

Électromagnétisme

Chapitre 1

Approche globale du champ (\vec{E}, \vec{B})

Approche globale du champ (\vec{E}, \vec{B})

L'électromagnétisme est un phénomène très présent : lumière, électricité, ... Ces phénomènes sont décrits par ce que nous appellerons un champ électromagnétique \vec{E}, \vec{B} composé d'un champ électrique \vec{E} et d'un champ magnétique \vec{B} . Les deux champs sont fondamentalement indissociables : l'un ne va pas sans l'autre. Nous parlons de « champ » électrique ou magnétique car les sources créent un effet électrique et magnétique dans une grande zone de l'espace : il y aura un « vecteur » \vec{E} et un « vecteur » \vec{B} calculable en chaque point de l'espace et l'ensemble de ces vecteurs constituera le champ électromagnétique.

Le but de ce chapitre est de décrire quelles sont les sources du champ électromagnétique et d'apprendre à les déterminer. Nous verrons dans une première partie quelles sont les sources de champ électromagnétique et comment les décrire de manière pertinente afin d'en déduire quelques caractéristiques du champ engendré. Dans les deux parties suivantes, nous nous intéresserons plus particulièrement au champ électrique puis au champ magnétique.

Nous nous limiterons dans ce premier aperçu à des champs statiques, *ie.* indépendant du temps.

I – Sources et structure fondamentale du champ électromagnétique

I.1 – Sources de champ

I.1.i – des champs vectoriels

Un champ est dit *vectoriel* si, dans une certaine zone de l'espace, à chaque point est associé une grandeur vectorielle.

Le champ électrique $\vec{E}(M)$ et le champ magnétique $\vec{B}(M)$ sont des champs vectoriels.

◇ Autrement dit, contrairement au champ de pression où il suffisait de calculer *une* valeur $P(x,y,z)$ pour chaque point de la zone considérée, maintenant il faudra calculer **trois composantes** de chaque champ :

$$\vec{E}(M) = E_x(x,y,z) \vec{u}_x + E_y(x,y,z) \vec{u}_y + E_z(x,y,z) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = B_x(x,y,z) \vec{u}_x + B_y(x,y,z) \vec{u}_y + B_z(x,y,z) \vec{u}_z$$

I.1.ii – sources du champ électrostatique

Les sources du champ électrostatique sont les charges qu'elles soient immobiles ou en mouvement.

◇ La matière est globalement neutre, donc pour obtenir des charges au niveau macroscopique, il faut « travailler » la matière, par exemple par frottement (cf. électricité statique).

- ◇ Les charges (ions, électrons, ...) sont, en toute généralité, réparties dans un volume, nous devons alors définir la densité volumique de charge.

La *densité volumique de charge* au point P notée $\rho(M)$ est définie par :

$$dq = \rho(P) d\mathcal{V} \quad \text{où :}$$

→ $d\mathcal{V}$ est un volume infinitésimal autour de P ;

→ dq est la charge contenue dans $d\mathcal{V}$.

$$\rho \text{ s'exprime en } \text{C.m}^{-3}.$$

☛ *Remarque* : il n'y a aucune raison *a priori* pour que cette densité soit uniforme.

- ◇ Nous pouvons aussi écrire : $\rho = \frac{dq}{d\mathcal{V}}$, ce qui fait penser à une dérivée. Il s'agit bien d'une dérivée au sens où ρ est la manière dont varie q lorsque \mathcal{V} varie, mais nous n'utiliserons jamais l'opération technique calculatoire de dérivation pour calculer ρ ¹.

Le champ électrique est défini au sein d'une répartition volumique de charges.

I.1.iii – sources du champ magnétostatique

Les courants électriques sont des sources de champ magnétique.

- ◇ Les aimants permanents sont aussi sources de champ magnétique, mais cela dépasse le cadre du programme.
- ◇ De manière un peu plus générale, tout ensemble de charges qui bouge engendre un champ magnétique.
- ☛ *Remarque* : les lois que nous verront sont valables dans l'ARQS, *ie.* tant que les courants électriques sont « lentement » variables (jusqu'au Mhz, il n'y a pas de problème).
- ◇ Lorsque nous représentons le circuit source de champ magnétique, nous ne représentons pas le générateur nécessaire pour qu'un courant circule car là ne sera pas le but de l'étude.
- ◇ Toutefois nous remarquerons que les circuits doivent toujours être fermés.

Le champ magnétique n'est pas défini *sur* un fil parcouru par un courant.

I.1.iv – couplage entre champ magnétique et champ électrique

- ◇ Dans le cadre de champ statique, nous admettrons le résultats suivant :

Les champs électrostatique et magnétostatique sont découplés au sens où ils n'ont aucune influence directe l'un sur l'autre.

- ◇ Ainsi :

→ un ensemble non globalement neutre de charges engendre uniquement un champ électrostatique

¹Le lecteur est invité à réfléchir sur la manière dont il se représentait la dérivée pour comprendre qu'ici il s'agit bien de la même chose au sens physique, ce n'est que l'aspect technique qui change.

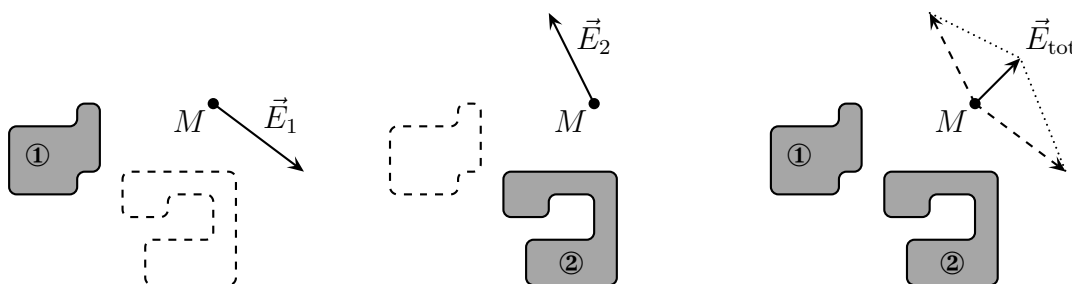
- un ensemble globalement neutre de charges dont seule une partie bouge engendre uniquement un champ magnétostatique
- ◇ Nous voyons donc qu'il est possible, avec un ensemble globalement non neutre qui bouge, de créer *simultanément* un champ électrostatique et un champ magnétostatique.
- ◇ En 2^e année, le lecteur constatera que les variations temporelles suffisamment rapides (*ie.* hors ARQS) de \vec{E} engendrent un champ \vec{B} et réciproquement.

I.1.v – principe de superposition

La disposition et la répartition des sources est appelée *distribution*.

Lorsqu'une distribution peut se voir comme la réunion de deux distributions ① et ②, le champ en un point M quelconque est la superposition du champ créé par ① comme si ② n'existait pas et du champ créé par ② comme si ① n'existait pas :

$$\vec{E}(M_0) = \vec{E}_1(M_0) + \vec{E}_2(M_0) \quad \text{et} \quad \vec{B}(M_0) = \vec{B}_1(M_0) + \vec{B}_2(M_0)$$



- ◇ C'est un principe fondamental : c'est sur ce principe que seront fondées les méthodes permettant de déterminer les champs.

Dans le vide et les milieux linéaires, les champs électriques et magnétiques obéissent au principe de superposition.

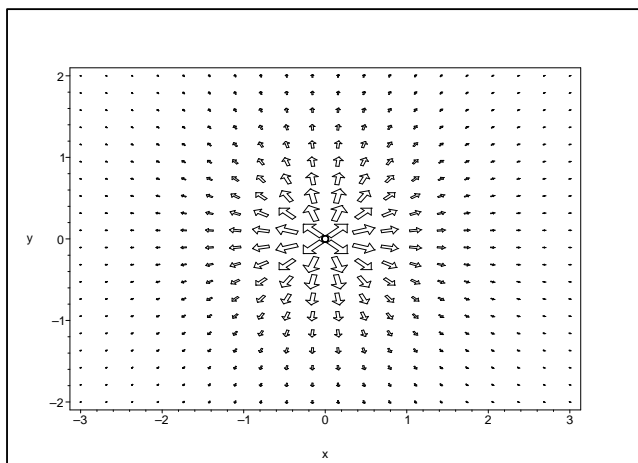
- ◇ Sauf indication contraire, tous les milieux sont *a priori* linéaires.
- ◇ Pour qu'un milieu soit non linéaire, il **faudrait** qu'il y ait des interactions entre le milieu et le champ **et** que ces interactions soient non linéaires. En dehors des milieux « spécialement prévus pour » ou des milieux utilisés dans des conditions extrêmes, le seul milieu furieusement non linéaire usuel est un milieu dit ferromagnétique : ce sont les aimants permanents que nous n'étudierons pas.

I.2 – Représenter les champs

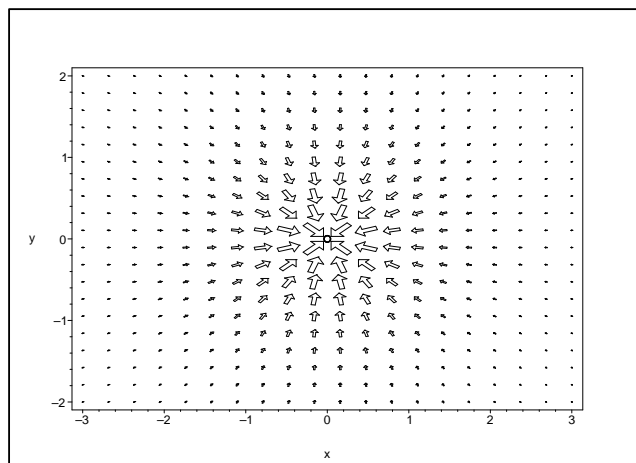
I.2.i – champ de vecteurs

- ◇ Sur l'illustration précédente, nous avons représenté le champ \vec{E} qu'en un seul point de l'espace ce qui peut prêter à confusion étant donné que le champ est *a priori* défini partout dans l'espace.
- ◇ Pour représenter l'ensemble du champ, nous pouvons représenter directement les vecteurs en plein de points différents.

Graphique 1



Graphique 2



◇ Légende :

- graphique 1 : champ électrostatique créé par une petite sphère positive ;
- graphique 2 : champ électrostatique créé par une petite sphère négative.

Dans une zone vide de l'espace, le champ \vec{E} a tendance à pointer vers les zones de charge négative et à pointer dans le sens opposé des zones de charge positive.

Dans une zone vide de l'espace, le champ \vec{E} en un point M est d'autant plus intense que le point M est proche d'une zone non vide de charge.

Le champ électrique ne varie notablement entre un point et son voisin qu'à proximité immédiate des sources.

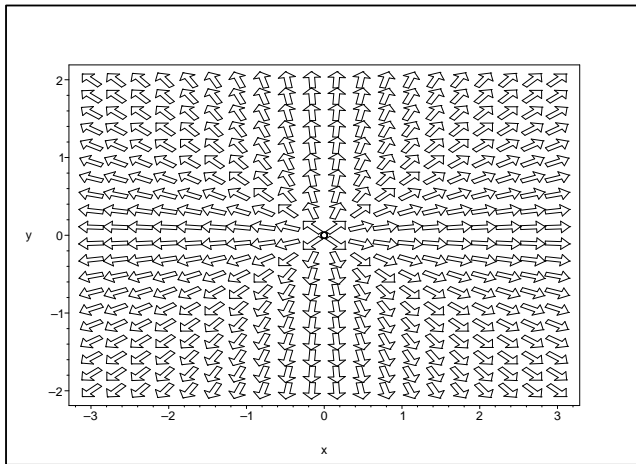
◇ Nous pouvons remarquer que cette représentation n'est pas très pratique parce que très lourde à réaliser en en plus assez confuse à cause de la grande variabilité de la taille des flèches représentatives.

I.2.ii – lignes de champs

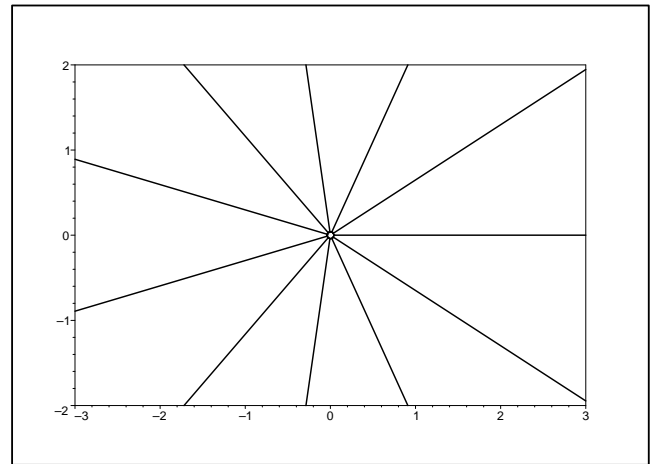
Une *ligne de champ* est une ligne orientée de l'espace tangente en chacun de ses points au champ qu'elle représente.

◇ Il ne semble *a priori* pas possible de lire l'intensité d'un champ sur une ligne, pourtant nous verrons plus tard que pour des lignes tracées dans une zone vide, avec tout un réseau de lignes de champs, nous pourrons le faire.

Graphique 3



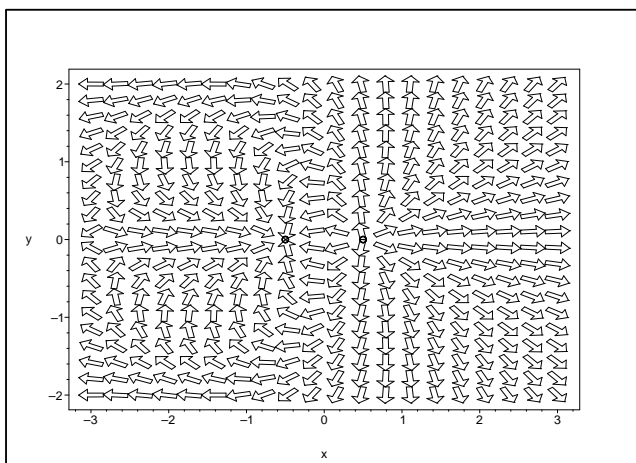
Graphique 4



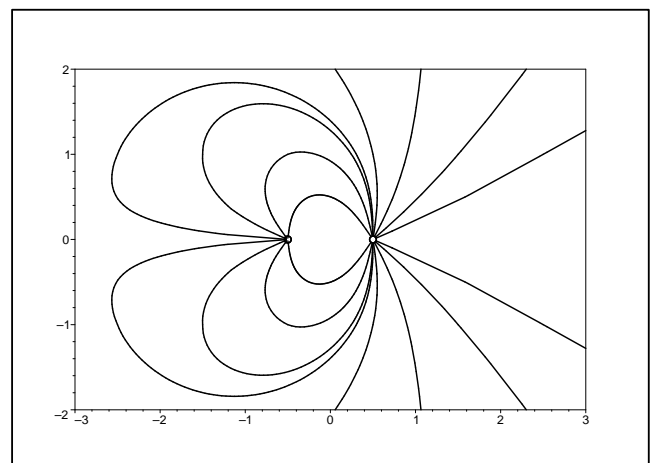
◇ Légende :

- graphique 3 : d'abord toutes les flèches représentant le champ sont mises à la même taille (charge positive) ;
- graphique 4 : ensuite les lignes sont tracées et il faut rajouter le sens des lignes

Graphique 5



Graphique 6



◇ Légende :

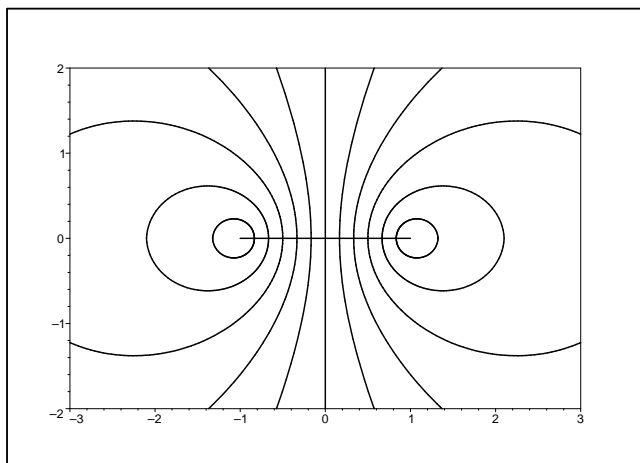
- graphique 5 : d'abord toutes les flèches représentant le champ sont mises à la même taille (charge positive) ;
- graphique 6 : ensuite les lignes sont tracées et il faut rajouter le sens des lignes

Dans une zone vide de l'espace, les lignes de champs électriques « sortent » des zones de charges positives et rentrent dans les zones de charges négatives.

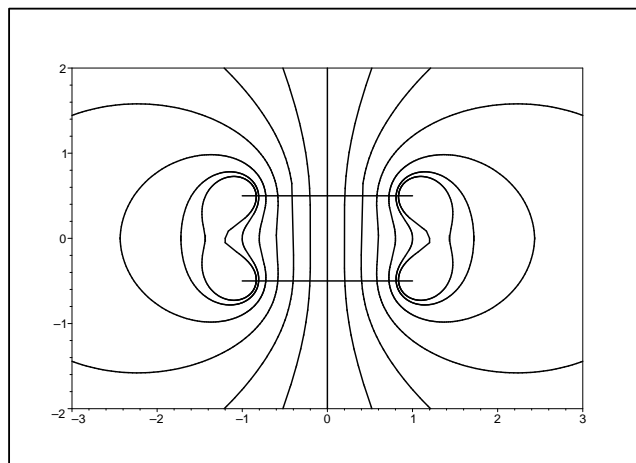
◇ Représentons maintenant quelques lignes de champ magnétique créé par des boucles circulaire de courant.

