

## Approche locale du champ $(\vec{E}, \vec{B})$

### ✳ Exercice 1

**cas a.** Il s'agit d'un champ uniforme de la forme  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$ . La circulation sur toute courbe fermée est bien nulle, ce champ est donc plausible. Le flux à travers une surface fermée est toujours nul, ce qui signifie qu'il n'y a pas de charges dans la zone représentée. En fait ce champ peut être un champ créé par une surface infinie chargée surfaciquement.

**cas b.** La circulation du champ sur une courbe fermée est là aussi toujours nulle. Nous en déduisons que le champ est à circulation conservatif, *ie.* qu'il peut s'agir d'un champ électrostatique.

Cette fois, contrairement au champ présenté au cas (a), le flux à travers une surface fermée n'est plus nul, ce qui signifie qu'il existe des charges dans la zone représentée.

Comme le champ est invariant en  $y$  et en  $z$ , nous pouvons d'ores et déjà en déduire que la densité de charge ne dépendra que de la variable  $x$ .

En prenant comme surface de GAUSS un pavé dont les côtés ont pour longueur  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ , nous trouvons :

$$\Phi = -E(x) dy dz + E(x+dx) dy dz = \frac{\rho(x) dx dy dz}{\epsilon_0} \rightsquigarrow \rho(x) = \epsilon_0 \frac{dE(x)}{dx}$$

**cas c.** Le champ ressemble à celui créé par une charge ponctuelle en  $O$ . Pourvu que la norme décroisse en  $\frac{1}{r^2}$ , alors ce champ correspond à celui d'une charge unique placée en  $O$ . Si tel n'est pas le cas, alors ce champ ne correspond pas à un champ électrostatique créé par une charge ponctuelle mais créé par une répartition sphérique de charges.

**cas d et e.** Ces deux champs ne peuvent pas être des champs électrostatiques car la circulation sur un contour centré sur  $O$  n'est pas nulle.

En effet, sur un tel contour nous avons  $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$  et comme la composante sur  $\vec{u}_\theta$  du champ est toujours su même signe (positif avec les conventions usuelles), nous avons  $\vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$  et *a fortiori*

$$\mathcal{C} = \int_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{l}_P > 0$$

Rappelons qu'un champ *électrostatique* est tel que la circulation soit nulle sur **tout** contour fermé.

### ✳ Exercice 2

**1.** Comme il n'y a pas de charges à l'infini, nous pouvons utiliser la loi de sommation pour le potentiel.

Utilisons un découpage de la sphère en spires repérées par l'angle  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Pour chacune de ces spires, le potentiel élémentaire  $dV$  créé en  $M$  vaut avec les notations du cours  $dV = \ll \frac{\lambda R}{2 \epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \gg$ .

Or ici :

→  $\lambda = \sigma R d\theta$  (charge surfacique multipliée par la largeur de la spire)

→ le rayon «  $R$  » vaut  $R \sin \theta$

→ la distance «  $\sqrt{z^2 + R^2}$  » à un point de la spire vaut  $D$  tel que

$$D^2 = \overrightarrow{MP}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP})^2 = r^2 + R^2 - 2 R r \cos \theta$$

$$\text{Ainsi } dV = \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta}{2 \epsilon_0 \sqrt{r^2 + R^2 - 2 R r \cos \theta}}$$

Pour avoir le potentiel total, il suffit de sommer les contributions des différentes spires :

$$V(M) = \int_0^\pi dV = \int_0^\pi \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta}{2 \epsilon_0 \sqrt{r^2 + R^2 - 2 R r \cos \theta}} = \frac{\sigma R^2}{2 \epsilon_0} \left[ \frac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 R r \cos \theta}}{r R} \right]_0^\pi$$

Finalement :  $V(M) = \frac{\sigma R}{2 \epsilon_0 r} (|r + R| - |r - R|)$ .

En d'autres termes, le potentiel vaut :

$$\boxed{V(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = C^{te} \text{ à l'intérieur de la sphère}} \quad \text{et} \quad \boxed{V(M) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} \text{ à l'extérieur}}$$

**2. (a)** Comme le potentiel ne dépend que de la variable  $r$ , le champ électrostatique est porté par  $\vec{u}_r$ , conformément à la relation  $\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$ . Cela donne :

$$\boxed{\vec{E} = \vec{0} \text{ pour } M \text{ à l'intérieur}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \text{ à l'extérieur de la sphère}}$$

**2. (b)** Soit  $M$  un point de l'espace. Tout plan contenant la droite  $(OM)$  est plan de symétrie, donc  $\vec{E}(M)$  appartient à tous ces plans donc à leur intersection :  $\vec{E}(M)$  est donc porté par  $\vec{u}_r$ , ce qui donne finalement  $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$ .

