Électromagnétisme

Chapitre 2

Approche locale du champ $(\vec{E},\vec{B})$

Approche locale du champ $(\vec{E},\vec{B})$

Dans le premier chapitre, nous avons étudié les champs avec une approche globale, c'est-à-dire en essayant de les déterminer partout en même temps grâce aux théorèmes de Gauss et d'Ampère mais aussi et surtout grâce aux symétries et aux invariances.

Dans ce chapitre, nous allons davantage nous concentrer sur une approche locale, c'est-à-dire sur la manière dont chaque source est responsable en partie du champ total créé. Pour cela, avant de voir dans la 2e partie les lois fondamentales qui structurent les champs électrique et magnétique, nous allons commencer par introduire le potentiel électrostatique qui fournit un autre moyen de déterminer un champ électrique. Enfin, dans les 3e et 4e partie nous verrons quelques exemples classiques de détermination de champ à partir des lois fondamentales.

I – Potentiel électrostatique

I·1 – Transformer un champ vectoriel en champ scalaire

I·1·*i* – le problème . . .

- Le but c'est de trouver un champ électrostatique, *ie.* un champ vectoriel.
- Cela consiste, rappelons-le à déterminer ses trois composantes (donc trois fonctions) dépendant de l'espace, *ie.* de 3 variables.
- Afin de simplifier le problème, nous pourrions envisager de trouver « autre chose », un « nombre » dépendant des 3 variables de l'espace et à partir duquel il serait (relativement) simple d'en déduire le champ électrique.
- L'idée, autrement dite, consiste à utiliser non pas une approche vectorielle mais une approche scalaire de manière à trouver une solution plus facilement d'une part mais aussi à manipuler les solutions plus facilement d'autre part (il est techniquement plus aisé d'additionner deux nombres que deux vecteurs).

I·1·*ii* – . . . a déjà été résolu en mécanique . . .

- En mécanique, nous connaissons deux types d'approches : l'approche en terme de force et l'approche en terme énergétique.
- Nous avions déjà constaté que lorsque l'approche énergétique était adaptée à un problème, son utilisation était bien plus simple, rapide et efficace que l'approche en terme de forces.
- Il s'agit d'une situation analogue ici.
- En ce qui concerne les forces, nous pouvions en décrire quelques-unes, les forces conservatives, avec le « nombre » associé : l'énergie potentielle.
- L'énergie potentielle associée à $\vec{f}$ était définie comme suit :

$$\vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} \qquad \text{où :}$$

  - ➜ $\mathrm{d}\vec{r}$ est un déplacement élémentaire **quelconque**
  - ➜ $\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$ est la variation d'énergie potentielle entre les points initial et final
- À partir des expressions des différentes forces nous avons donc pu trouver les différentes expressions des l'énergies potentielles associées.

I·1·*iii* – …mais pas entièrement

- Toutefois, nous avons laissé un point en suspent : nous n'avons pas dit comment, à partir de l'expression de l'énergie potentielle nous pouvions retrouver l'expression de la force associée.
- Plus exactement, nous n'avions vu le lien que dans le cas d'un mouvement rectiligne ce qui n'était pas trop dérangeant étant donné que nous ne nous donnions pas la peine de revenir aux forces à partir de l'énergie.
- Mais comme maintenant le but avoué est de trouver **d'abord** le nombre (*ie.* « l'énergie potentielle ») **avant** le vecteur (*ie.* la force), il nous faut donc désormais établir ce lien.

I·1·*iv* – définition du potentiel électrostatique

> Le *potentiel électrostatique* est un champ scalaire $V(M)$ qui s'exprime en volt et à partir duquel il est possible de déterminer le champ vectoriel électrostatique $\vec{E}$.

- Ce potentiel n'est ni plus ni moins que le potentiel utilisé en électrocinétique ! Et les volts de ce potentiel sont bien les volts des piles, du secteur, …
- À l'époque nous avions interprété le potentiel comme « l'énergie que contenait le courant ».
- Le fait que l'idée du *potentiel* électrostatique vienne de l'énergie *potentielle* n'est pas une coïncidence : nous finirons d'établir ce lien (entre électromagnétisme, mécanique et courant électrique) dans le chapitre 7 de mécanique.
- Le potentiel électrostatique étant scalaire, il est *signé*.

> Le champ électrostatique en un point M est tel que :
>
> $$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M) \qquad \text{où :}$$
>
> $V(M)$ est le potentiel électrostatique en M.

I·2 – Pause gradient

I·2·*i* – intérêt

- Qu'est-ce donc que le gradient ?

> Le *gradient* est un opérateur vectoriel qui transforme un champ scalaire en champ vectoriel.

- Reprenons la définition et faisons l'analogie $\vec{E} \leftrightarrow \vec{f}$ et $V \leftrightarrow E_{\text{p}}$. Cela donne :

$$\vec{f}\cdot\text{d}\vec{r} = -\text{d}E_{\text{p}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \vec{E}\cdot\text{d}\vec{r} = -\text{d}V$$

- D'une certaine manière nous aimerions écrire $\vec{E} = -\dfrac{\text{d}V}{\text{d}\vec{r}}$, mais cela ne se fait pas[1].
- En fait cette expression signifie que $\vec{E}$ est la dérivée de V mais une dérivée un peu spéciale puisqu'elle se fait en 3 dimensions.

[1]L'auteur décline toute responsabilité quant à l'utilisation de cette notation et aux réactions épidermiques qu'elle pourrait provoquer chez certains correcteurs.

I·2·*ii* – relation fondamentale

Soit un champ scalaire $V(M)$ quelconque, alors :
$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(V(M))\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}V$$

✧ La différentielle de la fonction s'exprime différemment suivant les coordonnées :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

✧ Rappelons que cette expression de la différentielle signifie simplement qu'une variation de V est due à la superposition (la somme) des variations engendrées par une petite variation de x, y et z (ou r, θ, φ en sphérique).

I·2·*iii* – le gradient en coordonnées cartésiennes

✧ Reprenons la relation fondamentale et cela donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V = \overrightarrow{\text{grad}}\,(V)\cdot\mathrm{d}\vec{r} &= \begin{pmatrix}\text{grad}_x V\\ \text{grad}_y V\\ \text{grad}_z V\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\end{pmatrix}\\ &= \text{grad}_x(V)\,\mathrm{d}x + \text{grad}_y(V)\,\mathrm{d}y + \text{grad}_z(V)\,\mathrm{d}z = \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

✧ Comme la relation précédente est vraie pour n'importe quel déplacement élémentaire, y compris celui tel que $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0$, nous obtenons :

$$\text{grad}_x(V)\,\mathrm{d}x = \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x \qquad \rightsquigarrow \qquad \text{grad}_x V = \frac{\partial V}{\partial x}$$

✧ En procédant de même, nous pouvons trouver

$$\text{grad}_y(V) = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \text{grad}_z(V) = \frac{\partial V}{\partial z}$$

En coordonnées cartésiennes, le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

I·2·*iv* – interprétation du gradient

Prendre un tableau de nombre 3×3 et trouver le gradient au milieu.

Le gradient pointe vers les zones de valeurs élevées.

I·2·*v* – le gradient dans les autres coordonnées

✯ en coordonnées cylindro-polaires

✧ En procédant avec le même raisonnement que ci-dessus, nous obtenons :

$$\mathrm{d}V = \overrightarrow{\text{grad}}\,(V(M)) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix} \text{grad}_r V \\ \text{grad}_\theta V \\ \text{grad}_z V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}$$

$$= (\text{grad}_r V)\,\mathrm{d}r + (\text{grad}_\theta V)\,r\,\mathrm{d}\theta + (\text{grad}_z V)\,\mathrm{d}z \qquad = \frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

✧ L'identification du 2e terme donne, cette fois : $\text{grad}_\theta V = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial V}{\partial \theta}$.

En coordonnées cylindro-polaires, le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

✯ en coordonnées sphériques

✧ Démonstration laissée au lecteur. Rappelons juste le déplacement élémentaire en sphérique :

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

En coordonnées sphériques, le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\,\sin\theta}\,\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \varphi}\,\vec{u}_\varphi$$

I·2·*vi* – le gradient est un opérateur différentiel linéaire

✧ Il ne faut pas oublier que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ est avant tout un opérateur différentiel ! Il est donc linéaire !

Quels que soient les potentiels électrostatiques $V_1(M)$ et $V_2(M)$, nous pouvons écrire, avec $\lambda = \mathrm{C^{te}}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\lambda\,V(M)) = \lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(V(M))$$
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(V_1(M) + V_2(M)) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(V_1(M)) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(V_2(M))$$

Éviter les formules plus compliquées de dérivations, ça ne marche pas toujours.

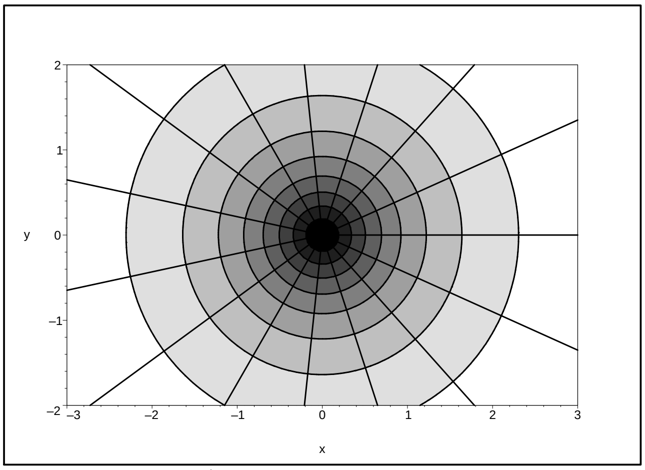
I·3 – Représentation du potentiel électrostatique

I·3·*i* – les isopotentielles

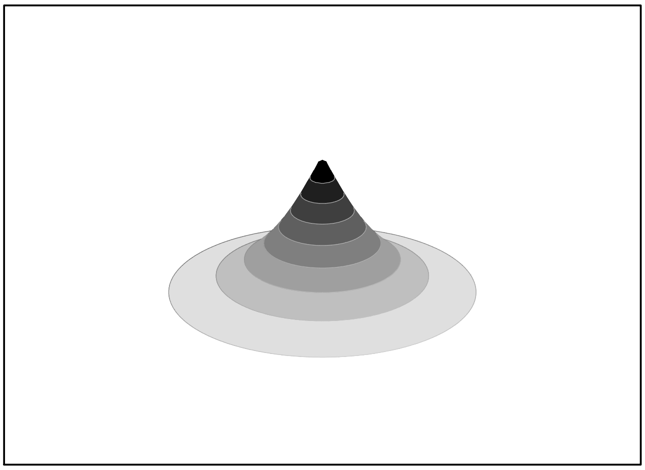
✧ C'est une nouvelle ligne, on représente les isoV. Ce sont comme des lignes de niveau en géographie.

> Une ligne ou une surface *isopotentielle* est une ligne ou une surface de l'espace sur laquelle le potentiel électrostatique est uniforme.

Graphique 1

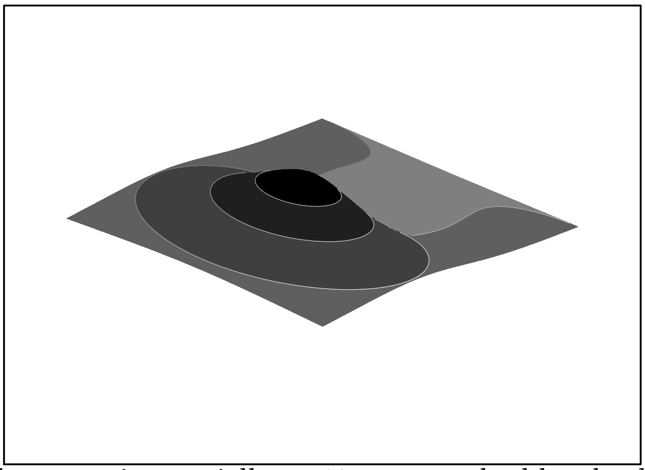


Graphique 2

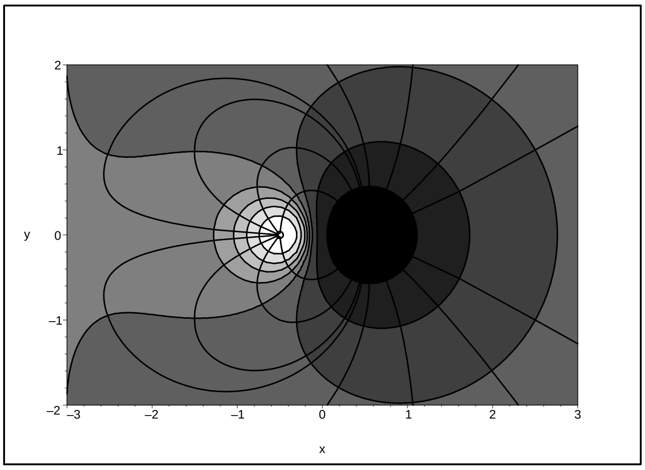


✧ Nous pouvons voir :
- ➜ graphique 1 : carte des iso$V$ et lignes de champ créées par une charge ponctuelle positive. Il faut orienter les lignes de champ et nous voyons que le potentiel augmente en se rapprochant de la charge positive.
- ➜ graphique 2 : la même chose en 3D.