◇ Dans les schémas suivant les traits horizontaux représentent les petits circuits électriques circulaires vu de profil.

Graphique 7



Graphique 8



◇ Légende :

- graphique 7 : champ créé par une boucle de courant
- graphique 8 : champ créé par deux boucles de courant de même sens (dessiner quelques flèches et faire constater les symétries).

Dessiner quelques flèches sur les lignes de champ du graphique 7.

Le sens du champ magnétique créé par une boucle de courant à l'intérieur de celle-ci est donné par la règle de la main droite.

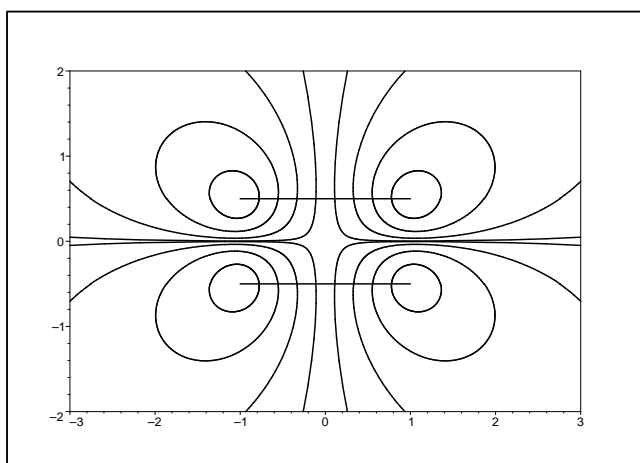
Le champ magnétique ne varie notablement entre un point et son voisin qu'à proximité immédiate des sources.

Dessiner quelques flèches sur les lignes de champ du graphique 8.

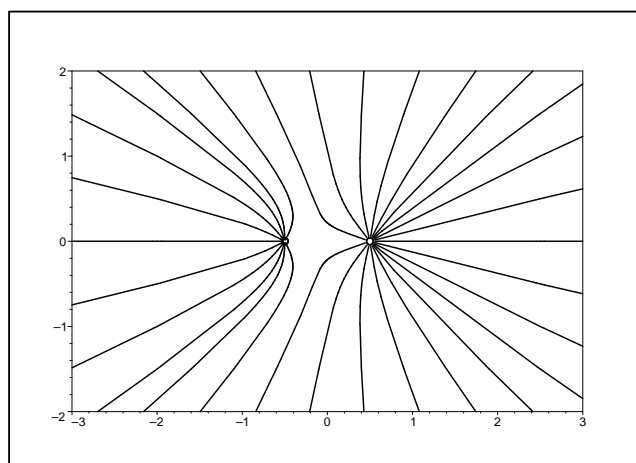
Les lignes de champs magnétiques forment des boucles autour des circuits électriques.

◇ Qualitativement, le dessin des lignes de champ magnétique est considérablement différent des lignes de champ électrique qui semblaient prendre leur source dans les charges.

Graphique 9



Graphique 10



◇ Légende :

- graphique 9 : champ créé par deux boucles de courant opposé.
- graphique 10 : champ créé par deux zones chargées, celle de droite étant positive
- ◇ Regardons les deux lignes de champ qui se touchent presque sur le graphique 9 et choisissons deux points M et M' , un sur chaque ligne, tels que M et M' soient très proches.
- ◇ Comme M et M' sont loin des sources, le champ créé par chacune des deux boucles est à peu près le même **donc** le champ résultant est lui aussi à peu près le même.
- ◇ En particulier les champs en M et M' sont de même sens.

Dans une zone vide de l'espace, deux lignes de champ proches l'une de l'autre ont le même sens.

Mettre le champ sur une des lignes de champ du graphique 9 et faire apparaître la contribution des deux boucles.

- ◇ Sur le graphique 9, nous avons l'impression que les lignes de champ se repoussent, ce qui est **faux** car le champ créé sur une des lignes est la résultante des champs créés par les deux boucles de courant.

Flécher les lignes de champs.

Prendre un point dans le plan médiateur des deux charges et montrer les contributions des deux charges.

- ◇ Même qualitativement, nous pouvons voir que la charge de droite est plus chargée que celle de gauche.

Les lignes de champ n'appartiennent à aucune source : chaque ligne est créée par l'ensemble de la distribution.

Lorsque deux lignes de champ se coupent :

- soit le champ est nul ;
- soit le champ n'est pas défini.

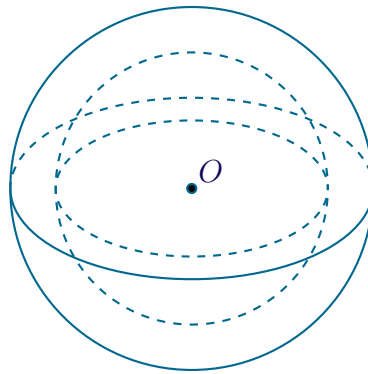
I.3 – Invariance des sources

I.3.i – description

Une distribution est dite *invariante* lorsqu'elle peut être bougée sans que cela ne change globalement la position des différentes sources.

★ invariance sphérique

Une distribution admet une *invariance sphérique* lorsque, décrite par les coordonnées sphériques, elle ne dépend que de r distance à un point de référence.



- ◇ Penser à une sphère, à des boules concentriques, un oignon, ... Nous avons déjà rencontré la symétrie sphérique dans le chapitre 7 de mécanique : c'était à propos des astres qui, lorsqu'ils étaient sphériques, se comportaient, du point de vue de la gravitation comme un point unique situé en leur centre.
- ☞ *Remarque* : il est particulièrement difficile d'avoir une distribution de courant respectant la symétrie sphérique. Ce n'est pourtant pas impossible avec des courants qui sortent tous du centre.

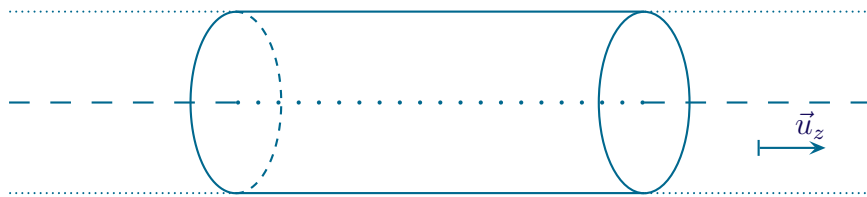
Nous appellerons *type sphère* une distribution qui admet une invariance sphérique.

⊛ cette dénomination n'est pas répandue! Ne la cherchez pas dans d'autres cours.

- ◇ Dans la mesure du possible (*ie.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous noterons O le centre de la distribution.

★ invariance par rotation et translation

Une distribution admet une *invariance par rotation et par translation* lorsque, décrite par les coordonnées cylindrique, elle ne dépend que de r distance par rapport à un axe.



- ◇ C'est le cas par exemple de cylindres infinis, pleins ou creux pour les charges ou, pour le champ magnétique, du fil infini.

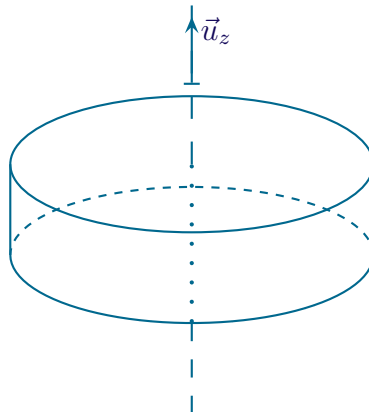
Nous appellerons *type fil* une distribution qui admet une invariance par rotation et une invariance par translation.

⊛ cette dénomination n'est pas répandue et encore moins conventionnelle! Ne la cherchez pas dans d'autres cours.

- ◇ Dans la mesure du possible (*ie.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous choisirons \vec{u}_z comme l'axe de symétrie.

★ une invariance par rotation

Une distribution admet une *invariance par rotation* lorsque, décrite par les coordonnées cylindriques, elle ne dépend pas de θ .



- ◇ Nous pouvons penser, par exemple, à une distribution volumique uniforme de charges formant un cône ou un disque pour le champ électrique ou, pour le champ magnétique, à une simple spire circulaire.

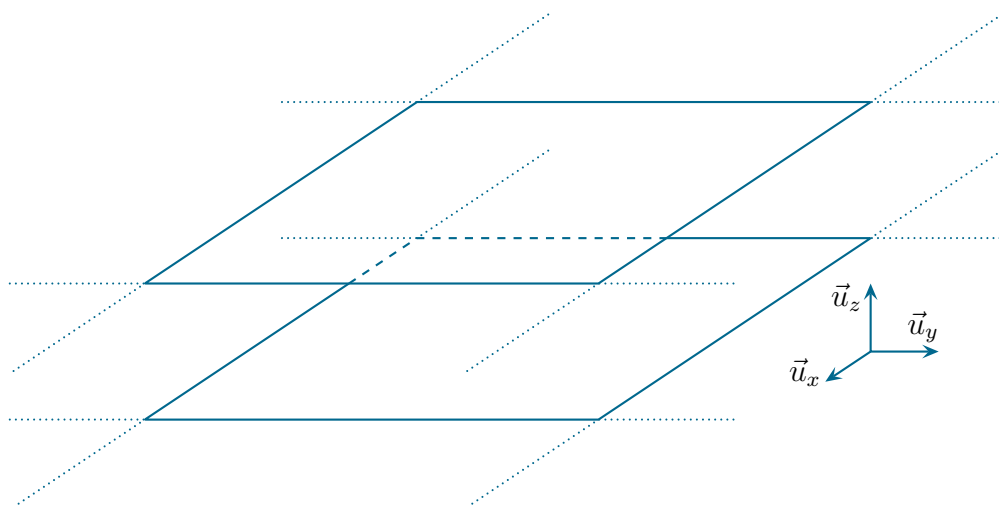
Nous appellerons *type disque* une distribution qui n'admet qu'une invariance par rotation.

⊛ cette dénomination, comme les précédentes n'est pas répandue! Ne la cherchez pas dans d'autres cours.

- ◇ Dans la mesure du possible (*ie.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous choisirons \vec{u}_z comme l'axe de symétrie.

★ deux invariances par translation

Une distribution admet deux *invariances par translation* lorsque, décrite par les coordonnées cartésienne, elle ne dépend que d'une seule coordonnée.



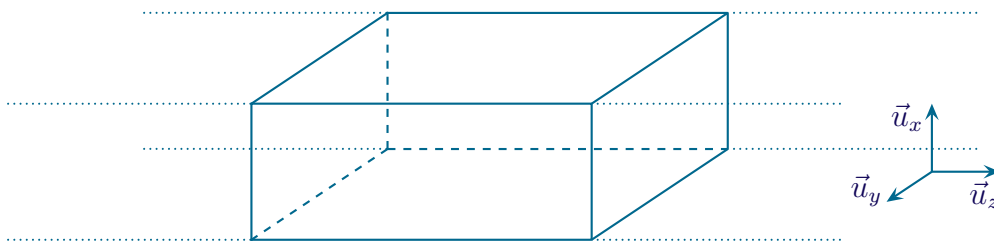
- ◇ C'est parce exemple le cas d'un espace délimité par deux plans infinis entre lesquels il y aurait une densité volumique ρ uniforme de charge.

Nous appellerons *type plan* une distribution qui admet deux invariances par translation.

- ⊛ cette dénomination non plus n'est pas répandue ! Ne la cherchez pas dans d'autres cours.
- ◇ Dans la mesure du possible (*ie.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous choisirons \vec{u}_z comme « pas comme les autres », *ie.* l'axe normal aux deux axes de translations.
- ◇ Pour le champ magnétique, nous pouvons penser à ce qu'on appelle une nappe de courant comme il en existe, dans les ordinateurs. Attention : la nappe doit être infinie dans les deux directions, *ie.* être composée d'une infinité de fils infinis parallèles.

★ une invariance par translation

Une distribution admet une *invariances par translation* lorsque, décrite par les coordonnées cartésienne, elle ne dépend que d'une seule coordonnée.



- ◇ C'est, par exemple, le cas du ruban à section rectangulaire qui serait rempli de charges avec une densité uniforme : nous pouvons « déplacer » le ruban suivant \vec{u}_x sans que, globalement, la distribution ne change.
- ⊛ la section du ruban n'est pas forcément rectangulaire, elle peut être absolument quelconque sauf circulaire auquel cas nous retrouverions la symétrie type « fil ».
- ◇ Pour le champ magnétique, nous pouvons penser simplement à deux fils infinis parallèles parcourus par des courants identiques ou non.

Nous appellerons *type ruban* une distribution qui admet une invariance par translation.

- ⊛ de manière parfaitement surprenante, cette dernière dénomination n'est pas répandue ! Ne la cherchez pas dans d'autres cours.
- ◇ Dans la mesure du possible (*ie.* si les notations ne sont pas imposées par l'énoncé), nous choisirons \vec{u}_z comme « pas comme les autres », *ie.* l'axe de translation.

I-3.ii – liens avec les champs

Un champ admet les mêmes invariances que ses sources.

- ◇ Ainsi :

type	sphère	cylindre	disque	plan	ruban
distribution	$\rho(r)$ (ou $i(r)$)	$\rho(r)$ ou $i(r)$	$\rho(r,z)$ ou $i(r,z)$	$\rho(z)$ ou $i(z)$	$\rho(x,y)$ ou $i(x,y)$
champ	$\vec{E}(r)$	$\vec{E}(r)$ ou $\vec{B}(r)$	$\vec{E}(r,z)$ ou $\vec{B}(r,z)$	$\vec{E}(z)$ ou $\vec{B}(z)$	$\vec{E}(x,y)$ ou $\vec{B}(x,y)$

⊛ pour les sphères et les cylindres, ce ne sont pas les mêmes r !

I.4 – Plans de symétrie

◇ C'est une notion au sens large, car il existe deux types de plans de symétrie. D'ailleurs les invariances sont aussi appelées « symétries ».

I.4.i – description

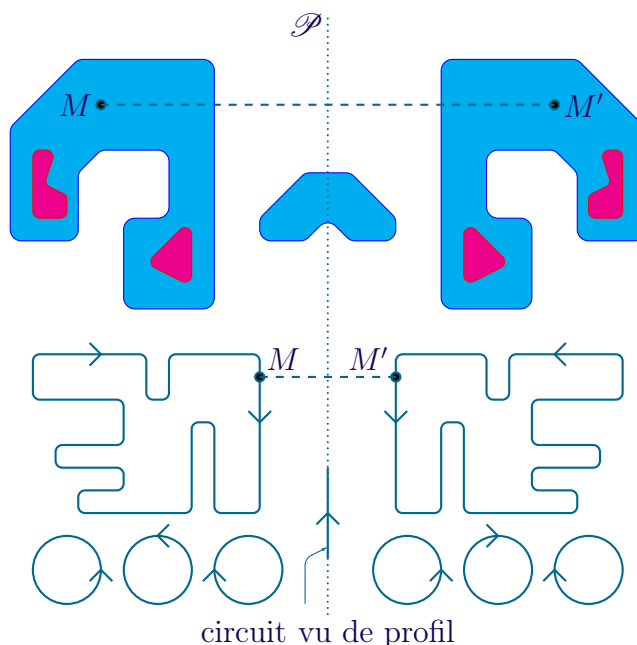
★ plan de symétrie des sources

Un plan – éventuellement fictif – est appelé *plan de symétrie des sources* lorsque pour un couple quelconque de points symétriques l'un l'autre par rapport à ce plan, la distribution est la même pour les deux.

◇ En notant M et M' deux points symétriques, cela signifie, pour les charges, que la condition est $\rho(M) = \rho(M')$.

◇ Pour les courants, il faut prendre en compte le petit bout de fil, *ie.* le sens du courant.

◇ Sur l'exemple suivant le plan (vu en coupe) \mathcal{P} représenté en pointillé est plan de symétrie des sources.

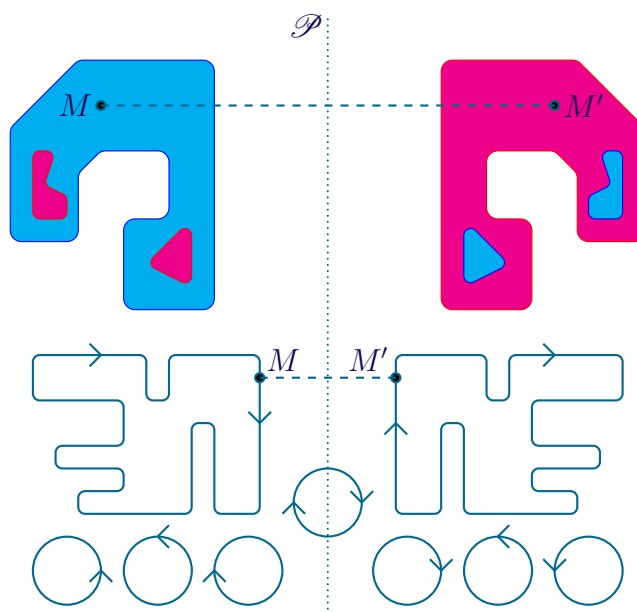


Un fil ne peut pas couper un plan de symétrie des source mais peut y être entièrement inclus.

