

Les dipôles électromagnétiques

✿ Le cours

[1.] Nous ne pouvons pas savoir *a priori* quand nous n'avons jamais fait le calcul. Dans ce genre de cas, soit nous nous disons que nous sommes dans un cas normal et alors nous pouvons faire le pari qu'un développement à l'ordre 1 suffit, soit nous nous disons que de toutes façons nous n'avons jamais de chance et nous calculons directement à l'ordre 17, histoire d'être sûr. À la fin du calcul, nous ne garderons que le premier ordre non nul.

Notez que la plupart des développements limités se font à l'ordre 1 ou à l'ordre deux quand il s'agit d'énergétique. Pour les développements limités à l'ordre 3 ils sont rares mais relativement présents dans les problèmes non linéaires et pour un développement limité à l'ordre 4, allez voir du côté des bobines d'Helmholtz.

[2.] Parce que le calcul du champ \vec{E} nécessite le calcul de trois composantes : une pour chaque vecteur de base. Même si nous pouvons réduire ce nombre à deux calculs (grâce aux symétries), nous préférons calculer un seul nombre (celui du potentiel) et le dériver.

[3.] Lorsque nous manipulons du polystyrène expansé, nous l'électrifions par frottement (comme une règle contre de la laine). Les molécules de la peau sont polarisables : elles acquièrent un moment dipolaire de même sens que \vec{E} à l'approche de ces billes, sources de champ. La force qui s'exerce sur les dipôles est alors dirigée vers les billes car le champ y est plus intense et que les moments dipolaires sont dans le même sens que \vec{E} . La loi des actions réciproques indique que les petites billes subissent une force tendant à les faire se diriger vers le doigt. Entre les deux partenaires, c'est les billes qui ont la masse la plus faible et qui, donc, subissent l'accélération la plus intense : ce sont elles qui bougent.

[4.] Les forces sont seulement identiques en apparence. En effet, écrire $f = p \frac{dE_x}{dx}$ pour un dipôle non rigide c'est oublier une partie des phénomènes sous-jacents, à savoir que la polarisation, et donc le moment dipolaire p , dépend du champ E .

Ainsi il est plus judicieux et exact de dire que la force subie par un dipôle non rigide c'est $f = \alpha \varepsilon_0 E_x \frac{dE_x}{dx}$ et que celle-ci peut s'écrire, pour ressembler à une formule connue, $f = p \frac{dE_x}{dx}$. Les forces étant fondamentalement différentes, il est normal que les énergies potentielles le soient aussi.

✿ Exercice 1

[1.] *Analyse physique.* Le problème possède une seule invariance par rotation autour de l'axe portant le segment. Nous allons donc utiliser un repérage de type cylindro-polaire.

Soit M un point du plan médiateur \mathcal{P} :

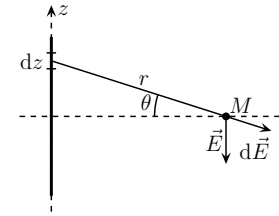
- \mathcal{P} est un plan d'antisymétrie des sources
- donc \mathcal{P} est un plan d'antisymétrie de \vec{E}
- donc $\vec{E}_{(M \in \mathcal{P})}$ est orthogonal à ce plan
- donc $\vec{E}_{(M \in \mathcal{P})}$ est porté par \vec{u}_z

Analyse technique. Inutile de penser à GAUSS puisqu'il n'y a pas assez de symétrie. Le potentiel ne nous en apprendra pas plus car si nous pouvons calculer le potentiel dans le plan médiateur, avec l'expression du gradient, nous ne pourrions en déduire que l'expression de la composante sur \vec{u}_r du champ, composante dont nous savons déjà qu'elle est nulle. Reste la loi de COULOMB. Notons au passage que le potentiel dans le plan médiateur est nul puisqu'il s'agit d'un plan d'antisymétrie des sources.

Les deux parties supérieure et inférieure au plan $z = 0$ ont la même contribution au champ. Il suffit donc de calculer $E_{\text{sup}} = \int_{z=0}^a dE_z$ pour avoir le champ total : $\vec{E}_{\text{tot}} = 2 E_{\text{sup}} \vec{u}_z$.

Avec les notations du schéma ci-dessous, nous avons directement : $E_{\text{sup}} = \int_0^a \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} (-\sin\theta) dz$.

Nous ne pouvons pas intégrer directement car r , θ et z sont intimement liés : quand l'un varie, les autres aussi.



