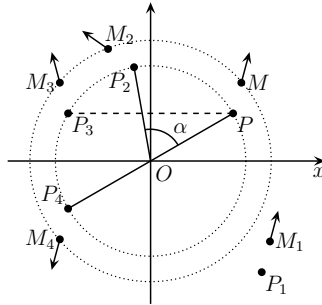


Approche globale du champ (\vec{E}, \vec{B})

✿ Exercice 1

Le champ \vec{E} subit les mêmes transformations que les sources de champ. Nous avons donc les champs ci-dessous.



De toute façon, comme \vec{E}_i est le champ créé par P_i , \vec{E}_i doit être dans la direction de P_iM_i .

✿ Exercice 2

1. Nous savons que les lignes de champ « sortent » des charges positives et « rentrent » dans les charges négatives. Une charge ne peut pas être à l'intersection de lignes entrantes et sortantes.

Par conséquent, en suivant les lignes et en partant de en haut à droite, car nous savons que celle-ci est positive, nous trouvons que les charges en haut à gauche et en bas à droite sont négatives, alors que celle en bas à gauche est aussi positive.

2. Le champ n'admet visiblement pas le plan médiateur du carré comme plan de symétrie. En revanche, nous percevons une symétrie de centre le centre du carré, ce qui signifie que charges sur chaque diagonales sont égales.

Nous pouvons en déduire que le champ admet aussi comme plans de symétrie, les plans orthogonaux au dessin et passant par les diagonales du carré.

3. Nous pouvons facilement imaginer que si davantage de lignes avaient été tracées, nous aurions pu voir une intersection de lignes de champ au centre du carré. Comme il ne s'agit pas d'un point où se situe une charge, c'est forcément un point de champ nul.

Nous pouvons retrouver ce résultat par des considérations de symétrie : par le centre du carré passent trois plans de symétries (le plan de la figure et les deux cités ci-dessus), donc le champ en ce point appartient à l'intersection de ces trois plans, intersection réduite à un point. Le champ est donc bien nul.

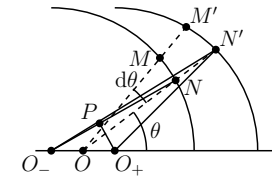
✿ Remarque : le fait qu'il n'y ait pas de charges est confirmé par le fait qu'en ce point s'intersectent des lignes qui « rentrent » et qui « sortent ».

✿ Exercice 3

Pour établir l'équivalence entre les deux distributions, nous pouvons écrire l'égalité de la charge dq comprise, sur la sphère, entre l'angle θ et l'angle $\theta + d\theta$.

Pour la répartition volumique, nous voyons que $dq = \rho_0 d\tau$ où $d\tau$ est la couronne d'axe de révolution \vec{u}_z et délimitée par $MNN'M'$.

Pour la répartition surfacique, nous trouvons de même $dq = \sigma(\theta) dS$ où $dS = R d\theta \times \ell$ est la surface de la couronne délimitée sur la sphère par M et M' , ℓ étant la longueur de cette couronne.



Le volume $d\tau$ valant $d\tau = NN' \times \ell \times M'N'$ avec $M'N' = R d\theta$.

Nous trouvons, en égalant les deux expressions de la charge $dq : \sigma_0 \cos \theta = \rho_0 M'N'$.

Or $NN' \simeq O_-N' - O_-N \simeq O_-N' - O_+N' = OP = a \cos \theta$.

En regroupant, et en simplifiant, nous obtenons $\sigma_0 = \rho_0 a$. Le résultat s'étend aisément aux angles tels que $\cos \theta < 0$.

✿ Remarque : D'un point de vue dimensionnel, nous pouvons directement affirmer que si la dépendance était en cosinus, alors $\sigma_0 = \kappa \rho_0 a$. Le tout étant de déterminer la constante κ .

✿ Exercice 4

Découpons la boule en coques sphériques repérées par r' et comprises entre r' et $r' + dr'$. Ces coques sont donc d'épaisseur dr' .