★ plan d'antisymétrie des sources

Un plan – éventuellement fictif – est appelé *plan d'antisymétrie des sources* lorsque pour un couple quelconque de points symétriques l'un l'autre par rapport à ce plan, les distributions en ces deux points sont opposées l'une à l'autre.

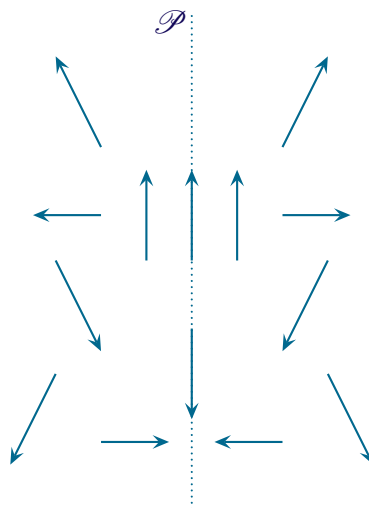
- ◇ Si on note M et M' les deux points, cela signifie, pour les charges, que la condition est $\rho(M) = -\rho(M')$.
- ◇ Pour les courants, il faut prendre en compte le petit bout de fil $i d\vec{\ell}$.



Il ne peut pas y avoir de charges sur un plan d'antisymétrie des sources.

★ plan de symétrie des champs

Un plan – éventuellement fictif – est appelé *plan de symétrie d'un champ* (\vec{E} ou \vec{B}) lorsque pour un couple quelconque de points M et M' symétriques l'un l'autre par rapport les champs $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont symétriques.

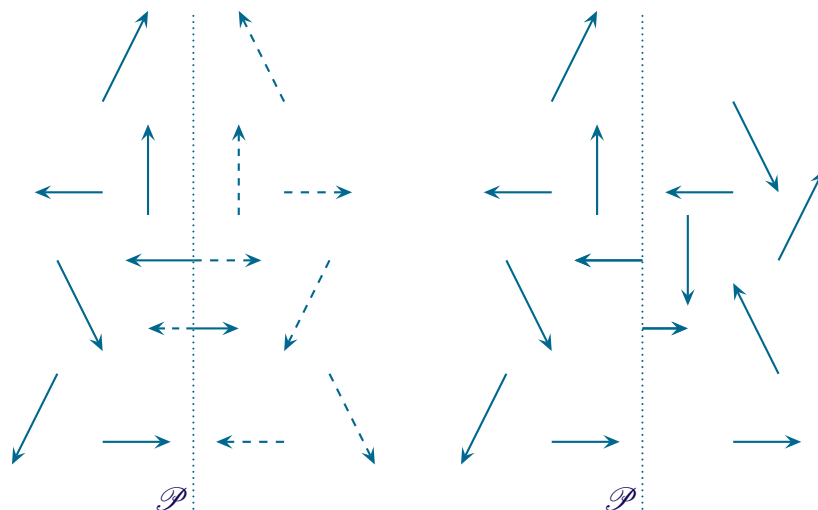


En un point d'un plan de symétrie du champ, le champ en ce point est contenu dans ce plan.

★ plan d'antisymétrie des champs

Un plan – éventuellement fictif – est appelé *plan d'antisymétrie d'un champ* (\vec{E} ou \vec{B}) lorsque pour un couple M et M' quelconque de points symétriques l'un l'autre par rapport à ce plan les champs $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont les opposés des symétriques.

◇ Autrement dit, il faut d'abord prendre le symétrique puis ensuite son opposé.



En un point d'un plan d'antisymétrie du champ, le champ en ce point est normal à ce plan.

◇ En représentation en terme de champ, il est clair qu'un champ qui admet un plan de symétrie se voit moins qu'un champ qui admet un plan d'antisymétrie. Mais en représentation en ligne de champ, les deux seront faciles à voir.

☞ *Remarque* : par extension, lorsque nous rechercherons les plans de « symétrie », cela comprendra évidemment la recherche des plans d'**antisymétrie**.

I.4.ii – liens avec les champs

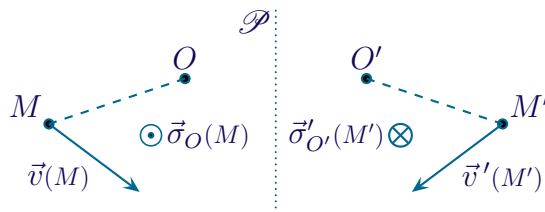
◇ C'est un peu particulier car \vec{E} et \vec{B} n'ont pas le même comportement.

Sources	champ \vec{E}	champ \vec{B}
Plan de symétrie	Plan de symétrie	Plan d'antisymétrie
Plan de d'antisymétrie	Plan de d'antisymétrie	Plan de symétrie

\vec{E} est appelé *vrai vecteur* ou *vecteur polaire*.

\vec{B} est appelé *pseudovecteur* ou *vecteur axial*.

- ◇ Il est possible de rencontrer la notation $\vec{\check{B}}$ pour un pseudo vecteur.
- ◇ Nous avons déjà rencontré un vecteur axial : le moment cinétique.
- ◇ En effet, si nous prenons deux situations parfaitement symétriques par rapport à un plan (imaginons pour cela qu'une des deux situations soit « l'autre » mais vue dans un miroir) les deux moments cinétiques admettent le plan comme plan d'antisymétrie.



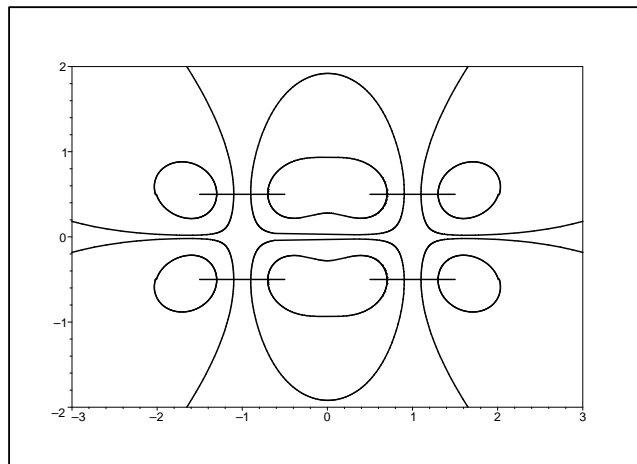
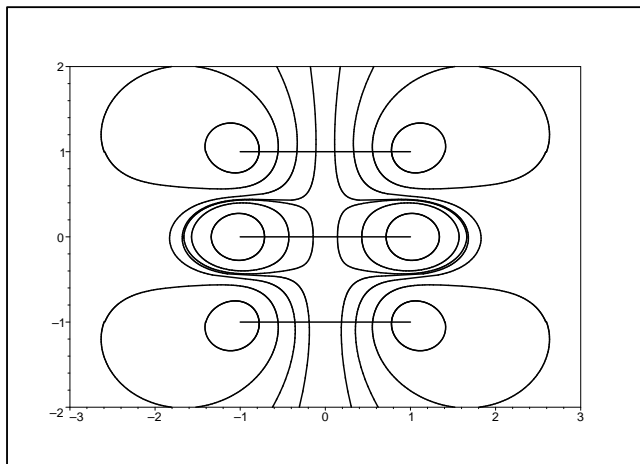
◇ Le rôle du produit vectoriel n'est pas anodin comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

I.4.iii – exemples

◇ Sur quelques exemples, cherchons les plans de symétries et d'antisymétries des sources et des champs.

Graphique 11

Graphique 12



◇ Légende :

→ graphique 11 : champ créé par trois boucles de courant

- graphique 12 : champ créé par 4 boucles de courant.
- ◇ Sur le graphique 11 la boucle du bas est parcourue par un courant « de gauche à droite ».
- ◇ Sur le graphique 12 la boucle du bas à gauche est parcourue par un courant « de gauche à droite ».

Faire orienter les lignes de champ et trouver les courants dans chaque boucle.

Faire trouver les plans de symétrie et d'antisymétrie des sources.

Faire trouver les plans de symétrie et d'antisymétrie des champs.

Les lignes de champ ne peuvent pas couper un plan de symétrie des champs mais peuvent couper (orthogonalement) un plan d'antisymétrie des champs.

I.4.iv – utilité

- ◇ La recherche des plans de symétrie des champ est très utile pour déterminer *a priori* la direction du champ en un point dudit plan.

En un point d'un plan de symétrie des sources, le champ \vec{E} est colinéaire à ce plan.
En un point d'un plan d'antisymétrie des sources, le champ \vec{E} est normal à ce plan.

En un point d'un plan de symétrie des sources, le champ \vec{B} est normal à ce plan.
En un point d'un plan d'antisymétrie des sources, le champ \vec{B} est colinéaire à ce plan.

I.5 – Analyser un problème d'électromagnétisme

- ◇ Analyser un problème consiste avant toute chose à :
 - quelles sont la ou les sources du champ considéré
 - quelles sont les invariances / quel repérage utiliser pour décrire ces sources
 - quels sont les plans de symétrie ou d'antisymétrie des sources
 - trouver les grandeurs pertinentes : description des sources, géométrie et structure (cf. parties suivantes)
- ◇ Cette analyse doit conduire :
 - à la focalisation de l'attention sur les sources de champ (schéma avec repérage)
 - à la dépendance du champ considéré (grâce aux invariances)
 - à la direction du champ considéré (grâce aux plans de symétrie et d'antisymétrie)
- ◇ L'analyse technique permettra, ensuite, de choisir quelle sera la « meilleure » approche pour la détermination proprement dite du champ.
- ◇ Dans les parties suivantes, nous allons nous intéresser à une seule méthode de détermination pour chaque champ.

II – Le champ électrostatique

II.1 – Le théorème de GAUSS

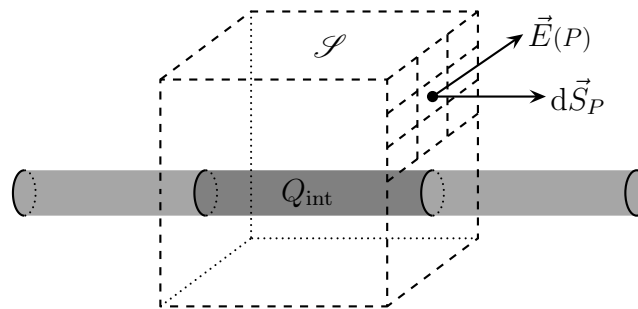
II.1.i – énoncé

THÉORÈME DE GAUSS

Soit une distribution quelconque de charges et une surface **fermée** \mathcal{S} – éventuellement fictive – quelconque. Nous pouvons alors écrire :

$$\oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \text{où :}$$

- $\vec{E}(P)$ est le champ \vec{E} en un point quelconque de \mathcal{S} ;
- $d\vec{S}_P$ est le vecteur surface au point P considéré, toujours normal et vers l'extérieur ;
- Q_{int} est la charge contenue dans le volume délimité par la surface de contrôle ;
- ε_0 est la permittivité du vide (en F.m^{-1})



Un champ électrique se mesure en V.m^{-1} .

Une surface est dite *fermée* lorsqu'elle sépare deux zones de l'espace : l'intérieur (fini) et l'extérieur (infini) de sorte qu'il ne soit pas possible d'aller d'un point *intérieur* à un point *extérieur* sans traverser la surface.

- ☛ *Remarque* : ne pas oublier le petit rond sur le symbole « somme » qui signifie, justement, que la surface est fermée.
- ◇ C'est une notion très intuitive en physique même si en mathématique elle peut être plus rigoureuse.
- ◇ Le théorème de GAUSS donne une information globale sur le champ, *ie.* ne donne pas le champ en *un* point mais sur toute une surface.
- ◇ La présence de Q_{int} ne doit pas faire croire que le champ n'est créé que par ce qui est à l'intérieur de la surface de contrôle : le champ est **toujours** créé par la totalité des charges. D'ailleurs il y a besoin de connaître toutes les charges ... pour bien choisir sa surface de GAUSS.

II.1.ii – notion de flux

La quantité $\iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}$ est notée Φ_E et est appelée *flux* de \vec{E} à travers \mathcal{S} .

- ◇ Le flux à travers une surface peut se représenter, s'imaginer, comme la « quantité de champ » qui passe à travers la surface, un peu à l'image d'un filet à papillons.
- ◇ Le flux ne se calcule pas forcément à travers une surface fermée, même si **pour le théorème de GAUSS** c'est obligatoire.

Le flux d'un champ de vecteur à travers une surface est positive si le champ est dirigé vers l'extérieur (*ie.* « sort » de la surface) et négative s'il est dirigée vers l'intérieur (*ie.* « rentre » dans la surface).

- ◇ Pour calculer un flux, nous allons faire « comme d'habitude » :
 - d'abord découper la surface en petits morceaux (importance d'un « bon choix » de surface et de repérage)
 - calculer le flux élémentaire $d\Phi$ sur chaque petit morceau (importance des lois physiques)
 - additionner le tout (quelques « calculs » à faire)

II.1.iii – interprétation

- ◇ Finalement ce théorème nous dit que :
 - une zone chargée fait soit sortir des lignes de champ (si elle est positive) soit elle fait rentrer des lignes de champ (si elle est négative)
 - en dehors des zones chargées, les lignes rentrent autant quelque part qu'elles n'en sortent.

II.1.iv – utilisation

- ◇ Ce théorème est toujours théoriquement applicable ! Ou presque : il ne faut pas de charges ponctuelles sur la surface, mais c'est un cas qui n'arrive pas en pratique car ...
- ◇ En pratique, il est difficilement applicable car le calcul de Φ est souvent malaisé.
- ◇ Pour que tout se passe bien (*ie.* pour que le calcul soit faisable) il faut qu'il y ait beaucoup de symétries et d'invariances.

Une « bonne » surface de GAUSS est une surface qui respecte les symétries de la distribution et qui contient en plein milieu d'elle-même le point où nous cherchons à déterminer le champ électrostatique.

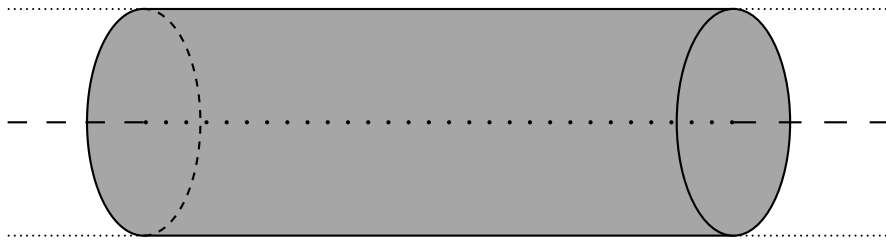
- ◇ Le reste est une affaire de pratique.

II.2 – Champ créé par un fil

II.2.i – description volumique

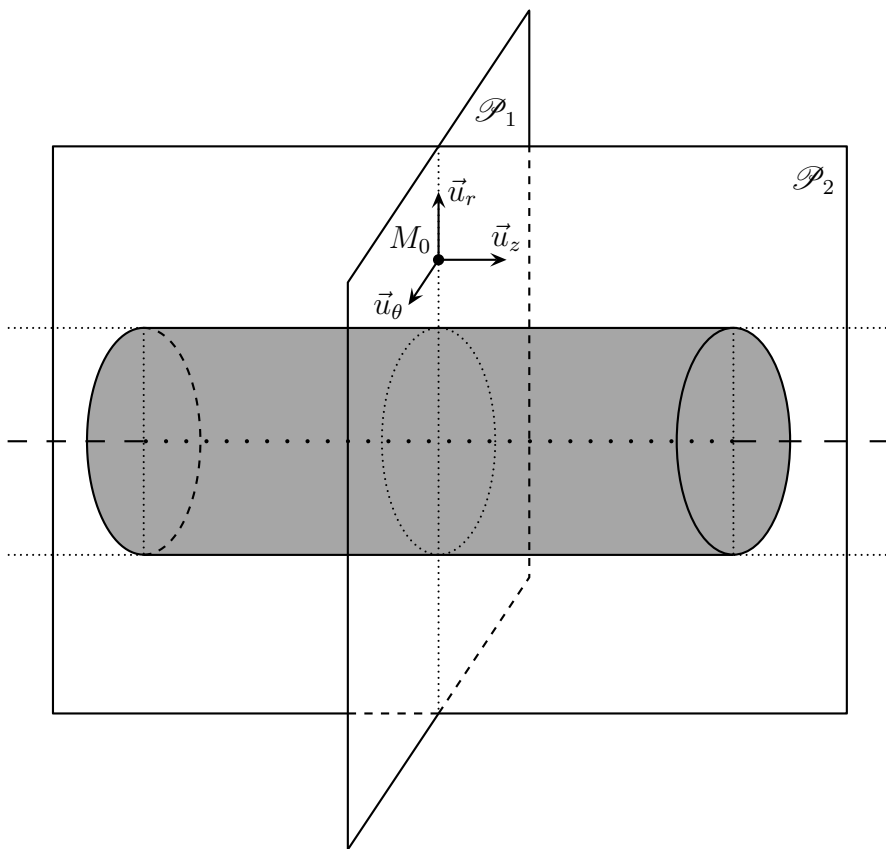
★ position du problème

- ◇ Considérons un cylindre infini de rayon R et uniformément chargé de charge volumique ρ .
- ◇ Cherchons le champ $\vec{E}(M)$ créé dans **tout l'espace**.



