Régimes sinusoïdaux forcés

I – La notation complexe en électrocinétique

LOI

La grandeur réelle $i(t) = I_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi)$ est représentée par la grandeur complexe $\underline{i}(t) = I_\mathrm{m}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = \underline{I_\mathrm{m}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega t}$ où :

- ➜ $I_\mathrm{m} = |\underline{I_\mathrm{m}}| = |\underline{i}(t)|$ est *l'amplitude réelle* ;
- ➜ $\underline{I_\mathrm{m}} = I_\mathrm{m}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}$ est *l'amplitude complexe* ;
- ➜ $\omega t + \varphi$ est la *phase instantanée* ;
- ➜ φ est la *phase à l'origine* des dates.

DÉF

Lorsque deux grandeurs s'écrivent $u(t) = U_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi_u)$ et $i(t) = I_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi_i)$, le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$ vaut $\varphi_u - \varphi_i$.
Le déphasage est choisi tel que sa valeur soit comprise entre $-\pi$ et π.

LOI

Le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$ est l'opposé de celui de $i(t)$ par rapport à $u(t)$.

DÉF

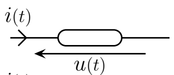
Une grandeur sinusoïdale $\xi_1(t) = \xi_{1,\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_1)$ est dite en *avance de phase* sur $\xi_2(t) = \xi_{2,\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_2)$ lorsque $\varphi_1 > \varphi_2$ et en *retard de phase* lorsque $\varphi_1 < \varphi_2$.

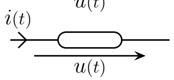
DÉF

Deux grandeurs sinusoïdales $\xi_1(t) = \xi_{1,\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $\xi_2(t) = \xi_{2,\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_2)$ sont dites *en quadrature* lorsque $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

DÉF

L'*impédance* d'un dipôle se note $\underline{Z}$ et est le lien entre la tension complexe et l'intensité complexe du courant qui le traverse :

- ➜ 

en convention récepteur, nous avons : $\underline{u}(t) = +\underline{Z}\,\underline{i}(t)$;
- ➜ 

en convention générateur, nous avons : $\underline{u}(t) = -\underline{Z}\,\underline{i}(t)$;

LOI

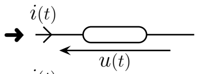
L'unité de l'impédance est le ohm (Ω), comme une résistance.

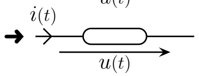
LOI

Un dipôle d'impédance $\underline{Z}$ impose un déphasage $\varphi = \arg(\underline{Z})$ de la tension entre ses bornes par rapport à l'intensité du courant qui le traverse.

LOI

L'impédance $\underline{Z}$ est telle que :

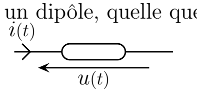
- ➜ 

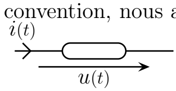
en convention récepteur, nous avons : $\underline{U_\mathrm{m}} = +\underline{Z}\,\underline{I_\mathrm{m}}$;
- ➜ 

en convention générateur, nous avons : $\underline{U_\mathrm{m}} = -\underline{Z}\,\underline{I_\mathrm{m}}$;

LOI

Pour un dipôle, quelle que soit la convention, nous avons :





$$U_\mathrm{m} = Z\, I_\mathrm{m} \qquad \text{où} \qquad Z = |\underline{Z}|$$

LOI

Pour un résistor, l'impédance vaut : $\underline{Z_R} = R$.

LOI

En convention récepteur, la tension aux bornes d'un résistor est en phase avec l'intensité du courant qui le traverse.

LOI

Pour un condensateur idéal, l'impédance vaut : $\underline{Z_C} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\,C\,\omega}$.

LOI

En convention récepteur, la tension aux bornes d'un condensateur est en quadrature avec l'intensité du courant qui le traverse : la tension est en retard par rapport à l'intensité.

LOI

Pour une bobine idéale, l'impédance vaut : $\underline{Z_L} = \mathrm{j}\,L\,\omega$.

