{jL_1\omega} + \frac{1}{jL_2\omega} + \dots + \frac{1}{jL_n\omega} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{L_{\text{éq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$$

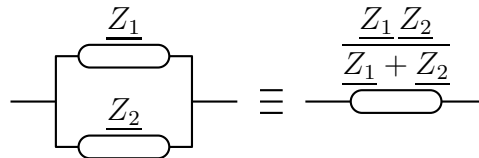
◇ Pour des condensateurs en parallèle, la loi précédente donne :

$$jC_{\text{éq}}\omega = jC_1\omega + jC_2\omega + \dots + jC_n\omega \quad \longrightarrow \quad C_{\text{éq}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

🔍 cas particulier

◇ Comme $\frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}$ nous obtenons :

Pour deux dipôles, nous avons directement :



I.3.iii – dorénavant

Toute loi peut s'écrire en notation complexe à condition de procéder aux changements :

- les grandeurs réelles \longrightarrow grandeurs complexes (en instantané ou en amplitude) ;
- résistance \longrightarrow impédances ;
- conductance \longrightarrow admittance.

◇ Il existe quelques fois (surtout en 2^e année) la convention :

$$\underline{i}(t) = I_m e^{-j(\omega t + \varphi)}$$

qui vérifie aussi $i(t) = \text{Re}(\underline{i}(t))$.

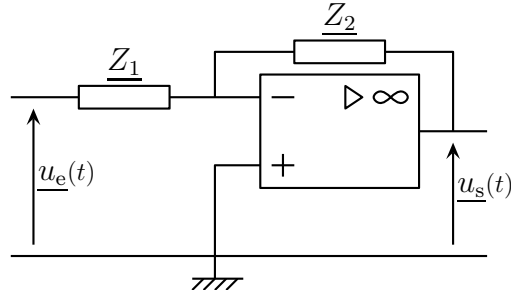
◇ Dans ce cas on a $\frac{d}{dt} \longleftrightarrow \times -j\omega$.

I.4 – Idoinotons

I.4.i – l'idoinoton 3 en 1

★ montage

◇ On considère le montage ci-dessous dans lequel l'AO est idéal.



◇ Analyse physique :

- il y a une seule rétroaction sur l'entrée inverseuse donc l'AO est en régime linéaire
- $\underline{u_s(t)}$ va être proportionnel à $\underline{u_e(t)}$

◇ Analyse technique :

- l'approche nodale puisque nous avons affaire avec un AO et qu'en plus nous cherchons un potentiel
- il y a deux potentiels inconnus donc deux lois

★ relation de fonctionnement

◇ L'AO est idéal et en régime linéaire donc $V_- = V_+$ et comme $V_+ = 0$, nous obtenons $V_- = 0$.

◇ Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels à l'entrée inverseuse :

$$\frac{U_e - 0}{\underline{Z}_1} + \frac{U_s - 0}{\underline{Z}_2} - \underbrace{I_-}_{=0 \text{ (AO idéal)}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\underline{U_s} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \times \underline{U_e}}$$

★ 1^{er} cas

◇ Prenons $\underline{Z}_1 = R_1$ et $\underline{Z}_2 = R_2$. Nous obtenons alors : $\underline{U_{s,m}} = -\frac{R_2}{R_1} \underline{U_{e,m}}$ ou encore, en notation réelle :

$$u_s(t) = -\frac{R_2}{R_1} u_e(t)$$

◇ Il s'agit du montage amplificateur inverseur.

★ 2^e cas

◇ Prenons $\underline{Z}_1 = \frac{1}{jC\omega}$ et $\underline{Z}_2 = R$. Nous obtenons alors : $\underline{U_{s,m}} = -jRC\omega \underline{U_{e,m}}$ ou encore, en notation réelle :

$$u_s(t) = -RC \frac{du_e(t)}{dt}$$

◇ Il s'agit du montage dérivateur.

★ 3^e cas

◇ Prenons $\underline{Z}_1 = R$ et $\underline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega}$. Nous obtenons alors : $\underline{U}_{s,m} = -\frac{U_{e,m}}{jRC\omega}$ d'où $\underline{U}_{e,m} = -jRC\omega \underline{U}_{s,m}$ ou encore, en notation réelle :

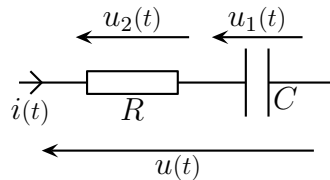
$$u_e(t) = -RC \frac{du_s(t)}{dt}$$

◇ Il s'agit du montage intégrateur.

☛ *Remarque* : lorsque $\omega \rightarrow 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Il n'y a donc plus de rétroaction sur l'entrée inverseuse et l'AO fonctionne donc en régime de saturation. Cela justifie l'effet de dérive dû à des défauts constant (*ie.* de pulsation nulle).

I.4.ii – association R, C en série

◇ Considérons la portion de circuit ci-dessous pour laquelle nous savons que $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ et cherchons la tension à ses bornes sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$.



◇ Avec la notation complexe, cela donne :

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad \underline{U}_m = U_m e^{j\varphi}$$

◇ L'additivité des tensions en complexe s'écrit :

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{1,m} + \underline{U}_{2,m} = \frac{I_m}{jC\omega} + R I_m = \left(\frac{1}{jC\omega} + R \right) I_m$$

◇ Ainsi :

$$\begin{aligned} U_m &= |\underline{U}_m| = \left| \left(\frac{1}{jC\omega} + R \right) I_m \right| && \rightsquigarrow && \boxed{U_m = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \times I_m} \\ &= \left| \frac{1}{jC\omega} + R \right| I_m = \left| R - \frac{j}{C\omega} \right| I_m \end{aligned}$$

◇ Nous avons aussi :

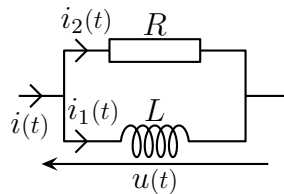
$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(\underline{U}_m) = \arg(\underline{I}_m) + \arg\left(\frac{1}{jC\omega} + R\right) && \rightsquigarrow && \boxed{\varphi = -\arctan \frac{1}{RC\omega}} \\ &= 0 + \arg\left(R - \frac{j}{C\omega}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{RC\omega}\right) \end{aligned}$$

Lorsque $X > 0$: $\arg(X + jY) = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$.

STOP Il faudra faire attention lorsque les nombres complexes dont nous voulons l'argument auront une partie réelle négative ou (pire) une partie réelle qui change de signe.

I.4.iii – association R, L en parallèle

◇ Considérons la portion de circuit ci-contre pour laquelle nous savons que $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et cherchons l'intensité traversant l'ensemble sous la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.



◇ Avec la notation complexe, cela donne :

$$\underline{u}(t) = U_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{i}(t) = \underline{I_m} e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad \underline{I_m} = I_m e^{j\varphi}$$

◇ La loi des nœuds en complexe s'écrit :

$$\underline{I_m} = \underline{I_{1,m}} + \underline{I_{2,m}} = \frac{U_m}{jL\omega} + \frac{U_m}{R} = \left(\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} \right) U_m$$

◇ Ainsi, pour l'amplitude réelle :

$$\begin{aligned} I_m &= |\underline{I_m}| = \left| \left(\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} \right) U_m \right| && \rightsquigarrow && I_m = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2 \omega^2}} \times U_m \\ &= \left| \frac{1}{R} + \frac{j}{L\omega} \right| I_m = \left| \frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega} \right| I_m \end{aligned}$$

◇ Et pour le déphasage :

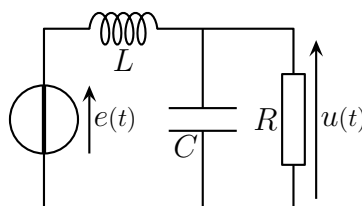
$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(\underline{I_m}) = \arg(\underline{U_m}) + \arg\left(\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} \right) && \rightsquigarrow && \varphi = -\arctan \frac{R}{L\omega} \\ &= 0 + \arg\left(\frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega} \right) = \arctan\left(-\frac{R}{L\omega} \right) \end{aligned}$$

◇ Ici la partie réelle de $\frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}$ était bien positive donc pas de problème pour l'expression de l'argument.

I.4.iv – circuit R, L, C

★ circuit

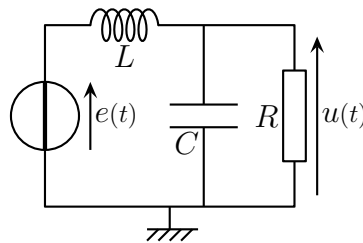
◇ Considérons le circuit ci-dessous dans lequel $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.



- ◇ Cherchons $u(t)$ sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. Nous devons donc trouver les expressions de U_m et de φ en fonction de E_m , R , L , C et ω .
- ◇ Analyse physique :
 - régime sinusoïdal forcé
 - les grandeurs dépendront de E_m , R , L , C et ω
 - il y a deux mailles et deux nœuds
- ◇ Analyse technique :
 - notation complexe!
 - nous cherchons une tension, c'est l'approche nodale qu'il nous faut : une seule inconnue, une seule loi.

★ résolution normale

- ◇ Mettons la masse au « bon » endroit et écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels.



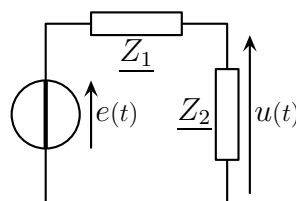
$$\frac{E - U_m}{jL\omega} + \frac{0 - U_m}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{0 - U_m}{0} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{E}{jL\omega} = \left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega + \frac{1}{R} \right)$$

◇ Et ainsi :
$$U_m = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L\omega}{R}}$$

★ autre méthode

- ◇ Comme R et C sont en parallèle, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous où :

$$\underline{Z}_1 = jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = R // C = \frac{R \times \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$



- ◇ Comme \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 sont en série, nous pouvons appliquer un diviseur de tension et :

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_m &= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \times \underline{E}_m \\
 &= \frac{R}{1 + jRC\omega} \times \underline{E}_m = \frac{R}{jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega}} \times \underline{E}_m = \frac{R}{jL\omega(1 + jRC\omega) + R} \times \underline{E}_m \\
 &= \frac{R}{R - LCR\omega^2 + jL\omega} \times \underline{E}_m = \frac{\underline{E}_m}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega}
 \end{aligned}$$

★ réponses

◇ Nous avons tout d'abord :

$$U_m = |\underline{U}_m| = \frac{E_m}{\left| 1 - LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega \right|} \rightsquigarrow \boxed{U_m = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \frac{L^2\omega^2}{R^2}}}$$

◇ Pour la phase cela donne :

$$\varphi = \arg(\underline{U}_m) = \arg(E_m) - \arg\left(1 - LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega\right)$$