Nous avons $\tan\theta = \frac{z}{b}$ donc $\frac{dz}{b} = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$ et $r = \frac{b}{\cos\theta}$.

En notant θ_0 l'angle maximal pour θ nous avons, après simplifications :

$$E_{\text{sup}} = - \int_0^{\theta_0} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 b} \sin\theta d\theta = - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 b} (1 - \cos\theta_0)$$

Le champ total vaut donc : $\vec{E}(M) = - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \vec{u}_z$.

[2.] Faisons un développement limité à l'ordre 1 :

$$\vec{E}(M) = - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/b^2}}\right) \vec{u}_z = - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b} \left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{2b^2}\right)\right] \vec{u}_z$$

Et ainsi $\vec{E}(M) = - \frac{\lambda a^2}{4\pi\varepsilon_0 b^3} \vec{u}_z$.

Cela correspond à un dipôle dont les deux charges $q = \pm \lambda a$ sont séparées par la distance a : c'est ce que nous obtenons en considérant les barycentres des charges positives et négatives.

✿ Exercice 2

[1.] Voir cours : nous obtenons $\vec{E} = E_z \vec{u}_z$ avec $E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$ où $Q = 2\pi R$ est la charge totale de la spire.

[2.] Nous sommes dans le cas du cours, la force subie par le dipôle vaut donc

$$f_z = - \frac{dE_p}{dz} = p \frac{dE}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{pQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right) = \frac{pQ}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(z^2 + R^2)^{5/2}} \right)$$

Il y aura équilibre lorsque $f = 0$ c'est-à-dire pour $3z^2 = z^2 + R^2$, i.e. pour $z_{\text{eq}} = \pm \sqrt{2} R$.

Pour déterminer si les positions d'équilibre sont stables, nous pouvons dériver une seconde fois l'énergie potentielle remplacer par les valeurs de z_{eq} et tester la positivité. Nous pouvons. Le lecteur voulant tester son habileté calculatoire (ce qui est toujours conseillé) trouvera sans trop de difficulté

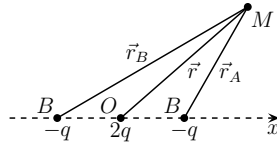
$$\frac{d^2 E_p}{dz^2}(\pm z_{\text{eq}}) = \pm \frac{pQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Sinon nous pouvons remarquer qu'il y aura équilibre stable lorsque \vec{p} et \vec{E} seront dans le même sens, ce qui correspond à la position $\boxed{+\sqrt{2}R}$.

✳ Exercice 3

Analyse physique. Ici les barycentres des charges positives et négatives sont confondus, nous n'avons donc pas affaire à un dipôle. Dans ces conditions, avec un calcul usuel, le terme d'ordre 1 (le terme dipolaire) devrait disparaître. Il va être nécessaire, dès le début de laisser le terme d'ordre 2.

Le potentiel s'écrit directement : $V(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_A} + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$.



Comme $\vec{r}_A = \vec{r} - \vec{a}$, nous avons $r_A^2 = r^2 + a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{r}$, soit :

$$\frac{1}{r_A} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \cos \theta \right)^{-1/2}$$

Utilisons le développement limité à l'ordre 2 suivant :

$$(1 + \epsilon)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 \quad \text{où} \quad \epsilon = \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \cos \theta$$

$$\text{Nous trouvons alors } \frac{1}{r_A} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^2}{2r^2} \cos^2 \theta \right).$$

En procédant de la même manière, mais en faisant attention aux signes, nous obtenons :

$$\frac{1}{r_B} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^2}{2r^2} \cos^2 \theta \right)$$

En utilisant ces expressions dans le calcul du potentiel, nous arrivons, finalement après simplifications, à : $\boxed{V(M) = \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 - 3\cos^2 \theta)}$.

Ce potentiel décroît en $1/r^3$, c'est-à-dire plus vite que le potentiel dipolaire : il s'agit d'un terme quadripolaire.

✳ Exercice 4

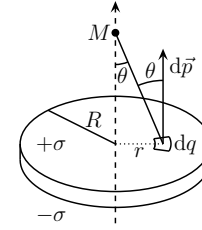
1. ► D'abord un seul disque.