LOI

En convention récepteur, la tension aux bornes d'une bobine est en quadrature avec l'intensité du courant qui le traverse : la tension est en avance par rapport à l'intensité.

DÉF

L'impédance $\underline{Z}$ d'un dipôle quelconque s'écrit sous la forme :

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\,X \quad \text{où :}$$

➜ $R > 0$ est la *résistance* du dipôle et s'exprime en Ω ;
➜ $X \gtrless 0$ est la *réactance* du dipôle et s'exprime en Ω.

DÉF

L'*admittance* complexe $\underline{Y}$ d'un dipôle d'impédance $\underline{Z}$ est définie par :

$$\underline{Y} \triangleq \frac{1}{\underline{Z}}$$

LOI

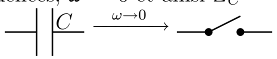
L'admittance $\underline{Y}$ d'un dipôle quelconque s'écrit sous la forme :

$$\underline{Y} = G + \mathrm{j}B \quad \text{où :}$$

➜ $G > 0$ est la *conductance* du dipôle et s'exprime en S ;
➜ $B \gtrless 0$ est la *susceptance* du dipôle et s'exprime en S.

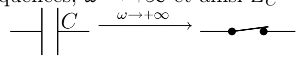
LOI

En basses fréquences, $\omega \to 0$ et ainsi $Z_C \to +\infty$ ou encore :



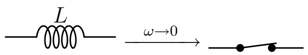
LOI

En hautes fréquences, $\omega \to +\infty$ et ainsi $Z_C \to 0$ ou encore :



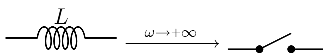
LOI

En basses fréquences, $\omega \to 0$ et ainsi $Z_L \to 0$ ou encore :



LOI

En hautes fréquences, $\omega \to +\infty$ et ainsi $Z_L \to +\infty$ ou encore :



LOI

L'additivité des tensions $u_1(t) + u_2(t) + \cdots + u_n(t) = u(t)$ s'écrit en notation complexe :
➜ $\underline{u_1}(t) + \underline{u_2}(t) + \cdots + \underline{u_n}(t) = \underline{u}(t)$ en grandeurs instantanées
➜ $\underline{U_{1,\mathrm{m}}} + \underline{U_{2,\mathrm{m}}} + \cdots + \underline{U_{n,\mathrm{m}}} = \underline{U_\mathrm{m}}$ en amplitudes complexes

LOI

La loi des nœuds $i_1(t) + i_2(t) + \cdots + i_n(t) = i(t)$ s'écrit en notation complexe :
➜ $\underline{i_1}(t) + \underline{i_2}(t) + \cdots + \underline{i_n}(t) = \underline{i}(t)$ en grandeurs instantanées
➜ $\underline{I_{1,\mathrm{m}}} + \underline{I_{2,\mathrm{m}}} + \cdots + \underline{I_{n,\mathrm{m}}} = \underline{I_\mathrm{m}}$ en amplitudes complexes

LOI

L'association série de dipôles d'impédance $\underline{Z_k}$ est équivalente à un dipôle unique d'impédance :

$$\underline{Z_{\text{éq}}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \cdots + \underline{Z_n}$$

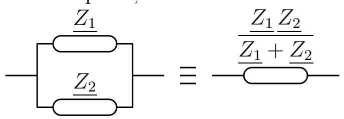
LOI

L'association parallèle de dipôles d'admittance $\underline{Y_k}$ est équivalente à un dipôle unique d'admittance :

$$\underline{Y_{\text{éq}}} = \underline{Y_1} + \underline{Y_2} + \cdots + \underline{Y_n}$$

LOI

Pour deux dipôles, nous avons directement :



LOI

Toute loi peut s'écrire en notation complexe à condition de procéder aux changements :
➜ les grandeurs réelles $\longrightarrow$ grandeurs complexes (en instantané ou en amplitude) ;
➜ résistance $\longrightarrow$ impédances ;
➜ conductance $\longrightarrow$ admittance.

LOI

Lorsque $X > 0$: $\arg(X + \mathrm{j}\,Y) = \arctan\left(\dfrac{Y}{X}\right)$.