★ analyse physique

- ◇ Étant donné qu'il s'agit d'un cylindre, nous allons naturellement utiliser les coordonnées cylindro-polaires.
- ◇ La distribution est de type « cylindre » :
 - il y a invariance par rotation autour de l'axe (Oz), donc $\vec{E}(r,\theta,z) \rightarrow \vec{E}(r,z)$;
 - il y a invariance par translation suivant l'axe (Oz), donc $\vec{E}(r,z) \rightarrow \vec{E}(r)$.
- ◇ Pour les symétries, il faut y aller plus doucement.

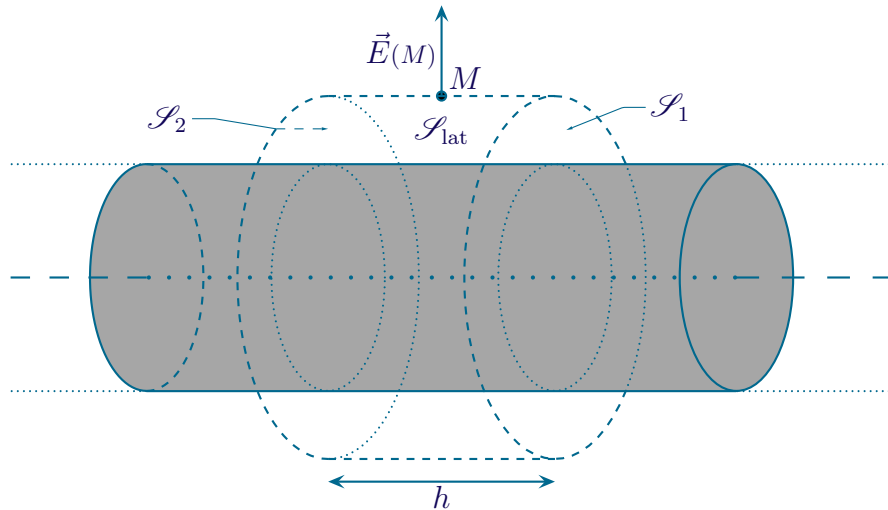


- ◇ Soit un point M_0 quelconque :
 - le plan contenant M_0 et orthogonal à l'axe est plan de symétrie des charges, donc plan de symétrie des champ, *ie.* $\vec{E}(M_0)$ est porté par les vecteurs colinéaires à ce plan : \vec{u}_r et \vec{u}_θ ;
 - le plan contenant M_0 et l'axe est plan de symétrie des charges, donc $\vec{E}(M_0)$ est porté par les vecteurs colinéaires à ce plan : \vec{u}_r et \vec{u}_z ;
 - ainsi le champ $\vec{E}(M)$ est porté par l'intersection de ces deux plans, *ie.* est porté par \vec{u}_r .
- ◇ Finalement, le champ \vec{E} est tel que : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.
- ◇ Les grandeurs pertinentes sont ρ (distribution), R (géométrie) et ε_0 (structure du champ)

★ théorème de GAUSS

- ◇ Considérons un point M quelconque et choisissons une surface de GAUSS fictive :

- qui contient le point M ;
 - qui respecte les symétries du problème.
- ◇ Comme nous ne pouvons pas choisir une surface infinie, nous allons prendre un cylindre de hauteur h , centré sur l'axe, de rayon r et telle que le point M ne soit pas sur une arête.
- ◇ Cette surface a ni plus ni moins que la forme d'une boîte de conserve.

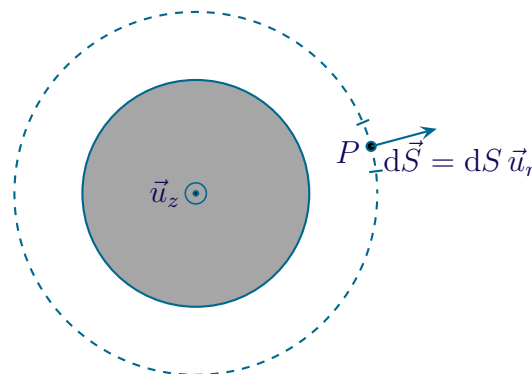


🌀 calcul du flux

- ◇ Séparons la surface en 3 : le dessus de surface \mathcal{S}_1 , le dessous de surface \mathcal{S}_2 et la surface latérale de surface \mathcal{S}_{lat} de telle sorte que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_{\text{lat}}$.
- ◇ Le flux peut alors s'écrire par linéarité de la sommation : $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{\text{lat}}$.
- ◇ Le flux sur la surface supérieure donne, puisque sur cette surface $d\vec{S}_P = dS \vec{u}_z$:

$$\Phi_1 = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} E(r_P) \underbrace{\vec{u}_r \cdot dS_P \vec{u}_z}_{=0} = 0$$

- ◇ De même, comme sur la surface inférieure $d\vec{S} = -dS \vec{u}_z$, nous obtenons $\Phi_2 = 0$.
- ◇ Pour mieux voir ce qu'il se passe sur la surface latérale, faisons un schéma dans un plan orthogonal à $\vec{E}(P)$.



- ◇ Le flux sur la surface latérale, nous avons successivement :

$$\Phi_{\text{lat}} = \iint_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} E(r_P) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r$$

◇ Et comme la surface de GAUSS a été judicieusement choisie (!), nous avons $r_P = C^{te} = r_M \stackrel{\text{not}}{=} r$, d'où :

$$\Phi_{\text{lat}} = \iint_{P \in \mathcal{A}_{\text{lat}}} E(r_M) dS_P = E(r) \times \iint dS_P = E(r) \times S_{\text{lat}} = E(r) \times 2\pi r h$$

🕒 calcul de Q_{int}

◇ Il y a deux cas à distinguer :

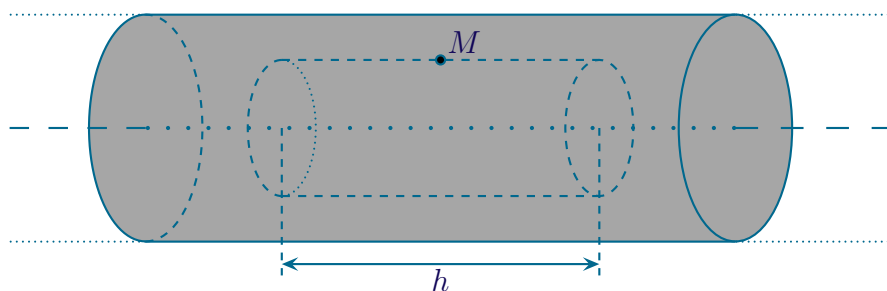
- M se situe dans la distribution : $r \leq R$;
- M n'est pas dans la distribution $r > R$.

◇ Si M n'est pas dans la distribution, alors, puisque la distribution est uniforme :

$$Q_{\text{int}} = \rho \times V_{\text{morceau,fil}} = \rho \times \pi R^2 h$$

◇ Si M est dans la distribution, alors :

$$Q_{\text{int}} = \rho \times V_{\text{GAUSS}} = \rho \times \pi r^2 h$$



🕒 rassemblement

◇ Puisque le théorème de GAUSS nous dit que $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(r) \times 2\pi r h = \frac{\rho \times \pi r^2 h}{\epsilon_0} \quad \text{pour } r \leq R \\ E(r) \times 2\pi r h = \frac{\rho \times \pi R^2 h}{\epsilon_0} \quad \text{pour } r > R \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \quad \text{pour } r \leq R \\ E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \quad \text{pour } r > R \end{array} \right.$$

◇ Vérifions que c'est bien homogène :

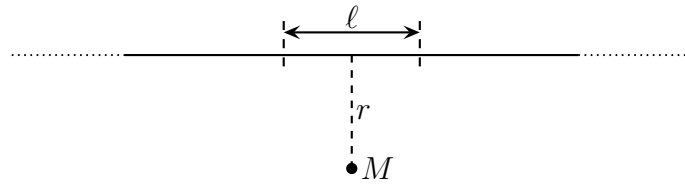
$$\text{champ } E \times \text{surface} = \frac{\text{charge}}{\epsilon_0}$$

◇ Le champ décroît en $1/r$, ce qui considéré comme une décroissance plutôt lente : c'est dû à la présence de charges à l'infini.

II.2.ii – description linéique

★ densité linéique de charge

- ◇ Plaçons-nous à grande distance du fil. Ainsi, la charge q contenue dans un bout de fil de longueur ℓ reste constante mais tout se passe comme si $R \rightarrow 0$.



- ◇ Le fil devient infiniment fin et il n'est plus pertinent de parler du volume du fil, c'est pourquoi nous allons parler de la densité linéique de charge.

La densité linéique de charge au point P est définie par :

$$dq_P = \lambda(P) d\ell_P \quad \text{où :}$$

- $d\ell_P$ est une longueur infinitésimal autour de P ;
 - dq_P est la charge contenue dans $d\ell_P$ autour de P .
- λ s'exprime en C.m^{-1} .

- ◇ Il n'y a aucune raison *a priori* pour que $\lambda(P)$ soit uniforme.

★ lien entre densité linéique et densité volumique

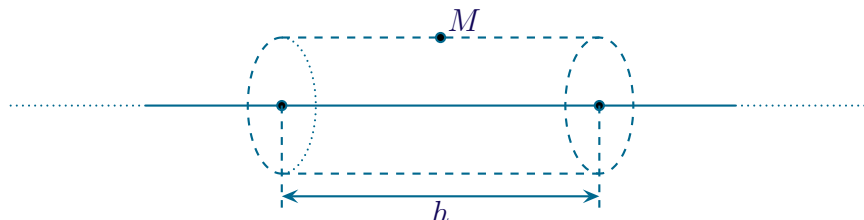
- ◇ Calculons la charge contenue dans un petit cylindre de longueur $d\ell$.
 ◇ Nous avons alors, en notant dS la section du fil et avec les deux approches, volumique et linéique :

$$dq = \rho \times d\mathcal{V} = \rho \times dS d\ell \quad \text{et} \quad dq \triangleq \lambda \times d\ell \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\lambda = \rho dS}$$

- ☞ *Remarque* : il vaut mieux noter dS car la section est nécessairement infinitésimale dans la vision linéique.

★ petite variation pour GAUSS

- ◇ Lors du calcul de la charge à l'intérieur de la surface de contrôle, il n'y a qu'un seul cas.



- ◇ Puisque la distribution est uniforme : $Q_{\text{int}} = \lambda h$, ce qui donne, avec $\Phi = E(r) \times 2\pi r h$:

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r}$$

- ☞ *Remarques* :

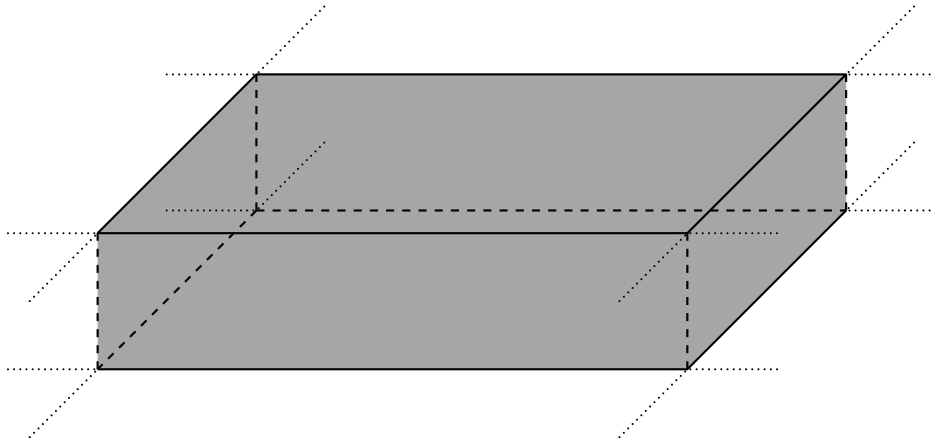
- il ne faut pas tenter de calculer le champ sur un fil ;
- une surface de GAUSS peut très bien « couper » un fil.

II.3 – Champ créé par un plan

II.3.i – plan épais

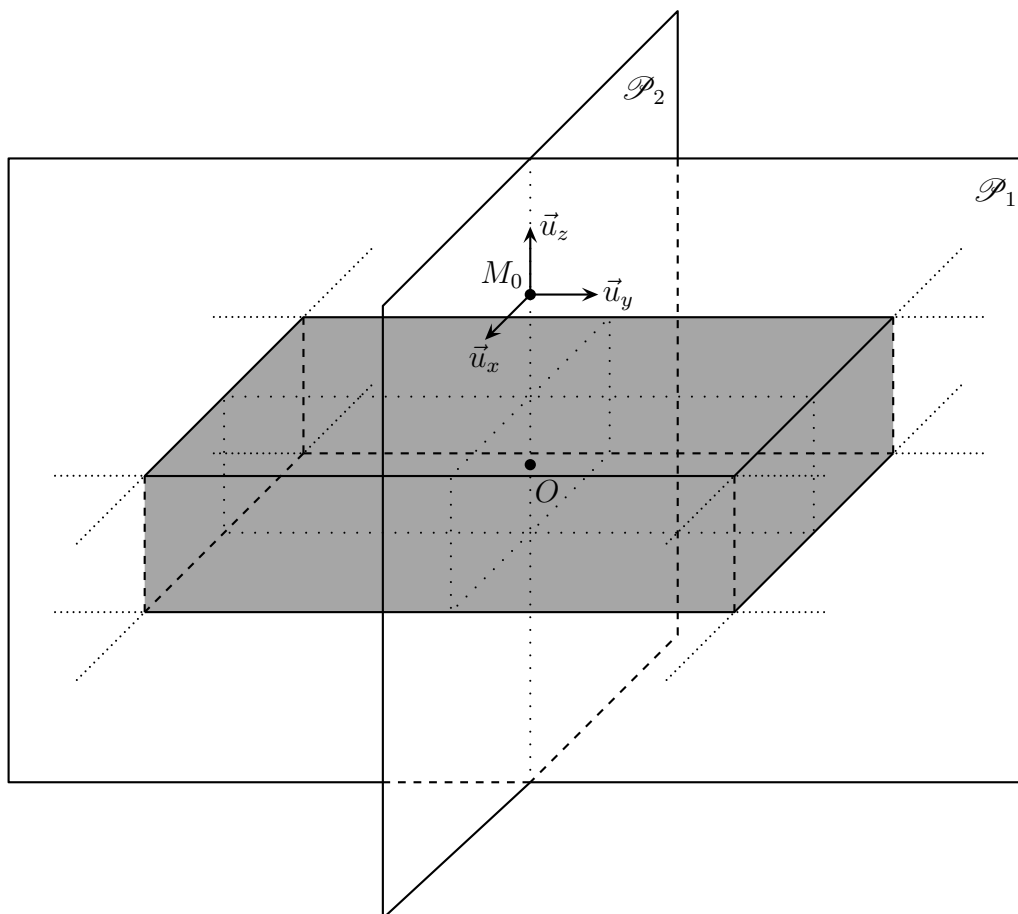
★ position du problème

- ◇ Considérons deux plans infinis distants de e et entre lesquels il y a une charge volumique uniforme ρ .
- ◇ Cherchons le champ $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution dans tout l'espace.



★ symétries et invariances

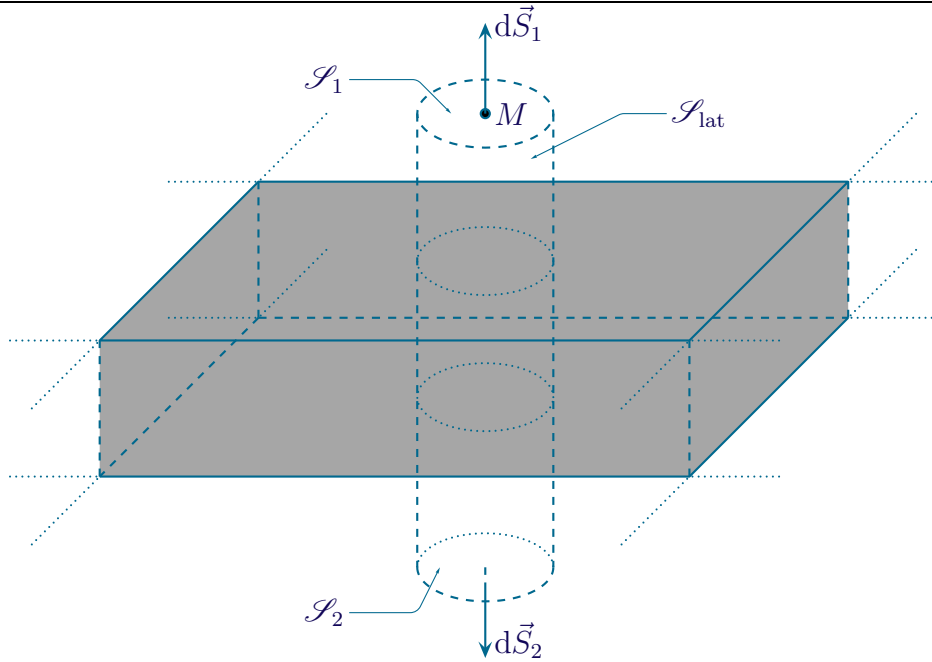
- ◇ Il s'agit ici d'une distribution type « plan » (non ? si !), les coordonnées naturelles sont les coordonnées cartésiennes.
- ◇ La distribution est de type « plan » :
 - il y a invariance par translation suivant l'axe (Ox) , donc $\vec{E}(x,y,z) \rightarrow \vec{E}(y,z)$;
 - il y a invariance par translation suivant l'axe (Oy) , donc $\vec{E}(x,y,z) \rightarrow \vec{E}(z)$.
- ◇ Pour les symétries, il faut y aller plus doucement.
- ◇ Soit un point M_0 quelconque :
 - le plan contenant $(M_0, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des charges, donc plan de symétrie du champ électrostatique, donc $\vec{E}(M_0)$ est porté par les vecteurs colinéaires à ce plan : \vec{u}_y et \vec{u}_z ;
 - le plan contenant $(M_0, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des charges, donc plan de symétrie du champ électrostatique, donc $\vec{E}(M_0)$ est porté par les vecteurs colinéaires à ce plan : \vec{u}_x et \vec{u}_z ;
 - ainsi le champ $\vec{E}(M)$ est porté par l'intersection de ces deux plans, *ie.* est porté par \vec{u}_z .