Comme en plus la distribution est à symétrie sphérique, le champ sera lui aussi à symétrie sphérique et ses composantes ne dépendront donc pas des variables  $\theta$  et  $\varphi$ .

Il reste  $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r$ .

Pour calculer l'intensité  $E_r$  du champ, nous pouvons utiliser le théorème de GAUSS avec, comme surface de GAUSS, une sphère de centre  $O$  et passant par le point  $M$ . Le flux du champ  $\vec{E}$  vaut alors  $\Phi = 4 \pi r^2 E_r$ .

►  **$M$  est à l'intérieur de la sphère.** La surface de GAUSS n'englobe aucune charge, donc  $Q_{\text{int}} = 0$  puis  $E_r(r) = 0$ .

►  **$M$  est à l'extérieur de la sphère.** La surface de GAUSS englobe la charge totale de la sphère, à savoir  $Q = 4 \pi R^2 \sigma$ .

Le champ  $E_r$  vaut alors  $E_r(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$ . Les résultats sont identiques à ceux de la question précédente, ce qui est absolument normal.

► **Remarque :** nous pouvons vérifier qu'à la traversée de la surface chargée, le champ  $\vec{E}$  subit la discontinuité  $\Delta E = E(R^+) - E(R^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

### ✳ Exercice 3

La distribution de charges est à symétrie sphérique. Nous pouvons donc en déduire que, aussi bien le champ électrostatique que le potentiel, sont à symétrie sphérique. Le théorème de Gauss nous tend les bras.

► **Le champ électrostatique.** Soit un point  $M$  dans l'espace. Tout plan contenant  $OM$  est plan de symétrie donc le champ  $\vec{E}(M)$  en  $M$  appartient l'intersection de tous ces plans, *ie.* est porté par  $\vec{u}_r$ .

Avec les invariances, nous pouvons écrire le champ électrostatique sous la forme  $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$ .

Pour déterminer  $E(r)$ , utilisons le théorème de Gauss en utilisant comme surface de Gauss la sphère centrée en  $O$  et passant par  $M$ .

$$\text{Le flux s'écrit alors } \Phi = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}} E(r_P) dS \text{ car } d\vec{S} = dS \vec{u}_r.$$

Comme  $r_P = C^{te} \equiv r$  sur la surface de Gauss (et pour cause, elle a été choisie pour ça), nous obtenons :

$$\Phi = E(r) \iint dS_P = E(r) \times S = E(r) 4 \pi r^2$$

Pour déterminer la charge contenue dans cette surface, utilisons les résultats de l'exercice 4 du TD ELMG1. Nous avons :

$$q(r) = \rho_0 \left( \frac{4 \pi}{3} r^3 - \frac{4 \pi}{5} \frac{r^5}{R^2} \right) \text{ pour } r \leq R \quad \text{et} \quad \rho(r) = \frac{8 \pi}{15} \rho_0 R^3 = C^{te} \text{ pour } r \geq R$$

Comme le théorème de Gauss s'écrit  $\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$  nous arrivons à :

$$E(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{r}{3} - \frac{r^3}{5 R^2} \right) \text{ pour } r \leq R \quad \text{et} \quad E(r) = \frac{2 \rho_0 R^3}{15 r^2} \text{ pour } r \geq R$$

► **Le potentiel.** Utilise la définition du potentiel :  $\vec{E} = -\text{grad} V$ .

En projection sur  $\vec{u}_r$ , cela donne  $E(r) = -\frac{dV}{dr}$ . Nous obtenons alors, en prenant arbitrairement

$$V(0) = 0 : V(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{r^4}{20 R^2} - \frac{r^2}{6} \right) \text{ pour } r \leq R.$$

Pour  $r \geq 0$  nous avons, par intégration de  $E(r) : V(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{2}{15} \frac{R^3}{r} + C^{te}$ .