II – Circuit R,L,C série en régime sinusoïdal forcé

LOI

Pour un circuit en régime sinusoïdal forcé, le générateur est souvent celui qui sert de référence pour la phase, *ie.* :
➜ son déphasage à l'origine est nul
➜ son amplitude complexe est donc une amplitude réelle, notée sans barre

Déf La *bande passante* est l'ensemble des fréquences (ou des pulsations) telle que la valeur intéressante soit au moins égal à la valeur maximale possible divisée par $\sqrt{2}$.

Déf La *fréquence (ou pulsation) de coupure* est une fréquence (ou pulsation) telle que la valeur intéressante soit exactement égale à la valeur maximale possible divisée par $\sqrt{2}$, une fréquence de coupure est donc à la limite d'une bande passante.

Loi Pour la résonance en tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit R,L,C série, lorsque $Q \gg 1$, la bande passante est telle que :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta x}$$

Loi Pour la résonance en intensité dans un circuit R,L,C série, quel que soit Q, la bande passante est telle que :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta x}$$

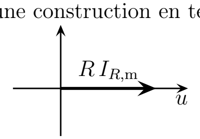
III – La construction de Fresnel

Loi Une grandeur sinusoïdale $u(t) = U_{\mathrm{m}} \cos(\omega\,t + \varphi)$ se représente par un vecteur de norme U_{m} et faisant avec l'axe des abscisses un angle φ.

Loi La représentation de Fresnel est très utile pour les circuits simples : ceux à une maille ou à deux nœuds.

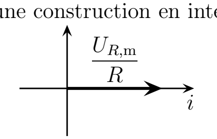
Loi Le résistor avec la construction de Fresnel

Pour une construction en tension.



L'intensité $i_R(t)$ est choisie comme origine des phases.

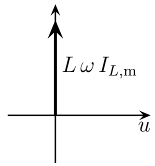
Pour une construction en intensité.



La tension $u_R(t)$ est choisie comme origine des phases.

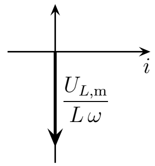
Loi La bobine idéale dans la représentation de Fresnel

Pour une construction en tension.



L'intensité $i_L(t)$ est choisie comme origine des phases.

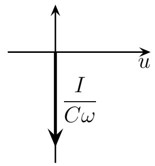
Pour une construction en intensité.



La tension $u_L(t)$ est choisie comme origine des phases.

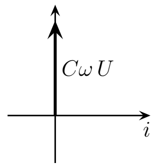
Loi Le condensateur idéal dans la construction de Fresnel

Pour une construction en tension.



L'intensité $i_C(t)$ est choisie comme origine des phases.

Pour une construction en intensité.

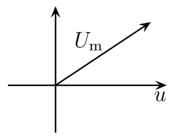


La tension $u_C(t)$ est choisie comme origine des phases.

Déf Un dipôle possède un *caractère inductif* lorsqu'il se comporte « un peu » comme une bobine, *ie.* quand :
- ➜ $\underline{Z} = R = \mathrm{j}\,X$ avec $X > 0$;
- ➜ en convention récepteur, la tension à ses bornes est en avance par rapport à l'intensité qui le traverse.

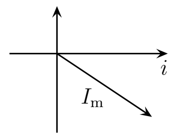
Loi Un dipôle inductif dans la construction de Fresnel

Pour une construction en tension.



L'intensité $i(t)$ est choisie comme origine des phases.

Pour une construction en intensité.



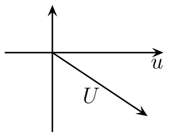
La tension $u(t)$ est choisie comme origine des phases.

Déf Un dipôle possède un *caractère capacitif* lorsqu'il se comporte « un peu » comme un condensateur, *ie.* lorsque :
- ➜ $\underline{Z} = R = \mathrm{j}\,X$ avec $X < 0$;
- ➜ en convention récepteur, la tension à ses bornes est en retard par rapport à l'intensité qui le traverse.

UN DIPÔLE CAPACITIF DANS LA CONSTRUCTION DE FRESNEL

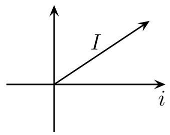
Loi

Pour une construction en tension.