- ◇ Nous pouvons constater qu'il y a un autre plan de symétrie!
- ◇ Notons O le point sur l'axe (M_0, \vec{u}_z) et au milieu de la distribution.
- ◇ Le plan (Oxy) est plan de symétrie des charges donc du champ électrostatique, ce qui implique $E(-z) = -E(z)$.
- ◇ Finissons avec les grandeurs pertinentes : ρ (distribution), e (géométrie) et ε_0 (structure du champ).

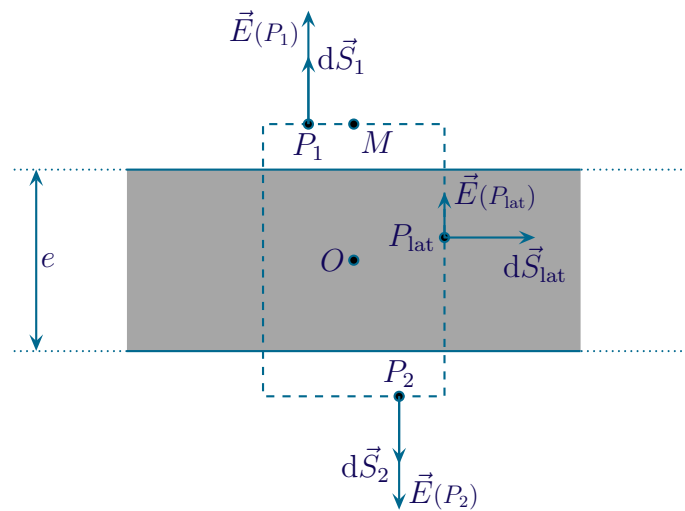
★ théorème de GAUSS

- ◇ Considérons un point M quelconque et choisissons une surface de GAUSS fictive :
 - qui contient le point M ;
 - qui respecte les symétries du problème.
- ◇ Comme nous ne pouvons pas choisir une surface infinie, nous allons prendre un cylindre de section S symétrique par rapport au plan (Oxy) tel que le point M soit sur la face supérieure.



calcul du flux

◇ Séparons la surface en 3 : le dessus de surface \mathcal{S}_1 , le dessous de surface \mathcal{S}_2 et la surface latérale de surface \mathcal{S}_{lat} de telle sorte que $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_{\text{lat}}$.



◇ Par linéarité de la sommation, le flux peut s'écrire : $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{\text{lat}}$.

◇ Le flux sur la surface supérieure donne, avec $d\vec{S}_1 = dS_1 \vec{u}_z$:

$$\Phi_1 = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} E(z_P) \vec{u}_z \cdot dS_P \vec{u}_z = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} E(z_P) dS_P$$

◇ Or la surface de GAUSS a été choisie de telle sorte que pour les points P sur \mathcal{S}_1 , $z_P = C^{\text{te}} = z_M \stackrel{\text{not}}{=} z$

$$\Phi_1 = \iint_{P \in \mathcal{S}_1} E(z) \times dS_P = E(z) \times \iint_{P \in \mathcal{S}_1} dS_P = E(z) \times S$$

◇ De même, sur la surface inférieure, cela donne d'abord avec $d\vec{S}_2 = -dS_2 \vec{u}_z$:

$$\Phi_2 = \iint_{P \in \mathcal{S}_2} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}_2} E(z_P) \vec{u}_z \cdot (-dS_P \vec{u}_z) = - \iint_{P \in \mathcal{S}_2} E(z_P) dS_P$$

◇ Et parce que la surface de GAUSS est ainsi faite, sur la surface \mathcal{S}_2 , nous avons $z_P = C^{\text{te}} = -z_M = -z$:

$$\Phi_2 = - \iint_{P \in \mathcal{S}_2} E(-z) \times dS_P = -E(-z) \times \iint_{P \in \mathcal{S}_2} dS_P = -E(-z) \times S \stackrel{\text{sym}}{=} E(z) \times S$$

◇ Pour le flux sur la surface latérale, nous avons successivement :

$$\Phi_{\text{lat}} = \iint_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}_{\text{lat}}} E(z) \underbrace{\vec{u}_z \cdot d\vec{S}_P}_{=0} = 0$$

🔗 calcul de Q_{int}

◇ Il y a deux cas à distinguer :

→ M est dans la distribution : $|z| \leq \frac{e}{2}$;

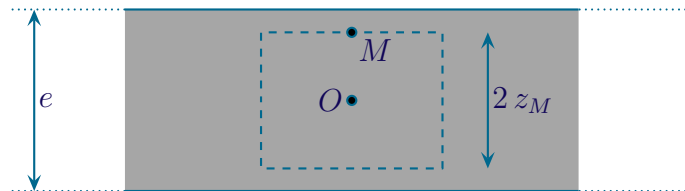
→ M n'est pas dans la distribution $|z| > \frac{e}{2}$.

◇ Si M n'est pas dans la distribution, alors, puisque la distribution est uniforme :

$$Q_{\text{int}} = \rho \times V_{\text{plan}} = \rho \times e S$$

◇ Si M est dans la distribution, alors :

$$Q_{\text{int}} = \rho \times V_{\text{GAUSS}} = \rho \times 2z S$$



🔗 rassemblement

◇ Puisque le théorème de GAUSS nous dit que $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 E(z) \times S = \frac{\rho \times 2z S}{\varepsilon_0} \quad \text{pour } |z| \leq \frac{e}{2} \\ 2 E(z) \times S = \frac{\rho \times e S}{\varepsilon_0} \quad \text{pour } |z| > \frac{e}{2} \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} E(z) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0} \quad \text{pour } z \leq \frac{e}{2} \\ E(z) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0} \quad \text{pour } z > \frac{e}{2} \end{array} \right.$$

◇ N'oublions pas de vérifier que le résultat est homogène.

◇ Le champ est uniforme en dehors du plan. Il ne décroît pas à l'infini.

👉 *Remarque* : pour des raisons énergétiques (le champ \vec{E} contient de l'énergie), cette situation n'est pas physiquement possible. Il faut bien voir qu'il s'agit là d'une modélisation et qu'aucun plan n'est véritablement infini, mais suffisamment proche d'un plan fini, tout se passe comme s'il était infini.

II.3.ii – plan fin

★ densité surfacique de charges

- ◇ Plaçons-nous à grande distance de la surface.
- ◇ Ainsi, la charge q contenue dans un bout de plan de surface S reste constante mais tout se passe comme si $e \rightarrow 0$.
- ◇ Le plan devient infiniment fin et, puisque nous ne pouvons plus parler du volume du plan, nous allons définir une densité surfacique de charges.

La densité surfacique de charges au point P est définie par :

$$dq_P = \sigma(P) dS_P \quad \text{où :}$$

→ dS_P est une surface infinitésimale autour de P ;

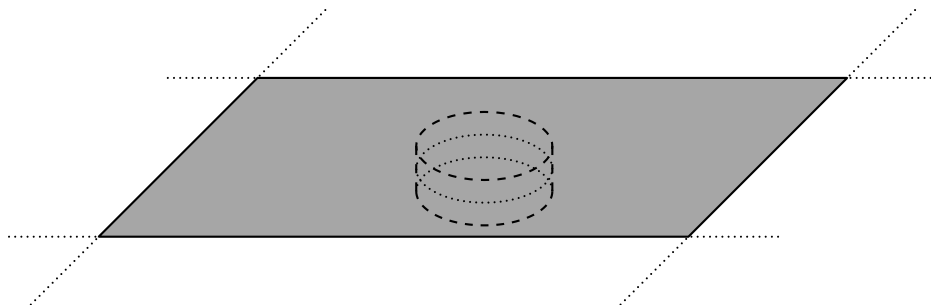
→ dq_P est la charge contenue dans dS_P .

σ s'exprime en C.m^{-2} .

- ◇ Il n'y a aucune raison *a priori* pour que $\sigma(P)$ soit uniforme.
- ☛ *Remarque* : si nous nous plaçons « suffisamment loin » pour pouvoir considérer le plan infiniment fin, nous devons quand même rester suffisamment proche pour pouvoir le considérer infini.

★ lien entre densité linéique et densité volumique

- ◇ Calculons la charge contenue dans un petit cylindre de section dS de deux manières différentes.



- ◇ Nous avons alors, en notant de l'épaisseur infinitésimale du plan :

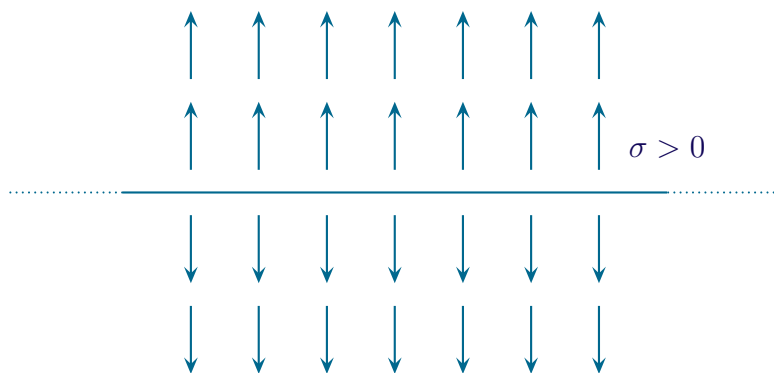
$$dq_P = \rho \times d\mathcal{V}_P = \rho \times de dS_P \quad \text{et} \quad dq \triangleq \sigma \times dS_P \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\sigma = \rho de}$$

- ◇ Ici il vaut mieux noter de l'épaisseur du plan fin car à l'échelle de la densité surfacique de charges, le plan a effectivement une épaisseur infinitésimale.

★ petite variation pour GAUSS

- ◇ Lors du calcul de la charge à l'intérieur de la surface de GAUSS, il n'y a plus qu'un seul cas.
- ◇ Puisque la distribution est uniforme : $Q_{\text{int}} = \sigma S$, ce qui donne, avec $\Phi = 2 E(z) \times S$:

$$\boxed{\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \times \vec{u}_z \text{ pour } z > 0}$$



⋄ Bien que le résultat ne semble pas le montrer, le champ **dépend** de la coordonnée z .

☛ *Remarques :*

- il ne faut pas tenter de calculer le champ sur une surface ;
- une surface de GAUSS peut très bien « couper » une surface.

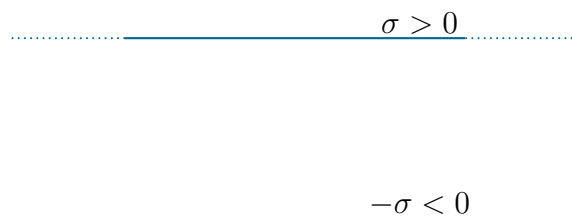
★ un résultat général

- ⋄ Nous pouvons constater qu'il y a une discontinuité du champ \vec{E} à la traversée d'une surface chargée. Ce sera toujours le cas.
- ⋄ Plus précisément, il y a discontinuité de $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ de la composante normale du champ à travers une surface chargée.

II.3.iii – le condensateur plan idéal

★ présentation

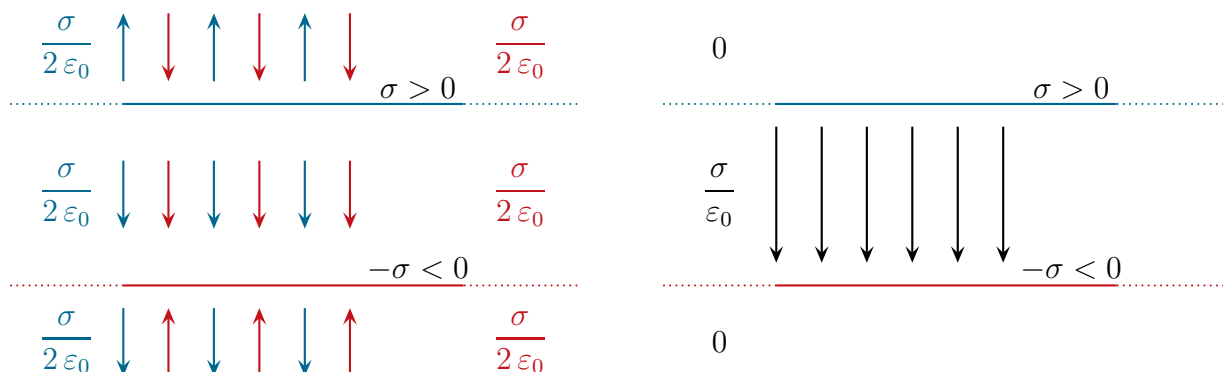
- ⋄ Modélisons un condensateur plan par deux plans infinis uniformément chargés surface $+\sigma$ et $-\sigma$ séparés par la distance e .



- ⋄ Cherchons le champ \vec{E} dans tout l'espace.

★ représentation du champ

- ⋄ Utilisons le principe de superposition.
- ⋄ Le champ total \vec{E} n'est autre que $\vec{E} = \vec{E}_{\text{inf}} + \vec{E}_{\text{sup}}$.



Le champ créé par un condensateur plan infini :

- vaut $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ à l'intérieur et va des charges positives vers les charges négatives
- est nul à l'extérieur

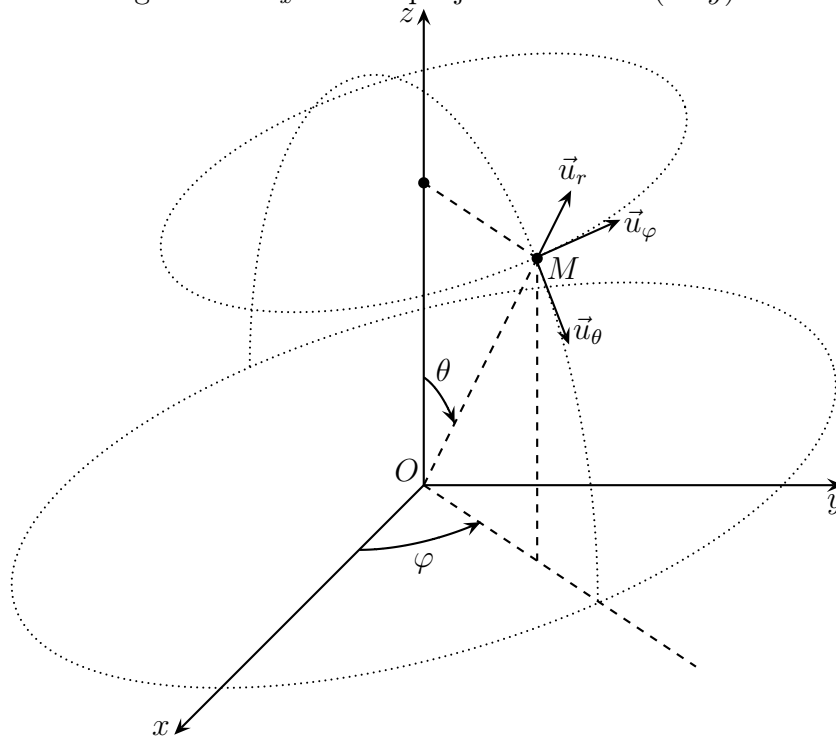
II.4 – Champ créé par une boule

II.4.i – de nouvelles coordonnées

- ◇ Nous avons déjà vu la coordonnée r et le vecteur \vec{u}_r dans le chapitre 6 de mécanique, maintenant nous allons voir les suivants.

Les *coordonnées sphériques* sont les trois nombres (r, θ, φ) repérant un point M tels que :

- $r = \|\vec{OM}\| \geq 0$ est la distance entre M et O
- $0 \leq \theta \leq \pi$ est l'angle entre \vec{u}_z et \vec{u}_r
- $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ est l'angle entre \vec{u}_x et P le projeté de M sur (Oxy)



- ◇ φ n'est autre que l'angle θ des coordonnées cylindro-polaires.

La *base sphérique* est la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ telle que :

- \vec{u}_r est le vecteur unitaire dirigé de O vers M
- \vec{u}_θ est un vecteur contenu dans le plan méridien *ie.* dans le plan (OzM)
- \vec{u}_φ est un vecteur contenu dans le plan (Oxy) tel que $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ soit une base orthonormée directe

- ◇ Nous pouvons remarquer que \vec{u}_θ correspond à \vec{u}_r tourné de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens de θ .
- ◇ Le vecteur \vec{u}_φ n'est autre que le vecteur \vec{u}_θ des coordonnées cylindro-polaires.