Pour déterminer la constante, nous pouvons utiliser la continuité du potentiel en  $r = R$ , ce qui

$$\text{donne : } V(r) = \frac{\rho_0 R^2}{\epsilon_0} \left( \frac{2}{15} \frac{R}{r} - \frac{1}{4} \right).$$

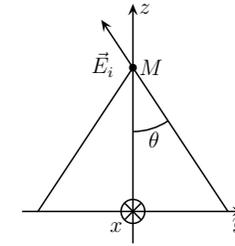
☛ *Remarque* : en prenant comme convention pour le potentiel la convention usuelle  $V(\infty) = 0$  nous serions arrivé à :

$$V(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{r^4}{20 R^2} - \frac{r^2}{6} + \frac{R^2}{4} \right) \text{ pour } r \leq R \quad \text{et} \quad V(r) = \frac{\rho_0 R^2}{\epsilon_0} \frac{2}{15} \frac{R}{r} \text{ pour } r \geq R$$

☛ **Exercice 4**

Les deux plans  $(Oxz)$  et  $(Oyz)$  sont plans de symétrie des sources donc, puisque  $M$  appartient à ces deux plans,  $\vec{E}$  appartient à leur intersection, *ie.* est porté par  $\vec{u}_z$ . Nous nous contenterons donc de chercher  $E_z(M)$ .

La spire peut être vue comme la réunion de 4 segments créant chacun un champ  $d\vec{E}$  en  $M$ .



Nous pouvons alors voir que pour chacun de ces segments,  $M$  est sur le plan médiateur.

En utilisant la même démarche qu'en cours, nous trouvons que  $\vec{E}_i = \ll \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0 r} 2 \sin \theta_0 \vec{u} \gg$  avec

$$r = \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Comme  $2 \theta_0 = \widehat{AMB}$ , nous pouvons voir, dans le plan  $AMB$ , que  $\sin \theta_0 = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}}$ .

Enfin, comme nous ne comptons que la contribution sur  $\vec{u}_z$ , nous avons

$$E_{i,z} = E_i \cos \theta = E_i \frac{z}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}}$$

En regroupant l'ensemble, nous obtenons finalement, sans oublier que les 4 segments fournissent des contributions identiques :

$$E_z(z) = \frac{8 \lambda}{\pi \epsilon_0} \times \frac{a z}{(4 z^2 + a^2) \sqrt{4 z^2 + 2 a^2}}$$

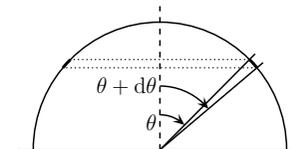
☛ **Exercice 5**

*Analyse technique.* Ici il n'y a visiblement pas assez de symétrie pour utiliser Gauss. Le calcul du potentiel semble mal aisé ... il reste la loi de Coulomb et le principe de superposition.

En choisissant comme axe  $\vec{u}_z$  l'axe de symétrie de l'hémisphère, nous constatons que tous les plans contenant l'axe  $\vec{u}_z$  sont plans de symétrie. Ainsi, au point  $O$  le champ  $\vec{E}(O)$  appartient à tous ces plans donc à leur intersection, à savoir l'axe  $(Oz)$ .

Nous ne chercherons donc à déterminer par la suite que la composante sur  $\vec{u}_z$  du champ  $\vec{E}$ .

Découpons la demi-sphère en spires repérées par l'angle  $\theta$  et comprises entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ .



La spire est alors de rayon  $R \sin \theta$  et le point  $M$  est, pour cette spire, à l'altitude  $-R \cos \theta$ .

La charge linéique vaut  $\sigma \times R d\theta$  (charge surfacique multipliée par la largeur).

Ainsi le champ créé par la spire en  $\theta$  vaut :

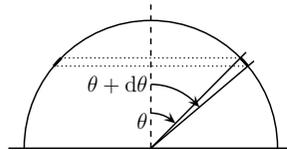
$$dE_z = \ll \frac{\lambda R z}{2 \epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \gg = -\frac{\sigma R d\theta R \sin \theta \cos \theta}{2 \epsilon_0 R^3} = -\frac{\sigma}{4 \epsilon_0} \sin(2\theta)$$

« Yapuka » sommer les contributions de toutes les spires :

$$E_z(O) = \int dE_z = \int_0^{\pi/2} -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \sin(2\theta) d\theta \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{E_z(O) = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0}}$$

❁ **Exercice 6**

On découpe la sphère en spires circulaires repérées par l'angle  $\theta$  et comprises entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ .