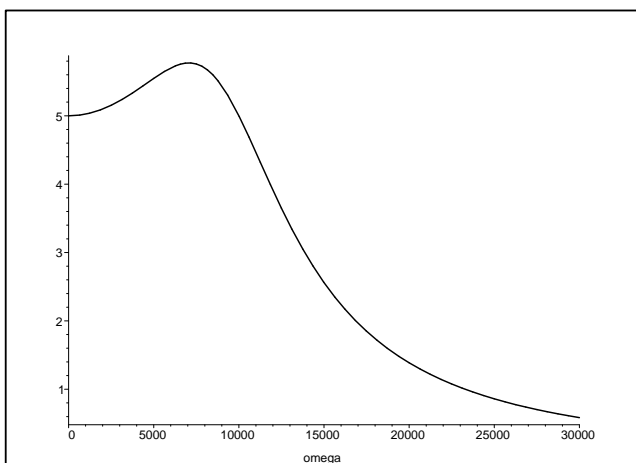
◇ Ici la partie réelle change de signe ! Pour écrire l'argument correctement, nous allons passer par une astuce : transformer la partie imaginaire en partie réelle en factorisant par j . Cela donne :

$$\varphi = 0 - \arg\left[j\left(\frac{L\omega}{R} + j(LC\omega^2 - 1)\right)\right] = -\arg j - \arg\left(\frac{L}{R} + j(LC\omega^2 - 1)\right)$$

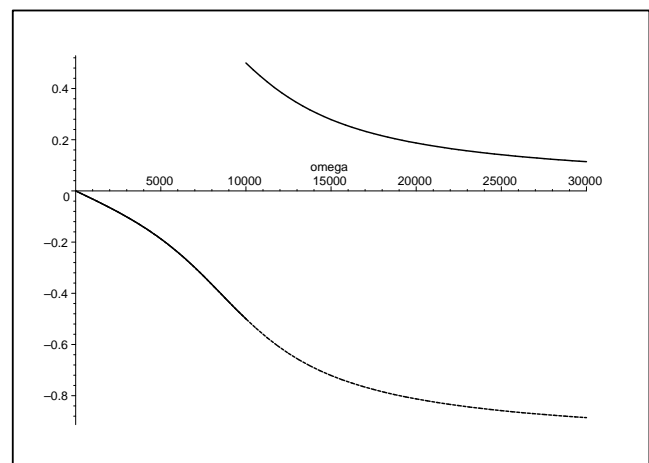
◇ Et ainsi : $\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{R(LC\omega^2 - 1)}{L\omega}}$

★ représentation graphique

Graphique 1



Graphique 2



◇ Le graphique 1 représente U_m en fonction de ω pour :

$$\rightarrow R = 1000 \text{ k}\Omega;$$

$$\rightarrow L = 0,10 \text{ H};$$

$$\rightarrow C = 100 \text{ nF};$$

$$\rightarrow E_m = 5,0 \text{ V}.$$

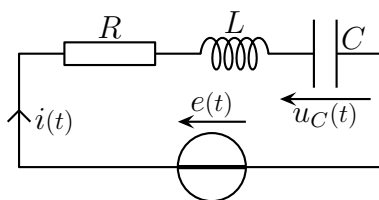
◇ Le graphique 2 représente φ en fonction de ω . La courbe en rouge représente $-\arctan \frac{L\omega}{R(LC\omega^2 - 1)}$.

II – Circuit R, L, C série en régime sinusoïdal forcé

II.1 – Dispositif

◇ Le générateur est sinusoïdal, ie. $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ et nous cherchons

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad \text{et} \quad u_C(t) = U_{C,m} \cos(\omega t + \varphi_u)$$



◇ Analyse physique :

→ c'est un circuit en régime sinusoïdal forcé

→ il n'y a qu'une maille

→ GP : R, L, C pour les composants et E_m et ω pour les contraintes

→ comme il s'agit d'un circuit R, L, C série, les grandeurs caractéristiques $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ et $Q =$

$$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

◇ Analyse physique :

→ notation complexe à cause du RSF

→ une seule maille donc approche maillère.

◇ Remarquons qu'avec le choix de $e(t)$ comme origine des phases, nous avons $\underline{E}_m = E_m e^{j0} = E_m$ et φ_u (resp. φ_i) représente le déphasage de $u_C(t)$ (resp. $i(t)$) par rapport à $e(t)$.

Pour un circuit en régime sinusoïdal forcé, le générateur est souvent celui qui sert de référence pour la phase, ie. :

→ son déphasage à l'origine est nul

→ son amplitude complexe est donc une amplitude réelle, notée sans barre

II.2 – Amplitudes complexes

II.2.i – pour l'intensité

◇ La loi de POUILLET en complexe donne :

$$\begin{aligned} \underline{I}_m &= \frac{E_m}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jC\omega}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1} \times E_m \\ &= \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \times \frac{E_m}{R} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \times I_0 \end{aligned}$$

II.2.ii – pour la tension aux bornes du condensateur

◇ La loi constitutive du condensateur donne directement :

$$\underline{U}_{C,m} = \frac{I_m}{jC\omega} = \frac{E_m}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

II.2.iii – écriture canonique

◇ Introduisons les grandeurs caractéristiques du circuit R, L, C série :

→ la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;

→ le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

◇ Nous avons alors : $RC = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \times C = \frac{\sqrt{LC}}{Q} = \frac{1}{Q\omega_0}$.

★ pour l'intensité

◇ En remplaçant LC et RC par les expressions précédentes nous obtenons

$$\underline{I}_m = \frac{j \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} I_0$$

◇ Et en utilisant la pulsation réduite $x \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega}{\omega_0}$: $\underline{I}_m = \frac{jx}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \times \frac{I_0}{Q}$.

★ pour la tension

◇ Procédons de même :

$$\underline{U}_{C,m} = \frac{E_m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} = \frac{E_m}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} = \underline{U}_m$$

II.2.iv – analogie mécanique

◇ Nous avons déjà vu :

$$h \longleftrightarrow R \qquad m \longleftrightarrow L \qquad k \longleftrightarrow \frac{1}{C}$$

◇ Maintenant nous avons en plus, grâce aux notations complexes :

$$\text{position} \longleftrightarrow u_C \qquad \text{et} \qquad \text{vitesse} \longleftrightarrow i$$

☛ *Remarque* : il est possible de définir une impédance mécanique $\underline{Z}_{\text{méca}} = \frac{X_m}{V_m} \rightsquigarrow \frac{F_m}{V_m}$ pour prolonger cette analogie (en général \underline{Z} est défini comme le rapport de deux grandeurs dont le produit est homogène à une puissance.)

II.3 – Courbe de résonance en tension

II.3.i – rappel

◇ Avec $\underline{U}_{C,m} = \frac{E_m}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$ nous avons (résultats à savoir retrouver mais à ne pas connaître par cœur) :

→ une résonance en $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ pourvu que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$;

→ une valeur de $U_{\max} = \frac{QE_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ à la résonance.

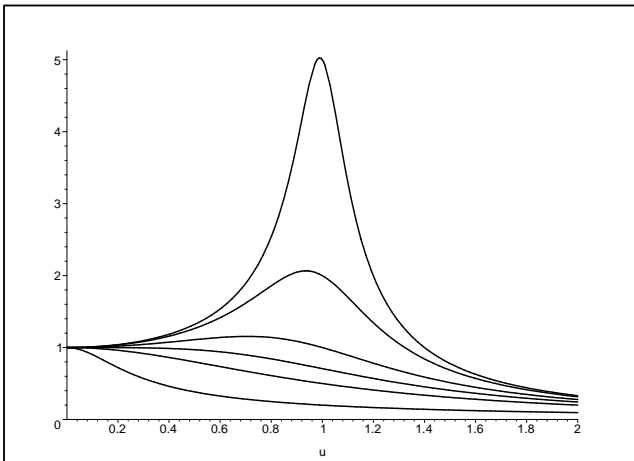
◇ Et pour $Q \gg 1$, *ie.* pour $Q > 5$ nous avons :

→ une résonance en $x_r = 1$;

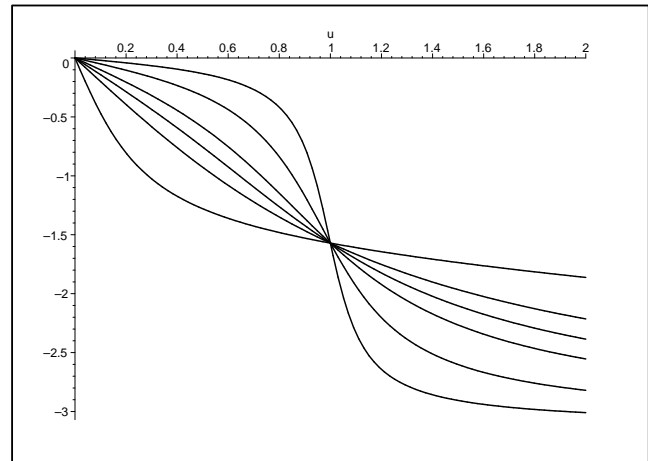
→ une valeur de $U_{\max} = QE_m$ à la résonance.

★ tracés

Graphique 3



Graphique 4



◇ La résonance est aiguë pour $Q \gg 1$.

II.3.ii – bande passante

La *bande passante* est l'ensemble des fréquences (ou des pulsations) telle que la valeur intéressante soit au moins égal à la valeur maximale possible divisée par $\sqrt{2}$.

La *fréquence (ou pulsation) de coupure* est une fréquence (ou pulsation) telle que la valeur intéressante soit exactement égale à la valeur maximale possible divisée par $\sqrt{2}$, une fréquence de coupure est donc à la limite d'une bande passante.

◇ La raison du facteur $\sqrt{2}$ s'expliquera à la fin du chapitre.

◇ Ici la valeur intéressante est $U_{C,m}$ et nous connaissons déjà la valeur maximale possible, c'est QE_m .

◇ Dans le cas où $Q \gg 1$, nous voyons graphiquement qu'il va y avoir deux valeurs x_1 et x_2 pour lesquelles nous aurons :

$$U_{C,m}(x_1) = U_{C,m}(x_2) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$$

◇ L'équation à résoudre est donc :

$$U_{C,m}(x) = \frac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} = \frac{Q E_m}{\sqrt{2}}$$

◇ Cela donne :

$$(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} = \frac{2}{Q^2} \quad \rightsquigarrow \quad x^4 + \underbrace{\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)}_{-x_1 x_2 \leq 0} x^2 + \underbrace{1 - \frac{2}{Q^2}}_{x_1 x_2 \geq 0}$$

◇ Nous pouvons déjà en déduire que les deux solutions sont de même signe et positives.

◇ Le discriminant vaut alors en tenant compte du fait que $\frac{1}{Q^4} \ll \frac{1}{Q^2}$:

$$\Delta = \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)^2 - 4 \left(1 - \frac{2}{Q^2}\right) = 4 + \frac{1}{Q^4} - \frac{4}{Q^2} - 4 + \frac{8}{Q^2} \simeq \frac{4}{Q^2}$$

Cela donne, toujours avec $\frac{1}{Q^2} \ll \frac{1}{Q}$:

$$x_1^2 = \frac{2 - \frac{1}{Q^2} + \frac{2}{Q}}{2} \simeq 1 + \frac{1}{Q} \quad \rightsquigarrow \quad x_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{Q}} \simeq 1 + \frac{1}{2Q}$$

◇ De même :

$$x_2^2 = \frac{2 - \frac{1}{Q^2} - \frac{2}{Q}}{2} \simeq 1 - \frac{1}{Q} \quad \rightsquigarrow \quad x_2 = 1 - \frac{1}{2Q}$$

◇ En regroupant l'ensemble, nous avons :

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \omega_0 x_1 - \omega_0 x_2 = \omega_0 \Delta x = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} - 1 + \frac{1}{2Q}\right) = \frac{\omega_0}{Q}$$

Pour la résonance en tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit R,L,C série, lorsque $Q \gg 1$, la bande passante est telle que :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta x}$$

◇ Il s'agit là d'une méthode simple pour mesurer graphiquement le facteur de qualité d'un dispositif.