Le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques s'écrit :

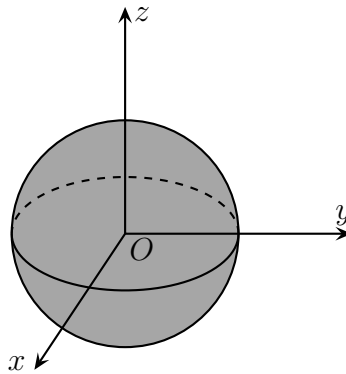
$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \varphi d\varphi \vec{u}_\varphi$$

- ◇ L'intérêt de mettre θ à cet endroit et non au même endroit que pour les coordonnées cylindro-polaires, c'est que lorsqu'il y a invariance par rotation autour de l'axe \vec{u}_z (ce qui est souvent le cas), nous nous placerons dans un plan méridien et nous retrouverons alors les coordonnées polaires.

II.4.ii – boule chargée en volume

★ position du problème

- ◇ Considérons une boule de rayon R uniformément chargée en volume et cherchons le champ \vec{E} créé par une telle distribution dans tout l'espace.

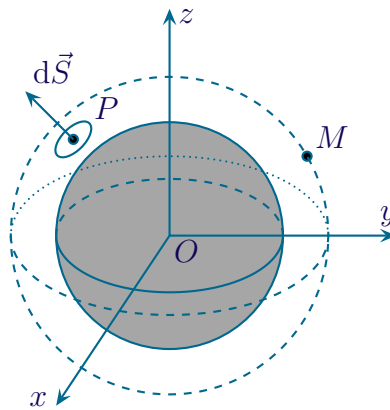


★ analyse physique

- ◇ Ici nous sommes clairement face à une distribution de type « sphère ».
- ◇ Ainsi le champ ne dépend que de r : $\vec{E}(r)$.
- ◇ Considérons un point M quelconque de l'espace. Tout plan contenant (OM) est plan de symétrie des charges, donc du champ électrique, donc $\vec{E}(M)$ est contenu dans l'intersection de tous ces plans, *ie.* est porté par \vec{u}_r .
- ◇ Finalement, nous avons $\vec{E}(M) = \vec{E}(r) \vec{u}_r$.
- ◇ Pour les grandeurs pertinentes : ρ (distribution), R (géométrie) et ε_0 (structure).

★ théorème de GAUSS

- ◇ Considérons un point M quelconque et choisissons une surface de GAUSS fictive :
- qui contient le point M ;
 - qui respecte les symétries du problème.
- ◇ Choisissons une sphère centrée sur O et de rayon r .



🕒 calcul du flux

◇ Le flux à travers cette surface donne, puisque $d\vec{S}_P = dS_P \vec{u}_r$:

$$\Phi = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{P \in \mathcal{S}} E(r_P) \vec{u}_r \cdot (dS_P \vec{u}_r) = \iint_{P \in \mathcal{S}} E(r_P) dS_P$$

◇ De plus, la surface de GAUSS a été choisie telle que $r_P = C^{te} = r_M \stackrel{\text{not}}{=} r$, ce qui donne :

$$\Phi = \iint_{P \in \mathcal{S}} E(r) \times dS_P = E(r) \iint_{P \in \mathcal{S}} dS_P = E(r) \times S = E(r) \times 4\pi r^2$$

La surface d'une sphère de rayon r vaut $S = 4\pi r^2$.

🕒 calcul de Q_{int}

◇ Il y a deux cas à distinguer :

- M est dans la distribution : $r \leq R$;
- M n'est pas dans la distribution $r > R$.

◇ Si M est dans la distribution, alors :

$$Q_{\text{int}} = \rho \times V_{\text{GAUSS}} = \rho \times \frac{4}{3} \pi r^3$$

Le volume d'une boule de rayon r vaut $S = \frac{4}{3} \pi r^3$.

◇ Si M n'est pas dans la distribution, alors :

$$Q_{\text{int}} = \rho \times V_{\text{boule}} = \rho \times \frac{4}{3} \pi R^3$$

🕒 rassemblement

◇ Puisque le théorème de GAUSS nous dit que $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$, nous obtenons :

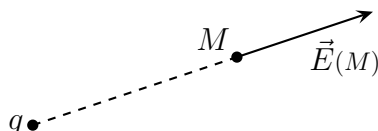
$$\left\{ \begin{array}{l} E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \quad \text{pour } r \leq R \\ E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} \quad \text{pour } r > R \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{u}_r \quad \text{pour } r \leq R \\ \vec{E}(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{pour } r > R \end{array} \right.$$

- ◇ N'oublions pas de vérifier que l'expression est bien homogène.
- ◇ Le champ décroît en $1/r^2$, ce qui est considéré comme rapide.

II.4.iii – charge ponctuelle

★ limite de la charge ponctuelle

- ◇ Plaçons-nous à grande distance de la boule. Ainsi, la charge q contenue dans la totalité de la boule reste constante mais tout se passe comme si $R \rightarrow 0$.



- ◇ La boule devient infiniment petite et, puisqu'on ne peut plus parler de son volume, nous parlerons de charge ponctuelle.

★ champ créé par une charge ponctuelle

- ◇ Avec les résultats précédents, nous obtenons, puisque $\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 = q$:

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

- ◇ Notons P le centre de la sphère (donc la position de la charge ponctuelle). Nous avons $r = PM$ et :

$$\vec{u}_r = \vec{u}_{PM} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$$

Une charge ponctuelle q placée en P crée un champ électrique en M tel que :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

- ◇ Nous aurons l'occasion de beaucoup utiliser cette expression lorsque le théorème de GAUSS ne permettra pas à lui seul de déterminer le champ.

☛ Remarques :

- il ne faut pas tenter de calculer le champ sur une charge ponctuelle ;
- une surface de GAUSS **ne peut pas** « couper » une charge ponctuelle.

III – Le champ magnétostatique

III.1 – Le théorème d'AMPÈRE

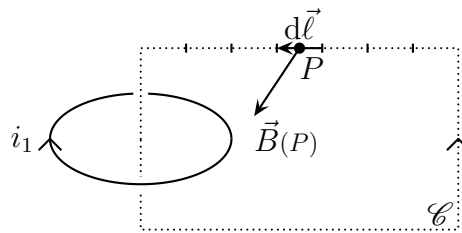
◇ C'est l'analogie pour le champ \vec{B} du théorème de GAUSS, *ie.* il s'agit là d'un théorème donnant une information globale.

III.1.i – énoncé

Soit une distribution quelconque de courants et un contour **orienté** et fermé \mathcal{C} – éventuellement fictif – quelconque. Nous avons alors

$$\oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \mu_0 i_{\text{enlacé}} \quad \text{où :}$$

- $\vec{B}(P)$ est le champ \vec{B} en un point quelconque de \mathcal{C} ;
- $d\vec{\ell}_P$ est le vecteur déplacement élémentaire sur \mathcal{C} au niveau du point P considéré ;
- $i_{\text{enlacé}}$ est l'intensité enlacée par la courbe \mathcal{C} ;
- μ_0 est la perméabilité du vide en H.m^{-1} .



Le champ magnétique se mesure en tesla (T).

☛ *Remarque* : ne pas oublier le petit rond sur l'intégrale et l'orientation de la courbe.

◇ Le théorème d'AMPÈRE donne une information globale sur le champ, *ie.* ne donne pas le champ en *un* point mais sur toute une courbe.

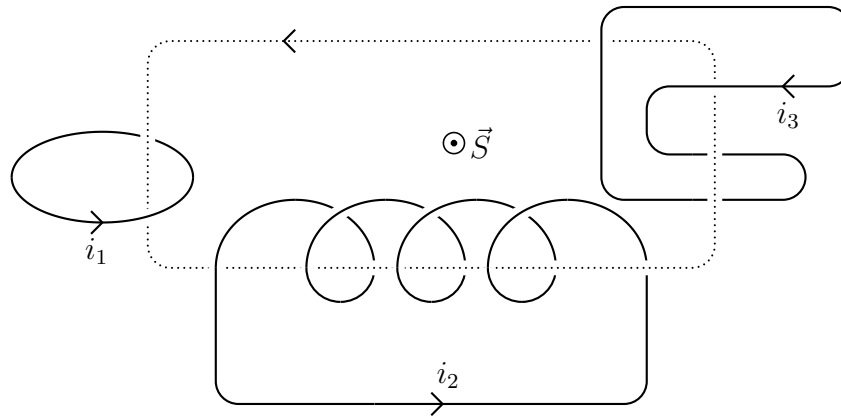
★ intensité enlacée

◇ L'intensité enlacée est l'analogie de la charge à l'intérieur pour le théorème de GAUSS : c'est le courant « à l'intérieur de la ligne ». Mais comment le définir précisément ?

◇ En fait, c'est très visuel. Il suffit d'imaginer que \mathcal{C} est un lasso et une fois celui-ci refermé, il n'y a plus qu'à compter le nombre de courants emprisonnés. Si un circuit passe plusieurs fois, il faut le compter plusieurs fois.

◇ Petite subtilité, l'algébrisation du courant enlacé :

- d'abord imaginer une surface de savon délimité par la courbe de contrôle
- ensuite orienter la surface avec la règle de la main droite
- si la flèche de i « crève » la surface dans le sens de la surface, alors compter $+i$ sinon compter $-i$ pour ce courant.



◇ Dans l'exemple précédent, nous avons :

$$i_{\text{enlacé}} = -i_1 + 4i_2 - i_3 + i_3 = 4i_2 - i_1$$

◇ La présence de $i_{\text{enlacé}}$ ne doit pas faire croire que le champ n'est créé que par ce qui est enlacé par la courbe : le champ est **toujours** créé par la totalité des courants. D'ailleurs il y a besoin de connaître tous les courants ... pour bien choisir le « bon » contour d'AMPÈRE.

III.1.ii – notion de circulation

La quantité $\int_{P \in \mathcal{C}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P$ est noté C_B et est appelée *circulation* de \vec{B} sur \mathcal{C} .

- ◇ La circulation n'est pas forcément à calculer obligatoirement sur une courbe fermée (*ie.* qui forme une boucle) mais cela **doit** être le cas pour le théorème d'AMPÈRE.
- ◇ La circulation sur une courbe peut s'imaginer comme la quantité de champ qui « avance » sur le contour \mathcal{C} . Cette quantité est positive lorsque, globalement, le champ est dans le même sens que le contour.
- ◇ Pour calculer une circulation, nous allons faire « comme d'habitude » :
 - découper la courbe en petits morceaux,
 - calculer la circulation élémentaire dC
 - additionner le tout.

III.1.iii – interprétation

- ◇ Ce théorème nous permet de dire :
 - que chaque fil de courant crée un champ qui tourne autour de lui
 - qu'en dehors de courants, les lignes de champ ne tournent pas autour de quelque chose

III.1.iv – utilisation

- ◇ Ce théorème est toujours théoriquement applicable! Ou presque : il ne faut pas que le contour \mathcal{C} coupe un circuit **isolé** : s'il y a de (très) nombreux circuits les uns à côté des autres, nous pourrions toujours faire comme si le contour passait entre les circuits.
- ◇ En pratique, il est généralement difficilement applicable car le calcul de C est souvent malaisé.
- ◇ Pour que tout se passe bien (*ie.* pour que le calcul soit faisable) il faut :
 - que les courants admettent beaucoup de symétries (au sens large) ;
 - que les contours d'AMPÈRE respectent ces symétries.

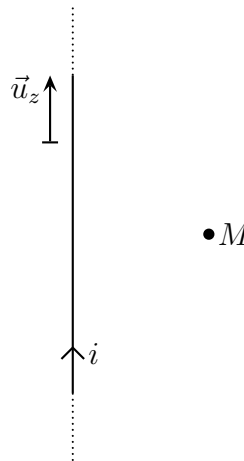
- ◇ Comme en général, nous cherchons le champ \vec{B} en un point M particulier et que le théorème d'AMPÈRE donne une information sur le champ sur le contour choisi, il sera impératif que ce dernier contienne le point où nous cherchons à calculer le champ.
- ◇ Le reste est une affaire de pratique.

III.2 – Champ magnétostatique créé par un fil

III.2.i – fil simple

★ description

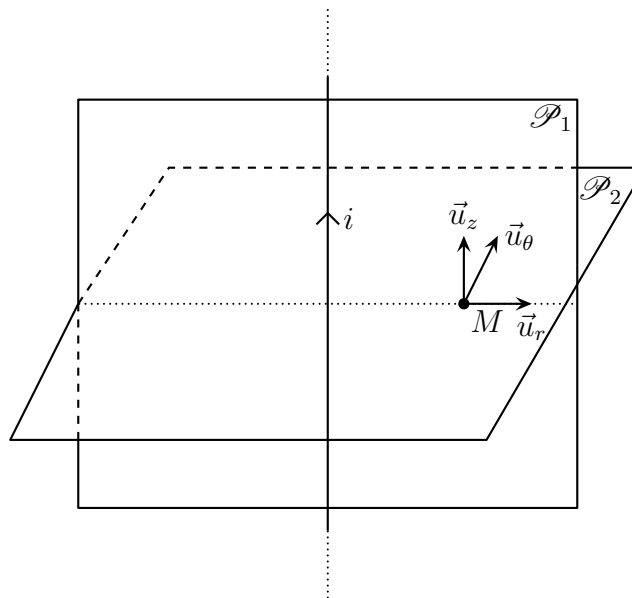
- ◇ Considérons un fil infini parcouru par un courant d'intensité i .
- ◇ Cherchons le champ \vec{B} créé dans tout l'espace.



- ◇ Nous pouvons tout de suite nous poser la question de l'intérêt de ce fil puisque d'une part aucun fil n'est infini et que d'autre un fil rectiligne infini ne peut pas constituer un circuit électrique fermé.
- ◇ En fait, le fil infini rectiligne modélise ce qu'il se passe très près d'un fil non infini, un peu comme « de près » la Terre peut sembler plate et infinie.

★ analyse physique

- ◇ Il s'agit d'une situation de type « fil » ; les coordonnées naturelles sont les coordonnées cylindro-polaire.
- ◇ Il y a invariance par rotation autour de (Oz) : $\vec{B}(r, \theta, z) \rightarrow \vec{B}(r, z)$.
- ◇ Il y a invariance par translation suivant \vec{u}_z : $\vec{B}(r, z) \rightarrow \vec{B}(r)$.
- ◇ Considère un point M quelconque en dehors du fil.
- ◇ Le plan (M, \vec{u}_z) contenant le fil et M est plan de symétrie des courants, donc est plan d'antisymétrie pour \vec{B} , donc $\vec{B}(M)$ est normal à ce plan, *ie.* est porté par \vec{u}_θ .



◇ Finalement : $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$

☞ *Remarque* : nous pouvions aussi voir que le plan orthogonal à l'axe et contenant M est plan d'antisymétrie des courants, donc plan de symétrie de \vec{B} . Nous en aurions alors déduit que \vec{B} était dans le plan horizontal, ce qui est une déduction moins forte que la précédente.

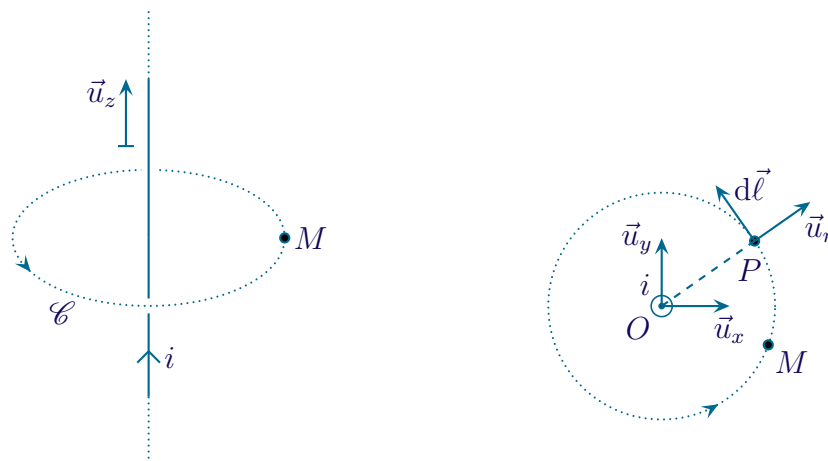
☞ **Les plans d'antisymétrie des champs donnent plus d'information sur la direction des champs que les plans de symétrie.**

◇ Enfin les grandeurs pertinentes : i (distribution) et μ_0 (structure du champ).

★ théorème d'AMPÈRE

🔗 version normale

◇ Choisissons un contour respectant les symétries des courants et passant par M : un cercle centré sur l'axe et de rayon r et orientons-le dans le sens de \vec{u}_θ .



◇ Pour mieux calculer la circulation, représentons la situation dans le plan (Oxy) où O est le centre du contour choisi.

◇ La circulation de \vec{B} vaut alors, avec $d\vec{\ell}_P = dl_P \vec{u}_\theta$:

$$C_B = \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \oint_{P \in \mathcal{C}} B(r_P) \vec{u}_\theta \cdot (dl_P \vec{u}_\theta) = \oint_{P \in \mathcal{C}} B(r_P) dl_P$$

◇ De plus, le contour judicieusement choisi impose $r_P = C^{\text{te}} = r_M \stackrel{\text{not}}{=} r$ d'où :

$$C_B = \oint_{P \in \mathcal{C}} B(r) dl_P = B(r) \times \oint_{\mathcal{C}} dl_P = B(r) \times \ell_{\text{tot}} = B(r) 2\pi r$$

◇ Le courant enlacé vaut ici : $i_{\text{enlacé}} = +i$.