La charge linéique de cette spire vaut alors  $\sigma_0 \cos \theta R d\theta$  (densité surfacique multipliée par la largeur de la spire).

La spire est de rayon  $R \sin \theta$  et le point  $O$  est à l'altitude  $z = -R \cos \theta$ .

Le champ créé par une spire en  $O$  vaut donc (attention aux collisions de notations) :

$$dE_z = \left\langle \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \right\rangle = -\frac{\sigma_0 \cos \theta R d\theta R \sin \theta R \cos \theta}{2\epsilon_0 R^3} = -\frac{\sigma_0 \cos^2 \theta \sin \theta}{2\epsilon_0}$$

« Yapuka », comme dans l'exercice précédent, sommer les contributions de toutes les spires :

$$E_z(O) = \int dE_z = -\int_0^{\pi} \frac{\sigma_0 \cos^2 \theta \sin \theta}{2\epsilon_0} d\theta = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi} \rightsquigarrow \quad \boxed{E_z(O) = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}}$$

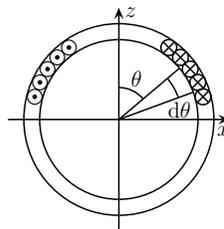
☛ *Remarque* : en supposant  $\sigma_0 > 0$ , on constate que le champ en  $O$  est dirigé vers le bas, *ie.* des charges positives vers les charges négatives ; c'est cohérent.

☛ *Remarque* : dans le TD, nous avons vu une autre méthode pour calculer le champ pour n'importe quel point à l'intérieur de cette distribution. Nous pouvons donc voir que la méthode reposant sur le principe de superposition et la loi de COULOMB est vite limitée.

❁ **Exercice 7**

Le champ créé par une spire sur son axe (résultat à redémontrer) s'écrit  $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2r} \sin^3 \alpha \vec{u}_z$  avec  $r$  le rayon de la spire,  $i$  le courant qui la traverse et  $\alpha$  l'angle sous lequel le rayon est vu du point  $M$ .

Ici la distribution est une réunion de spires comprises entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  parcourues par le courant  $di = i dN$  où  $dN$  est le nombre de spires comprises entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ .



Sachant qu'il y a  $N$  spires uniformément réparties sur la surface de la sphère (*ie.* entre les angle  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ ), nous avons  $\frac{dN}{d\theta} = \frac{N}{\pi}$  soit  $dN = \frac{N}{\pi} d\theta$ .

Le rayon de la spire vaut  $r = R \sin \theta$  et l'angle  $\alpha$  vaut  $\theta$ .

Cela donne :

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{2R \sin \theta} \times i \times \frac{N}{\pi} d\theta \times \sin^3 \theta \vec{u}_z = \frac{\mu_0 i N}{2R \pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \vec{u}_z \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i N}{4R} \vec{u}_z}$$

❁ **Exercice 8**

1. Pendant la durée  $dt$  le cylindre aura tourné de l'angle  $d\theta = \omega dt$ .

Dans ces condition, un petit volume (rectangle) de longueur  $d\ell = r d\theta$  a traversé la section  $dr dz$ . Cela représente une charge totale  $dq = \rho r \omega dt dr dz$ .

Par définition de l'intensité, nous obtenons directement  $di = \rho r \omega dr dz$ .

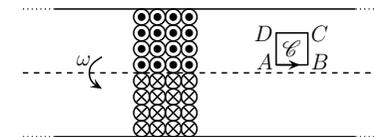
2. Ici la distribution est de type « fil ».

► **Utilisation des symétries.** Soit  $M$  un point quelconque. Tout plan orthogonal à  $\vec{u}_z$  (axe du cylindre) est plan de symétrie des sources, donc est un plan d'antisymétrie de  $\vec{B}$ , donc  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan et s'écrit *ie.*  $\vec{B}(M) = B_z(M) \vec{u}_z$ .

Comme la distribution est invariante par translation suivant  $\vec{u}_z$  et par rotation autour de  $\vec{u}_z$ , les composantes du champ  $\vec{B}$  ne dépendent que de  $r$  et donc  $\vec{B}(M) = B_z(r) \vec{u}_z$ .