Déterminons d'abord le potentiel en un point M situé sur l'axe d'un disque chargée surfaciquement. Le potentiel créé en M par une couronne circulaire de rayon r et de largeur dr vaut :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

Ainsi, le potentiel créé en M par l'ensemble s'écrit :

$$V(M) = \int_0^R dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - |z|)$$



► Ensuite pour les deux disques

En choisissant l'origine du repère au centre des deux faces, le potentiel créé en M :

$$\rightarrow \text{par la face supérieure est : } V_+(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{\left(z - \frac{a}{2}\right)^2 + R^2} - \left(z - \frac{a}{2}\right) \right];$$

$$\rightarrow \text{par la face inférieure est : } V_-(z) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{\left(z + \frac{a}{2}\right)^2 + R^2} - \left(z + \frac{a}{2}\right) \right];$$

$$\rightarrow \text{par le disque entier : } V(z) = V_+(z) + V_-(z).$$

► Simplification

Pour un point éloigné, on a, en utilisant les développements limités :

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(z \pm \frac{a}{2}\right)^2 + R^2} &\stackrel{\text{DL}}{=} \sqrt{z^2 + R^2} \pm az = \sqrt{z^2 + R^2} \sqrt{1 \pm \frac{az}{z^2 + R^2}} \\ &= \sqrt{z^2 + R^2} \left(1 \pm \frac{az}{2(z^2 + R^2)} \right) \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors que :

$$V(z) = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \left(1 - z \frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z^2 + R^2} \right) \rightsquigarrow \boxed{V(z) = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right]}$$

2. Comme tous les plans contenant l'axe (Oz) sont plans de symétries des sources, le champ électrique sur l'axe appartient à tous ces plans donc à leur intersection : l'axe (Oz) .

Ainsi, il suffit juste de déterminer la composante suivant \vec{u}_z du champ \vec{E} qui n'est autre que

$$E_z = -\frac{dV}{dz}$$

$$\text{Nous aboutissons à } \boxed{E_z(z) = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0 R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-3/2}}$$

3. Si nous considérons les deux éléments des surfaces dS en regard sur les deux faces, ils portent les charges $dq = \sigma dS$ et $-dq = -\sigma dS$.

Ils constituent donc un dipôle de moment dipolaire $d\vec{p} = a dq = a\sigma dS$.

Ce dipôle, de centre I ($OI = r$), crée en M ($IM = \sqrt{r^2 + z^2}$) le potentiel :

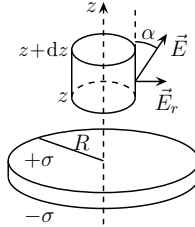
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{p} \cos \theta}{IM^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z d\vec{p}}{IM^3} \quad \text{avec} \quad \theta = (\vec{u}_z, \vec{IM}) \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{z}{IM}$$

Les dipôles contenus dans la couronne de centre O , de rayon r et de largeur dr créent donc en M le potentiel : $dV_{\text{cour}} = \int dV = \frac{a \sigma z}{2 \varepsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$.

Nous en déduisons le potentiel :
$$V = \int_0^R dV_{\text{cour}} = \frac{\sigma a}{2 \varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right).$$

4. Pour trouver la direction de \vec{E} en un point proche de l'axe, nous allons nous contenter de chercher la composante sur \vec{u}_r du champ et faire l'approximation que la composante sur \vec{u}_z du champ est identique en un point proche de l'axe et sur l'axe.

► **Présentation de la stratégie.** Nous allons appliquer le théorème de GAUSS à la surface de GAUSS cylindrique de rayon r , d'axe (Oz) de hauteur dz . Comme la charge à l'intérieur est nulle, le flux total du champ \vec{E} à travers cette surface est nul. En notant ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_{lat} les flux à travers les surfaces respectivement supérieure, inférieure et latérale, le théorème de GAUSS donne $0 = \phi_1 + \phi_2 + \phi_{\text{lat}}$.



► **Pour les faces supérieure et inférieure.** Les faces étant orthogonales à l'axe \vec{u}_z , le vecteur surface vaut $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$ et donc le flux $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ s'écrit $\phi_1 = E_z(z+dz) dS = E_z(z+dz) \pi r^2$.

De même pour la face inférieure, nous avons $d\vec{S}_2 = -dS \vec{u}_z$ d'où $\phi_2 = -E_z(z) \pi r^2$.

► **Pour la face latérale.** Comme la distribution est invariante par rotation autour de \vec{u}_z , nous avons $\vec{E}(r, z)$.