II.4 – Courbe de résonance en intensité

II.4.i – rappel ?

◇ En mécanique, nous avons $V_m = \frac{jx}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$ et (résultats à savoir retrouver mais à ne pas connaître

par cœur) :

- le maximum était en $x_r = 1$;
- le maximum valait $V_{\max} = Q V_0$.

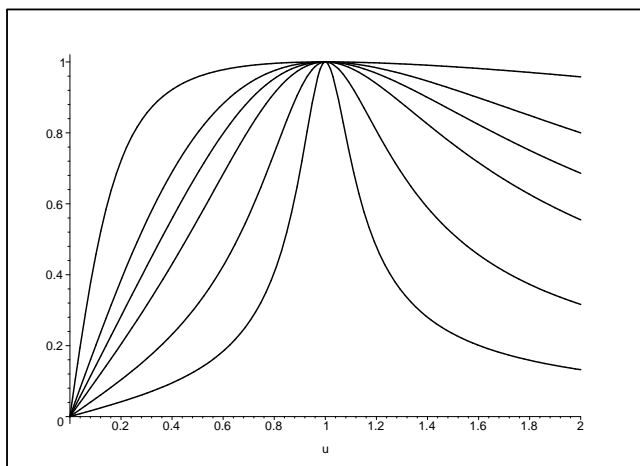
◇ Ici, comme c'est $\frac{I_0}{Q}$ qui joue le rôle de V_0 , nous aurons :

- un maximum en $x_r = 1$;
- de valeur I_0 .

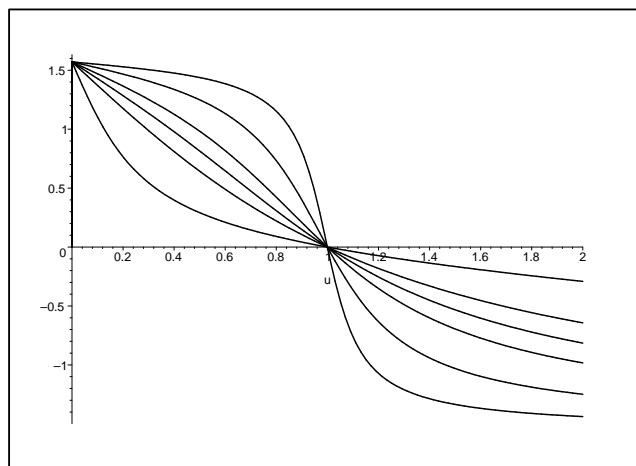
★ les tracés

◇ Cela change un tout petit peu.

Graphique 5



Graphique 6



★ interprétation de la résonance

◇ Nous pouvons constater qu'à la résonance, nous avons $I_m = \frac{E}{R}$ qui est un résultat surprenant étant donné qu'il ne dépend ni de L ni de C , comme s'ils n'étaient pas là.

◇ Réécrivons l'amplitude complexe de l'intensité :

$$\underline{I}_m = \frac{E_m}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{E_m}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

◇ Comme les réactances de la bobine et du condensateur sont opposées, elles peuvent se compenser et se compensent effectivement à la résonance :

$$L\omega_r - \frac{1}{C\omega_r} \rightsquigarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

◇ C'est l'ensemble $L \oplus C$ qui se comporte comme un fil, certainement pas chaque dipôle pris séparément, comme le montre l'étude sur $U_{C,m}$.

II.4.ii – bande passante

◇ Les graphiques précédents nous incitent à chercher les pulsations réduites de coupure x_1 et x_2 telles que

$$I_m(x_1) = I_m(x_2) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

◇ Cela donne successivement :

$$\frac{i_0}{Q \sqrt{\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad \rightsquigarrow \quad Q^2 \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 + 1 = 2 \quad \rightsquigarrow \quad \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 = \frac{1}{Q^2}$$

★ première méthode

◇ Et en posant $\varepsilon = \pm 1$ (ce qui permettra de résoudre tous les cas en une seule fois) :

$$\frac{1}{x} - x = \frac{\varepsilon}{Q} \quad \rightsquigarrow \quad x^2 + \frac{\varepsilon}{Q} - 1 = 0$$

◇ Calculons le discriminant $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0$ et écrivons toutes les solutions :

$$x_c = \frac{-\frac{\varepsilon}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

◇ Gardons uniquement les solutions positives en remarquant que $\sqrt{\Delta} > \frac{1}{Q}$. Cela donne :

$$\boxed{x_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}}$$

◇ En rassemblant le tout, nous obtenons :

$$\Delta\omega = \omega_0 \Delta x = \omega_0 (x_2 - x_1) = \frac{\omega_0}{Q}$$

Pour la résonance en intensité dans un circuit R, L, C série, quel que soit Q , la bande passante est telle que :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta x}$$

◇ Là aussi il s'agit d'un critère graphique permettant de mesurer expérimentalement Q .

★ deuxième méthode

◇ Soit x_{c1} une pulsation de coupure, *ie.* telle que $\left(\frac{1}{x_{c1}} - x_{c1}\right)^2 = \frac{1}{Q^2}$.

◇ Alors $x_{c2} = \frac{1}{x_{c1}}$ est aussi une pulsation de coupure. En effet :

$$\left(\frac{1}{x_{c2}} - x_{c2}\right)^2 = \left(x_{c1} - \frac{1}{x_{c1}}\right)^2 = \left(\frac{1}{x_{c1}} - x_{c1}\right)^2 = \frac{1}{Q^2}$$

◇ Dans ces conditions, la bande passante vaut :

$$(x_{c2} - x_{c1})^2 = \left(\frac{1}{x_{c1}} - x_{c1}\right)^2 = \frac{1}{Q^2} \quad \rightsquigarrow \quad x_{c2} - x_{c1} = \frac{1}{Q}$$

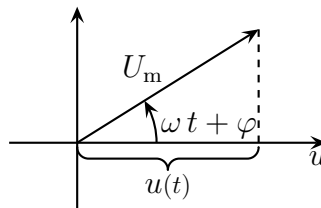
◇ Avec cette méthode, nous n'avons pas calculé x_{c1} et x_{c2} .

III – La construction de FRESNEL

III.1 – Une autre représentation des grandeurs sinusoïdales

III.1.i – présentation

◇ Cette représentation est basée sur la représentation d'un nombre complexe dans le plan complexe, *ie.* on représente ces grandeurs (tension ou intensité) par des vecteurs tournants.



- ◇ L'axe des ordonnées n'a pas de nom : ça a la dimension d'une tension, mais ça n'a pas d'interprétation physique simple.
- ◇ Quand t évolue, le vecteur représentant le vecteur tension tourne à la vitesse angulaire ω .
- ◇ L'axe des abscisses est l'origine des phases.
- ◇ Comme les vecteurs tournent de manière synchrone, autant toujours les représenter à l'instant initial de manière à interpréter facilement les déphasages par rapport à la référence de phase.

Une grandeur sinusoïdale $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ se représente par un vecteur de norme U_m et faisant avec l'axe des abscisses un angle φ .

III.1.ii – quand l'utiliser ?

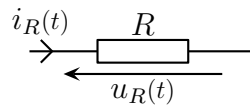
- ◇ Cette construction n'est ni plus ni moins que du calcul sur les complexes en version géométrique. Les résultats seront identiques mais la façon d'y parvenir sera plus visuelle.
- ◇ Cette approche est pratique quand toutes les grandeurs intéressantes pourront être sommées car cela reviendra à faire des additions vectorielles ce qui sera relativement simple. Cela implique :
 - si les grandeurs intéressantes sont les tensions, il faut que tous les dipôles soient en série
 - si les grandeurs intéressantes sont les intensités, il faut que tous les dipôles soient en parallèle

La représentation de FRESNEL est très utile pour les circuits simples : ceux à une maille ou à deux nœuds.

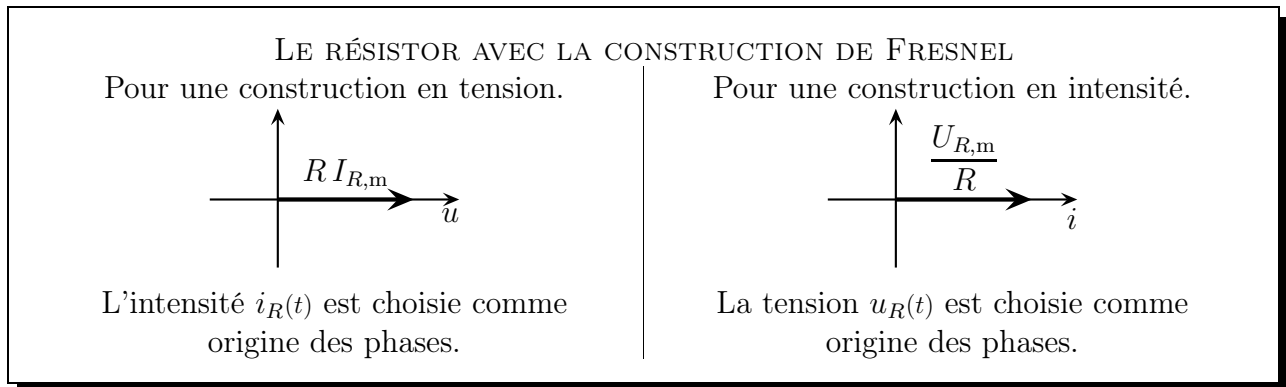
III.2 – Représentation de dipôles usuels

III.2.i – le résistor

◇ Pour un résistor, comme représenté ci-dessous, on a $\underline{u}_R(t) = R \underline{i}_R(t)$.

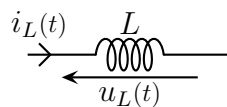


◇ Dans ces conditions : $\arg(\underline{u}_R(t)) = \underbrace{\arg(R)}_{=0} + \arg(\underline{i}_R(t)) = \arg(\underline{i}_R(t))$.

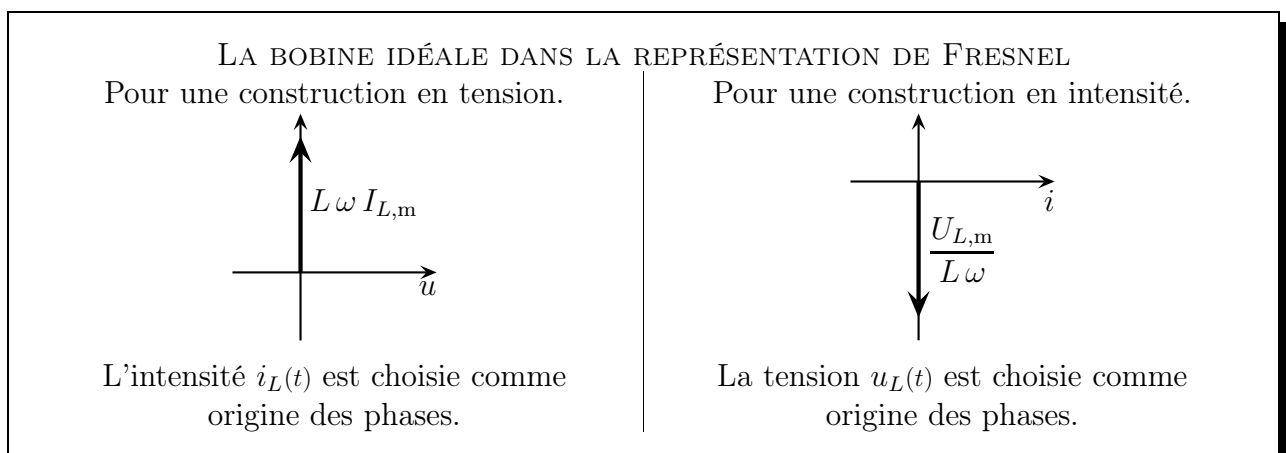


III.2.ii – la bobine idéale

◇ Pour une bobine, comme représenté ci-dessous, nous avons $\underline{u}_L(t) = j L \omega \underline{i}_L(t)$.