► **Première relation.** Utilisons le théorème d'AMPÈRE sur le contour  $\mathcal{C}$  représenté ci-dessous et entourant la spire située entre  $r$  et  $r + dr$  et entre  $z$  et  $z + dz$ .

Nous avons donc  $C = C_{AB} + C_{BC} + C_{CD} + C_{DA}$ . Avec  $C_{BC} = C_{DA} = 0$  parce que  $\vec{B}$  est orthogonal à  $d\vec{\ell}$  nous trouvons  $C = B(r) dz - B(r + dr) dz$ .



Or le théorème d'AMPÈRE nous dit que  $C = \mu_0 i_{\text{enlacé}} = \mu_0 di = \mu_0 \rho r \omega dr dz$ .

Comme  $B(r + dr) - B(r) = \frac{dB(r)}{dr} dr$  nous trouvons, en rassemblant :

$$\frac{dB(r)}{dr} = -\mu_0 \rho r \omega \rightsquigarrow B(r) = -\frac{\mu_0 \rho \omega}{2} r^2 + C^{\text{te}}$$

► **Deuxième relation.** Nous pouvons considérer la distribution comme la réunion de solénoïdes infinis.

Comme nous savons qu'à l'extérieur des solénoïdes infinis le champ magnétique est nul, nous en déduisons qu'ici  $B(r > R) = 0$ .

► **Relation de continuité.** Le champ magnétique étant continu en  $r = R$  or nous avons  $B(R^-) = B(R^+) = 0$ , ce qui permet de déterminer l'expression de la constante et ainsi  $B(r) = \frac{\mu_0 \rho \omega}{2} (R^2 - r^2)$ .

3. Oui, ces charges sont aussi à l'origine d'un champ électrostatique. Ce n'est pas le cas pour les circuits électriques usuels car ces derniers sont globalement neutres... contrairement au bareau que l'on étudie ici.

Les mêmes invariances donnent  $\vec{E} = \vec{E}(r)$  et les symétries (la distribution reste symétrique malgré sa rotation – sinon elle ne serait pas invariante par rotation –) :  $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$  où  $\vec{u}_r$  est le vecteur de la base cylindro-polaire associée au point  $M$  où l'on cherche à déterminer le champ.

Utilisons le théorème de GAUSS. Pour cela prenons comme surface de GAUSS un cylindre passant par  $M$  de hauteur  $h$  et d'axe  $(Oz)$ .

► **Le flux.** Le flux vaut  $\Phi = E(r) \times 2\pi r \times h$  (le flux est non nul uniquement pour la partie latérale de la surface de GAUSS parce que le champ  $\vec{E}$  est tangent aux deux bases de cette surface).

► **Si  $r < R$ .** Nous avons  $Q_{\text{int}} = \rho \times \mathcal{V}$  où  $\mathcal{V}$  est le volume délimité par la surface de GAUSS.

Ainsi  $Q_{\text{int}} = \rho \times \pi r^2 \times h$ .

Le théorème de GAUSS nous dit que  $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$  d'où  $E(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$ .

► **Si  $r > R$ .** Nous avons  $Q_{\text{int}} = \rho \times \mathcal{V}_0$  où  $\mathcal{V}_0$  est le volume du bareau contenu dans la surface de GAUSS.

Ainsi  $Q_{\text{int}} = \rho \times \pi R^2 \times h$ .

Le théorème de GAUSS nous dit que  $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$  d'où  $E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$ .

☛ **Remarque :** comme la distribution est à répartition volumique de charges, il n'y a pas de surface chargée et, donc, pas de discontinuité de  $\vec{E}$ .

☛ **Exercice 9**

**[1.]** Le champ créé par une spire sur son axe (résultat à redémontrer systématiquement) vaut  $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z$  où  $R$  est le rayon de la spire,  $i$  le courant qui la traverse et  $\alpha$  l'angle sous lequel le rayon est vu du point  $M$ .

Ici les  $N$  spires sont confondues, donc nous avons  $\vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z$ .

Comme au centre de la bobine  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , cela donne :

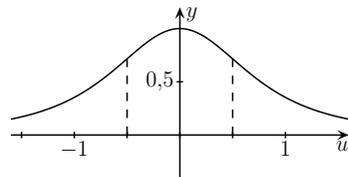
$$\vec{B} = B_0 \sin^3 \alpha \vec{u}_z \rightsquigarrow y = \frac{B}{B_0} = \sin^3 \alpha = \frac{R^3}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \rightsquigarrow y(u) = \frac{1}{(1 + u^2)^{3/2}}$$

Les points d'inflexion sont les points où la dérivée seconde est nulle.