Graphique 3



Graphique 4

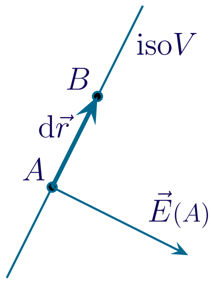


✧ Champ et isopentielles créés par un doublet de charges :
- ➜ graphique 3 : faire deviner quelle est la charge postive, quelle est la charge négative et laquelle est la plus grande en valeur absolue.
- ➜ graphique 4 : orienter les lignes de champ avec les résultats précédents.

I·3·*ii* – intersection locales des lignes de champ

> Les lignes de champ électrostatique et les isopotentielles se coupent à angle droit.

✧ Prenons deux points A et B sur une isoV et faisons le déplacement infinitésimal $\mathrm{d}\vec{r} = \overrightarrow{AB}$.

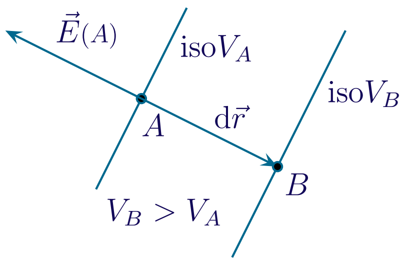


✧ Nous avons alors : $\mathrm{d}V = 0$ et comme $\mathrm{d}V = -\vec{E}(A)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$, les lignes de champs sont orthogonales aux lignes isopotentielles.

I·3·*iii* – sens de $\vec{E}$

> Le champ $\vec{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissants.

✧ Prenons deux isopotentielles très proches et considérons $\mathrm{d}V = -\vec{E}(A)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{AB} = V_B - V_A$.

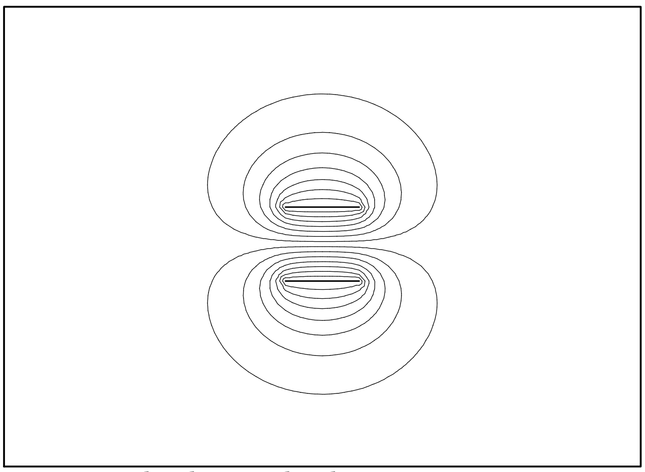


✧ Supposons $V_B > V_A$. Alors $\mathrm{d}V > 0$ et ainsi $-\vec{E}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont dans le même sens, ou, ce qui revient au même, $\vec{E}$ pointe de B vers A.

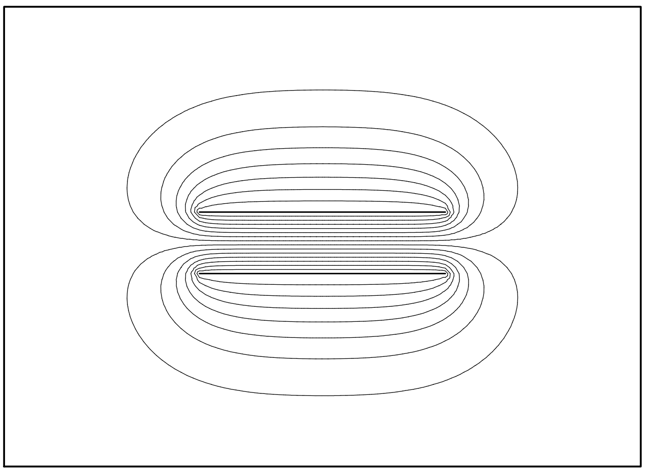
I·3·*iv* – Capacité d'un condensateur

✫ tracé de lignes isopotentielles

Graphique 5



Graphique 6



✧ Faire tracer les lignes de champ :

➜ graphique 5 : avec un petit condensateur, entre les plaques, nous pouvons constater que le champ est à peu près droit même s'il se courbe sur les bord et qu'il existe un champ à l'extérieur du condensateur.

➜ graphique 6 : avec un plus grand condensateur où la largeur est bien plus importante que l'épaisseur, le champ est très uniforme à l'intérieur, il correspond à un champ d'un condensateur « infini » à l'intérieur du condensateur..

✧ Le champ est bien uniforme dans le condensateur, même s'il n'est pas infini.

✯ relation constitutive

✧ Négligeons les effets de bord, c'est-à-dire faisons comme si le champ à l'intérieur du condensateur correspondait au champ d'un condensateur infini.

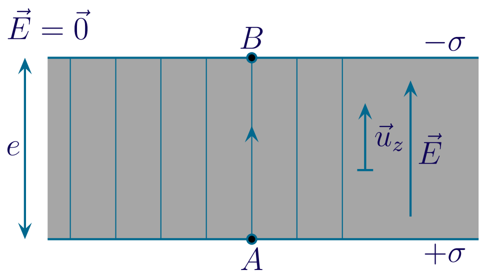
Négliger les effets de bord revient :

➜ techniquement, à admettre une invariance par rotation ou translation, là où il n'y en a pas

➜ physiquement, à négliger l'effet de la portion de l'espace située près des bords

✧ La face A est chargée $+\sigma$ et la face B est chargée $-\sigma$.

✧ Cela donne un champ $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{u}_z$ à l'intérieur et $\vec{E} = \vec{0}$ à l'extérieur.



✧ Calculons la circulation du champ d'un bord à l'autre :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P = \int_A^B \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{u}_z \cdot (\mathrm{d}\ell_P\,\vec{u}_z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_A^B \mathrm{d}\ell_P = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\ell = \frac{Q}{S}\times\frac{e}{\varepsilon_0}$$

✧ Mais nous avons aussi :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\int_A^B \mathrm{d}V = -(V_B - V_A) = V_A - V_B = U_{AB}$$

✧ En rassemblant $Q = \dfrac{\varepsilon_0\,S}{e}\times U_{AB}$, ce qui n'est autre que la relation constitutive du condensateur que nous utilisons « depuis longtemps » : $q = +C\,u$, *ie.* la charge portée par une armature est proportionnelle à la différence de potentiels entre les armatures.

La relation constitutive d'un condensateur s'écrit : $Q_A = C\,(V_A - V_B)$.

Pour un condensateur plan idéal, la capacité vaut :

$$C = \varepsilon_0 \, \frac{S}{e} \qquad \text{où :}$$

➜ S est la surface des armatures en regard
➜ e est la distance séparant les armatures

✧ Nous retrouvons bien le fait que $[\varepsilon_0] = \text{F.m}^{-1}$.

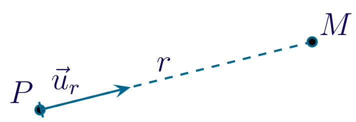
I·4 – Déterminer directement un potentiel

I·4·*i* – pour une charge

Le potentiel créé en M par une charge q située au point P vaut :

$$V_P(M) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|}$$

✧ Partons de l'expression de $\vec{E}$ et de la relation du potentiel.



✧ Nous trouvons, en utilisant les coordonnées sphériques :

$$\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_r\cdot(\mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi) = -\frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\mathrm{d}r$$

✧ Ainsi $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}$.

✧ Par intégration, nous obtenons alors $V = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} + \text{C}^{\text{te}}$.

✧ La constante est choisie avec la convention habituelle : $V = 0$ là où $\vec{E} = \vec{0}$, *ie.* ici à l'infini, ce qui donne :

$$V = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}$$

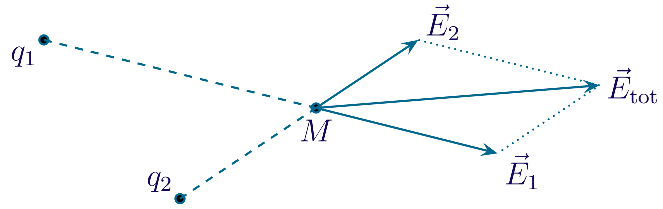
I·4·*ii* – pour une distribution de charges

✫ superposer les potentiels

Le potentiel créé par la réunion de deux distributions de charges est la somme du potentiel créé par chacune des deux distributions.

✧ En effet nous savons déjà, gâce au principe de superposition que le champ total créé par l'ensemble de deux distributions ① et ② vaut :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



- Comme il s'agit là de 3 champs électrostatiques, nous pouvons leur associer trois potentiels électrostatiques V_{tot}, V_1 et V_2. Dans ces conditions la relation précédente devient :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\,V_{\text{tot}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V_1 - \overrightarrow{\text{grad}}\,V_2$$

- Et grâce au caractère linéaire du gradient nous obtenons : $-\overrightarrow{\text{grad}}\,V_{\text{tot}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V_1 + V_2)$.
- Dans ces conditions nous pouvons dire que les deux potentiels V_{tot} et $V_1 + V_2$ diffèrent d'une constante.
- Lorsque nous regardons les conditions à l'infini, nous pouvons constater que :

$$V_{\text{tot}} \longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad V_1 + V_2 \longrightarrow 0$$

- La constante à rajouter est donc nulle.
- Finalement, nous avons bien $V_{\text{tot}} = V_1 + V_2$ **pourvu qu'il n'y ait pas de charges à l'infini**.

✯ les lois

Le potentiel créé en M par des charges q_i situées en P_i vaut :

$$V(M) = \sum \frac{q_i}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,P_iM}$$

Le potentiel créé en M par une distribution volumique de charges de densité $\rho(P)$ vaut :

$$V(M) = \iiint_{P \in \mathscr{V}} \frac{\rho(P)\,\mathrm{d}\tau_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM}$$

Le potentiel créé en M par une distribution surfacique de charges de densité $\sigma(P)$ vaut :

$$V(M) = \iint_{P \in \mathscr{S}} \frac{\sigma(P)\,\mathrm{d}S_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM}$$

Le potentiel créé en M par une distribution linéique de charges de densité $\lambda(P)$ vaut :

$$V(M) = \int_{P \in \mathscr{C}} \frac{\lambda(P)\,\mathrm{d}\ell_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM}$$

✯ conventions

Par convention, le potentiel électrostatique est nul à l'infini s'il n'y a pas de charges à l'infini.

- Cette convention est automatiquement vérifiée avec les formules précédentes.

✧ Changer cette convention ne change rien à $\vec{E}$.
✧ En effet, condidérons deux potentiels différents $V'(M) = V(M) + \mathrm{C^{te}}$. Alors :

$$\begin{aligned}\vec{E}\,'(M) &= -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(V'(M)) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(V(M) + \mathrm{C^{te}}) \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(V(M)) - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{C^{te}}) = \vec{E}(M) + \vec{0}\end{aligned}$$

I·4·*iii* – propriétés

> Le potentiel est continu partout, sauf là où il n'est pas défini, à savoir sur un fil linéiquement chargé et en un point où se situe une charge ponctuelle.