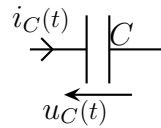


◇ Dans ces conditions : $\arg(\underline{u}_L(t)) = \underbrace{\arg(j L \omega)}_{=\pi/2} + \arg(\underline{i}_L(t)) = \frac{\pi}{2} + \arg(\underline{i}_L(t))$



III.2.iii – le condensateur idéal

◇ Pour un condensateur, comme représenté ci-dessous, nous avons $\underline{u}_C(t) = \frac{i_C(t)}{j C \omega}$.



◇ Dans ces conditions : $\arg(\underline{u}_C(t)) = \arg(\underline{i}_C(t)) - \underbrace{\arg(j C \omega)}_{=\pi/2} = \arg(\underline{i}_L(t)) - \frac{\pi}{2}$

LE CONDENSATEUR IDÉAL DANS LA CONSTRUCTION DE FRESNEL	
Pour une construction en tension. 	Pour une construction en intensité.
L'intensité $i_C(t)$ est choisie comme origine des phases.	La tension $u_C(t)$ est choisie comme origine des phases.

III.2.iv – retrouver le comportement en construction de FRESNEL

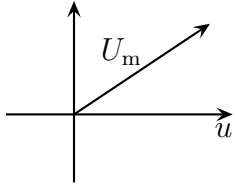
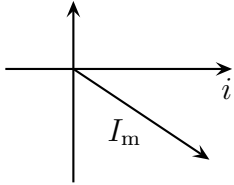
- ◇ Il est trop lourd, inutile et dangereux d'apprendre par cœur les comportements des différents dipôles en construction de FRESNEL.
- ◇ Mais comme il faut les connaître, il ne reste plus qu'à savoir les retrouver très vite.
- ◇ Pour cela le plus simple est de repartir de l'expression de l'impédance complexe \underline{Z} qui introduit un déphasage $\varphi = \arg(\underline{Z})$ à la tension par rapport à l'intensité.
- ◇ Ensuite, connaissant $\underline{Z}_R = R$, $\underline{Z}_L = j L \omega$ et $\underline{Z}_C = \frac{1}{j C \omega}$, il est facile de tout retrouver.

III.2.v – dipôle quelconque

★ caractère inductif

Un dipôle possède un *caractère inductif* lorsqu'il se comporte « un peu » comme une bobine, *ie.* quand :

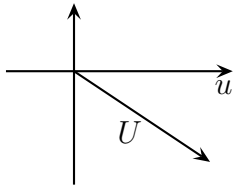
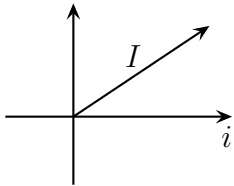
- $\underline{Z} = R = j X$ avec $X > 0$;
- en convention récepteur, la tension à ses bornes est en avance par rapport à l'intensité qui le traverse.

Un dipôle inductif dans la construction de FRESNEL	
<p>Pour une construction en tension.</p>  <p>L'intensité $i(t)$ est choisie comme origine des phases.</p>	<p>Pour une construction en intensité.</p>  <p>La tension $u(t)$ est choisie comme origine des phases.</p>

★ caractère capacitif

Un dipôle possède un *caractère capacitif* lorsqu'il se comporte « un peu » comme un condensateur, *ie.* lorsque :

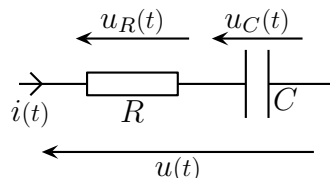
- $\underline{Z} = R = jX$ avec $X < 0$;
- en convention récepteur, la tension à ses bornes est en retard par rapport à l'intensité qui le traverse.

UN DIPÔLE CAPACITIF DANS LA CONSTRUCTION DE FRESNEL	
<p>Pour une construction en tension.</p>  <p>L'intensité $i(t)$ est choisie comme origine des phases.</p>	<p>Pour une construction en intensité.</p>  <p>La tension $u(t)$ est choisie comme origine des phases.</p>

III.3 – Association de dipôles

III.3.i – association série

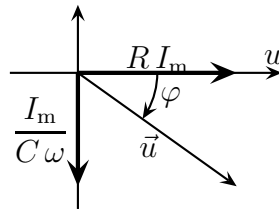
◇ Reprenons l'exemple précédent de la première partie.



◇ Ici, comme les deux dipôles sont en série, nous allons utiliser la construction de FRESNEL avec $i(t)$ comme origine des phases puisque c'est la grandeur commune aux deux dipôles.

◇ Nous avons donc $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ et $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$.

◇ La construction de FRESNEL de l'association est représentée ci-dessous.



◇ Pythagore donne alors $U_m = \sqrt{R^2 I_m^2 + \frac{I_m^2}{C^2 \omega^2}} = I_m \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}$.

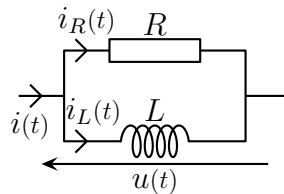
◇ De même la trigonométrie donne :

$$\tan \varphi = -\frac{\frac{I_m}{C \omega}}{R I_m} = -\frac{1}{R C \omega} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{1}{R C \omega}\right)$$

◇ Ce sont bien les résultats trouvés précédemment.

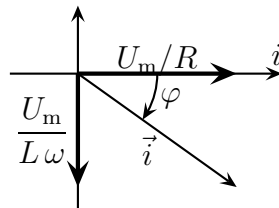
III.3.ii – association parallèle

◇ Reprenons l'exemple de la première partie.



◇ Comme $u(t)$ est la grandeur commune aux deux dipôles, nous allons la choisir comme origine des phases. Nous avons ainsi $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.

◇ La construction de FRESNEL de l'association est représentée ci-dessous.



◇ Pythagore donne alors $I_m = \sqrt{\frac{U_m^2}{R^2} + \frac{U_m^2}{L^2 \omega^2}} = U_m \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2 \omega^2}}$.

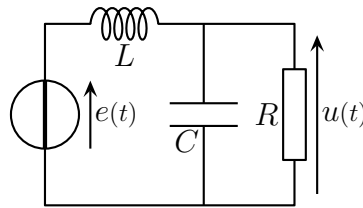
◇ De même la trigonométrie donne :

$$\tan \varphi = -\frac{\frac{U_m}{L \omega}}{\frac{U_m}{R}} = -\frac{R}{L \omega} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{R}{L \omega}\right)$$

◇ Ce sont bien les résultats que nous avons trouvés avec la notation complexe.

III.3.iii – idoinoton

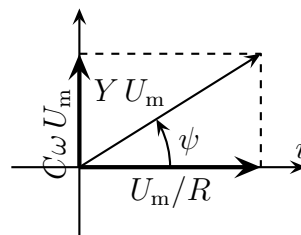
◇ Reprenons l'idoinoton de la première partie dans lequel nous avons $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.



- ◇ Là aussi, nous allons chercher $u(t)$ sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ avec U_m et φ à exprimer en fonction de E_m , R , L , C et ω .
- ◇ Tous les dipôles ne sont pas en série ou en parallèle. Il nous faut d'abord trouver comment se représente l'association parallèle $C//R$ en construction de FRESNEL avant de l'associer en série avec la bobine.

★ d'abord l'association $R, C \dots$

◇ Représentons le comportement du dipôle R, C avec la construction de FRESNEL.



- ◇ Il s'agit d'une association parallèle, nous allons donc prendre la tension commune comme origine des phases.
- ◇ L'intensité qui passe alors dans ce dipôle est telle que, avec Pythagore :

$$I_{d,m} = \sqrt{\frac{U_m^2}{R^2} + C^2 \omega^2 U_m^2} = U_m \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2 \omega^2}$$

◇ D'après la définition de l'admittance nous avons $I_{d,m} = Y U_m$ et avec $Y = \frac{1}{Z}$ nous obtenons :

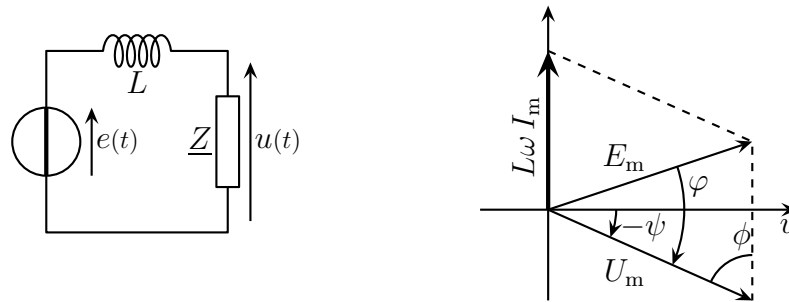
$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2 \omega^2} \quad \text{et} \quad Z = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$$

◇ De plus, la géométrie du triangle rectangle donne :

$$\begin{aligned} \tan \psi &= \frac{C \omega U_m}{U_m/R} = R C \omega \\ \sin \psi &= \frac{C \omega U_m}{Y U_m} = Z C \omega = \frac{R C \omega}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \\ \cos \psi &= \frac{U_m/R}{Y U_m} = \frac{Z}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \end{aligned}$$

★ ... ensuite on cherche U_m ...

◇ Le montage initial est donc équivalent au circuit ci-dessous.



◇ L'intensité du courant étant identique pour les trois dipôle, c'est elle que nous choisirons comme origine des phases. Il faut donc faire attention à la représentation de \vec{e} et aussi à l'interprétation géométrique de φ .

◇ Pythagore donne donc :

$$\begin{aligned}
 E_m^2 &= (Z I_m \cos \psi)^2 + (Z I_m \sin \psi - L \omega I_m)^2 \\
 &= U_m^2 \cos^2 \psi + U_m^2 \sin^2 \psi + L^2 \omega^2 I_m^2 - 2 L \omega I_m U_m \sin \psi \\
 &= U_m^2 + L^2 \omega^2 \frac{U_m^2}{Z^2} - 2 L \omega \frac{I_m^2}{Z} Z C \omega \\
 &= U_m^2 \times \left(1 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2} (1 + R^2 C^2 \omega^2) - 2 L C \omega^2 \right) \\
 &= U_m^2 \times \left(1 + L^2 C^2 \omega^4 - 2 L C \omega^2 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2} \right) \\
 &= U_m^2 \times \left((1 - L C \omega^2)^2 + \left(\frac{L \omega}{R} \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

◇ Nous avons donc $U_m = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - L C \omega^2)^2 + \left(\frac{L \omega}{R} \right)^2}} \stackrel{\text{not}}{=} \xi E_m$.

★ ... et enfin φ

◇ Pour déterminer $\tan \varphi$, nous allons calculer $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ grâce à deux relations géométriques.