Comme en tout point de la surface, le vecteur surface $d\vec{S}_{\text{lat}}$ vaut $dS_{\text{lat}} \vec{u}_r$, le flux s'écrit

$$\phi_{\text{lat}} = E_r(z) \times dS_{\text{lat}} = E_r(z) \times 2 \pi r dz$$

► **Rassemblement.** En simplifiant l'écriture de la nullité du flux total, nous arrivons à

$$(E_z(z+dz) - E_z(z)) r + E_r(z) 2 dz = 0$$

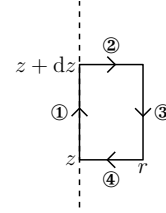
Comme $E_z(z+dz) - E_z(z) = \frac{\partial E_z}{\partial z} dz$, nous obtenons finalement : $E_r(z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z(z)}{\partial z}$ puis, après calculs :

$$\vec{E}(r, z) = \begin{cases} E_z = \frac{\sigma a}{2 \varepsilon_0 R} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-3/2} \\ E_r = \frac{3 \sigma a z r}{4 \varepsilon_0 R^3} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-5/2} \end{cases}$$

► **Direction.** Nous avons
$$\tan \alpha = \frac{E_r}{E_z} = \frac{3 r z^3}{2 R^2 (R^2 + z^2)}.$$

► **Pour calculer la composante sur \vec{u}_z du champ en un point proche de l'axe.**

Nous allons calculer la circulation sur le contour ci-dessous.



Nous avons, par conservation de la circulation du champ \vec{E} : $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$.

Pour la circulation sur ①, nous pouvons faire l'approximation que le champ est uniforme et ainsi :

$$C_1 = \vec{E}(z) \cdot (dz \vec{u}_z) = E_{\text{axe}}(z) dz$$

Pour la circulation sur ②, nous allons reprendre l'expression précédente car seule la composante sur \vec{u}_r est intéressante :

$$C_2 = \int_0^r \vec{E}(P)(z) \cdot (dr' \vec{u}_r) = \int_0^r E_r(r', z+dz) dr' = \int_0^r -\frac{r'}{2} \frac{dE_{\text{axe}}(z+dz)}{dz} = -\frac{r^2}{4} \frac{dE_{\text{axe}}(z+dz)}{dz}$$

Nous trouvons de même :

$$C_3 = -E_z(r, z) dz \quad \text{et} \quad C_4 = +\frac{r^2}{4} \frac{dE_{\text{axe}}(z)}{dz}$$

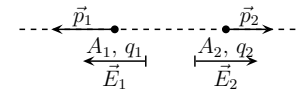
En rassemblant, cela donne :

$$E_{\text{axe}}(z) dz - \frac{r^2}{4} \frac{dE_{\text{axe}}(z+dz)}{dz} - E_z(r, z) dz + \frac{r^2}{4} \frac{dE_{\text{axe}}(z)}{dz} \rightsquigarrow E_z(r, z) = E_{\text{axe}}(z) + \frac{r^2}{4} \frac{d^2 E_{\text{axe}}(z)}{dz^2}$$

Nous pouvons constater que $E_z(r, z)$ et $E_{\text{axe}}(z)$ diffère par un terme en r^2 , ie. un terme d'ordre 2. Nous avons donc raison de le négliger.

✱ Exercice 5

► **intervention de la symétrie.** Comme la distribution initiale de charges (les deux ions) est symétrique par rotation autour de l'axe $A_1 A_2$, les moments dipolaires induits seront, eux aussi portés par l'axe $A_1 A_2$.



► **Étude du champ \vec{E}_1 .** Le champ \vec{E}_1 produit en A_1 par l'ion A_2 de charge q_2 et de moment dipolaire induit \vec{p}_2 est la somme de deux termes :

→ Le champ $\vec{E}'_1 = \frac{q_2}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\vec{A}_2 \vec{A}_1}{A_2 A_1^3} = -\frac{q_2}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}$ produit par la charge ponctuelle q_2 ;

→ la champ radial $\vec{E}''_1 = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{2 p_2 \cos \pi}{r^3} \left(\frac{-\vec{r}}{r} \right) = \frac{2 p_2}{4 \pi \varepsilon_0 r^3} \frac{\vec{r}}{r}$ produit par le dipôle \vec{p}_2 .

Le champ total d'écrit : $\vec{E}_1 = \vec{E}_1' + \vec{E}_1'' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(q_2 - \frac{2p_2}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r}$.