✧ Rappelons que la charge ponctuelle et le fil linéiquement chargé sont des modèles « à grande distance » de répartitions volumiques de charges pour lesquelles champ et potentiel électrostatique sont parfaitement définis et calculables.
✧ La différence avec le champ c'est que le potentiel est calculable sur un plan chargé alors qu'un champ électrostatique, non.

I·4·*iv* – utilisation, lien avec les analyses

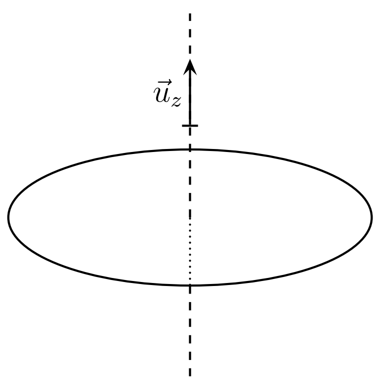
✧ Rappelons que, comme l'approche énergétique, manipuler des potentiels sera plus facile *a priori* que manipuler des champs vectoriels.
✧ Ceci dit, il faut pouvoir réaliser les calculs ce qui se révèle moins aisé « en général » que GAUSS car l'intégrale se fait sur la distribution de charges et non sur une surface arbitraire choisie.
✧ Pour cela, nous privilégierons l'approche potentiel :
  ➜ dans le cas des charges ponctuelles
  ➜ quand la géométrie de la distribution présente au moins quelques invariances

I·5 – Exemples

I·5·*i* – pour une spire circulaire

✯ situation envisagée

✧ Considérons une spire de rayon R chargée linéiquement avec une charge linéique uniforme λ et cherchons le potentiel $V(M)$ et le champ $\vec{E}$ créés par cette spire en un point M de son axe.



✯ analyses

Analyse physique

- Ici nous somme face à un distribution de type « disque » : il y a une invariance par rotation autour de l'axe du cercle et aucune invariance par translation.
- Nous utiliserons naturellement le repérage polaire.
- Soit M un point de l'axe, alors :
  - ➜ tout plan contenant $(M,\vec{u}_z)$ est plan de symétrie des charges
  - ➜ donc tout plan contenant $(M,\vec{u}_z)$ est plan de symétrie du champ $\vec{E}$
  - ➜ donc $\vec{E}(M)$ est porté par l'intersection de tous ces plans, *ie.* est porté par $\vec{u}_z$.
- Les grandeurs pertinentes sont λ (distribution), R (géométrie) et ε_0 (structure).

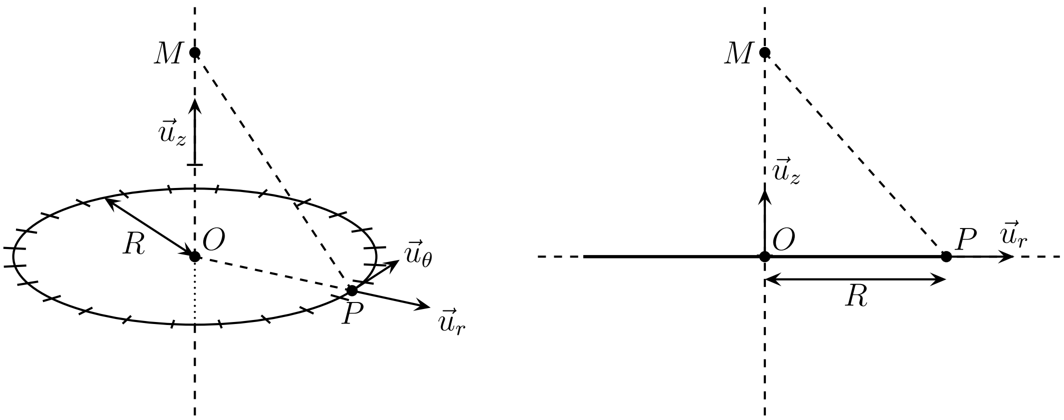
Analyse technique

- Le repérage est déjà automatiquement choisi.
- Pour un point M de l'axe, repéré uniquement par z, nous aurons ainsi $\vec{E}(M) = E(0,0,z)\,\vec{u}_z \overset{\text{not}}{=} E_{\text{axe}}(z)\,\vec{u}_z$.
- Remarquons qu'ici il n'y a pas assez de symétrie pour utiliser le théorème de Gauss puisqu'il n'y a qu'une seule invariance. Nous allons donc nous rabattre sur un calcul direct et alors autant choisir de passer par le potentiel qui amène au calcul d'un nombre et non au calcul d'un vecteur.

STOP il est très dangereux d'écrire que le champ s'exprime sous la forme $\vec{E}(M) = E(z)\,\vec{u}_z$ car cette forme laisse sous entendre que le champ ne dépend **que** de z, ce qui est faux. Et malheureusement un tel sous-entendu conduit à l'utilisation du théorème de Gauss ce qui est techniquement inutilisable ici bien que toujours aussi juste physiquement.

✯ expression du potentiel

- Comme il n'y a pas de charges à l'infini, nous pouvons voir la spire comme la réunions de toutes petites charges.



- En sommant le potentiel créé par chacune de ces charges, nous obtenons

$$V_{\text{axe}}(M) = \int_{P\in\mathscr{L}} \frac{\lambda(P)\,\mathrm{d}\ell_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM}$$

- Ici $MP = \sqrt{R^2+z^2} = \mathrm{C^{te}}$, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} V_{\text{axe}}(M) &= \int_{P\in\mathscr{L}} \frac{\lambda\,\mathrm{d}\ell_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}\int_{P\in\mathscr{L}}\mathrm{d}\ell_P \\ &= \frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} \times \underbrace{\ell_{\text{tot}}}_{=2\,\pi\,R} \end{aligned}$$

✧ Nous avons ainsi $\boxed{V(M) = \dfrac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}}$.

✧ N'oublions pas de vérifier l'homogénéité et la cohérence :

➜ pour l'homogénéité : potentiel $= \dfrac{\text{charge}}{\varepsilon_0 \times \text{distance}}$

➜ pour la cohérence nous pouvons vérifier le signe du potentiel (le même que celui de la charge) et le fait qu'il tende vers 0 dans le point M s'éloigne à l'infini

✯ en déduire le champ

✧ Que peut-on déduire, en terme de champ, du potentiel obtenu ?

➜ nous nous sommes placés sur l'axe (Oz), donc nous n'avons « que » $V(r=0,z)$

➜ nous ne peut donc dériver **que** par rapport à z

➜ avec la formule du gradient cela signifie que nous ne pouvons avoir **que** E_z

✧ Oui mais les symétries disent que le champ sur l'axe n'est porté que par $\vec{u}_z$. Donc tout va bien !

✧ Appliquons la loi :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{axe}}(M) &= -\frac{\mathrm{d}V_{\text{axe}}}{\mathrm{d}z}\,\vec{u}_z = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{u}_z \\ &= -\frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{2z}{(z^2+R^2)^{3/2}} \times \frac{-1}{2}\,\vec{u}_z\end{aligned}$$

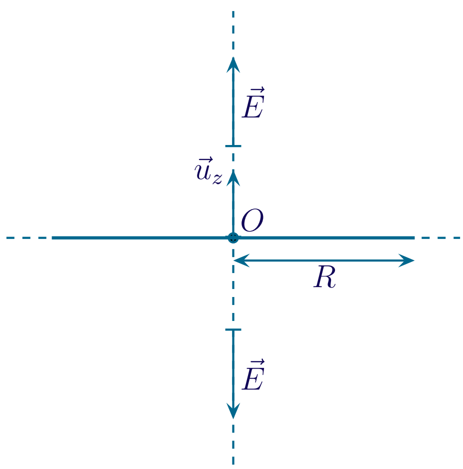
✧ Et ainsi : $\boxed{\vec{E}_{\text{axe}}(M) = \dfrac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \dfrac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,\vec{u}_z}$

✧ Pour l'homogénéité, nous avons bien E $= \dfrac{\text{charge}}{\varepsilon \times (\text{distance})^2}$.

✧ Au niveau de la cohérence, nous pouvons constater que :

➜ $\|\vec{E}\| \longrightarrow \vec{0}$ pour $z \to \infty$ car il n'y a pas de charges à l'infini

➜ le champ change de signe avec z, ce qui correspond à la situation suivante qui ne fait que traduire que le plan contenant la spire circulaire est plan de symétrie des charges donc du champ

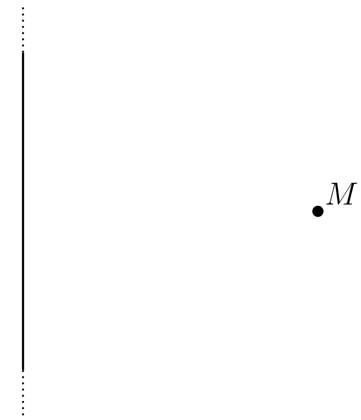


STOP la formule $\vec{E}_{\text{axe}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V_{\text{axe}}$ est **fausse** même si, ici, elle semble marcher ! Nous verrons dans le chapitre sur les dipôles électromagnétiques un exemple où, justement, ça ne marche pas.

I·5·*ii* – pour un fil infini

✯ situation

✧ Considérons un fil infini uniformément chargé de charge linéique λ et cherchons le potentiel et le champ électrostatique qu'il crée dans tout l'espace.



✧ L'analyse physique est rapide :
- ➜ c'est une distribution de type « fil », nous allons donc utiliser un repérage cylindro-polaire
- ➜ soit M un point quelconque de l'espace :
  - ➔ le plan $(M,\vec{u}_z,\vec{u}_r)$ est plan de symétrie des charges
  - ➔ donc est plan de symétrie de $\vec{E}$
  - ➔ donc $\vec{E}(M)$ contenu dans le plan $(M,\vec{u}_z,\vec{u}_r)$
  - ➔ *ie.* $\vec{E}(M)$ est porté par $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$.
- ➜ soit M un point quelconque de l'espace :
  - ➔ le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie des charges
  - ➔ donc est plan de symétrie de $\vec{E}$
  - ➔ donc $\vec{E}(M)$ contenu dans le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$
  - ➔ *ie.* $\vec{E}(M)$ est porté par $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.
- ➜ finalement, le champ $\vec{E}(M)$ n'est porté que par $\vec{u}_r$
- ➜ comme il y a une invariance par rotation et une par translation nous pouvons écrire $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r$

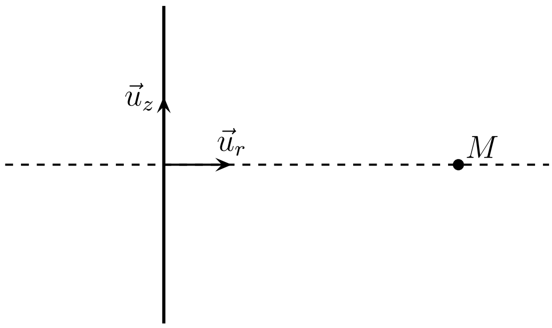
✧ Analyse physique :
- ➜ le repérage est déjà choisi
- ➜ au niveau de l'approche, ici, le plus simple sera clairement le théorème de Gauss que nous connaissons. Pour changer, utilisons une autre approche, celle qui consiste à déterminer le potentiel pour en déduire le champ
- ➜ comme il y a des charges à l'infini (!) nous savons déjà que nous ne pourrons pas utiliser l'expression du potentiel :

$$V(M) = \int_{P\in\mathscr{L}} \frac{\lambda\,\mathrm{d}\ell}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM}$$

✧ Nous allons donc procéder autrement.

✯ petit fil deviendra grand

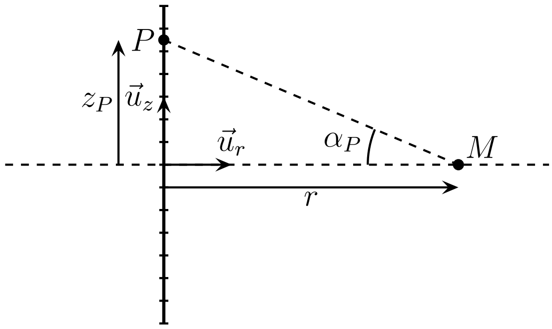
✧ Prenons un fil **non infini** chargé linéiquement de charge linéique λ uniforme et cherchons le potentiel en un point M du plan médiateur.



