# Circuits en régime transitoire

## I – Phénoménologie

DÉF — Le régime est dit *transitoire* lorsqu'il est ni périodique ni continu.

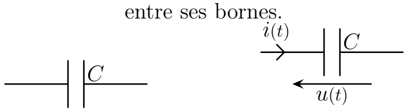
DÉF — Le régime est dit *permanent* lorsque le régime transitoire est terminé.

LOI — Une évolution est soit en régime transitoire, soit en régime permanent.

DÉF — Un dispositif est dit en *régime libre* lorsqu'aucune source ne lui apporte de l'énergie. Il est dit en *régime forcé* sinon.

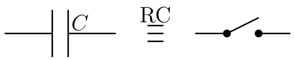
LOI — Un dispositif est soit en régime libre, soit en régime forcé.

DÉF — Le *condensateur idéal* se représente de la façon ci-dessous et est tel qu'il y a proportionnalité entre l'intensité qui le traverse et la dérivée temporelle de la tension entre ses bornes.




Un condensateur est caractérisé uniquement par sa conductance $C > 0$ en farad (F).
Dans la convention représentée ci-dessus, la relation constitutive s'écrit $i(t) = +C\,\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$.

LOI — En régime continu, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.




LOI — La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction mathématiquement continue du temps.

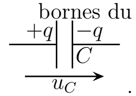




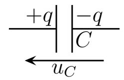
DÉF — Un *condensateur* est constitué de deux plaques, appelées armatures, qui peuvent accumuler des charges.

LOI — Un condensateur est toujours globalement neutre, ce qui permet d'écrire les charges sur les armatures $+q$ et $-q$.

LOI — Il y a proportionnalité entre la charge portée par chaque armature et la tension entre les bornes du condensateur.




: ici $q(t) = +C\,u(t)$



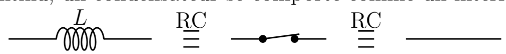

: ici $q(t) = -C\,u(t)$

DÉF — Quand un condensateur est dit *déchargé*, les charges portées par chacune de ses armature sont nulles et, donc, la tension entre ses bornes aussi.

DÉF — Une *bobine idéale* se représente de la façon ci-dessous et est telle qu'il y a proportionnalité entre la tension à ses bornes et la dérivée temporelle de l'intensité qui la traverse.


Une bobine idéale est caractérisée uniquement par son inductance $L > 0$ en henry (H).
Dans la convention représentée ci-dessus, la relation constitutive s'écrit $u(t) = +L\,\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$.

LOI — En régime continu, un condensateur se comporte comme un interrupteur fermé.




LOI — L'intensité du courant qui traverse une bobine est une fonction mathématiquement continue du temps.

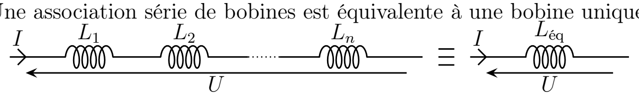
LOI — La tension en terme de courant s'écrit pour un condensateur :

$$u(t) = u(0) \pm \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t')\mathrm{d}t'$$

**Loi** Le courant en terme de potentiel traversant une bobine s'écrit :

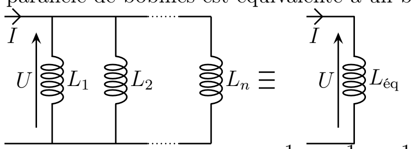
$$i(t) = i(0) \pm \frac{1}{L}\int_0^t u_L(t')\mathrm{d}t'$$

**Loi** Une association série de bobines est équivalente à une bobine unique.



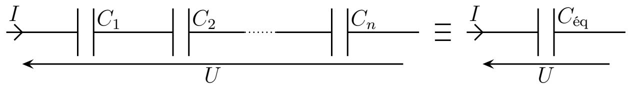

L'inductance de la bobine équivalente vaut $L_{\text{éq}} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$.

**Loi** Une association parallèle de bobines est équivalente à un bobine unique.



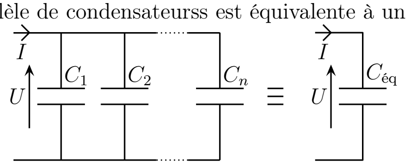

L'inductance de la bobine équivalente vaut $\dfrac{1}{L_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2} + \cdots + \dfrac{1}{L_n}$.

**Loi** Une association série de condensateurs est équivalente à un condensateur unique.




La conductance du condensateur équivalent vaut $\dfrac{1}{C_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \cdots + \dfrac{1}{C_n}$.

**Loi** Une association parallèle de condensateurss est équivalente à un condensateur unique.




La conductance du condensateur équivalent vaut $C_{\text{éq}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$.