◇ L'additivité des tensions donne : $u_L(t) = e(t) - u(t)$, ce qui s'écrit, pour la représentation de FRESNEL :

$$\vec{u}_L = \vec{e} - \vec{u}$$

◇ En élevant au carré :

$$\vec{u}_L^2 = (\vec{e} - \vec{u})^2 \quad \rightsquigarrow \quad U_{L,m}^2 = E_m^2 + U_m^2 - 2 E_m U_m \cos \varphi$$

et avec $U_{L,m} = L \omega I_m$ et $I_m = \frac{U_m}{Z}$ nous obtenons :

$$\cos \varphi = \frac{E_m^2 + U_m^2 - L^2 \omega^2 I_m^2}{2 E_m U_m} = \frac{E_m^2 + U_m^2 - \frac{L^2 \omega^2 U_m^2}{Z^2}}{2 E_m U_m} \rightsquigarrow \cos \varphi = \frac{1 + \xi^2 \left(1 - \frac{L^2 \omega^2}{Z^2}\right)}{2 \xi}$$

◇ Les relations géométriques du triangle donnent : $\frac{\sin \phi}{E_m} = \frac{\sin(-\varphi)}{L \omega I_m}$.

or $\sin \phi = \cos \psi = \frac{Z}{R}$, ce qui amène à :

$$\frac{Z}{R E_m} = \frac{\sin(-\varphi)}{L \omega I_m} \rightsquigarrow \sin \varphi = -\frac{Z L \omega I_m}{R I_m E_m} = -\frac{L \omega U_m}{R E_m} = -\frac{L \omega}{R} \xi$$

◇ Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{L \omega}{R} \times \xi \times \frac{2 \xi}{1 + \xi^2 \left(1 - \frac{L^2 \omega^2}{Z^2}\right)} \\ &= -\frac{L \omega}{R} \times 2 \times \frac{1}{1 - \frac{L^2 \omega^2}{Z^2} + \frac{1}{\xi^2}} \\ &= -\frac{L \omega}{R} \times 2 \times \frac{1}{1 - \frac{L^2 \omega^2}{R^2} (1 + R^2 C^2 \omega^2) + (1 - L C \omega^2)^2 + \left(\frac{L \omega}{R}\right)^2} \\ &= -\frac{L \omega}{R} \times 2 \times \frac{1}{1 - \frac{L^2 \omega^2}{R^2} - L^2 C^2 \omega^4 + 1 + L^2 C^2 \omega^4 - 2 L C \omega^2 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}} \\ &= -\frac{L \omega}{R} \times \frac{2}{2 - 2 L C \omega^2} = -\frac{L \omega}{R(1 - L C \omega^2)} \rightsquigarrow \varphi = -\arctan \left(\frac{L \omega}{R(1 - L C \omega^2)} \right) \end{aligned}$$

◇ De plus avec $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, nous trouvons bien le résultat :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{R(1 - L C \omega^2)}{L \omega} \right)$$

◇ Nous constatons aisément que la méthode avec les complexes est bien plus facile que la méthode avec FRESNEL lors d'association quelconque. En revanche, s'il n'y a qu'un seul type d'association (tous les dipôles sont en série ou tous les dipôles sont en parallèle), FRESNEL peut être très rapide.

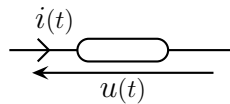
IV – Aspect énergétique

IV.1 – Puissance moyenne consommée par un dipôle

IV.1.i – en terme de puissance moyenne

★ analyse du problème

◇ Considérons un dipôle quelconque en convention récepteur.

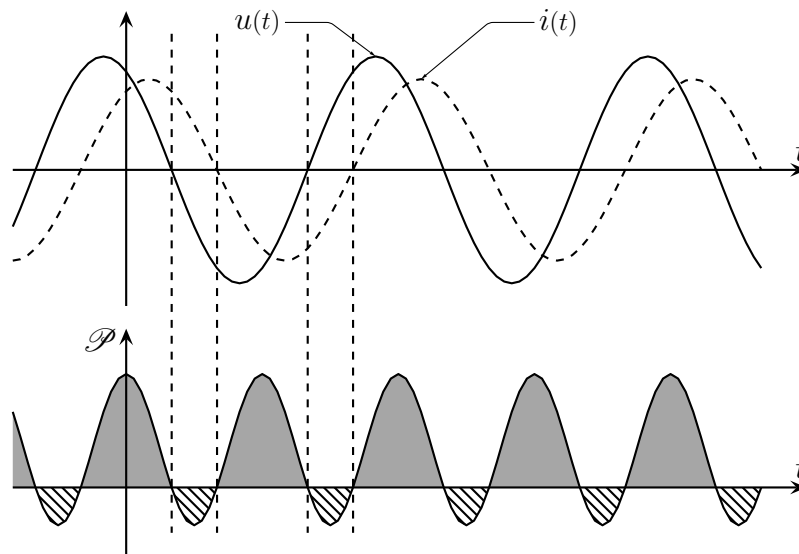


- ◇ Nous savons alors que la puissance qu'il reçoit à chaque instant s'écrit $\mathcal{P}(t) = +u(t) i(t)$.
- ◇ Le problème est que cette grandeur va être variable dans le temps étant donné que

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

★ représentation graphique

- ◇ Considérons un dipôle quelconque en convention récepteur et représentons le chronogramme de $u(t)$, $i(t)$, $\mathcal{P}(t)$.



- ◇ Nous pouvons déjà voir pour ce dipôle que la tension est en avance de phase par rapport à l'intensité.
- ◇ Nous pouvons aussi constater qu'il existe des moments où :
 - le dipôle possède un caractère récepteur $\mathcal{P}(t) > 0$ dans les zones
 - le dipôle possède un caractère générateur $\mathcal{P}(t) < 0$ dans les zones
- ◇ L'énergie totale reçue n'est autre que l'aire sous la courbe $\mathcal{P}(t)$ et nous devinons qu'elle est globalement positive.
- ◇ Pour ce dipôle, la puissance moyenne reçue est positive.

IV.1.ii – et surtout pas complexe

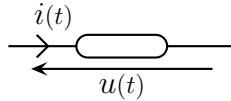
- ◇ La puissance reçue par un dipôle n'est pas une grandeur linéaire.
- ◇ En effet, si tous les générateurs ont leurs f.é.m. multipliées par 2, alors toutes les tensions et toutes les intensités seront multipliées par 2 étant donné le caractère linéaire supposé du circuit (sans lequel la notation complexe n'a pas de raison d'être).
- ◇ Dans ces conditions, la puissance instantanée reçue est multipliée par 4!

Il n'est pas possible d'associer à la puissance instantanée reçue une représentation complexe.

IV.1.iii – expression simple – facteur de puissance

◇ Juste calculons la puissance moyenne reçue par le dipôle ci-dessous pour lequel nous avons :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$



$$\begin{aligned} P &= \langle \mathcal{P}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \cos(\omega t + \varphi_u) \cos(\omega t + \varphi_i) dt \\ &= \frac{U_m I_m}{T} \int_0^T \frac{\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)}{2} dt \\ &= \frac{U_m I_m}{T} \left(\langle \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \rangle + \langle \cos(\varphi_u - \varphi_i) \rangle \right) = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) \end{aligned}$$

La puissance moyenne reçue par un dipôle vaut $P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi$ où :

- U_m et I_m sont les amplitudes réelles de la tension à ses bornes et de l'intensité le traversant
- φ est le déphasage de la tension par rapport à l'intensité
- P est appelée la *puissance active* et s'exprime en W
- $\cos \varphi$ est appelée le *facteur de puissance*

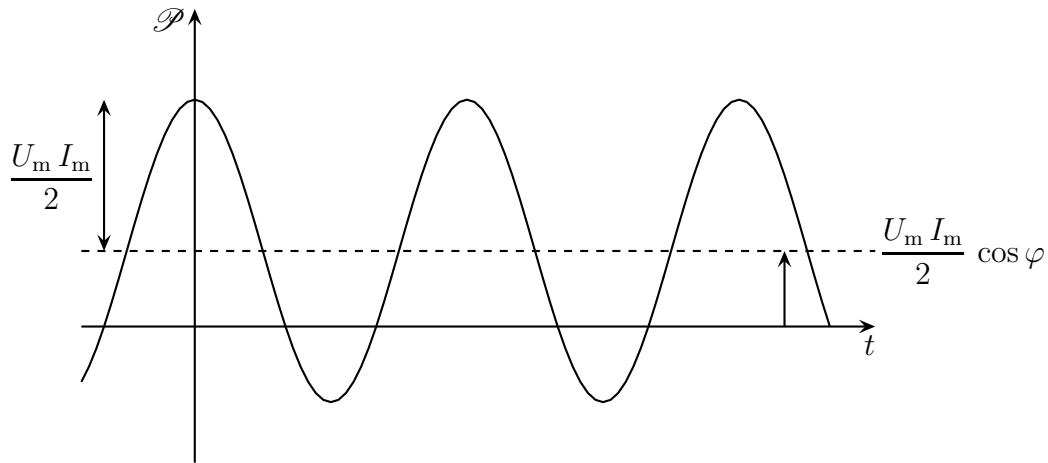
◇ La grandeur $\frac{U_m I_m}{2}$ est appelée puissance apparente et s'exprime en V.A et non en W.

◇ Bien que la puissance reçue soit une grandeur physique donc indépendante de la convention avec laquelle le dipôle est étudié, il faudra faire attention à ce que le dipôle soit bien en convention récepteur pour bien calculer le déphasage $\varphi_u - \varphi_i$

★ interprétation

◇ Reprenons le graphique de $\mathcal{P}(t)$ et réinterprétons à l'aide de l'expression

$$\mathcal{P}(t) = \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$



Plus le facteur de qualité est élevé moins le dipôle restitue de l'énergie au circuit.

IV.2 – Le $\cos \varphi$ est caractéristique du dipôle

IV.2.i – le voir dans l'impédance

- ◇ Pour un dipôle en convention récepteur, nous avons $\underline{u}(t) = \underline{Z} \underline{i}(t)$ et donc $\varphi_u = \arg(\underline{Z}) + \varphi_i$, c'est-à-dire $\varphi = \arg(\underline{Z})$.
- ◇ Écrivons l'impédance sous sa forme exponentielle et algébrique :

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi = R + j X$$

Le facteur de puissance dépend uniquement de l'impédance du dipôle et vaut :

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{\Re(\underline{Z})}{Z}$$

IV.2.ii – le voir dans l'admittance

- ◇ Pour un dipôle en convention récepteur, nous avons $\underline{i}(t) = \underline{Y} \underline{u}(t)$ et donc $\varphi_i = \arg(\underline{Y}) + \varphi_u$, c'est-à-dire $\varphi = -\arg(\underline{Y})$.
- ◇ Écrivons l'impédance sous sa forme exponentielle et algébrique :

$$\underline{Y} = Y e^{-j\varphi} = Y \cos \varphi - j Y \sin \varphi = G + j B$$

Le facteur de puissance dépend uniquement de l'admittance du dipôle et vaut :

$$\cos \varphi = \frac{G}{Y} = \frac{\Re(\underline{Y})}{Y}$$

IV.2.iii – dipôles usuels

- ◇ Nous avons $\underline{Z}_R = R$, $\underline{Z}_C = \frac{1}{j C \omega}$ et $\underline{Z}_L = j L \omega$.

◇ Nous pouvons donc voir que le facteur de qualité du résistor vaut 1.

Un résistor consomme toute la puissance qu'il reçoit.

◇ De plus :

$$\arg(\underline{Z}_C) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \arg(\underline{Z}_L) = +\frac{\pi}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \cos \varphi_C = 0 \quad \text{et} \quad \cos \varphi_L = 0$$

En moyenne les condensateurs idéaux et les bobines idéales ne consomment pas de puissance.