✧ Comme cette fois il n'y a pas de charges à l'infini, nous pouvons utiliser la superposition du potentiel :

$$V(M) = \int_{P\in\mathscr{C}} \frac{\lambda(P)\,\mathrm{d}\ell_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM}$$

✧ Commençons par découper la distribution.



✧ Ici le calcul semble assez délicat car $PM \neq \mathrm{C^{te}}$.

✧ En fait, pour intégrer sur un segment, le plus facile, mais ce n'est pas intuitif, c'est d'intégrer avec la variable angulaire α_P.

✧ Le but est donc de réécrire toutes les grandeurs variables en fonction de α_P.

✧ Ici le $\mathrm{d}\ell_P$ est un $\mathrm{d}z_P$ qu'il va falloir exprimer en fonction de α_P :
- ➜ d'abord exprimer z_P en fonction de α_P : $z_P = r\,\tan\alpha_P$;
- ➜ ensuite dériver : $\dfrac{\mathrm{d}z_P}{\mathrm{d}\alpha_P} = \dfrac{r}{\cos^2\alpha_P}$;
- ➜ et réécrire : $\mathrm{d}z_P = \dfrac{r}{\cos^2\alpha_P}\,\mathrm{d}\alpha_P$.

✧ Mais il faut aussi trouver l'expression de PM : $PM = \dfrac{r}{\cos\alpha_P}$.

✧ En remplaçant le tout, cela donne :

$$V(M) = \int_{P\in\mathscr{L}} \frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{r}{\cos^2\alpha} \times \frac{\cos\alpha}{r}\,\mathrm{d}\alpha_P = \frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\alpha_P}{\cos\alpha_P}$$

✧ Maintenant ce n'est plus de la physique c'est du « Maple-calcul ».

✧ Rappelons que $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} = \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$. Dans ces conditions, nous avons :

$$V(M) = \frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \left[\ln\left(\frac{1+\sin\alpha_P}{\cos\alpha_P}\right)\right]_{-\theta_0}^{\theta_0} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{V(M) = \frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1+\sin\theta_0}{1-\sin\theta_0}\right)}$$

fil infini

- Il ne reste plus qu'à faire « grandir » le fil, *ie.* $\theta_0 \to \dfrac{\pi}{2}$.
- Mais là … c'est le drame. Ça ne marche pas. Pourquoi ?
- Le problème est que la loi initiale (celle de superposition du potentiel) sous-entend qu'il n'y a pas de charges à l'infini. **Donc** le résultat sous-entend lui aussi qu'il n'y a pas de charges à l'infini.
- Conclusion : même en « trichant », il n'est pas possible de calculer avec la formule intégrale l'expression d'un potentiel électrostatique quand il y a des charges à l'infini.

ensuite la bonne méthode

- Quand il y a des charges à l'infini, nous n'avons pas le choix, nous devons utiliser la loi :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M)$$

- Rappelons que nous avions trouvé, avec Gauss, $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r = \dfrac{2\,\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\,\vec{u}_r$.
- Comme le champ ne dépend que de r, il en est de même pour V. Et ainsi :

$$-\frac{\partial V(r)}{\partial r} = -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{2\,\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}$$

- Nous trouvons $\boxed{V(M) = -\dfrac{2\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{r_0}}$ où r_0 est quelconque et est surtout tel que $V(r_0) = 0$.
- *Remarque* : il est impossible d'imposer $V(\infty) = 0$.

morale

> Quand il y a des charges à l'infini, le seul moyen de déterminer le potentiel est de repasser par sa définition $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$.

- Autrement dit : quand il y a des charges à l'infini, pour trouver $\vec{E}$, exclure de fait la méthode qui consiste à passer par le potentiel avant.

I·6 – Tout vient en fait d'une nouvelle loi fondamentale

I·6·i – la circulation du champ électrostatique

> Soient une distribution de charges quelconque et un contour fermé $\mathscr{C}$ quelconque. En notant $\vec{E}$ le champ électrostatique créé par cette distribution de charges, nous avons :
>
> $$\oint_{P\in\mathscr{C}} \vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_P = 0$$
>
> Le champ électrostatique est dit à *circulation conservative*.

- C'est une loi *fondamentale*, à savoir qu'elle ne se démontre pas.
- Elle est fondamentale, mais elle est écrite dans le cas particulier du champ électrostatique. Si le champ électrique variait avec le temps, cette loi s'écrirait autrement, comme cela sera vu en 2e année.

I·6·*ii* – lien entre circulation et potentiel

La circulation du champ électrostatique le long d'une ligne $\mathscr{L}_{AB}$ vaut :
$C_{AB} = -\Delta V = -(V_B - V_A) = V_A - V_B$

- ✧ Nous l'avons déjà démontré sans nous en rendre compte lorsque nous avons cherché la relation constitutive du condensateur.
- ✧ Reprenons très vite la démonstration :

$$C_{AB} = \int_{P\in\mathscr{C}} \vec{E}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P = -\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V(P)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P$$
$$= -\int_A^B \mathrm{d}V = -(V_B - V_A)$$

I·6·*iii* – retour sur le travail fourni par une force

✯ travail d'une force

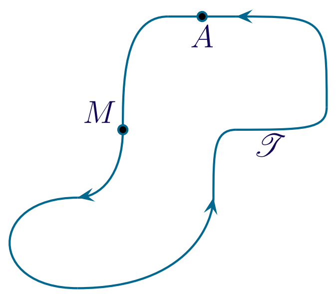
- ✧ Entre deux points A et B, nous avons :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_M = -\Delta E_\mathrm{p} = -(E_\mathrm{p}(B) - E_\mathrm{p}(A))$$

- ✧ En fait, le travail d'une force n'est que sa circulation sur la trajectoire du point qui subit la force …
- ✧ Le travail fourni par une force se calcule comme la circulation de cette force le long de la trajectoire.
- ✧ Est-ce vraiment une circulation ? Existe-t-il un champ de force ?
- ✧ En fait nous pouvons parler de circulation que quand il existe un champ de force et il n'existe un champ de force que pour les forces conservatives.

✯ circulation d'une force sur un circuit fermé

- ✧ Considèrons une trajectoire $\mathscr{T}$ fermée et un point quelconque M se déplaçant de A jusqu'à A.



- ✧ Calculons le travail fourni par la force lorsque le point matériel se déplace le long de $\mathscr{T}$:

$$W = \oint_{M\in\mathscr{T}} \vec{f}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\Delta E_\mathrm{p} = -(E_\mathrm{P}(A) - E_\mathrm{P}(A)) = 0$$

Une force conservative est une force dont le champ est à circulation conservative.

✯ analogie finale

✧ Avec les résultats précédents, nous pouvons écrire :

> Un champ de force conservatif qui dérive de l'énergie potentielle E_{p} s'écrit :
> $$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_{\text{p}}$$

✧ Donc maintenant, pour les champs de forces utilisés avec un repérage cylindro-polaire, nous avons :

$$\vec{f} = -\frac{\partial E_{\text{p}}}{\partial r}\,\vec{u}_r - \frac{1}{r}\,\frac{\partial E_{\text{p}}}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{\partial E_{\text{p}}}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

I·6·*iv* – pas de potentiel scalaire associé au champ magnétique

✧ C'est la propriété de circulation conservative qui a permis de trouver le potentiel électrostatique.

✧ Comme le champ magnétique n'est pas à circulation conservative, il n'existe pas de « potentiel magnétostatique ».

✧ En revanche, en 2$^{\text{e}}$ année, le lecteur verra qu'il existe un potentiel vecteur du champ magnétique.

II – Des lois fondamentales

II·1 – La dernière des 4 lois

II·1·*i* – le champ magnétique est à flux conservatif

✯ bilan sur les lois

✧ Pour le champ $\vec{E}$, nous connaissons :
- ➜ son flux à travers une surface fermée, c'est le théorème de Gauss ;
- ➜ sa circulation sur une courbe fermée, elle est nulle.

✧ Pour le champ $\vec{B}$, nous connaissons :
- ➜ sa circulation sur une courbe fermée, c'est le théorème d'Ampère.

✯ il en manque une

✧ C'est une nouvelle loi fondamentale, elle concerne le flux du champ magnétique.

Soit une distribution quelconque de courants et une surface fermée $\mathscr{S}$ – éventuellement fictive – quelconque, alors

$$\oiint_{P\in\mathscr{S}} \vec{B}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P = 0$$

- ➜ $\vec{B}(P)$ est le champ $\vec{B}$ en un point quelconque de $\mathscr{S}$;
- ➜ $\mathrm{d}\vec{S}_P$ est le vecteur surface au point P considéré, toujours normal et vers l'extérieur.

✯ Il n'y a pas d'autres lois fondamentales mais...

✧ Les 4 lois de l'électromagnétisme sont désormais connues, mais en version « statique ».

✧ Voir cours de spé mais :
- ➜ l'équation de Maxwell – Gauss parle du flux de $\vec{E}$;
- ➜ l'équation de Maxwell – Faraday parle de la circulation de $\vec{E}$;
- ➜ l'équation de Maxwell – Thomson[2] parle du flux de $\vec{B}$;
- ➜ l'équation de Maxwell – Ampère parle de la circulation de $\vec{B}$.

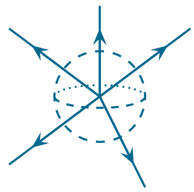
✧ Les équations de Maxwell – Ampère et Maxwell – Faraday varient légèrement en électromagnétisme (*ie.* dans le cas non statique) ce qui implique que :
- ➜ il ne sera pas toujours possible de définir un potentiel électrostatique (puisque le champ électrique n'est pas toujours conservatif) et le théorème d'Ampère ne sera pas toujours vrai
- ➜ le théorème de Gauss est toujours vrai, de même que le champ magnétique sera toujours à flux conservatif

II·1·*ii* – il n'y a pas de monopôle magnétique

✧ Monopôle magnétique : c'est quelque chose qui serait « source » ou « puit » des lignes de champ, comme $\vec{E}$.

✧ Imaginons qu'un monopôle magnétique existe. Alors les lignes de champ magnétique ressemblent au dessin suivant.

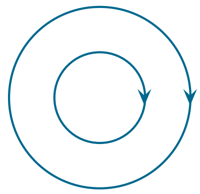
[2] Cette équation est **souvent** appelée équation de Maxwell – flux.



✧ Calculons le flux sur une petite boule centrée sur le monopôle magnétique.
✧ Pour chaque élément de surface, nous trouvons que le flux élémentaire vaut :

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S} > 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \Phi = \int \mathrm{d}\Phi > 0$$

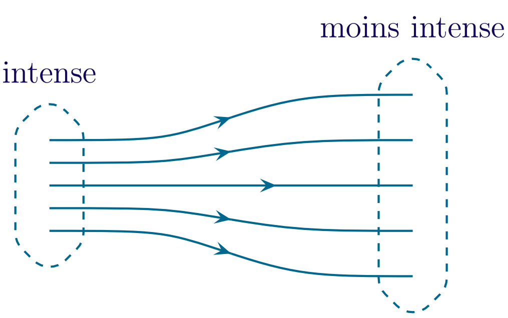
✧ Or cette dernière relation en contradiction avec la loi fondamentale.
✧ Ainsi, comme les lignes de champ $\vec{B}$ ne peuvent pas sortir de points, elles forment des boucles.



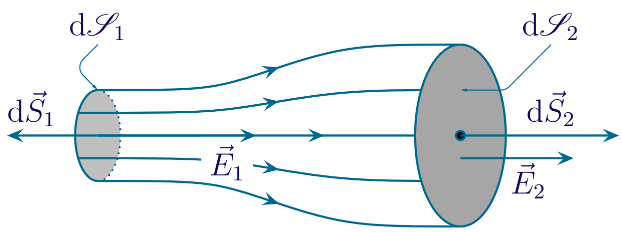
II·2 – Lire les lignes de champ

Dans le vide, le champ électrostatique est plus intense dans les zones où les lignes de champ se ressèrent.

Quelle que soit la présence de source, le champ magnétostatique est plus intense dans les zones où les lignes de champ se ressèrent.