L'intensité $i(t)$ est choisie comme origine des phases.

Pour une construction en intensité.



La tension $u(t)$ est choisie comme origine des phases.

IV – Aspect énergétique

Loi

Il n'est pas possible d'associer à la puissance instantanée reçue une représentation complexe.

Loi

La puissance moyenne reçue par un dipôle vaut $P = \dfrac{U_{\mathrm{m}}\,I_{\mathrm{m}}}{2}\cos\varphi$ où :

- ➜ U_{m} et I_{m} sont les amplitudes réelles de la tension à ses bornes et de l'intensité le traversant
- ➜ φ est le déphasage de la tension par rapport à l'intensité
- ➜ P est appelée la *puissance active* et s'exprime en W
- ➜ $\cos\varphi$ est appelée le *facteur de puissance*

Loi

Plus le facteur de qualité est élevé moins le dipôle restitue de l'énergie au circuit.

Loi

Le facteur de puissance dépend uniquement de l'impédance du dipôle et vaut :

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{\mathfrak{Re}(\underline{Z})}{Z}.$$

Loi

Le facteur de puissance dépend uniquement de l'admittance du dipôle et vaut :

$$\cos\varphi = \frac{G}{Y} = \frac{\mathfrak{Re}(\underline{Y})}{Y}.$$

Loi

Un résistor consomme toute la puissance qu'il reçoit.

Loi

En moyenne les condensateurs idéaux et les bobines idéales ne consomment pas de puissance.

Loi

La puissance moyenne reçue par un dipôle peut s'écrire :

$$P = \frac{{I_{\mathrm{m}}}^2}{2}\,\mathfrak{Re}(\underline{Z}) \qquad \text{ou} \qquad P = \frac{{U_{\mathrm{m}}}^2}{2}\,\mathfrak{Re}(\underline{Y})$$

....

Déf

La *valeur efficace* U_{m} d'un signal périodique $u(t)$ est la valeur moyenne quadratique de ce signal :

$$ {U_{\mathrm{eff}}}^2 = \left\langle u^2(t) \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Loi

Pour un signal sinusoïdal d'amplitude U_{m} et de valeur moyenne nulle, la valeur efficace vaut :

$$U_{\mathrm{eff}} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$$

Loi

La puissance moyenne reçue par un dipôle peut s'écrire :

$$P = U_{\mathrm{eff}}\,I_{\mathrm{eff}}\cos\varphi \qquad \text{ou} \qquad P = {I_{\mathrm{eff}}}^2\,\mathfrak{Re}(\underline{Z}) \qquad \text{ou} \qquad P = {U_{\mathrm{eff}}}^2\,\mathfrak{Re}(\underline{Y})$$

Loi

Le complexe conjugué d'une grandeur complexe $\underline{X}$ se note $\underline{X}^\star$.

Loi

La puissance moyenne reçue par un dipôle peut s'écrire :

$$P = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Re}\left(\underline{u}(t)\,\underline{i}^\star(t)\right) \qquad \text{ou} \qquad P = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Re}\left(\underline{u}^\star(t)\,\underline{i}(t)\right)$$

$$\text{ou} \qquad P = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Re}\left(\underline{U_{\mathrm{m}}}\,\underline{I_{\mathrm{m}}}^\star\right) \qquad \text{ou} \qquad P = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Re}\left(\underline{U_{\mathrm{m}}}^\star\,\underline{I_{\mathrm{m}}}\right)$$

Loi

À l'intérieur de la bande passante, le dipôle étudié reçoit, en moyenne, au moins la moitié de la puissance maximale qu'il peut recevoir.

Loi

Les moteurs électriques étant constitués de bobines, ils ont un effet inductif.

....

Déf

Il y a *adaptation d'impédance* lorsque la puissance transférée entre le générateur et la partie utile d'un circuit est maximale.

Loi

Il y a adaptation d'impédance pour $\underline{Z_{\mathrm{u}}} = \underline{Z_{\mathrm{g}}}^\star$.