◇ C'est normal : n'oublions qu'il s'agit, pour tous les deux, de réservoir énergétiques.

IV.3 – De trop nombreuses autres expressions

IV.3.i – avec les caractéristiques du dipôle

◇ Écrivons le facteur de qualité en fonction des caractéristiques du dipôle :

$$\cos \varphi = \frac{\Re(\underline{Z})}{Z} = \frac{\Re(\underline{Z})}{U_m/I_m} = I_m \frac{\Re(\underline{Z})}{U_m} \quad \rightsquigarrow \quad P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = \frac{I_m^2}{2} \Re(\underline{Z})$$

◇ De même, en travaillant avec l'admittance :

$$\cos \varphi = \frac{\Re(\underline{Y})}{Y} = \frac{\Re(\underline{Y})}{I_m/U_m} = U_m \frac{\Re(\underline{Y})}{I_m} \quad \rightsquigarrow \quad P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = \frac{U_m^2}{2} \Re(\underline{Y})$$

La puissance moyenne reçue par un dipôle peut s'écrire :

$$P = \frac{I_m^2}{2} \Re(\underline{Z}) \quad \text{ou} \quad P = \frac{U_m^2}{2} \Re(\underline{Y})$$

IV.3.ii – avec la valeur efficace

★ définition

La *valeur efficace* U_m d'un signal périodique $u(t)$ est la valeur moyenne quadratique de ce signal :

$$U_{\text{eff}}^2 = \langle u^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt$$

★ pour un signal sinusoïdal

◇ Prenons un signal quelconque : $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$:

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = U_m^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = U_m^2 \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{U_m^2}{2}$$

Pour un signal sinusoïdal d'amplitude U_m et de valeur moyenne nulle, la valeur efficace vaut :

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

- ◇ Le 230 V domestique est une valeur efficace : en fait, l'amplitude de la tension délivrée par u.é.m. vaut $230\sqrt{2} = 325$ V.

★ expression de la puissance reçue

La puissance moyenne reçue par un dipôle peut s'écrire :

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi \quad \text{ou} \quad P = I_{\text{eff}}^2 \Re(\underline{Z}) \quad \text{ou} \quad P = U_{\text{eff}}^2 \Re(\underline{Y})$$

IV.3.iii – avec les grandeurs complexes

- ◇ Considérons un dipôle en RSF en convention générateur et les représentations complexes de la tension à ses bornes et de l'intensité du courant qui le traverse.

$$\underline{u}(t) = U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{i}(t) = I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}$$

Le complexe conjugué d'une grandeur complexe \underline{X} se note \underline{X}^* .

- ◇ Calculons $\underline{u}(t) \underline{i}^*(t)$:

$$\underline{u}(t) \underline{i}^*(t) = U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} I_m e^{-j\varphi_i} e^{-j\omega t} = U_m I_m e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

- ◇ Et ainsi : $\Re(\underline{u}(t) \underline{i}^*(t)) = U_m I_m \cos \varphi$!

La puissance moyenne reçue par un dipôle peut s'écrire :

$$P = \frac{1}{2} \Re(\underline{u}(t) \underline{i}^*(t)) \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{2} \Re(\underline{u}^*(t) \underline{i}(t))$$

$$\text{ou} \quad P = \frac{1}{2} \Re(\underline{U}_m \underline{I}_m^*) \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{2} \Re(\underline{U}_m^* \underline{I}_m)$$

⊛ L'expression précédente n'est pas du tout la représentation complexe de la puissance car nous n'avons pas $\mathcal{P}(t) = \Re(\underline{u}(t) \underline{i}^*(t))$. Cette expression nous fournit une valeur moyenne à partir de grandeurs en notation complexe. Nuance.

IV.3.iv – puissance et bande passante

- ◇ Rappelons que la bande passante a été définie comme l'ensemble des fréquences où la sortie valait au moins la valeur maximale possible divisée par $\sqrt{2}$.
- ◇ Les valeurs de sortie intéressantes étaient en fait des tensions ou des intensités qui concernaient forcément **un** dipôle particulier (éventuellement résultant de l'association de plusieurs dipôle). Dans ces conditions, ce dipôle recevait en moyenne la puissance $P = \frac{U_m^2}{2} \cos \varphi$.

- ◇ Nous constatons que la puissance reçue est proportionnelle au carré de l'amplitude **réelle** de la tension. Ainsi la puissance reçue sera maximale lorsque l'amplitude sera maximale. Notons cette puissance $P_{\max} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{U_{m,\max}^2}{2} \cos \varphi$.
- ◇ À l'intérieur de la bande passante, l'amplitude de la tension valant au moins $\frac{U_{m,\max}}{\sqrt{2}}$, la puissance reçue vaudra au minimum :

$$\left(\frac{U_{m,\max}}{\sqrt{2}} \right)^2 \times \frac{1}{2} \cos \varphi = \frac{1}{2} \times \frac{U_{m,\max}^2}{2} \cos \varphi = \frac{1}{2} P_{\max}$$

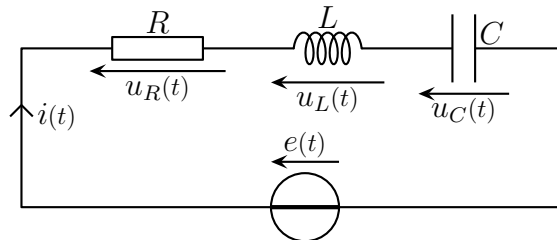
À l'intérieur de la bande passante, le dipôle étudié reçoit, en moyenne, au moins la moitié de la puissance maximale qu'il peut recevoir.

- ◇ Il est possible de définir des bandes passantes telles qu'à l'intérieur de ces bandes passantes, la puissance reçue soit au minimum de 80 % de la puissance maximale possible, mais conventionnellement, si rien n'est précisé, c'est ce facteur 50 % qui est choisi.

IV.4 – Cas du R, L, C série

IV.4.i – une association de consommateurs ?

- ◇ Considérons le circuit ci-dessous étudié dans la partie II.



- ◇ Autant ne pas calculer pour chaque dipôle la tension entre leurs bornes mais plutôt utiliser la grandeur commune $\underline{i}(t)$ et l'expression de la puissance reçue en fonction de l'admittance :

$$P_R = \frac{I_m^2}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}_R) = R \frac{I_m^2}{2} \quad P_C = \frac{I_m^2}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}_C) = 0 \quad P_L = \frac{I_m^2}{2} \operatorname{Re}(\underline{Z}_L) = 0$$

- ◇ Le bilan énergétique moyen s'écrit donc : $P_g = P_R > 0$ où P_g est la puissance moyenne fournie par le générateur.

IV.4.ii – expression de la puissance consommée

- ◇ Comme nous ne connaissons pas l'impédance d'un générateur, nous ne pouvons pas calculer la puissance qu'il fournit avec une expression du type $\frac{I_m^2}{2} \operatorname{Re}(\underline{Y}_R)$. En revanche, nous pourrions le faire avec $P_g = \frac{E_m I_m}{2} \cos \varphi_g$ où φ_g est le déphasage entre $e(t)$ et $-i(t)$ (pour que le générateur soit en convention récepteur).
- ◇ Cherchons plutôt P_R !

◇ Retrouvons rapidement $\underline{I_m}$ avec la loi de POUILLET :

$$\underline{I_m} = \frac{E_m}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} E_m$$

◇ Or $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ et $RC = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{LC}}{Q} = \frac{1}{Q\omega_0}$:

$$\underline{I_m} = \frac{j \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} \times \frac{E_m}{R} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{jx}{Q(1-x^2) + jx} I_0$$

◇ Et ainsi $P_R = R \frac{I_m^2}{2} = \frac{R}{2} |\underline{I_m}|^2 = \frac{R}{2} \left| \frac{jx}{Q(1-x^2) + jx} I_0 \right|^2 = \frac{I_0^2}{2R} \times \frac{x^2}{Q^2(1-x^2)^2 + x^2}$ d'où :

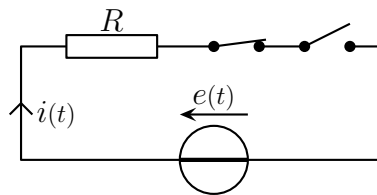
$$P(x) = \frac{x^2}{Q^2(1-x^2)^2 + x^2} \times P_0$$

IV.4.iii – représentation de $P(x)$

★ comportement asymptotique

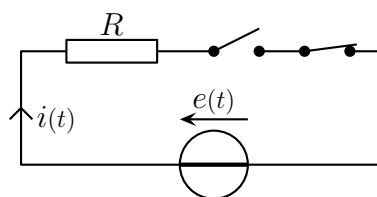
◇ Techniquement lorsque $x \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$ et $P(x) \sim x^2 P_0 \rightarrow 0$.

◇ Physique le circuit se comporte comme ci-dessous et nous avons $P(x) \rightarrow 0$ car $i \rightarrow 0$.



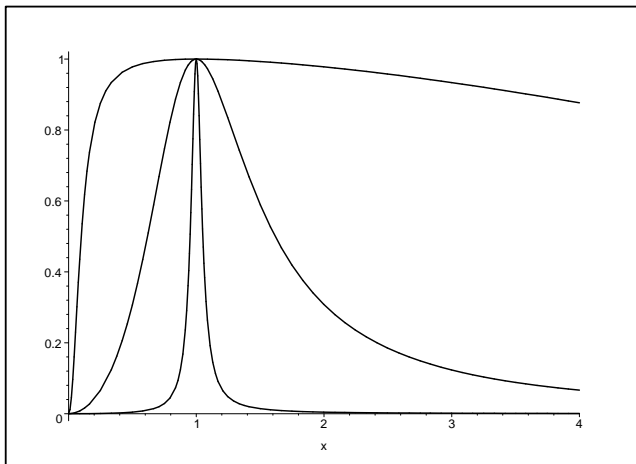
◇ Techniquement lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\omega \rightarrow +\infty$ et $P(x) \sim \frac{x^2 P_0}{x^4} \sim \frac{P_0}{x^2} \rightarrow 0$.

◇ Physique le circuit se comporte comme ci-dessous et nous avons $P(x) \rightarrow 0$ car $i \rightarrow 0$.

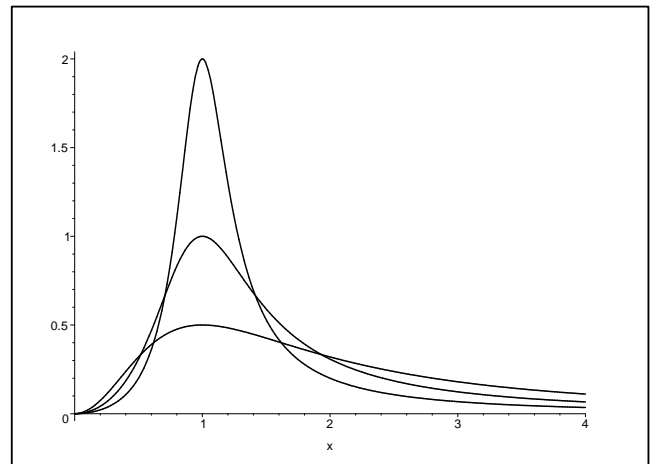


★ tracés

Graphique 7



Graphique 8



- ◇ Sur le graphique 7 nous avons représenté $P(x)$ à P_0 fixé pour différentes valeurs de Q : $Q = 0,1$; $Q = 1$; $Q = 10$. La courbe la plus pointue est celle correspondant à $Q = 10$.
- ◇ En pratique, il est assez difficile de faire varier Q sans faire varier ni $P_0 = \frac{E_m^2}{2R}$ ni ω_0 car cela impose de modifier à la fois R et E_m .
- ◇ C'est pourquoi sur le graphique 8 nous avons représenté $P(x)$ pour différentes valeurs de R telles que $Q = 0,5$; $Q = 1$ et $Q = 2$. Nous pouvons alors constater que la valeur maximale de la puissance consommée par le circuit est d'autant plus élevée que le facteur de qualité est faible ce qui est normal étant donné le comportement du circuit à la résonance.