✧ Démontrons-le pour le champ électrostatique dans un espace vide de charges.
✧ Prenons comme surface de contrôle un tube de champ.



Un *tube de champ* est une surface dont les parois latérales sont des lignes de champ, *ie.* sont en tous leurs points tangentes au champ considéré.

- Choisissons $\mathrm{d}\mathscr{S}_1$ et $\mathrm{d}\mathscr{S}_2$ suffisamment petite pour que le champ $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ soit uniforme dessus et telles que $\mathrm{d}\mathscr{S}_1$ et $\mathrm{d}\mathscr{S}_2$ soient orthogonales aux lignes de champs (donc au champ).
- Nous avons alors $\Phi = \Phi_1 + \Phi_{\text{lat}} + \Phi_2$ avec :
  - ➜ $\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 = -E_1\, S_1$;
  - ➜ $\Phi_{\text{lat}} = \displaystyle\int_{P\in\mathscr{S}_{\text{lat}}} \vec{E}(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P = 0$ car $\mathrm{d}\vec{S}$ orthogonal à $\vec{E}$ par définition même du tube de champ ;
  - ➜ $\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 = +E_2\, S_2$.
- Et comme le théorème de Gauss nous dit que $\Phi = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0$, cela nous conduit à :

$$E_1\,\mathrm{d}S_1 = E_2\,\mathrm{d}S_2$$

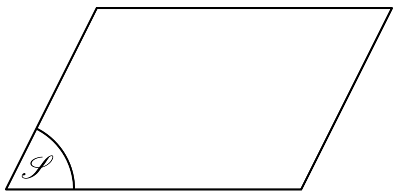
- La démonstration est valide aussi pour le champ magnétique.

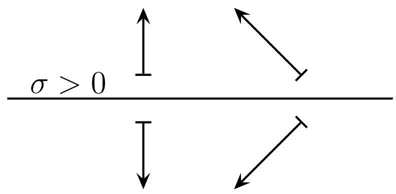
II·3 – Discontinuité aux interfaces

II·3·i – pour le champ électrostatique

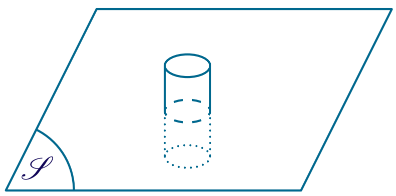
✫ flux de $\vec{E}$

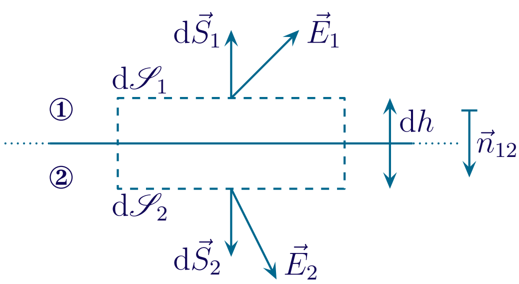
Il y a discontinuité de la composante normale du champ $\vec{E}$ à la traversée d'une surface chargée.





- Zoomons sur une surface chargée, de manière à ce qu'elle soit bien plane et que la densité surfacique σ soit uniforme.





- Notons ① la partie au-dessus et considèrons un petit cylindre de hauteur h.
- Calculons $\Phi = \Phi_1 + \Phi_{\text{lat}} + \Phi_2$.
- Lorsque la hauteur $\mathrm{d}h$ vers 0, nous avons $\Phi_{\text{lat}} \to 0$ car dans l'expression du flux, nous n'avons pas $\|\vec{E}\| \not\to +\infty$.
- Il reste :
  - ➜ $\Phi_1 = \vec{E}_1\,\mathrm{d}\vec{S}_1 = E_{n1}\,\mathrm{d}S$;

➜ $\Phi_2 = \vec{E}_2\,\mathrm{d}\vec{S}_2 = -E_{n2}\,\mathrm{d}S$.

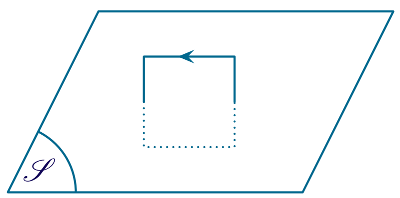
✧ Et ainsi le théorème de Gauss donne : $E_{n1}\,\mathrm{d}S - E_{n2}\,\mathrm{d}S = \dfrac{\sigma\,\mathrm{d}S}{\varepsilon_0}$ soit :

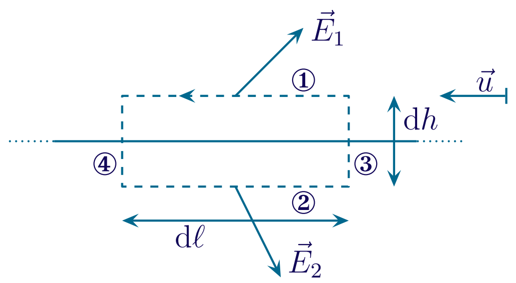
$$\boxed{E_{\perp,1} - E_{\perp,2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

✯ circulation de $\vec{E}$

Il y a continuité de la composante tangentielle du champ $\vec{E}$ à la traversée d'une surface chargée.

✧ Considèrons un circuit infinitésimal autour d'une surface chargée de telle sorte que le champ soit uniforme au dessus et en dessous.





✧ Calculons la circulation et $C_{\text{tot}} = 0$ en faisant tendre la hauteur dh vers 0, ce qui permet de négliger les deux circulations sur les deux bords ③ et ④ car le champ n'est pas infini sur le plan (cf. plan infini).

✧ Il reste :

➜ $C_1 = \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_1 = E_{u1}\,\mathrm{d}\ell$;

➜ $C_2 = \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_2 = -E_{u2}\,\mathrm{d}\ell$;

✧ Soit, en regroupant les résultats : $E_{x1}\,\mathrm{d}\ell - E_{x2}\,\mathrm{d}\ell = 0$ et ainsi $E_{u1} = E_{u2}$.

✧ Ce résultat étant vrai pour n'importe quel $\vec{u}$ nous obtenons donc $\boxed{E_{/\!/,1} = E_{/\!/,2}}$.

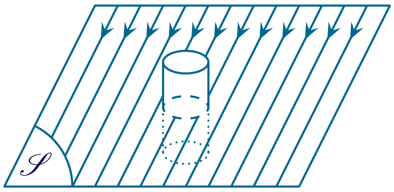
II·3·*ii* – pour le champ magnétostatique

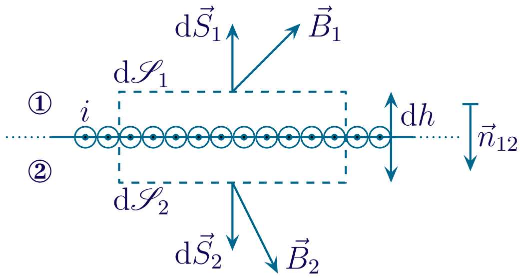
✧ Faions les mêmes raisonnements qu'avec le champ $\vec{E}$ mais cette fois à la traversée d'une surface parcourue par un courant.

✯ flux de $\vec{B}$

Il y a continuité de la composante normale du champ $\vec{B}$ à la traversée d'une surface parcourue par un courant.

✧ Zoomons sur une surface parcourue par un courant, de manière à ce qu'elle soit bien plane et notons ① la partie au-dessus.





✧ Considérons un petit cylindre et calculons $\Phi = \Phi_1 + \Phi_{\text{lat}} + \Phi_2$.
✧ Faisons tendre la hauteur dh vers 0.
✧ Lorsque $dh \longrightarrow 0$, nous avons $\Phi_{\text{lat}} \to 0$ car dans l'expression du flux, nous n'avons pas $\|\vec{B}\| \not\to +\infty$.
✧ Il reste :
- ➜ $\Phi_1 = \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 = B_{n1}\, dS$;
- ➜ $\Phi_2 = \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 = -B_{n2}\, dS$.

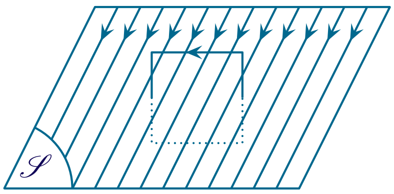
✧ Et la conservation du flux de $\vec{B}$ donne :

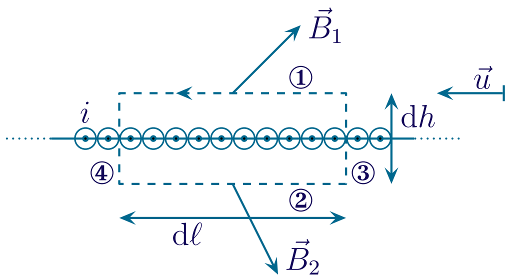
$$B_{n1}\, dS - B_{n2}\, dS = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad B_{\perp,1} = B_{\perp,2}$$

✯ circulation de $\vec{B}$

> Il y a discontinuité de la composante tangentielle du champ $\vec{B}$ à la traversée d'une surface parcourue par un courant.

✧ Considérons un circuit infinitésimal autour d'une surface parcourue par un courant de telle sorte que le champ soit uniforme au dessus et en dessous.





✧ Calculons la circulation et $C_{\text{tot}} = \mu_0\, i_{\text{enlacé}}$ en faisant tendre la hauteur dh vers 0, ce qui permet de négliger les deux circulations sur les deux bords car le champ n'est pas infini sur le plan (cf. plan infini).
✧ Il reste :
- ➜ $\vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} = B_{u1}\, d\ell$;
- ➜ $\vec{B}_2 \cdot d\vec{\ell} = -B_{u2}\, d\ell$;

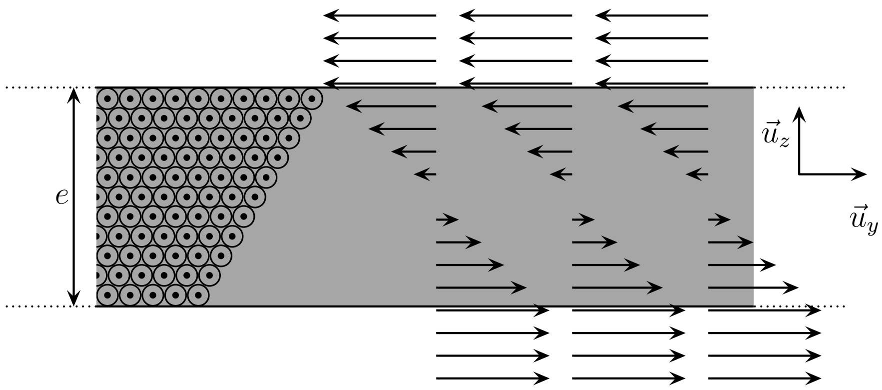
✧ Soit, en regroupant les résultats : $B_{x1}\, d\ell - B_{x2}\, d\ell = \mu_0\, n\, i\, d\ell$ et ainsi $B_{x1} \neq B_{x2}$.

II·3·*iii* – ce ne sont que des modèles

✧ N'oublions pas que la répartition surfacique de charges est un modèle « à grande distance » de la répartition volumique de charges.
✧ Dans les démonstrations précédentes, lorsque nous envisagions $dh \longrightarrow$ pour la surface de GAUSS ou le contour d'AMPÈRE envisagé, c'était toujours en respectant $dh > e$ où e est l'épaisseur du plan considéré.

À l'échelle mésoscopique tous les champs sont parfaitement continus.

✧ Pour nous en convaincre, revoyons le champ magnétostatique à la traversée d'une surface parcourue par un courant.



II·4 – Analogie gravitationnelle

II·4·*i* – un autre champ vectoriel

✧ Nous avons déjà rencontré un vrai champ vectoriel : le champ gravitationnel.
✧ Rappelons l'expression du champ gravitationnel créé par une masse m située au point P :

$$\vec{\mathscr{G}}_P(M) = -G \times \frac{m}{PM^2}\,\vec{u}_{PM}$$

✧ Écrivons maintenant le champ créé par une charge ponctuelle q située en P :

$$\vec{\mathscr{E}}_P(M) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{q}{PM^2}\,\vec{u}_{PM}$$

✧ Nous pouvons donc faire l'analogie suivante :

$$\begin{array}{ccc} \vec{E} & \longleftrightarrow & \vec{\mathscr{G}} \\ q & \longleftrightarrow & m \\ -G & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \end{array}$$

✧ Et si l'analogie se fait au niveau des lois de bases, nous pouvons les faire aussi au niveau des lois d'ordre plus élevé.