# II – Évolution du premier ordre

**Déf** La constante $\tau$ a la même dimension qu'un temps : elle est appelée *constante de temps*.





**Loi** La constante $\tau$ représente l'échelle de temps sur laquelle va se faire l'évolution.

**Loi** Pour l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}\,\alpha(t) = \text{qqch}(t)$, **toutes** les solutions possibles s'écrivent :

$$\alpha(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \alpha_{\mathrm{p}}(t)$$

où $\lambda$ est une constante à déterminer et $\alpha_{\mathrm{p}}(t)$ une solution ***p**articulière*.

**Loi** La solution particulière $\alpha_{\mathrm{p}}(t)$ n'est autre que la solution en régime ***p**ermanent*.

**Loi** Pour trouver la solution **p**articulière, il est recommandé de la chercher avec la même force que celle du membre de droite.

| qqch$(t)$ | $\alpha_{\mathrm{p}}(t)$ |
|---|---|
| $\mathrm{C^{te}}$ | $\mathrm{C^{te\,\prime}}$ |
| $A\,\cos(2\,\pi\,f\,t)$ | $B\,\cos(2\,\pi\,f\,t) + C\,\sin(2\,\pi\,f\,t)$ |
| $A\,\mathrm{e}^{-t/\tau'}$ | $A'\,\mathrm{e}^{-t/\tau'}$ |
| $A + B\,t + C\,t^2 + \ldots$ | $A' + B'\,t + C'\,t^2 + \ldots$ |

**Loi** Pour trouver la solution en régime **p**ermanent, il faut étudier le circuit équivalent en régime permanent.

**Loi** Les constante d'intégration se déterminent à partir des conditions aux limites. Il doit y avoir autant de condition aux limites que de constantes d'intégration.

**Déf** Quand les équations différentielles sont des équations différentielles temporelles, les conditions aux limites sont appelées *conditions initiales* lorsqu'elles correspondent à une condition à respecter à l'instant initial.

**Loi** La constante de temps d'un circuit $R$,$L$ est $\tau = \dfrac{L}{R}$.

LOI Ce seront les continuités mathématiques des intensités des courants traversant les bobines et des tensions aux bornes des condensaeurs qui permettront de trouver les conditions initiales.

---

LOI Au bout d'une durée de $5\,\tau$, le régime permanent est atteint à mieux que 1 % près.

---

LOI A bout d'une durée de $3\,\tau$, le régime permanent est atteint à 5 % près.

---

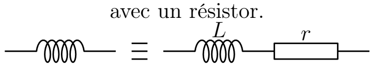
LOI L'intersection de la tangente en un point quelconque d'une évolution exponentielle se fait exactement $\tau$ plus tard que le point. C'est la méthode de la tangente n'importe où.

---

LOI La constante de temps d'un circuit $R$,$C$ est $\tau = R\,C$.

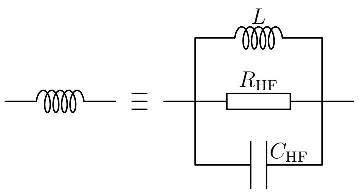
---

LOI En basses fréquences, une bobine réelle se comporte comme une bobine idéale en série avec un résistor.



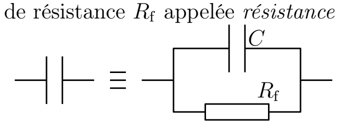

---

LOI En hautes fréquences, une bobine réelle se comporte comme une bobine idéale en parallèle avec un résistor et un condensateur.




---

LOI Un condensateur réel se comporte comme un condensateur idéal en parallèle avec un résistor de résistance $R_{\mathrm{f}}$ appelée *résistance de fuite*.




# III – Évolution du second ordre

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .





DÉF La constante $\omega_0$ est appelée la *pulsation propre* et s'exprime en rad.s$^{-1}$.

---

LOI Toutes les solutions de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2\,\alpha(t) = \text{qqch}(t)$ peuvent s'écrire sous une des deux formes équivalentes suivantes :

➜ $\alpha(t) = A\,\cos(\omega_0\,t) + B\,\sin(\omega_0\,t) + \alpha_{\mathrm{p}}(t)$

➜ $\alpha(t) = \lambda\,\cos(\omega_0\,t + \varphi) + \alpha_{\mathrm{p}}(t)$

où $A$, $B$, $\lambda$ et $\varphi$ dont des constantes d'intégration.

---

LOI La pulsation d'un signal périodique vaut, par définition, $\omega = 2\,\pi\,f$ où $f$ est sa fréquence. Ainsi $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T}$ avec $T$ la période du signal.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

DÉF La constante $Q$ est un nombre sans dimension et s'appelle le *facteur de qualité*. Il caractérise le type d'évolution du dispositif.

---

LOI Pour trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\,\dfrac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,\alpha(t) = \text{qqch}(t)$, il faut d'abord calculer le discriminant $\Delta$ de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}\,r + {\omega_0}^2 = 0$$

qui vaut $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\,{\omega_0}^2$.