► **Étude du champ \vec{E}_2 .** La même étude (attention aux signes) permet d'aboutir à :

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(q_1 + \frac{2p_1}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r}$$

► **Rassemblement.** Nous avons aussi, par définition, $\vec{p}_1 = 4\pi\beta_1\epsilon_0\vec{E}_1$ et $\vec{p}_2 = 4\pi\beta_2\epsilon_0\vec{E}_2$.

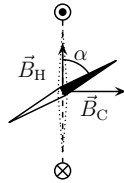
En remplaçant \vec{E}_1 et \vec{E}_2 par leur expression en fonction de \vec{p}_1 et \vec{p}_2 dans les équations précédentes, nous arrivons à un système de deux équations à deux inconnues dont les solutions sont :

$$\boxed{\vec{p}_1 = -\beta_1 \times \frac{q_2 - 2(\beta_2/r^3)q_1}{1 - (4\beta_1\beta_2/r^6)} \frac{\vec{r}}{r^3}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{p}_2 = \beta_2 \times \frac{q_1 - 2(\beta_1/r^3)q_2}{1 - (4\beta_1\beta_2/r^6)} \frac{\vec{r}}{r^3}}$$

✱ Exercice 6

[1.] Comme pour le dipôle électrostatique, la position d'équilibre correspond à l'alignement dans le même sens du moment magnétique \mathcal{M} et du champ magnétique \vec{B} . Ainsi, lorsque le courant circulera dans la bobine, le moment magnétique s'alignera avec le champ total $\vec{B} = \vec{B}_H + \vec{B}_C$.

En choisissant le plan de la bobine parallèle à la position d'équilibre de l'aiguille lorsqu'il n'y a pas de courant, nous avons directement (cf. schéma) $\tan \alpha = \frac{B_C}{B_H}$.



Or nous savons que le champ créé au centre de la bobine vaut $B_C = N \times \frac{\mu_0 I}{2R}$, ce qui donne :

$$\boxed{B_H = \frac{\mu_0 N I}{2R \tan \alpha} = 2,74 \cdot 10^{-5} \text{ T}}$$

[2.] La bobine est placée de sorte que le champ qu'elle crée en son centre soit colinéaire au champ terrestre.

La direction du champ total \vec{B} étant identique à celle du champ \vec{B}_H , la *direction* d'équilibre n'est pas modifiée.

Comme, en plus, nous supposons que $B_C > B_H$, le champ \vec{B} total reste tout le temps dans la même direction que \vec{B}_H : la position d'équilibre n'est pas modifiée.

Si nous avions eu $B_C < B_H$, il aurait existé un sens de I tel que la position d'équilibre aurait été tournée de 180° par rapport à l'absence de courant.



Le théorème du moment cinétique s'écrit, pour l'aiguille : $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{\Gamma}$.
La seule force de moment non nul est la force d'origine magnétique et

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = -\mathcal{M} B \sin \theta \vec{u}_z$$

Comme l'aiguille se comporte comme une tige sans masse, nous pouvons écrire :

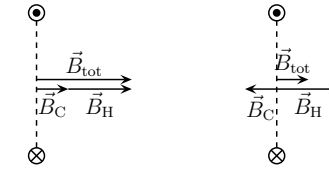
$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 = 2 \times \left(\ell \times \ell \dot{\theta} \times \frac{m}{2} \right) \vec{u}_z = m \ell^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

En projection sur \vec{u}_z , cela donne : $J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mathcal{M} B \sin \theta$.

La position d'équilibre $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ n'est pas modifiée et vaut toujours $\theta = 0$.

Pour les petits angles ($\sin \theta \approx \theta$) et les oscillations sont sinusoïdales de période $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M} B}}$.

Suivant le sens de I , le champ \vec{B}_C s'ajoute ou se retranche du champ terrestre \vec{B}_H .



Ainsi, soit $B = B_H + B_C$ soit $B = B_H - B_C$.

Nous avons donc :

$$T'^2 = 4\pi^2 \frac{J}{\mathcal{M} (B_H - B_C)} \quad \text{et} \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{J}{\mathcal{M} (B_H + B_C)}$$

Nous trouvons alors :

$$\frac{B_H + B_C}{B_H - B_C} = \frac{T'^2}{T^2} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{B_H = B_C \times \frac{T'^2 + T^2}{T'^2 - T^2}}$$