II·4·*ii* – un autre théorème de Gauss

Soit une distribution quelquconque de masse et $\mathscr{S}$ une surface fermée, alors :

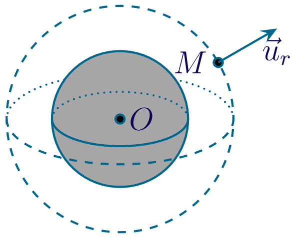
$$\oiint_{P\in\mathscr{S}} \mathscr{G}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P = -4\,\pi\,G\,M_{\text{int}}$$

II·4·*iii* – un résultat enfin compréhensible

✧ Rappelons un résultat connu :

> Un astre à symétrie sphérique de masse se comporte, du point de vue de la gravitation, comme un point matériel situé en son centre où serait concentrée toute la masse.

✧ La démonstration se fait avec le théorème de Gauss gravitationnel.
✧ La symétrie sphérique de distribution implique que le champ gravitationnel s'écrit $\vec{\mathscr{G}}(M) = \mathscr{G}(r)\,\vec{u}_r$.
✧ Considérons une répartition sphérique de masse de centre O, un point M en dehors de cette distribution et la sphère $\mathscr{S}$ centré sur O et passant par M.



✧ Le flux du champ de gravitation à travers $\mathscr{S}$ s'écrit :

$$\Phi_{\mathscr{G}} = \mathscr{G}(r) \times 4\,\pi\,r^2 \overset{\text{Gauss}}{=} -4\,\pi\,G\,M_{\text{int}} = -4\,\pi\,G\,m \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathscr{G}(r) = -G \times \frac{m}{r^2}$$

✧ Ce qui est bien le résultat recherché.

III – Loi de superposition locale des champs électrostatiques

III·1 – Loi de Coulomb

III·1·i – énoncé

◇ C'est le simple principe de superposition des champs $\vec{E}$ à partir du moment où nous connaissons le champ créé au point M par une charge q située en P : $\vec{E}(M) = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$.

Le champ électrostatique créé en M par des charges q_i situées en P_i s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \sum \frac{q_i\overrightarrow{P_iM}}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,P_iM^3}$$

Le champ électrostatique créé en M par une distribution linéique de charges de densité $\lambda(P)$ s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \int_{P\in\mathscr{L}} \frac{\lambda(P)\,\overrightarrow{PM}\,\mathrm{d}\ell_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM^3}$$

Le champ électrostatique créé en M par une distribution surfacique de charges de densité $\sigma(P)$ s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \iint_{P\in\mathscr{S}} \frac{\sigma(P)\,\overrightarrow{PM}\,\mathrm{d}S_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM^3}$$

Le champ électrostatique créé en M par une distribution volumique de charges de densité $\rho(P)$ s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \iiint_{P\in\mathscr{V}} \frac{\rho(P)\,\overrightarrow{PM}\,\mathrm{d}\tau_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM^3}$$

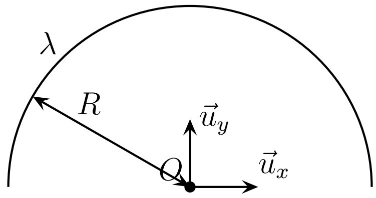
STOP Ne pas oublier qu'il s'agit d'une loi vectorielle !

◇ Contrairement à l'expression intégrale du potentiel électrostatique, il n'y a ici aucune restriction d'utilisation : « Ça marche toujours ! ».

◇ Ceci dit, bien que cette loi soit toujours applicable, ce sera celle qui amènera aux calculs les plus difficiles. Elle est donc à réserver aux cas où :
- ➜ rien d'autre ne marche
- ➜ la consigne impose de l'utiliser

III·1·ii – idoinoton 1

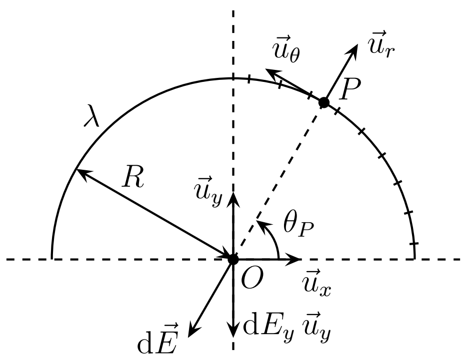
◇ Considèrons un demi-cerceau de rayon R et chargé uniformément par la densité linéique de charge λ et cherchons le champ créé par cette distribution au centre du cerceau.



✧ Analyse physique :
- ➜ il n'y a pas d'invariance
- ➜ le plan $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$ est plan de symétrie des charges :
  - ➜ donc le plan $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$ est plan de symétrie de $\vec{E}$
  - ➜ donc $\vec{E}(O)$ est contenu dans ce plan
  - ➜ donc $\vec{E}(O)$ porté par $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$
- ➜ le plan $(O,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ est plan de symétrie des charges :
  - ➜ donc le plan $(O,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ est plan de symétrie de $\vec{E}$
  - ➜ donc $\vec{E}(O)$ est contenu dans ce plan
  - ➜ donc $\vec{E}(O)$ porté par $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$
- ➜ finalement, nous avons $\vec{E}(O) = E(O)\,\vec{u}_y$
- ➜ les grandeurs pertinentes : λ **ou** Q (distribution), R (géométrie), ε_0 (structure)

✧ Analyse technique :
- ➜ le repérage d'un point sur la distribution sera polaire
- ➜ inutile de penser à GAUSS, il n'y a pas d'invariance. De même penser au potentiel sera difficile car il faut connaitre le potentiel dans une *zone* pour en déduire le champ *en un point*. Il reste la loi de COULOMB.

✧ Commençons par découper proprement la distribution.



✧ Les plans de symétries $(0xy)$ et (Oyz) permettent de dire que le champ en O est porté uniquement par $\vec{u}_y$. Nous n'allons donc calculer **que** la composante en $\vec{u}_y$.

✧ En ainsi :

$$E_y(O) = \vec{E}(O)\cdot\vec{u}_y = \int_{P\in\mathscr{L}} \frac{\lambda(P)\,\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u}_y\,\mathrm{d}\ell_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM^3}$$

✧ Ici P va être repéré par des coordonnées cylindro-polaires, donc $\mathrm{d}\ell_P = R\,\mathrm{d}\theta_P$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

$$E_y(O) = \int_0^\pi \frac{\lambda\,R\,\mathrm{d}\theta_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R^2}\left(-R\cos\theta_P\,\vec{u}_x - R\sin\theta_P\,\vec{u}_y\right)\cdot\vec{u}_y = -\frac{\lambda\,R}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R^2}\underbrace{\int_0^\pi \sin\theta_P\,\mathrm{d}\theta_P}_{=2}$$

✧ Et ainsi nous trouvons : $\boxed{\vec{E}(O) = -\dfrac{2\,\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R}\,\vec{u}_y = -\dfrac{Q}{2\,\pi^2\,\varepsilon_0\,R^2}\,\vec{u}_y}$.

✧ Vérifions l'homogénéité et la cohérence :

➜ c'est homogène car nous avons bien $E = \dfrac{\text{charge}}{\varepsilon \times (\text{distance})^2}$

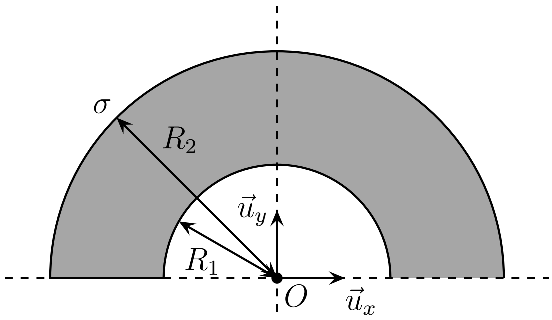
➜ c'est cohérent car en prenant $Q > 0$, nous voyons bien que le champ « fuit » les charges.

Remarque : nous pouvons vérifier aussi que la composante sur $\vec{u}_x$ était bien nulle :

$$E_x(O) = -\int_0^\pi \frac{\lambda\,R^2\,\cos\theta_P\,\mathrm{d}\theta_P\,\vec{u}_x}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R^2} = -\frac{\lambda\,R}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R^2}\underbrace{\int_0^\pi \cos\theta_P\,\mathrm{d}\theta_P}_{=0}\,\vec{u}_y$$

III·1·*iii* – idoinoton 2

✧ Considérons une demi-couronne uniformément chargée en surface de charge surfacique σ et cherchons le champ électrique en son centre O.



✧ L'analyse physique est identique à celui du demi-cerceau dont les conclusions sont :

➜ il n'y a pas d'invariance

➜ le champ en O est porté par $\vec{u}_y$: $\vec{E}(O) = E(O)\,\vec{u}_y$

➜ les grandeurs pertinentes sont σ **ou** Q (distribution), R_1, R_2 (géométrie) et ε_0 (structure).

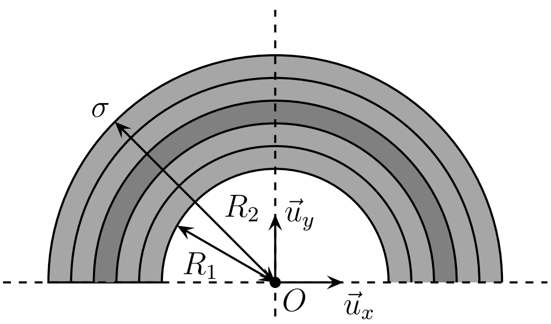
✧ Analyse technique. Deux techniques possibles :

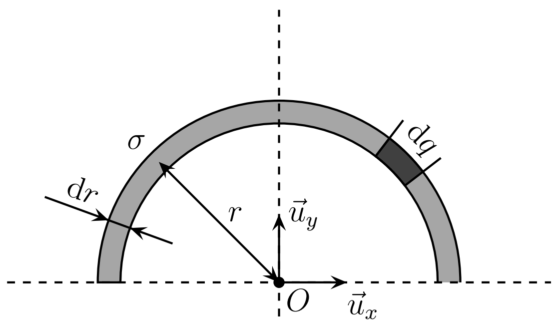
➜ prendre la formule du champ créé par une distribution surfacique et « hop voilà » calculons ;

➜ voir la demie-couronne comme l'association de demie-spires et utiliser le principe de superposition.

✧ Nous allons plutôt utiliser la 2e méthode.

✧ Commençons par découper la distribution.





✧ Le champ créé par une demie-spire vaut : « $\mathrm{d}\vec{E} = -\dfrac{2\,\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R}\vec{u}_y$ ».

✧ Il faut maintenant transcrire avec les notations de la nouvelle situation :

➜ $R \to r$;

➜ pour la densité linéique, faisons un bilan de charges sur une longueur $\mathrm{d}\ell$ de demie-spire :

- ➜ $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}\ell$ en version linéique
- ➜ $\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}\ell\,\mathrm{d}r$ en version surfacique
- ➜ conclusion $\lambda \to \sigma\,\mathrm{d}r$.

✧ Finalement : $\mathrm{d}\vec{E} = -\dfrac{2\,\sigma\,\mathrm{d}r}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\,\vec{u}_y$.

✧ Maintenant « yapuka » sommer les contributions de chaque spire :

$$\vec{E}(O) = \int \mathrm{d}\vec{E} = \int_{R_1}^{R_2} -\frac{2\,\sigma\,\mathrm{d}r}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\,\vec{u}_y$$
$$= -\frac{2\,\sigma}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}\,\vec{u}_y = -\frac{2\,\sigma}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\ln\frac{R_2}{R_1}\,\vec{u}_y$$

✧ Le champ trouvé est bien homogène.

✧ Au niveau de la cohérence, nous pouvons rechercher l'expression pour $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$. Cela donne :

$$\vec{E}(O) = -\frac{\sigma}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\,\ln\left(1+\frac{e}{R_1}\right)\,\vec{u}_y \overset{\text{DL}}{=} -\frac{\sigma\,e}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,R_1}\,\vec{u}_y$$

✧ Et comme $\sigma\,e \equiv \lambda$, nous retrouvons bien l'expression du champ créé par un demi-spire circulaire.