---

LOI Pour un circuit $R$,$L$,$C$ série, la pulsation propre vaut $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L\,C}}$ et le facteur de qualité vaut $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

---

LOI Lorsque le discriminant $\Delta$ de l'équation caractéristique est strictement positif, il existe deux solutions distinctes $r_1$ et $r_2$. Les solutions de l'équation différentielles s'écrivent alors :

$$\alpha(t) = A\,\mathrm{e}^{r_1\,t} + B\,\mathrm{e}^{r_2\,t} + \alpha_{\mathrm{p}}(t)$$

où $A$ et $B$ sont des constantes d'intégration.

---

LOI Le discriminant $\Delta$ de l'équation caractéristique est strictement positif si et seulement si le facteur de qualité est strictement inférieur à $\dfrac{1}{2}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

DÉF Lorsque le facteur de qualité est inférieur à $\dfrac{1}{2}$, le régime est dit *apériodique*.

LOI Lorsque $|\text{qqch}| \ll 1$, nous avons $\sqrt{1+\text{qqch}} = 1 + \dfrac{1}{2}\,\text{qqch}$.

LOI Pour un régime apériodique tel que $Q \ll 1$ le régime permanent est atteint au bout de la durée $\dfrac{T_0}{Q}$ où $T_0$ est la période propre.

LOI Lorsque le discriminant $\Delta$ de l'équation caractéristique est strictement négatif, il existe deux solutions complexes conjuguées. En les notant sous la forme $r_c = -\dfrac{1}{\tau} \pm \mathrm{j}\,\omega_p$, les solutions de l'équation différentielles s'écrivent :

$$\alpha(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}\left(A\,\cos(\omega_p\,t) + B\,\sin(\omega_p\,t)\right) + \alpha_p(t)$$

où $A$ et $B$ sont des constantes d'intégration.

LOI Le discriminant $\Delta$ de l'équation caractéristique est strictement négatif si et seulement si le facteur de qualité est strictement supérieur à $\dfrac{1}{2}$.

DÉF Lorsque le facteur de qualité est supérieur à $\dfrac{1}{2}$, le régime est dit *pseudopériodique*.

DÉF La grandeur $T = \dfrac{2\,\pi}{\omega_p}$ est appelée la *pseudo-période*.

DÉF Le *décrément logarithmique* noté $\delta$ caractéristique la diminution de l'amplitude des pseudo-oscillations pendant la durée d'une pseudo-oscillation.
Si $\alpha(t)$ est la grandeur pseudo-oscillante, il se calcule de la manière suivante avec $n$ un entier quelconque :

$$\delta = \frac{1}{n}\,\ln\left(\frac{x(t_0)}{x(t_0+n\,T)}\right)$$

LOI Quand le facteur de qualité est très grand devant 1, la pseudo-pulsation se confond avec la pulsation propre.





LOI Pour un régime pseudopériodique tel que $Q \gg 1$ le régime permanent est atteint au bout de la durée $2\,Q\,T_0$ où $T_0$ est la période propre.

LOI Lorsque le discriminant $\Delta$ de l'équation caractéristique est nul, il existe une racine double $r_0$ de l'équation caractéristique. Les solutions de l'équation différentielles s'écrivent :

$$\alpha(t) = \mathrm{e}^{r_0\,t}\,(A + B\,t) + \alpha_p(t)$$

où $A$ et $B$ sont des constantes d'intégration.

LOI Le discriminant $\Delta$ de l'équation caractéristique est nul si et seulement si le facteur de qualité vaut $\dfrac{1}{2}$.

DÉF Lorsque le facteur de qualité est égal à $\dfrac{1}{2}$, le régime est dit *critique*.

LOI Le régime critique est le régime qui atteint le plus vite son asymptote sans osciller.

LOI La pulsation propre du circuit $R,L,C$ parallèle est $\dfrac{1}{\sqrt{L\,C}}$.
Son facteur de qualité est inverse de celui du circuit $R,L,C$ série : $Q_{/\!/} = R\,\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

# IV – Aspect énergétique

LOI Un condensateur est un réservoir d'énergie dont le niveau est repéré par $u^2(t)$.
L'énergie contenue dans un condensateur à un instant $t$ s'écrit $\mathscr{E}_c(t) = \dfrac{1}{2}\,C\,u^2(t)$.

LOI En terme de charges, l'énergie contenue à l'instant $t$ dans un condensateur s'écrit $\mathscr{E}_c(t) = \dfrac{q^2(t)}{2\,C}$.

LOI Une bobine est un réservoir d'énergie dont le niveau est repéré par $i^2(t)$ où $i(t)$ est l'intensité du courant qui la traverse.
L'énergie contenue dans une bobine à un instant $t$ s'écrit $\mathscr{E}_c(t) = \dfrac{1}{2}\,L\,i^2(t)$.

Loi

Pour qu'il y ait oscillations, il faut qu'il y ait un échange énergétique entre deux formes différentes.