Nous trouvons :

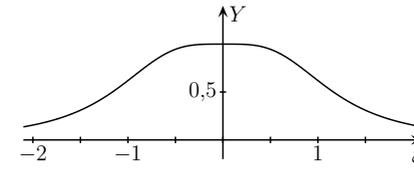
$$\frac{dy(u)}{du} = -\frac{3u}{(1+u^2)^{5/2}} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y(u)}{du^2} = \frac{12u^2 - 3}{(1+u^2)^{7/2}}$$

Nous avons alors  $\frac{d^2y(u)}{du^2} = 0$  pour  $u = \pm \frac{1}{2}$ .



**[2.]** Par principe de superposition, nous pouvons écrire  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  soit  $B = B_0 \sin^3 \alpha_1 + B_0 \sin^3 \alpha_2$  et en remplaçant (et adaptant) par l'expression trouvée à la question précédente :

$$B(x) = B_0 \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + (x - R/2)^2}} \right)^3 + B_0 \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + (x + R/2)^2}} \right)^3$$



Ainsi  $B_C = B(0) = B_0 \frac{8}{5^{3/2}} + B_0 \frac{8}{5^{3/2}}$  soit  $B_0 \frac{16}{5\sqrt{5}}$  et

$$Y(\xi) = \frac{5\sqrt{5}}{16[1 + (\xi - 1/2)^2]^{3/2}} + \frac{5\sqrt{5}}{16[1 + (\xi + 1/2)^2]^{3/2}}$$

**[3.]** Nous pouvons écrire  $Y(\xi) = \frac{5\sqrt{5}}{16} \times y\left(\frac{1}{2} - \xi\right) + \frac{5\sqrt{5}}{16} \times y\left(\frac{1}{2} + \xi\right)$ .

Les développements de Taylor de  $y$  correspondant donnent :

$$y\left(\frac{1}{2} - \xi\right) = y(1/2) - \xi y'(1/2) + \frac{\xi^2}{2} y''(1/2) - \frac{\xi^3}{6} y^{(3)}(1/2) + \frac{\xi^4}{24} y^{(4)}(1/2)$$

$$\text{et} : y\left(\frac{1}{2} + \xi\right) = y(1/2) + \xi y'(1/2) + \frac{\xi^2}{2} y''(1/2) + \frac{\xi^3}{6} y^{(3)}(1/2) + \frac{\xi^4}{24} y^{(4)}(1/2).$$

$$\text{Ainsi } Y(\xi) = \frac{5\sqrt{5}}{8} y(1/2) + \frac{5\sqrt{5}}{16} \xi^2 y''(1/2) + \frac{5\sqrt{5}}{192} \xi^4 y^{(4)}(1/2).$$

Avec  $y(1/2) = \frac{8}{5\sqrt{5}}$  et  $y''(1/2) = 0$  nous obtenons  $Y(\xi) = 1 + \frac{5\sqrt{5}}{192} \xi^4 y^{(4)}(1/2)$ .

Par calcul pas difficile bien qu'un peu lourd, nous trouvons :

$$\frac{d^3y}{du^3} = 15 \times \frac{3u - 4u^3}{(1+u^2)^{9/2}} \quad \text{et} \quad \frac{d^4y}{du^4} = 45 \times \frac{1 - 12u^2 + 8u^4}{(1+u^2)^{11/2}}$$

Numériquement :  $y^{(4)}(1/2) = -19,78$ .

Nous cherchons maintenant  $\xi$  tel que  $\left| \frac{\xi^4}{12} \times \frac{5\sqrt{5}}{16} y^{(4)}(1/2) \right| \leq \frac{1}{1000}$ . Numériquement, cela donne :

$$|\xi| \leq 0,171$$

Ainsi pour un intervalle de  $2\xi_{\text{max}} \approx R/3$ , nous peut considérer le champ  $\vec{B}$  comme constant (à un millième près).

Le dispositif permet de créer de manière simple et peu onéreuse des champs « très » uniformes dans un domaine non négligeable au niveau macroscopique.