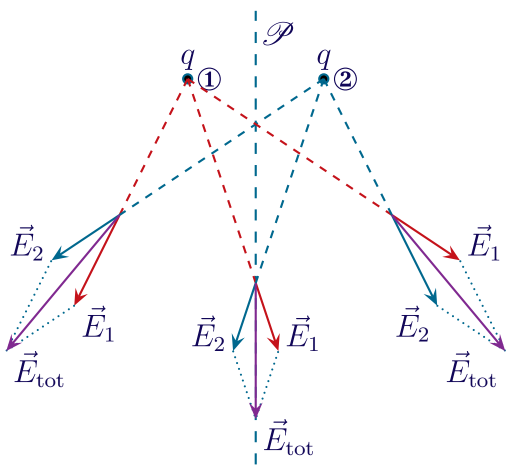
✧ Nous remarquons aussi que $\|\vec{E}\| \longrightarrow \infty$ pour $R_1 \longrightarrow 0$, ce qui est tout à fait normal puisque lorsque $R_1 = 0$, O est sur le disque et nous savons qu'il n'est pas possible de calculer le champ en un point d'une surface chargée (limite de validité de la modélisation).

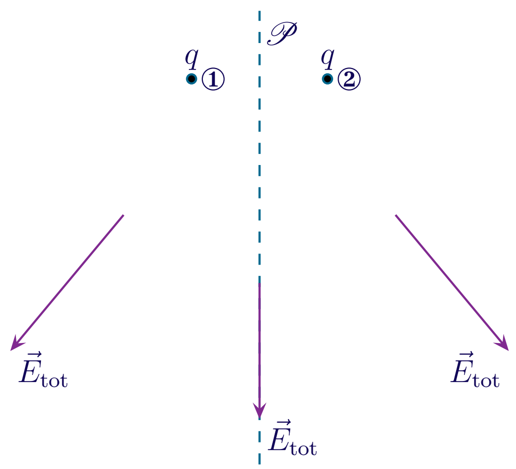
III·1·*iv* – retrouver les propriétés de symétrie

✧ Montrons, à l'aide de la loi de COULOMB les conséquences qu'ont sur le champ électrostatique les plans de symétrie et d'antisymétrie des charges.

✯ plan de symétrie

✧ Prenons deux charges identiques symétriques par rapport à un plan et cherchons le champ en ce plan.

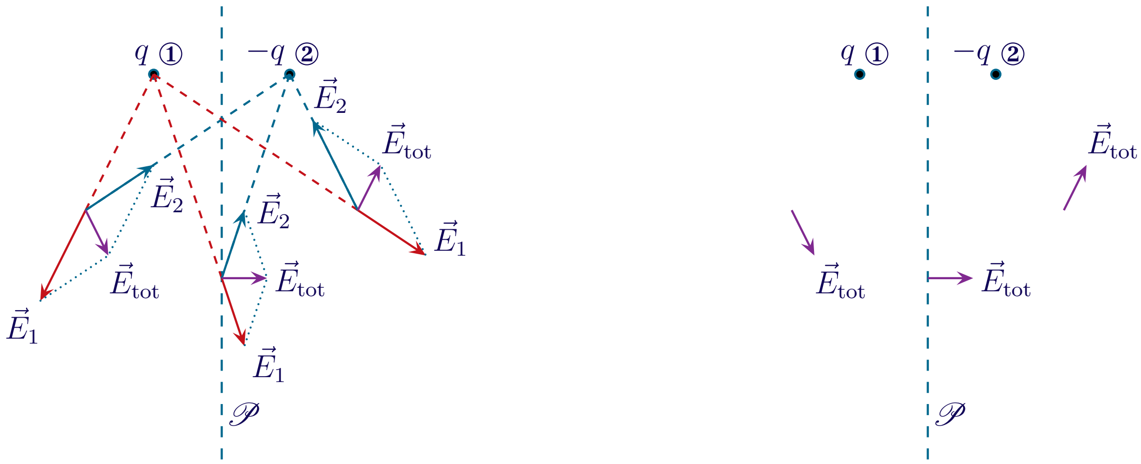




✧ Nous pouvons constater que le champ résultant est bien contenu dans le plan de symétrie et qu'en deux points symétriques, le champ est symétrique.

✯ plan d'antisymétrie

✧ Prenons deux charges opposées symétriques par rapport à un plan et cherchons le champ en ce plan.



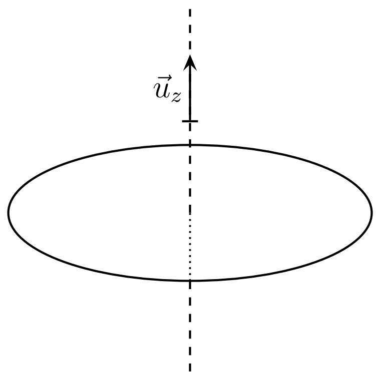
✧ Nous pouvons constater que le champ résultante est bien normal au plan d'antisymétrie et qu'en deux points symétriques le champ est opposé à son symétrique.

III·2 – Exemple fondamental de la spire circulaire

✧ Et quand l'exemple est dit « fondamental », c'est qu'il l'est !

III·2·i – une brique de construction ...

✧ Considèrons une spire circulaire de rayon R chargée uniformément linéiquement avec la charge linéique λ et cherchons le champ électrostatique en tout point de l'axe.

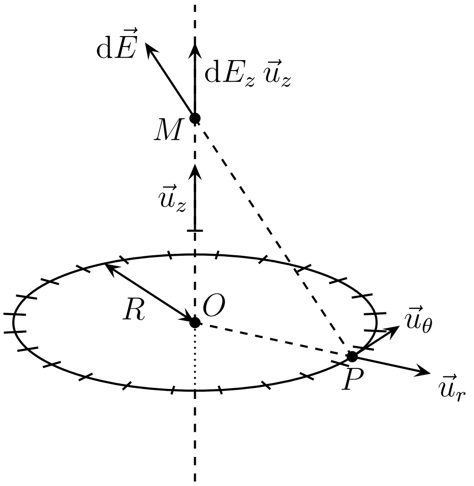


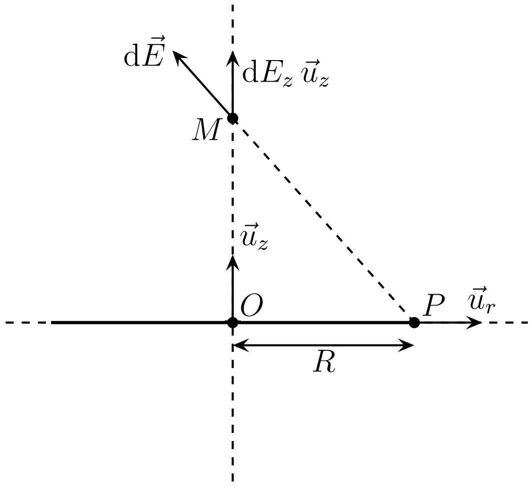
✧ Analyse physique :
- ➜ il s'agit d'une distribution de type « disque » avec une seule invariance par rotation autour de l'axe
- ➜ notons M un point de l'axe repéré par sa cote z :
  - ➜ tout plan contenant $(M,\vec{u}_z)$ est plan de symétrie des charges
  - ➜ donc tout plan contenant $(M,\vec{u}_z)$ est plan de symétrie du champ $\vec{E}$
  - ➜ donc $\vec{E}(M)$ appartient à tous ces plans
  - ➜ donc le champ $\vec{E}$ est porté par $\vec{u}_z$
- ➜ les grandeurs pertinentes sont λ (distribution), R (géométrie) et ε_0 (structure)

✧ Analyse technique :

➜ au niveau du repérage, un point sur l'axe sera repéré par sa cote et un point de la spire sera repéré par ses coordonnées polaires
➜ avec une invariance, nous devrions tenter l'approche en potentiel, nous l'avons déjà fait donc faisons autre chose « pour voir »

✧ Commençons par bien découper la distribution.





✧ Reprenons l'expression intégrale du champ électrostatique en ne gardant que la composante sur $\vec{u}_z$:

$$E_z(z) = \vec{E}(z)\cdot\vec{u}_z = \int_{P\in\mathscr{C}} \frac{\lambda\,\mathrm{d}\ell_P\,\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u}_z}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM^3}$$

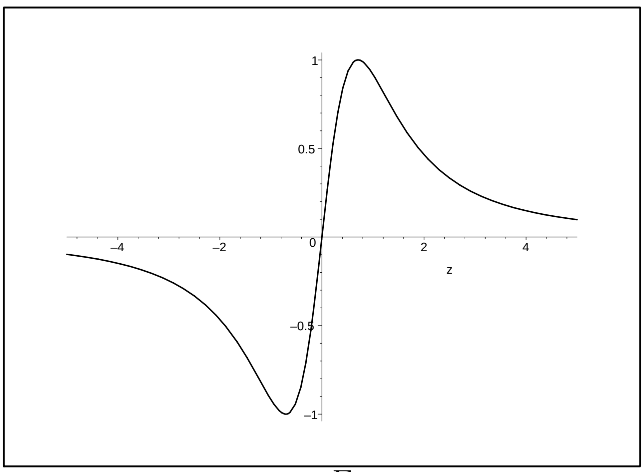
✧ Remplaçons au fur et à mesure :
➜ $\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u}_z = (\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})\cdot\vec{u}_z = (-R\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z)\cdot\vec{u}_z = z$;
➜ $PM^3 = (z^2+R^2)^{3/2}$

$$E_z(z) = \int_{P\in\mathscr{C}} \frac{\lambda\,z\,\mathrm{d}\ell_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\lambda\,z}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(z^2+R^2)^{3/2}} \times \underbrace{\int_{P\in\mathscr{C}} \mathrm{d}\ell_P}_{=2\,\pi\,R}$$

✧ Finalement : $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\lambda\,R\,z}{2\,\varepsilon_0\,(R^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{u}_z}$

✧ C'est bien évidemment le même résultat que celui trouvé avec le potentiel …

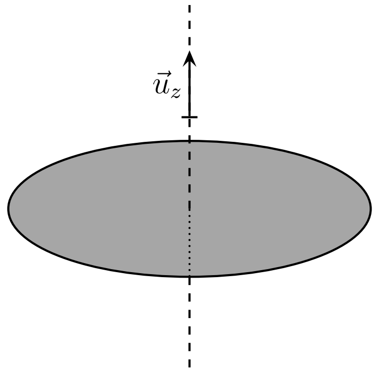
Graphique 7



✧ Sur le graphique 7, nous pouvons voir la fonction $\dfrac{E(z/R)}{E_{\text{max}}}$.

III·2·*ii* – ... pour faire un disque ...

◇ Considérons un disque uniformément chargé et cherchons le champ électrostatique en tout point de l'axe.