◇ Comme le théorème d'AMPÈRE s'écrit $C = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$, nous arrivons à $B(r) 2\pi r = \mu_0 i$ et ainsi :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

◇ Le sens de \vec{B} est donné par la règle de la main droite.

◇ Vérifions l'homogénéité et la cohérence : $\text{cham } B \times \text{longueur} = \mu_0 \times \text{courant}$.

◇ Le résultat précédent n'est pas à savoir par cœur *stricto sensu* mais à savoir retrouver très vite.

🔗 version « pas de chance »

◇ Si nous avons orienté le contour d'AMPÈRE dans l'autre sens ...

◇ La circulation de \vec{B} aurait alors valu, avec $d\vec{l} = -dl_P \vec{u}_\theta$:

$$C_B = \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{l}_P = \oint_{P \in \mathcal{C}} B(r_P) \vec{u}_\theta \cdot (-dl_P \vec{u}_\theta) = - \oint_{P \in \mathcal{C}} B(r_P) dl_P$$

◇ Et comme la géométrie du contour ne change, pas nous aurions eu $r_P = C^{\text{te}} = r_M \stackrel{\text{not}}{=} r$ et donc

$$C_B = - \oint_{P \in \mathcal{C}} B(r) dl_P = -B(r) \times \oint_{\mathcal{C}} dl_P = -B(r) \times \ell_{\text{tot}} = -B(r) 2\pi r$$

◇ Le contour étant orienté dans l'autre sens, le courant enlacé aurait valu ici : $i_{\text{enlacé}} = -i$.

◇ Comme le théorème d'AMPÈRE s'écrit toujours $C = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$, nous aurions eu :

$$-B(r) 2\pi r = -\mu_0 i \quad \rightsquigarrow \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

◇ Ce qui est bien le même résultat que précédemment.

III.2.ii – câble

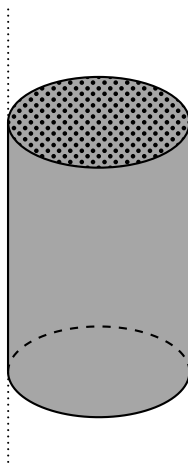
★ description

◇ Nous rencontrons des câbles très régulièrement en TP.

Un *câble* est un ensemble de plusieurs fils.

◇ Considère un câble, *ie.* un ensemble de N fils serrés les uns contre les autres chacun parcouru par un courant d'intensité i , en forme de cylindre de rayon R .

◇ Cherchons le champ \vec{B} créé dans tout l'espace.



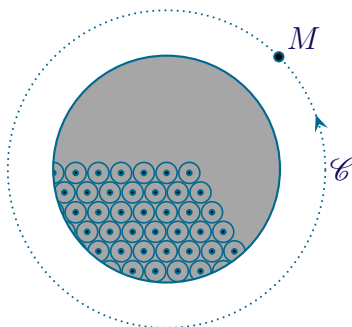
★ symétries et invariances

- ◇ Comme ci-dessus la distribution est de type « fil ».
- ◇ Nous avons donc les mêmes invariances et les mêmes symétries ce qui conduit à : $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$.
- ◇ Les grandeurs pertinentes changent un peu : i et N (distribution), R (géométrie) et μ_0 (structure).

★ théorème d'AMPÈRE

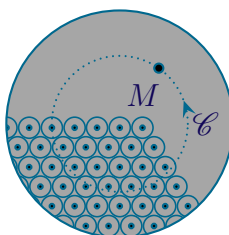
🕒 calcul de la circulation

- ◇ En prenant comme contour d'AMPÈRE un cercle dans le plan orthogonal au câble et centré sur l'axe du câble, le calcul est identique au cas précédent et : $C = B(r) 2 \pi r$.



🕒 courant enlacé

- ◇ Cette fois, il y a deux cas :
 - le point M est dans le câble $r \leq R$;
 - le point M est à l'extérieur du câble $r > R$.
- ◇ Lorsque M est à l'extérieur, nous avons directement $i_{\text{enlacé}} = +N i$.
- ◇ Si le point M est à l'intérieur du câble, il va falloir compter le nombre de câbles enlacés.



- ◇ En notant n le nombre de fil traversant la surface délimitée par la courbe de contrôle, nous avons $i_{\text{enlacé}} = +n \times i$.
- ◇ Pour avoir n , comme les fils sont très serrés et répartis uniformément dans le câble, nous pouvons remarquer que le nombre de fils enlacés est proportionnel à la section du câble.
- ◇ Ainsi s'il y a N fils dans une section totale de πR^2 et n fils dans section de πr^2 , nous avons :

$$\frac{N}{\pi R^2} = \frac{n}{\pi r^2} \quad \rightsquigarrow \quad n = \frac{N \pi r^2}{\pi R^2} = N \frac{r^2}{R^2}$$

- ◇ En regroupant le tout, cela donne $i_{\text{enlacé}} = \frac{N r^2 i}{R^2}$.

🔗 rassemblement

- ◇ Le théorème d'AMPÈRE nous indiquant que $C = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} B(r) 2 \pi r = \frac{\mu_0 N r^2 i}{R^2} \quad \text{pour } r \leq R \\ B(r) 2 \pi r = \mu_0 N i \quad \text{pour } r > R \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 N r}{2 \pi R^2} \vec{u}_\theta \quad \text{pour } r \leq R \\ \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 N i}{2 \pi r} \vec{u}_\theta \quad \text{pour } r > R \end{array} \right.$$

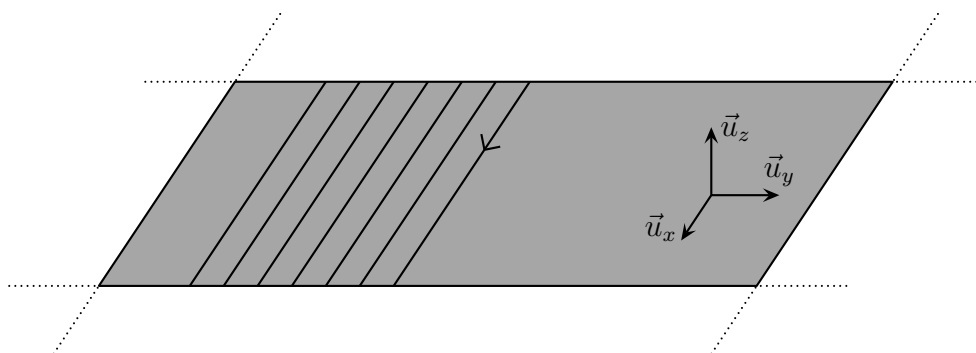
- ◇ Nous retrouvons bien, pour $r > R$, le résultat du fil simple : $B(r) = \frac{\mu_0 i_{\text{total}}}{2 \pi r} \vec{u}_\theta$.
- ◇ Si nous ne pouvons pas calculer le champ sur un fil infiniment fin, nous pouvons constater qu'il est possible de calculer le champ dans une zone de l'espace où les fils sont répartis en volume.

III.3 – Champ magnétostatique créé par une nappe de courant

III.3.i – nappe fine

★ description

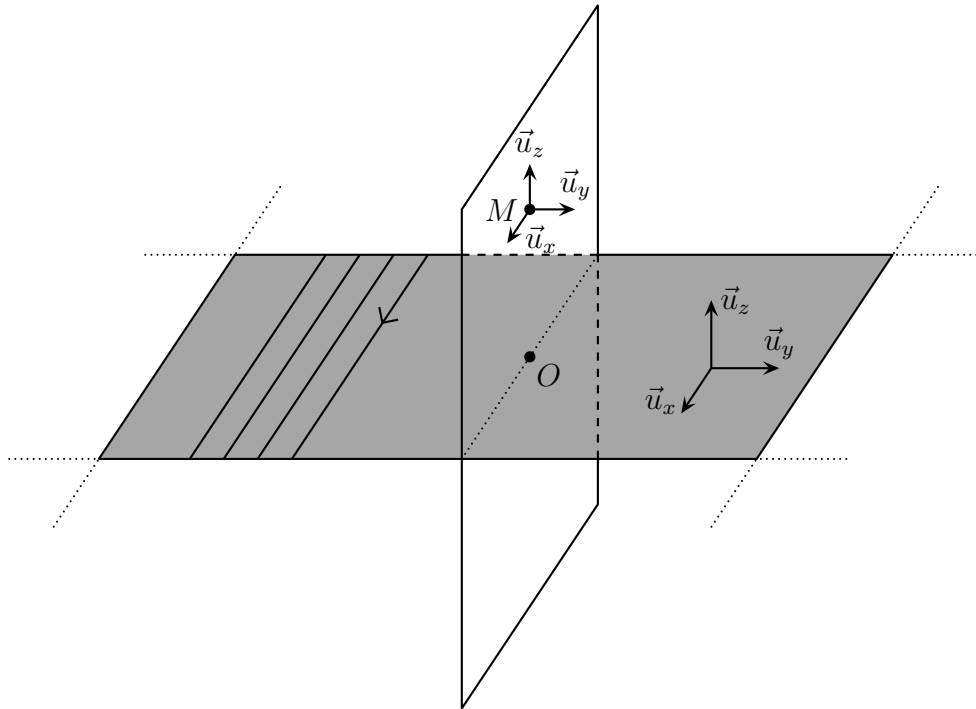
- ◇ Considérons un plan infini sur lequel est disposée une infinité de fils de longueur infinie, tous parcourus par un courant d'intensité i et tels qu'il y a en a n par unité de longueur transverse.
- ◇ Cherchons le champ magnétostatique créé dans tout l'espace.



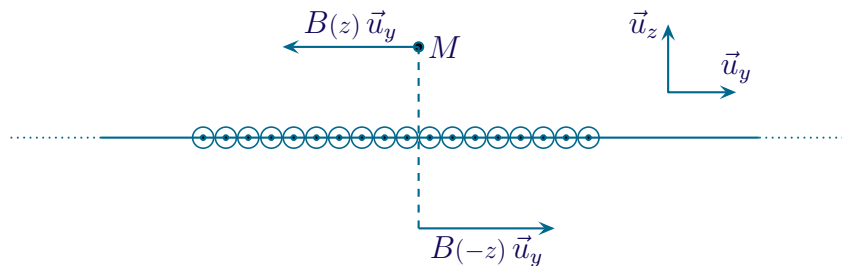
★ analyse physique

- ◇ Il s'agit d'un problème de type « plan » (incroyable, n'est-ce pas ?), les coordonnées naturelles sont donc les coordonnées cartésiennes.
- ◇ Prenons \vec{u}_z comme axe normal au plan et \vec{u}_x la direction des fils.

- ◇ Il y a invariance des courants suivant x et y , donc $\vec{B}(x,y,z) \rightarrow \vec{B}(z)$.
- ◇ Considérons un point M quelconque et noton O son projeté sur le plan ; M est donc sur l'axe (Oz) .



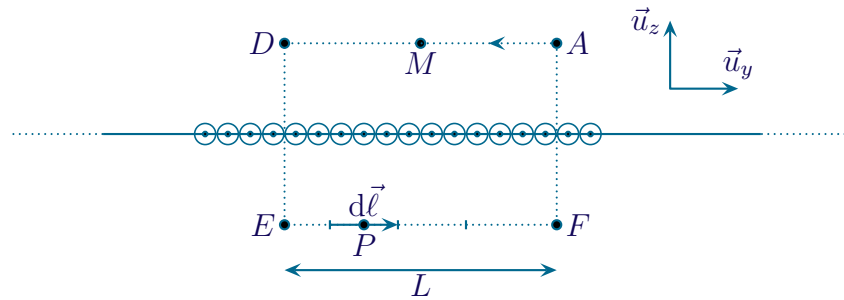
- ◇ Le plan (Ozx) est plan de symétrie des courants, donc plan d'antisymétrie de \vec{B} et donc $\vec{B}(M)$ est porté par \vec{u}_y .
- ◇ Finalement le champ \vec{B} est tel que $\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_y$.
- ◇ De plus le plan (Oxy) est plan de symétrie des courants, donc plan d'antisymétrie de \vec{B} .



- ◇ Nous avons donc $B(-z) = -B(z)$.
- ☛ *Remarque* : le fait que le plan (Ozy) soit plan d'antisymétrie des courants, donc plan de symétrie de \vec{B} implique que \vec{B} porté par \vec{u}_y et \vec{u}_z ce qui est « moins bien » que de savoir, par le plan d'antisymétrie des champs, que \vec{B} est porté par \vec{u}_y .
- ◇ Grandeurs pertinentes : n , i (distribution) et μ_0 (structure).

★ théorème d'AMPÈRE

- ◇ Il faut choisir un contour respectant les symétries et contenant M ...
- ◇ Nous allons prendre un rectangle de longueur L dans le plan (Ozy) et symétrique par rapport au plan (Oxy) .
- ◇ Réflexe (non obligatoire) : mettre l'orientation de \mathcal{C} de telle sorte que son vecteur surface soit dans le même sens que i .



◇ Décomposons le contour en 4 : $\mathcal{C} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4$

◇ Par linéarité de la circulation, nous avons $C = C_{AD} + C_{DE} + C_{EF} + C_{FA}$.

🕒 premier calcul de C_{AD}

◇ Écrivons la définition de C_{AD} avec $d\vec{\ell}_P = -dl_P \vec{u}_y$:

$$C_{AD} = \int_{P \in \mathcal{L}_1} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \int_{P \in \mathcal{L}_1} B(z_P) \vec{u}_y \cdot (-dl_P \vec{u}_y) = - \int_{P \in \mathcal{L}_1} B(z_P) dl_P$$

◇ La géométrie du contour est telle que $z_P = C^{te} = z_M \stackrel{\text{not}}{=} z$ d'où :

$$C_{AD} = - \int_{P \in \mathcal{L}_1} B(z) dl_P = -B(z) \times \int_A^D dl_P = -B(z) \times \ell_{\text{tot}, AB} = -B(z) L$$

◇ C'est une façon de calculer la circulation.

◇ Une autre méthode consiste à être plus calculatoire.

🕒 deuxième calcul de C_{AD}

◇ En fait, nous allons algébriser le déplacement élémentaire en l'écrivant $d\vec{\ell} = dy \vec{u}_y$ avec $dy < 0$ sur AB , mais ce n'est pas important.

◇ Cela donne :

$$C_{AD} = \int_{P \in \mathcal{L}_1} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \int_{P \in \mathcal{L}_1} B(z_P) \vec{u}_y \cdot (dy \vec{u}_y) = \int_{P \in \mathcal{L}_1} B(z_P) dy$$

◇ Les mêmes raisons géométriques impliquent $z_P = C^{te} = z_M \stackrel{\text{not}}{=} z$ et ainsi :

$$C_{AD} = \int_{P \in \mathcal{L}_1} B(z) dy = B(z) \times \int_{y_A}^{y_D} dy = B \times (y_D - y_A) = -B(z) \times L$$

◇ Bien sûr, nous obtenons la même chose!

Seuls les déplacements élémentaires proportionnels à dl peuvent être signés artificiellement par l'ajout d'un signe $-$.

◇ Il faudra faire très attention à la façon de calculer la circulation de manière à ne pas se tromper de signe :

→ soit réfléchir au signe au moment de l'écriture du déplacement élémentaire en $dl_P \vec{u}$

→ soit **ne jamais réfléchir au signe** en écrivant les déplacements élémentaires en $dx \vec{u}_x$, $dy \vec{u}_y$, $dz \vec{u}_z$ mais être extrêmement rigoureux sur les bornes et les intégrations

🕒 calcul de C_{DE}

✧ Ici le déplacement élémentaire vaut $d\vec{\ell} = -dz \vec{u}_z$. Cela donne donc :

$$C_{DE} = \int_{P \in \mathcal{L}_2} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \int_{P \in \mathcal{L}_2} B(z_P) \vec{u}_y \cdot (dz \vec{u}_z) = \int_{P \in \mathcal{L}_2} B(z_P) \underbrace{\vec{u}_y \cdot \vec{u}_z}_{=0} dz = 0$$

✧ Le champ $\vec{B}(P)$ étant orthogonal en tout point de DE au contour d'AMPÈRE ce résultat n'est pas surprenant.

🕒 calcul de C_{EF}

✧ Ici le déplacement élémentaire vaut $d\vec{\ell} = +dz \vec{u}_y$. Nous avons donc :

$$C_{EF} = \int_{P \in \mathcal{L}_3} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \int_{P \in \mathcal{L}_3} B(z_P) \vec{u}_y \cdot (dz \vec{u}_y) = \int_{P \in \mathcal{L}_3} B(z_P) dz$$

✧ Ici la géométrie particulière implique que $z_P = C^{\text{te}} = -z_M = -z$ et ainsi :

$$C_{EF} = \int_{P \in \mathcal{L}_3} B(-z) dz = B(-z) \int_{P \in \mathcal{L}_3} dz = B(-z) \times L$$

✧ Et comme $B(-z) = -B(z)$, nous obtenons finalement $C_{DE} = -B(z) \times L$.