★ bande passante

- ◇ Puisque $P = R \frac{I_m^2}{2}$, la bande-passante pour la puissance n'est autre que la bande-passante pour I_m intensité traversant le circuit R, L, C série.
- ◇ En effet, en terme de puissance, la bande-passante est telle que $P(x_c) = \frac{P_{\max}}{2}$ ce qui correspond bien à $I_m(x_c) = \frac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}}$.
- ◇ Rappelons les résultats :
 - il y a toujours résonance en ω_0
 - la bande-passante est telle que $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$

IV.5 – Relèvement d'un facteur de puissance

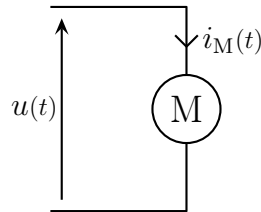
IV.5.i – problème – analyse

★ problème

- ◇ Considérons un moteur électrique consommant $P = 10$ kW de puissance active sous une tension efficace $U_{\text{eff}} = 220$ V et qui possède un facteur de puissance $\cos \varphi = 0,70$.
- ◇ Nous voulons savoir quel condensateur mettre en parallèle de ce moteur pour que l'ensemble ait un facteur de qualité $\cos \varphi' = 1$.
- ◇ Quel peut-être l'intérêt d'un tel dispositif?

★ analyse

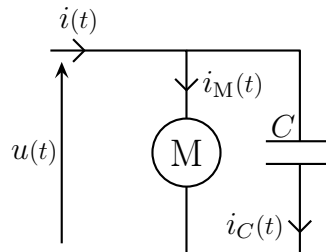
◇ Schématisons tout d'abord ce qu'il se passe avec le moteur « seul » et avec le condensateur.



Les moteurs électriques étant constitués de bobines, ils ont un effet inductif.

◇ Dans ces conditions le courant $i_M(t)$ traversant le moteur est en retard par rapport à la tension à ses bornes (effet inductif). Ce retard de phase, caractéristique du moteur n'est autre que le φ du $\cos \varphi$. Connaître $\cos \varphi$ c'est connaître beaucoup de chose sur \underline{Z}_M .

◇ Une fois le condensateur branché, la situation est la suivante.



◇ Étant donné que le moteur et le condensateur sont en parallèle, $i_M(t)$ est rigoureusement le même dans les deux cas puisque $\underline{I}_{M,m} = \frac{U_m}{\underline{Z}_M}$.

◇ Il faudra faire en sorte que $i(t)$ et $u(t)$ soient en phase pour avoir $\cos \varphi' = 1$.

◇ Analyse physique :

- petit circuit à deux dipôles et un générateurs, tous en parallèle
- circuit en RSF
- grandeurs pertinentes : C , P et $\cos \varphi$ en tant que caractéristiques de composants, U_{eff} et ω en tant que contrainte

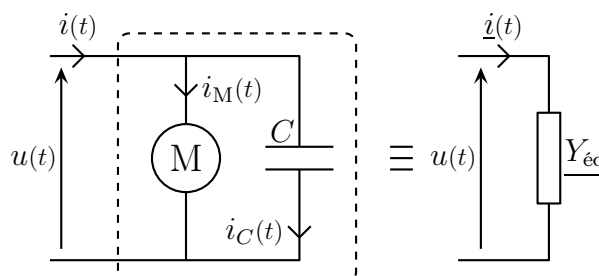
◇ Analyse technique :

- approche nodale donc en terme de courant et d'admittance
- soit notation complexe soit FRESNEL puisque tout est en parallèle

IV.5.ii – solution « complexe »

★ condition de mise en phase

◇ Reschématisons le circuit avec condensateur en complexe.



- ◇ Pour ce dipôle équivalent, le facteur de qualité sera tel que $\cos \varphi' = 1$ lorsque la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ seront en phase, *ie.* dès lors que $\underline{Y}_{\text{éq}}$ sera réel.
- ◇ Notons $\underline{Y}_M = G + jB$ l'admittance (provisoirement inconnue) du moteur. L'admittance équivalente est alors telle que :

$$\underline{Y}_{\text{éq}} = \underline{Y}_M + \underline{Y}_C = G + jB + jC\omega = G + j(B + C\omega)$$

- ◇ La condition de mise en phase est donc $C\omega = -B$. Reste à déterminer B .
- ◇ Nous savons que $\underline{Y}_M = Y_M e^{-j\varphi}$ où φ est le même que dans le facteur de puissance. Il ne reste plus qu'à calculer Y_M .

$$Y_M = \frac{I_{\text{eff}}}{U_{\text{eff}}} \quad \text{et} \quad P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi \quad \rightsquigarrow \quad Y_M = \frac{P}{U_{\text{eff}}^2 \cos \varphi}$$

- ◇ Nous avons alors :

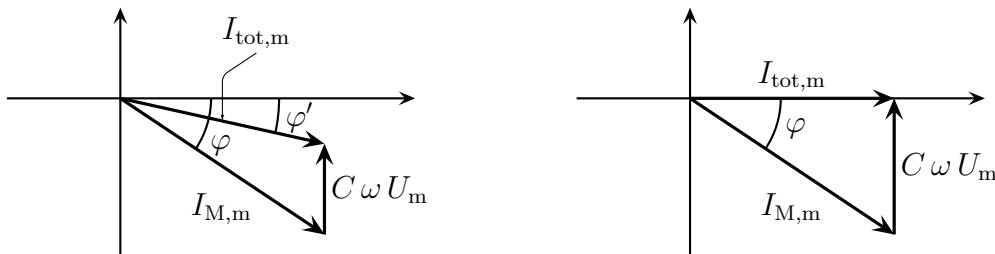
$$B = \text{Im}(\underline{Y}_M) = -Y_M \sin \varphi = -\frac{P}{U_{\text{eff}}^2 \cos \varphi} \sin \varphi = -\frac{P}{U_{\text{eff}}^2 \cos \varphi} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

- ◇ Finalement :

$$C\omega = -B \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{C = \frac{P}{\omega U_{\text{eff}}^2 \cos \varphi} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}$$

IV.5.iii – version Fresnel

- ◇ Faisons une construction en intensité du montage { moteur + condensateur } sans oublier l'effet inductif du moteur, *ie.* sans oublier que l'intensité est en retard par rapport à la tension. L'origine des phases est prise sur la grandeur commune aux deux dipôles, *ie.* sur $u(t)$.



- ◇ La construction est telle qu'à la fin $I_{\text{tot},m}$ soit en phase avec $u(t)$.
- ◇ Géométriquement, nous voyons alors qu'il faut $C\omega U_m = I_{M,m} \sin \varphi$ ou $C\omega U_{\text{eff}} = I_{M,\text{eff}} \sin \varphi$ ou
- ◇ De cette relation, il ne manque que $I_{M,\text{eff}}$ que nous pouvons déterminer comme précédemment :

$$C = \frac{1}{\omega U_{\text{eff}}} \left(\frac{P}{U_{\text{eff}} \cos \varphi} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{C = \frac{P}{\omega U_{\text{eff}}^2 \cos \varphi} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}$$

- ◇ Le résultat est identique, évidemment.

IV.5.iv – intérêt

- ◇ Pour que le courant électrique arrive quelque part, il faut l'acheminer par des lignes électriques (normal!). Mais à ce moment là, l'effet JOULE agit et la puissance perdue lors du transport de l'énergie électrique est proportionnelle à $I_{\text{tot},\text{eff}}^2$.
- ◇ Avant le rajout du condensateur :

$$I_{\text{avant}} = \frac{P}{U_{\text{eff}} \cos \varphi}$$

◇ Après le rajout du condensateur, la puissance totale consommée vaut $P' = P + P_C = P$ car un condensateur ne consomme pas de puissance en moyenne. Nous avons ainsi :

$$I_{\text{après}} = \frac{P}{U_{\text{eff}} \cos \varphi'} = \frac{P}{U_{\text{eff}}} < I_{\text{avant}}$$

◇ La diminution relative des pertes vaut :

$$\eta = \frac{I_{\text{avant}}^2 - I_{\text{après}}^2}{I_{\text{avant}}^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1}{\frac{1}{\cos^2 \varphi}} = 1 - \cos^2 \varphi = 0,51$$

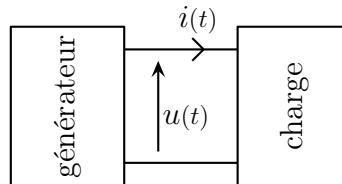
◇ Ici il y a donc deux fois moins d'énergie perdue par effet JOULE avec le condensateur.

◇ L'effet bobine du moteur est tel que le moteur renvoie un peu d'énergie au réseau électrique. C'est cette énergie voyageuse inutile qui crée un surplus d'effet JOULE. Avec le bon condensateur, cette énergie renvoyée ne retourne pas d'où elle vient mais s'accumule provisoirement dans le condensateur.

IV.6 – Adaptation d'impédance

IV.6.i – du déjà vu

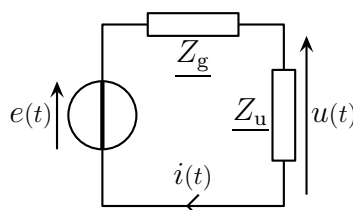
◇ Considérons un montage vu sous sa forme générale : une partie fournisseuse d'énergie et une partie consommatrice d'énergie.



Il y a *adaptation d'impédance* lorsque la puissance transférée entre le générateur et la partie utile d'un circuit est maximale.

IV.6.ii – condition d'adaptation

◇ Considérons le cas général simple où le circuit peut être modélisé par le circuit suivant :



◇ La puissance reçue par \underline{Z}_u s'écrit :

$$P = \frac{1}{2} \Re(\underline{U}_m \underline{I}_m^*) \quad \text{avec} \quad \underline{U}_m = \frac{\underline{Z}_u}{\underline{Z}_u + \underline{Z}_g} E \quad \text{et} \quad \underline{I}_m = \frac{1}{\underline{Z}_u + \underline{Z}_g} E$$

◇ Cela donne donc :

$$P = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\underline{Z}_u}{\underline{Z}_u + \underline{Z}_g} E \times \frac{1}{\underline{Z}_u^* + \underline{Z}_g^*} E \right) = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\underline{Z}_u}{|\underline{Z}_u + \underline{Z}_g|^2} E^2 \right) = \frac{E^2}{2} \Re \left(\frac{\underline{Z}_u}{|\underline{Z}_u + \underline{Z}_g|^2} \right)$$

◇ Notons $\underline{Z}_u = R_u + j X_u$ et $\underline{Z}_g = R_g + j X_g$ cela donne :

$$P = \frac{E^2}{2} \times \Re \left(\frac{R_u + j X_u}{(R_u + R_g)^2 + (X_u + X_g)^2} \right) = \frac{E^2}{2} \times \frac{R_u}{(R_u + R_g)^2 + (X_u + X_g)^2}$$

◇ Il faut maintenant trouver les conditions sur X_u et R_u pour que cela soit maximal.