La charge contenue dans cette coque, uniformément chargée puisqu'infinimentésimale, elle s'écrit

$$dq = \rho(r') \times d\tau \quad \text{où} \quad d\tau \text{ est le volume de la coque}$$

Comme la coque est d'épaisseur infinitésimale, nous pouvons écrire $d\tau = S \times dr'$ avec $S = 4\pi r'^2$ sa surface.

$$\text{Nous avons ainsi } dq = \rho_0 \left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) 4\pi r'^2 dr'.$$

Il n'y a plus qu'à sommer les contributions des différentes coques :

$$q(r) = \int_0^r dq = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) 4\pi r'^2 dr' \quad \rightsquigarrow \quad q(r) = \rho_0 \left(\frac{4\pi}{3} r^3 - \frac{4\pi}{5} \frac{r^5}{R^2}\right)$$

En particulier la charge totale vaut $q_{\text{tot}} = q(R) = \frac{8\pi}{15} \rho_0 R^3$.

✿ Exercice 5

Étant donné que la distribution est équivalente à l'association de deux boules, nous allons utiliser le principe de superposition des champs.

Nous allons ainsi dire que le champ électrostatique en un point M intérieur à la sphère est la somme des champs électrostatiques \vec{E}_1 et \vec{E}_2 créés par les boules de densité volumique de charges volumiques respectives $+\rho_0$ et $-\rho_0$.

Or nous pouvons montrer, comme nous l'avons fait dans le cours que le champ électrostatique créé par une boule uniformément chargée en volumique vaut, pour un point à l'intérieur de celle-ci, avec O le centre de la boule :

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{u}_r \quad \text{ou} \quad \vec{E} = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \times \overrightarrow{OM}$$

Adaptée aux deux boules considérées, cela donne :

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_0}{3 \epsilon_0} \times \overrightarrow{O_1M} \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = -\frac{\rho_0}{3 \epsilon_0} \times \overrightarrow{O_2M}$$

Dès lors, nous avons :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{3 \epsilon_0} \times \overrightarrow{O_1O_2} = \vec{C}^{\text{te}}$$

Ce résultat se réécrit, en tenant compte de la relation obtenue dans l'exercice 3 : $\vec{E}(M) = \frac{\sigma_0}{3 \epsilon_0} \vec{u}_z$

où \vec{u}_z est le vecteur unitaire « vertical vers le haut ».

☛ *Remarque* : le champ est uniforme à l'intérieur de cette sphère, ce qui est loin d'être évident a priori.

☛ **Exercice 6**

[1.] Soit M un point quelconque. Le plan $(\overrightarrow{OM}, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des sources, donc plan d'antisymétrie du champ. Le champ $\vec{B}(M)$ est donc orthogonal à ce plan, donc $\vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_\theta$.

Comme la distribution est invariante par translation suivant \vec{u}_z et par rotation autour de \vec{u}_z , nous obtenons $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$.

Utilisons le théorème d'AMPÈRE sur un cercle centré sur l'axe.

Nous avons

$$B(r) \times 2 \pi r = \mu_0 n \pi r^2 i \quad \rightsquigarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 n i r}{2}$$

Comme $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{u}_r$, nous pouvons écrire

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 n i \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM}}{2}$$

[2.] Considérons la distribution trouée comme la superposition de deux séries de fils de même densité surfacique et toutes parcourues par le même courant i , à la différence près que les fils correspondant au trou seront parcourus par un courant d'intensité $-i$.

À l'intérieur de la cavité nous pouvons utiliser le principe de superposition. En notant \vec{B}_A le champ magnétique créé par l'ensemble des fils sans le trou et \vec{B}_B le champ magnétique créé par les fils correspondant au trou, nous avons :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_A(M) + \vec{B}_B(M) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n i \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM}}{2} + \frac{\mu_0 n (-i) \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{O_1M}}{2} = \frac{\mu_0 n i \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OO_1}}{2}$$

Ce résultat qui est indépendant de M : $\boxed{\text{Le champ } \vec{B} \text{ dans la cavité est uniforme.}}$

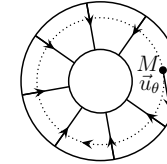
☛ **Exercice 7**

[1.] Il s'agit ici d'une distribution de type « disque », nous allons donc utiliser les coordonnées cylindro-polaires.