🕒 calcul de C_{FA}

✧ De même que sur DE , le champ en chaque point P de FA est orthogonal au contour, donc nous pouvons dire que :

$$C_{FA} = 0$$

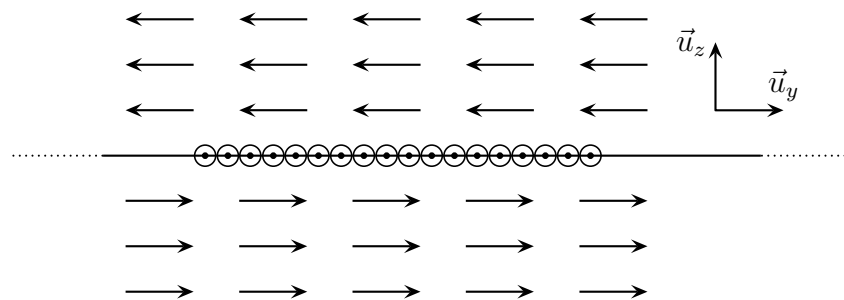
🕒 rassemblement

✧ Finalement : $C = -2B(z) \times L$.

✧ Le courant enlacé donne directement $i_{\text{enlacé}} = +nL \times i$ car seuls les fils qui passent à l'intérieur du contour comptent pour le courant enlacé.

✧ Avec le théorème d'AMPÈRE qui dit $C = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$, nous obtenons

$$-2B(z) \times L = nL \times i \quad \rightsquigarrow \quad \vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 n i}{2} \vec{u}_y$$



✧ N'oublions pas de vérifier l'homogénéité et la cohérence, notamment le fait que le sens du champ \vec{B} soit conforme à la règle de la main droite.

✧ Nous pouvons nous poser la question de la dépendance du champ magnétique en z puisque le résultat ne dépend pas de z .

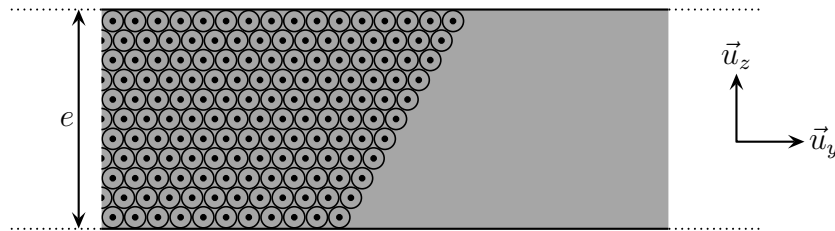
- ◇ En fait, comme le montre bien le schéma précédent, **le champ dépend** de la coordonnée z : si $z > 0$ le champ est dans un sens et si $z < 0$ le champ est dans l'autre sens. C'est pourquoi il vaut mieux écrire le résultat sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 n i}{2} \vec{u}_y \quad \text{pour } z > 0 \\ \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n i}{2} \vec{u}_y \quad \text{pour } z < 0 \end{array} \right.$$

III.3.ii – nappe épaisse

★ description

- ◇ Considérons maintenant deux plans infinis entre lesquels sont disposés des fils rectilignes tous parcourus par un courant d'intensité i .



- ◇ Les fils sont répartis uniformément de telle sorte qu'il y a n fils par unité de section, *ie.* qu'en regardant une section S de cette épaisseur, il y ait $N = n S$ fils à l'intérieur.
 ◇ Le but est de trouver le champ créé dans tout l'espace.

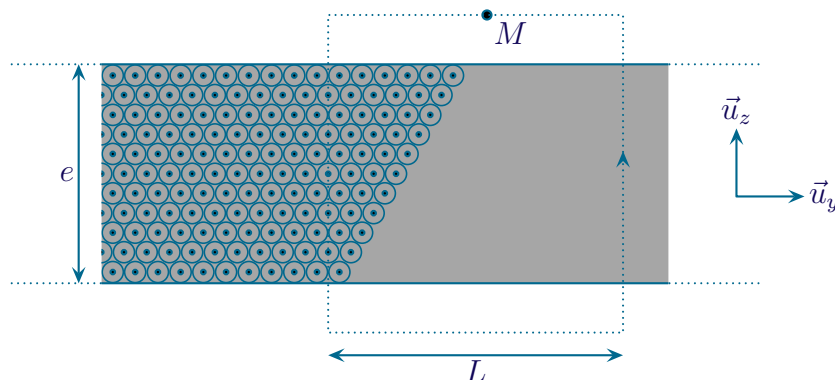
★ analyse, symétries et invariances

- ◇ Il s'agit d'une distribution de type « plan » (la vie est formidable!), identique au précédent.
 ◇ Nous avons donc, de la même manière que précédemment $\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_y$.
 ◇ Rappelons que le plan (Oxy) est plan de symétrie des courants, donc plan d'antisymétrie de \vec{B} , et qu'ainsi $B(-z) = -B(z)$.
 ◇ Dans les grandeurs pertinentes, nous aurons i , n (distribution), e (géométrie) et μ_0 (structure).

★ théorème d'AMPÈRE

🌀 calcul de la circulation

- ◇ Prenons le même contour, à savoir un rectangle dans le plan (Myz) et symétrique par rapport au plan (Oxy) où O est au milieu de la distribution sur l'axe (Mz) .



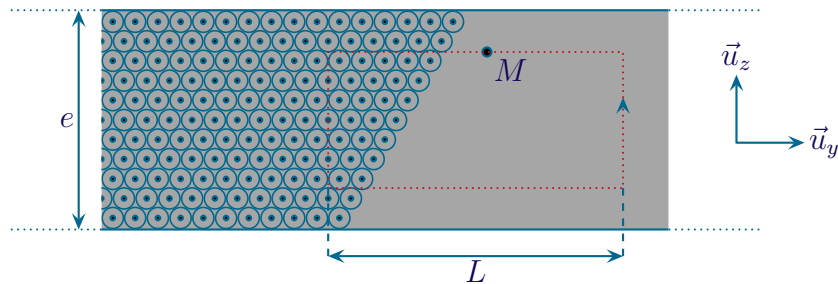
- ◇ Les calculs sont identiques au cas précédent puisque l'expression de la circulation ne dépend que de \vec{B} et pas de la géométrie de la distribution.
- ◇ Nous avons donc $C = -2 B(z) \times L$.

🔗 courant enlacé

◇ Il faut cette fois distinguer deux cas :

- le point M est à l'intérieur de la distribution de courants, ie. $|z| \leq \frac{e}{2}$;
- le point M est à l'extérieur de la distribution de courants, ie. $|z| > \frac{e}{2}$.

- ◇ Si le point M est à l'extérieur de la distribution, le courant enlacé vaut : $i_{\text{enlacé}} = +n \ell e \times i$.
- ◇ Si le point M est à l'intérieur de la distribution, le courant enlacé vaut : $i_{\text{enlacé}} = +n \ell 2z \times i$.

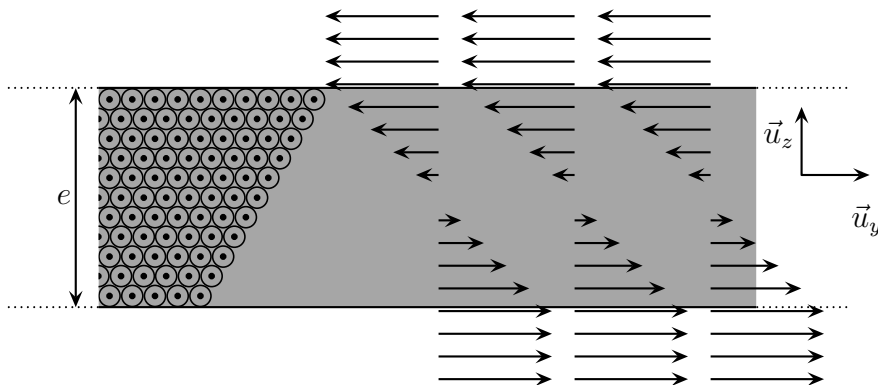


🔗 rassemblement

◇ Avec le théorème d'AMPÈRE qui dit $C = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$, nous obtenons :

$$\begin{cases} -B(z) 2L = \mu_0 n L 2z i & \text{pour } |z| \leq \frac{e}{2} \\ -B(z) 2L = \mu_0 n L e i & \text{pour } z > \frac{e}{2} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \vec{B}(z) = -\mu_0 n z i \vec{u}_y & \text{pour } |z| \leq \frac{e}{2} \\ \vec{B}(z) = -\frac{\mu_0 n e i}{2} \vec{u}_y & \text{pour } z > \frac{e}{2} \end{cases}$$

◇ Le champ \vec{B} se représente donc de la manière suivante.



◇ Nous pouvons voir que le sens du champ change progressivement à l'intérieur de la nappe de courant.

III.4 – Bilan sur les symétries

III.4.i – pour les théorèmes d'AMPÈRE et de GAUSS

- ◇ Finalement nous pouvons remarquer que les théorèmes de GAUSS et d'AMPÈRE sont très utiles pour déterminer des champs dans tout l'espace lorsque la distribution présente de très nombreuses symétries et invariances.
- ◇ Ainsi dans tous les cas, l'étude physique préalable de la situation avait permis de réduire l'écriture du champ sous la forme $E(r)\vec{u}_r$ ou $B(z)\vec{u}_y$, *ie.* comme un champ porté par un seul vecteur et dont la norme ne dépend que d'une seule variable.

III.4.ii – liens entre invariance et symétrie

- ◇ Nous pouvons remarquer que lorsqu'il y a une invariance, il y a systématiquement des plans de symétrie ou d'antisymétrie.

★ cas rencontrés

Pour une distribution de type fil, tous les plans contenant l'axe et tous les plans orthogonaux à l'axe sont plans de symétrie ou d'antisymétrie des sources donc des champs.

- ◇ Ici il y a deux infinités de plans particuliers : **tous ceux** qui sont orthogonaux à l'axe et **tous ceux** qui contiennent l'axe.

Pour une distribution de type plan, tous les plans orthogonaux à la distribution sont des plans de symétrie ou d'antisymétrie des sources donc des champs.

- ◇ Ici il y a deux infinités de plans de symétrie : **tous ceux** parallèles à un axe et **tous ceux** parallèle à l'autre axe.
- ◇ Il faudra aussi se poser la question de savoir s'il n'existerait pas d'autres plans de symétrie orthogonaux à l'axe : dans le cas du plan épais, le plan passant au milieu est aussi plan de symétrie des sources.

Pour une distribution de type sphère, tous les plans contenant le centre sont des plans de symétrie des sources donc des champs.

- ◇ D'une certaine manière il y a deux infinités de plans de symétrie puisque nous pouvons tourner les plans considérés suivant deux angles.

Chaque invariance crée une infinité de plan particuliers.

★ cas futurs

Pour une distribution de type disque, tous les plans contenant l'axe sont des plans de symétrie ou d'antisymétrie des sources donc des champs.

- ◇ Ici il y a une infinité de plans particuliers : **tous ceux** contenant l'axe.
- ◇ Il faudra aussi se poser la question de savoir s'il n'existerait pas d'autres plans de symétrie orthogonaux à l'axe : dans le cas du disque, le plan contenant le disque est aussi plan de symétrie des sources.

Pour une distribution de type ruban, tous les plans orthogonaux à l'axe sont des plans de symétrie ou d'antisymétrie des sources donc des champs.

- ◇ Nous nous poserons alors la question de l'existence de plans particuliers de symétrie ou d'antisymétrie particulier.

Approche globale du champ (\vec{E}, \vec{B})

Au niveau du cours

★ Les définitions

◇ Sont à savoir :

- champ vectoriel, lignes de champ, source
- invariance, plan de symétrie et d'antisymétrie des sources et des champs
- flux d'un champ vectoriel à travers une surface
- circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour

★ Les grandeurs

◇ Savoir vérifier l'homogénéité de l'expression d'un champ électrique et d'un champ magnétique.

★ Les lois

◇ Connaître :

- le lien entre invariance des sources et invariance des champs
- le lien entre symétrie des sources et symétrie des champs
- le théorème de GAUSS
- l'expression du champ créé par une charge ponctuelle
- le théorème d'AMPÈRE

★ la phénoménologie

◇ Connaître :

- les sources de champ électrique et magnétique
- l'orientation des lignes de champs dans le vide près des zones sources
- l'interprétation de la densité surfacique de charge, de la densité linéique de charge

★ les exemples fondamentaux

◇ Savoir :

- retrouver le champ électrique créé dans tout l'espace par un fil épais ou fin uniformément chargé
- retrouver le champ électrique créé dans tout l'espace par un plan épais ou fin uniformément chargé
- retrouver le champ électrique créé dans tout l'espace par une boule uniformément chargée
- retrouver le champ magnétique créé dans tout l'espace par un fil fin parcouru par un courant
- retrouver le champ magnétique créé dans tout l'espace par une nappe fine de courants

Au niveau de l'analyse

★ Analyse physique

◇ Savoir repérer le type de la distribution (sphère, plan, fil, ...) et voir toutes les invariances et symétries particulières que peut présenter la distribution de sources.

Au niveau des savoir-faire

◇ Connaître parfaitement

- les coordonnées sphériques, la base locale associée
- les déplacements élémentaire dans tous les systèmes de coordonnées

★ petits gestes

◇ Il faut savoir :

- bien savoir choisir (et dessiner) une surface de GAUSS, un contour d'AMPÈRE
- calculer un flux à travers une surface de GAUSS
- calculer une circulation le long d'un contour d'AMPÈRE

★ exercices classiques

◇ Savoir

- retrouver le champ magnétique créé dans tout l'espace par un câble épais
- retrouver le champ magnétique créé dans tout l'espace par une nappe épaisse de courants

Table des matières

I	Sources et structure fondamentale du champ électromagnétique	1
I-1	Sources de champ	1
I-1 <i>·i</i>	des champs vectoriels	1
I-1 <i>·ii</i>	sources du champ électrostatique	1
I-1 <i>·iii</i>	sources du champ magnétostatique	2
I-1 <i>·iv</i>	couplage entre champ magnétique et champ électrique	2
I-1 <i>·v</i>	principe de superposition	3
I-2	Représenter les champs	3
I-2 <i>·i</i>	champ de vecteurs	3
I-2 <i>·ii</i>	lignes de champs	4
I-3	Invariance des sources	7
I-3 <i>·i</i>	description	7
	invariance sphérique	7
	invariance par rotation et translation	8
	une invariance par rotation	9
	deux invariances par translation	9
	une invariance par translation	10
I-3 <i>·ii</i>	liens avec les champs	10
I-4	Plans de symétrie	11
I-4 <i>·i</i>	description	11
	plan de symétrie des sources	11
	plan d'antisymétrie des sources	12
	plan de symétrie des champs	12
	plan d'antisymétrie des champs	13
I-4 <i>·ii</i>	liens avec les champs	14
I-4 <i>·iii</i>	exemples	14
I-4 <i>·iv</i>	utilité	15
I-5	Analyser un problème d'électromagnétisme	15
II	Le champ électrostatique	16
II-1	Le théorème de GAUSS	16
II-1 <i>·i</i>	énoncé	16
II-1 <i>·ii</i>	notion de flux	17
II-1 <i>·iii</i>	interprétation	17
II-1 <i>·iv</i>	utilisation	17
II-2	Champ créé par un fil	17
II-2 <i>·i</i>	description volumique	17
	position du problème	17
	analyse physique	18
	théorème de GAUSS	18
II-2 <i>·ii</i>	description linéique	21
	densité linéique de charge	21
	lien entre densité linéique et densité volumique	21
	petite variation pour GAUSS	21
II-3	Champ créé par un plan	22
II-3 <i>·i</i>	plan épais	22
	position du problème	22
	symétries et invariances	22

	théorème de GAUSS	23
II.3.ii	plan fin	26
	densité surfacique de charges	26
	lien entre densité linéique et densité volumique	26
	petite variation pour GAUSS	26
	un résultat général	27
II.3.iii	le condensateur plan idéal	27
	présentation	27
	représentation du champ	27
II.4	Champ créé par une boule	28
II.4.i	de nouvelles coordonnées	28
II.4.ii	boule chargée en volume	29
	position du problème	29
	analyse physique	29
	théorème de GAUSS	29
II.4.iii	charge ponctuelle	31
	limite de la charge ponctuelle	31
	champ créé par une charge ponctuelle	31
III	Le champ magnétostatique	32
III.1	Le théorème d'AMPÈRE	32
III.1.i	énoncé	32
	intensité enlacée	32
III.1.ii	notion de circulation	33
III.1.iii	interprétation	33
III.1.iv	utilisation	33
III.2	Champ magnétostatique créé par un fil	34
III.2.i	fil simple	34
	description	34
	analyse physique	34
	théorème d'AMPÈRE	35
III.2.ii	câble	36
	description	36
	symétries et invariances	37
	théorème d'AMPÈRE	37
III.3	Champ magnétostatique créé par une nappe de courant	38
III.3.i	nappe fine	38
	description	38
	analyse physique	38
	théorème d'AMPÈRE	39
III.3.ii	nappe épaisse	42
	description	42
	analyse, symétries et invariances	42
	théorème d'AMPÈRE	42
III.4	Bilan sur les symétries	44
III.4.i	pour les théorèmes d'AMPÈRE et de GAUSS	44
III.4.ii	liens entre invariance et symétrie	44
	cas rencontrés	44
	cas futurs	44