◇ Tout d'abord nous pouvons constater que quel que soit R_u , la puissance est maximale pour $X_u = -X_g$.

◇ Il reste maintenant $P = \frac{E^2}{2} \times \frac{R_u}{(R_u + R_g)^2}$.

◇ Calculons la dérivée :

$$\frac{dP}{dR_u} = \frac{(R_u + R_g)^2 - R_u \cdot 2(R_u + R_g)}{(R_u + R_g)^4} = \frac{R_g - R_u}{(R_u + R_g)^3}$$

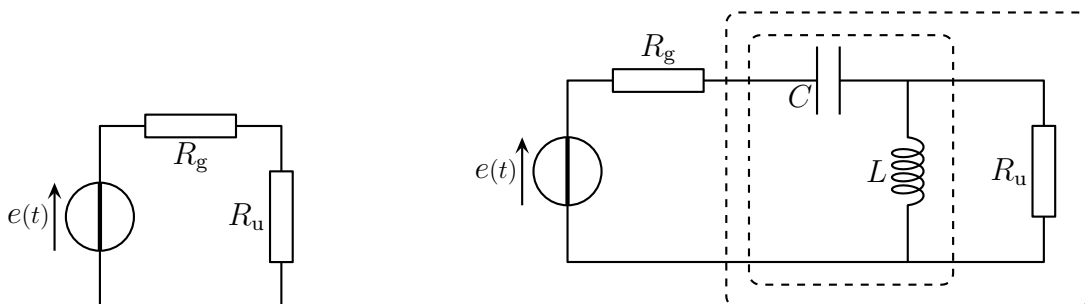
◇ La condition recherchée est donc R_g et R_u .

Il y a adaptation d'impédance pour $\underline{Z}_u = \underline{Z}_g^*$.

IV.6.iii – idoinoton

★ problème – analyse

◇ Considérons le circuit suivant pour lequel il n'y a pas d'adaptation d'impédance et introduisons entre le générateur et la charge un quadripôle permettant de réaliser l'impédance.



◇ Cherchons les valeurs de L et C permettant de réaliser l'adaptation.

◇ Analyse physique :

→ circuit en RSF

→ les résultats vont dépendre de R_u , R_g et ω .

◇ Analyse technique :

- notation complexe
- il va être plus pratique de considérer le quadripôle dans la partie utile que dans la partie générateur

★ **condition d'adaptation**

◇ Déterminons tout d'abord l'expression de l'impédance de la nouvelle charge :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = (R // \underline{Z}_L) \oplus \underline{Z}_C = \frac{j R_u L \omega}{R_u + j L \omega} + \frac{1}{j C \omega}$$

◇ La condition d'adaptation impose $\underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_g^* = R_g$. Or :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{j R_u L \omega (R_u - j L \omega)}{R_u^2 + L^2 \omega^2} - j \frac{1}{C \omega} = \frac{R_u L^2 \omega^2}{R_u^2 + L^2 \omega^2} + j \left(\frac{R_u^2 L \omega}{R_u^2 + L^2 \omega^2} - \frac{1}{C \omega} \right)$$

◇ Par identification avec les parties réelle et imaginaire de $\underline{Z}_g = R_g$ nous arrivons à :

$$\frac{R_u L^2 \omega^2}{R_u^2 + L^2 \omega^2} = R_g \quad \text{et} \quad \frac{R_u^2 L \omega}{R_u^2 + L^2 \omega^2} = \frac{1}{C \omega}$$

◇ La première condition ne contient que du L , nous pouvons donc en déduire :

$$R_u L^2 \omega^2 = R_g R_u^2 + R_g L^2 \omega^2 \quad \rightsquigarrow \quad L^2 \omega^2 = \frac{R_g R_u^2}{R_u - R_g} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{L = \frac{R_u}{\omega} \sqrt{\frac{R_g}{R_u - R_g}}}$$

◇ Ensuite en divisant les deux conditions afin d'éliminer les dénominateurs en $R_u^2 + L^2 \omega^2$:

$$\frac{L}{R_u C} = R_g \quad \rightsquigarrow \quad C = \frac{L}{R_u R_g} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{C = \frac{1}{\omega R_g} \sqrt{\frac{R_g}{R_u - R_g}}}$$

◇ Nous pouvons constater que ce mode d'adaptation n'est possible que si $R_u > R_g$.

Régimes sinusoïdaux forcés

Au niveau du cours

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - amplitude, amplitude complexe, phase, pulsation, phase à l'origine
 - impédance, résistance, réactance, admittance
 - bande passante
 - puissance active, facteur de puissance
 - adaptation d'impédance

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître la dimension d'une impédance, d'une admittance, d'un facteur de puissance.

★ Les lois

- ◇ Sont à connaître :
 - les impédances des dipôles usuels
 - les associations de dipôles en série et en parallèle
 - les lois électrocinétique en régime sinusoïdal forcé
 - la représentation de FRESNEL des dipôles usuels ainsi que la construction de FRESNEL
 - les expressions de la puissance moyenne consommée par un dipôle
 - la condition d'adaptation d'impédance

★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
 - le comportement en hautes et basses fréquence des dipôles usuels
 - la résonance en tension aux bornes d'un R,L,C série
 - la résonance en intensité dans un R,L,C série
 - l'interprétation graphique et énergétique du facteur de puissance
 - le comportement qualitatif d'un moteur électrique du point de vue électrocinétique

★ les exemples fondamentaux

- ◇ Connaître le R,L,C série.

Au niveau de l'analyse

★ Analyse physique

- ◇ Il faut :
 - savoir repérer *a priori* de quelles grandeurs vont dépendre le résultat recherché
 - savoir déterminer le comportement asymptotique de circuits

★ Analyse technique

- ◇ Il faut savoir :
 - savoir choisir entre l'approche maillère et l'approche nodale en fonction des grandeurs recherchées et du nombre d'inconnues que cela engendre
 - savoir traduire les conditions de mise en phase de deux grandeurs
 - savoir choisir entre l'approche par la notation complexe et l'approche par construction de FRESNEL

Au niveau des savoir-faire**★ outils mathématiques**

- ◇ Connaître parfaitement :
 - la manipulation de nombres complexe
 - le calcul du module d'un nombre complexe
 - l'expression de l'argument d'un nombre complexe avec la fonction arctan

★ petits gestes

- ◇ Il faut :
 - savoir déterminer le comportement asymptotique de fonctions à valeurs complexe et en déduire leurs éventuelles valeurs limites.
 - savoir déterminer une bande passante

★ exercices classiques

- ◇ Savoir refaire :
 - le relèvement d'un facteur de puissance d'un moteur électrique jusqu'à $\cos \varphi' = 1$.

Table des matières

I	La notation complexe en électrocinétique	1
I.1	En électrocinétique, c'est comme en mécanique	1
I.1.i	rappels	1
I.1.ii	quelques nouvelles définitions	1
I.2	Décrire le comportement des dipôles en RSF	2
I.2.i	notion d'impédance	2
	définition	2
	avec les amplitudes complexes	2
	avec les amplitudes réelles	3
I.2.ii	impédance du résistor	3
I.2.iii	condensateur idéal	3
	impédance	3
	méthode rapide pour retrouver l'impédance	4
I.2.iv	bobine idéale	4
I.2.v	cas général	5
	impédance	5
	admittance	5
I.2.vi	comportement phénoménologique des dipôles	5
	hautes et basses fréquences	6
I.3	Étudier un circuit en régime sinusoïdal forcé	6
I.3.i	les lois	6
	additivité des tensions	6
	loi des nœuds	7
I.3.ii	association de dipôles	7
	loi d'association	7
	en parallèle	8
I.3.iii	dorénavant	9
I.4	Idoinotons	10
I.4.i	l'idoïnoton 3 en 1	10
	montage	10
	relation de fonctionnement	10
	1 ^{er} cas	10
	2 ^e cas	10
	3 ^e cas	11
I.4.ii	association R,C en série	11
I.4.iii	association R,L en parallèle	12
I.4.iv	circuit R,L,C	12
	circuit	12
	résolution normale	13
	autre méthode	13
	réponses	14
	représentation graphique	14
II	Circuit R,L,C série en régime sinusoïdal forcé	15
II.1	Dispositif	15
II.2	Amplitudes complexes	15
II.2.i	pour l'intensité	15
II.2.ii	pour la tension aux bornes du condensateur	16

II·2·iii	écriture canonique	16
	pour l'intensité	16
	pour la tension	16
II·2·iv	analogie mécanique	16
II·3	Courbe de résonance en tension	17
II·3·i	rappel	17
	tracés	17
II·3·ii	bande passante	17
II·4	Courbe de résonance en intensité	19
II·4·i	rappel?	19
	les tracés	19
	interprétation de la résonance	19
II·4·ii	bande passante	20
	première méthode	20
	deuxième méthode	20
III La construction de FRESNEL		21
III·1	Une autre représentation des grandeurs sinusoïdales	21
III·1·i	présentation	21
III·1·ii	quand l'utiliser?	21
III·2	Représentation de dipôles usuels	22
III·2·i	le résistor	22
III·2·ii	la bobine idéale	22
III·2·iii	le condensateur idéal	22
III·2·iv	retrouver le comportement en construction de FRESNEL	23
III·2·v	dipôle quelconque	23
	caractère inductif	23
	caractère capacitif	24
III·3	Association de dipôles	24
III·3·i	association série	24
III·3·ii	association parallèle	25
III·3·iii	idoinoton	26
	d'abord l'association R, C	26
	... ensuite on cherche U_m	27
	... et enfin φ	27
IV Aspect énergétique		28
IV·1	Puissance moyenne consommée par un dipôle	28
IV·1·i	en terme de puissance moyenne	28
	analyse du problème	28
	représentation graphique	29
IV·1·ii	et surtout pas complexe	29
IV·1·iii	expression simple – facteur de puissance	30
	interprétation	30
IV·2	Le $\cos \varphi$ est caractéristique du dipôle	31
IV·2·i	le voir dans l'impédance	31
IV·2·ii	le voir dans l'admittance	31
IV·2·iii	dipôles usuels	31
IV·3	De trop nombreuses autres expressions	32
IV·3·i	avec les caractéristiques du dipôle	32

IV.3.ii	avec la valeur efficace	32
	définition	32
	pour un signal sinusoïdal	32
	expression de la puissance reçue	33
IV.3.iii	avec les grandeurs complexes	33
IV.3.iv	puissance et bande passante	33
IV.4	Cas du R, L, C série	34
IV.4.i	une association de consommateurs?	34
IV.4.ii	expression de la puissance consommée	34
IV.4.iii	représentation de $P(x)$	35
	comportement asymptotique	35
	tracés	36
	bande passante	36
IV.5	Relèvement d'un facteur de puissance	36
IV.5.i	problème – analyse	36
	problème	36
	analyse	37
IV.5.ii	solution « complexe »	37
	condition de mise en phase	37
IV.5.iii	version Fresnel	38
IV.5.iv	intérêt	38
IV.6	Adaptation d'impédance	39
IV.6.i	du déjà vu	39
IV.6.ii	condition d'adaptation	39
IV.6.iii	idoinoton	40
	problème – analyse	40
	condition d'adaptation	41
	Analyse physique	42