Soit un point M de l'espace. Tout plan contenant l'axe du tore est plan de symétrie des sources (grâce au grand nombre de spires) donc plan d'antisymétrie de \vec{B} . En tout point M , le champ magnétique est donc orthogonal au plan contenant l'axe, i.e. s'écrit $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$.

L'invariance des sources par rotation autour de \vec{u}_z (le tore admet la symétrie de révolution parce qu'une fois de plus il y a un très grand nombre de spires) nous permet d'affirmer l'invariance de \vec{B} suivant θ .

Nous cherchons donc, finalement, un champ de la forme $\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{u}_\theta$.



Utilisons le théorème d'AMPÈRE. Choisissons pour cela un contour circulaire \mathcal{C} dans un plan orthogonal à l'axe, centré sur l'axe et passant par M .

Le contour ayant été choisi pour que le champ \vec{B} soit non seulement tangent en tout point au circuit mais aussi de norme constante sur le circuit, nous avons :

$$C = \int_{P \in \mathcal{C}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \int_{P \in \mathcal{C}} B d\ell = B \ell_{\text{tot}} = 2 \pi r B(r, z)$$

Ensuite, nous savons que cette circulation vaut $C = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$.

Deux cas de figures sont possibles :

→ soit le point M choisi est à l'intérieur du tore, auquel cas $i_{\text{enlacé}} = N i$

→ soit le point M n'est pas à l'intérieur du tore et alors $i_{\text{enlacé}} = 0$.

En effet, si le point M est au-dessus ou au-dessous du tore, aucune spire ne traverse le circuit \mathcal{C} soit le point M est au niveau du tore et chaque spire passe à travers le circuit \mathcal{C} dans un sens et dans l'autre, ce qui fait un $i_{\text{enlacé}}$ nul pour chaque spire donc pour l'ensemble.

Finalement, nous avons

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{2 \pi r} \vec{u}_\theta \text{ à l'intérieur du tore}$$

$$\text{et} \quad \vec{B} = \vec{0} \text{ à l'extérieur du tore}$$

☛ *Remarque* : contrairement à ce que pourrait le laisser croire les formules, le champ magnétique dépend effectivement des deux coordonnées r et z . Par exemple, z ne se « voit » pas mais est, néanmoins, indispensable pour savoir si le point M est à l'intérieur ou à l'extérieur du tore.

[2.] *La difficulté essentielle de cette question réside dans la traduction analytique de la définition du flux. Le reste n'étant que du « Maple-calcul ».*

Le flux vaut par définition $\Phi = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}$.

En orientant la surface dans le sens conventionnel de l'intensité du courant, nous avons

$$d\vec{S} = dS \vec{u}_\theta \quad \rightsquigarrow \quad \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS = B dr dz$$

L'intégration se faisant pour $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$ et pour $b - \frac{a}{2} \leq r \leq b + \frac{a}{2}$ nous arrivons à

$$\Phi = \iint B dS = \iint \frac{\mu_0 N i}{2 \pi r} dr dz$$

Étant donné que la fonction à intégrer $F(r,z) = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$ peut se mettre sous la forme d'un produit d'une fonction de r et de z , $F(r,z) = f(r) \times g(z)$ nous pouvons utiliser la propriété :

$$\iint F(r,z) \, dr \, dz = \left(\int f(r) \, dr \right) \left(\int g(z) \, dz \right)$$

Nous obtenons ainsi :

$$\Phi = \frac{\mu_0 N i}{2\pi} \left(\int_{b-a/2}^{b+a/2} \frac{dr}{r} \right) \left(\int_{-a/2}^{a/2} dz \right) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\Phi = \frac{\mu_0 N i a}{2\pi} \ln \left(\frac{b+a/2}{b-a/2} \right)}$$