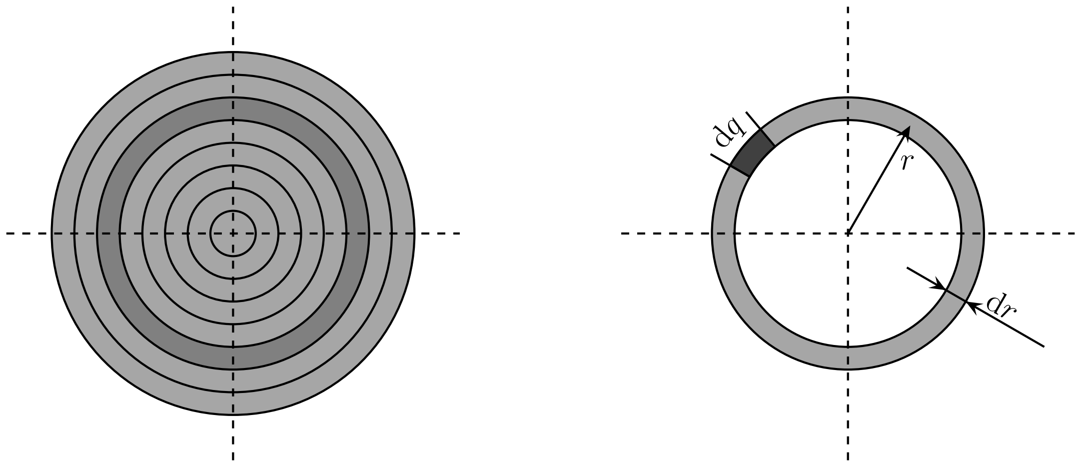


◇ L'analyse physique est la même que pour la spire :
- ➜ il y a une invariance par rotation autour de l'axe du disque
- ➜ le champ en un point de l'axe est porté par $\vec{u}_z$
- ➜ les grandeurs pertinentes sont σ (distribution), R (géométrie) et ε_0 (structure)

◇ Soit nous prenons la formule directe, soit nous découpons le disque en spires de rayon $0 \leqslant r \leqslant R$ et le principe de superposition donne alors :

$$\vec{E}(M) = \int \mathrm{d}\vec{E}_{\text{spire}}$$

◇ Découpons en représentant les grandeurs pertinentes :

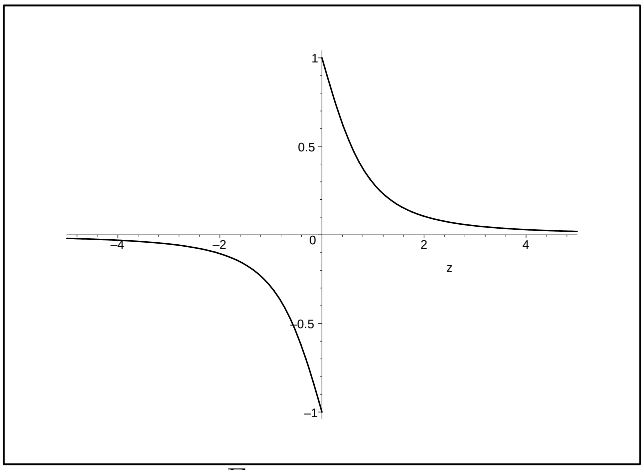


◇ Nous pouvons voir que $R \to r$ et $\lambda \to \sigma\,\mathrm{d}r$. Ainsi :

$$\begin{aligned} E_z(z) &= \int \mathrm{d}E_z = \int \frac{\sigma\,z\,r\,\mathrm{d}r}{2\,\varepsilon_0\,(z^2+r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma\,z}{2\,\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r\,\mathrm{d}r}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma\,z}{2\,\varepsilon_0} \times \left[\frac{-1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^R \end{aligned}$$

◇ Nous trouvons $\boxed{E_z = \dfrac{\sigma\,z}{2\,\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{z^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)}$

Graphique 8



✧ Sur le graphique 8, nous avons représenté $\dfrac{E(z/R)}{E_{\text{max}}}$.

✧ Nous voyons bien la discontinuité en O à la traversée d'une surface chargée.

III·2·*iii* – … ou un plan

✧ Pour transformer un disque en un plan, il « suffit » de considérer un disque de rayon infini.

✧ Reprenons le résultat précédent et faisons « simplement » tendre R vers $+\infty$.

✧ Cela donne $E_z = \dfrac{\sigma\, z}{2\,\varepsilon_0} \times \dfrac{1}{\sqrt{z^2}}$ soit, comme nous le savions :

$$\boxed{E_z = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0} \times \text{signe}(z)}$$

☕ *Remarque* : le rayon R disparaît dans la relation finale, ce qui est normal vu que pour un plan la grandeur « R » n'est pas pertinente.

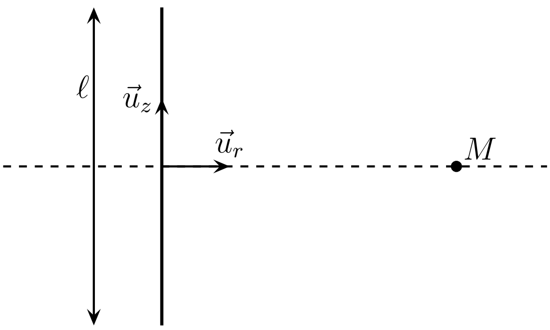
III·3 – Exemple fondamental du segment

✧ Tiens, un autre exemple fondamental …

III·3·*i* – une autre brique de construction …

✭ un segment

✧ Considérons un segment de longueur ℓ uniformément chargé et cherchons le champ créé dans son plan médiateur.



✧ Analyse physique :

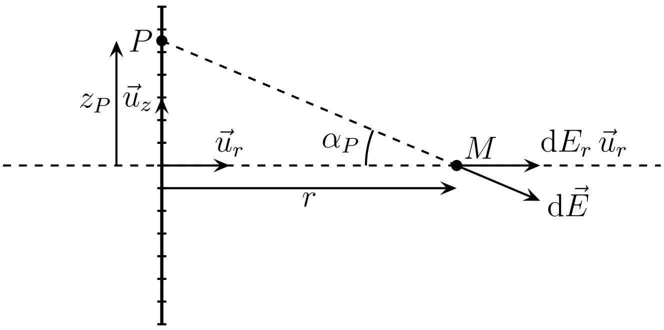
- ➜ la distribution n'admet qu'une invariance par rotation, c'est donc un problème de type « cône »
- ➜ soit M un point du plan médiateur du segment :
  - ➜ le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ est plan de symétrie des charges
  - ➜ donc le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ est plan de symétrie du champ $\vec{E}$
  - ➜ donc $\vec{E}(M)$ est contenu dans le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$
  - ➜ donc $\vec{E}(M)$ porté par $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$
- ➜ soit M un point du plan médiateur du segment :
  - ➜ le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie des charges
  - ➜ donc le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie du champ $\vec{E}$
  - ➜ donc $\vec{E}(M)$ est contenu dans le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$
  - ➜ donc $\vec{E}(M)$ porté par $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$
- ➜ finalement, le champ en M est porté par $\vec{u}_r$: $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r$
- ➜ les grandeurs pertinentes sont λ (distribution), ℓ (géométrie) et ε_0 (structure)

✧ Analyse technique :

- ➜ le point M sera repéré par r quand à un point de la distribution, il sera repéré par sa cote z_P
- ➜ ici, avec une invariance, nous pourrions chercher d'abord le potentiel puis dériver ce qui revient à faire deux calculs. Mieux vaut utiliser la loi de Coulomb car nous n'avons qu'un calcul à faire car nous savons, grâce aux symétries, que seule la composante sur $\vec{u}_r$ est non nulle.

✯ calcul avec la loi de Coulomb

✧ Découpons d'abord la distribution et écrivons l'expression du champ.



✧ Nous avons :

$$\mathrm{d}\vec{E}_P(M) = \frac{\lambda\,\mathrm{d}\ell_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM^3}\,\overrightarrow{PM} = \frac{\lambda\,\mathrm{d}\ell_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM^3}\,(-z\,\vec{u}_z + r\,\vec{u}_r)$$

✧ Et ainsi en ne conservant que la composante sur $\vec{u}_r$:

$$E_r(r) = \vec{E}(M)\cdot\vec{u}_r = \left(\int_{P\in\mathscr{D}} \mathrm{d}\vec{E}_P(M)\right)\cdot\vec{u}_z = \int_{P\in\mathscr{D}} \frac{\lambda\,\mathrm{d}\ell_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM^3}\times r$$

✧ Pour calculer techniquement cette intégrale, nous allons procéder au même changement de variable que celui que nous aions fait pour le potentiel, à savoir que nous allons repérer P par α_P, ce qui donne :

- ➜ $PM = \dfrac{r}{\cos\alpha_P}$
- ➜ $z_P = r\times\tan\alpha_P$
- ➜ $\mathrm{d}z_P = \dfrac{r}{\cos^2\alpha_P}\,\mathrm{d}\alpha_P$

✧ Nous avons ainsi :

$$E_r(r) = \int_{P\in\mathscr{D}} \frac{\lambda\,\mathrm{d}\ell_P}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM^3} \times r = \frac{\lambda\,r}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \int_{P\in\mathscr{D}} \frac{\dfrac{r}{\cos^2\alpha_P}\,\mathrm{d}\alpha_P}{\dfrac{r^3}{\cos^3\alpha_P}}$$
$$= \frac{\lambda\,r}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \int_{P\in\mathscr{D}} \frac{\cos\alpha_P\,\mathrm{d}\alpha_P}{r^2} = \frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} \times \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos\alpha_P\,\mathrm{d}\alpha_P = \frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} \times 2\sin\alpha_0$$

✧ Finalement : $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\lambda\,\sin\alpha_0}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\,\vec{u}_r}$.

✯ à partir du potentiel

✧ Utilisons la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ projetée sur $\vec{u}_r$:

$$E_r = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1+\sin\theta_0}{1-\sin\theta_0}\right)\right]$$
$$= -\frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{\mathrm{d}\sin\theta_0}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sin\theta_0}\ln\left(\frac{1+\sin\theta_0}{1-\sin\theta_0}\right)$$

✧ Et avec $\sin\theta_0 = \dfrac{\dfrac{\ell}{2}}{\sqrt{\dfrac{\ell^2}{4}+r^2}}$:

$$E_r = +\frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \left(\frac{1}{1+\sin\theta_0} + \frac{1}{1-\sin\theta_0}\right) \times \frac{\dfrac{\ell}{2} \times \dfrac{2\,r}{2}}{\left(\dfrac{\ell^2}{4}+r^2\right)^{3/2}}$$
$$= \frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{2}{1-\sin^2\theta_0} \times \frac{\dfrac{\ell}{2}\times r}{AM^3} = \frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{2\times\dfrac{\ell}{2}\times r}{cos^2\theta_0 \times AM^2 \times AM}$$
$$= \frac{2\,\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{r}{r^2} \times \frac{\dfrac{\ell}{2}}{AM} = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{\sin\theta_0}{r}$$

✧ Il s'agit bien heureusement du même résultat, mais obtenu plus difficilement.

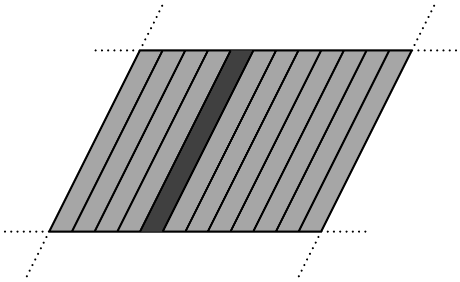
III·3·*ii* – . . . pour faire un fil infini . . .

✧ Il suffit tout simplement de faire tendre θ_0 vers $\pi/2$.

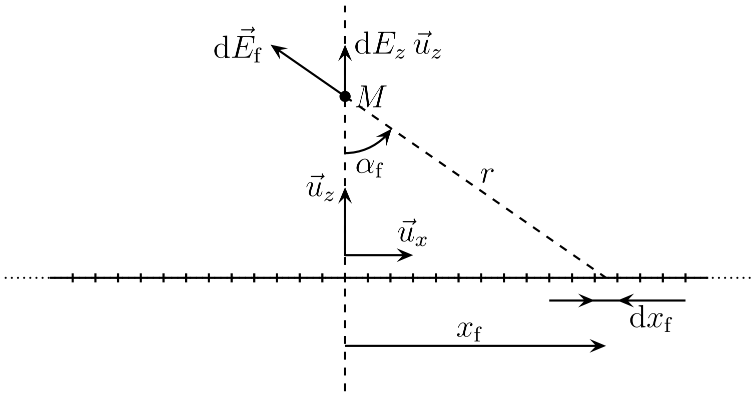
✧ Cela donne $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\,\vec{u}_r$, qui est bien le résultat obtenu directement avec le théorème de Gauss.

III·3·*iii* – …puis un plan

✧ En découpant proprement, nous pouvons voir le plan comme une association de fils infini.



✧ Plaçons-nous dans un plan contenant le point M pour lequel nous cherchons à déterminer le champ.



✧ Par principe de superposition, nous avons alors $\vec{E}(M) = \displaystyle\int \mathrm{d}\vec{E}_{\mathrm{f}}$.

✧ Grâce aux symétries nous savons que le champ n'est porté que par $\vec{u}_z$.

✧ Cela donne « $\mathrm{d}E_z = \vec{E}\cdot\vec{u}_z = \dfrac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\,\vec{u}_r\cdot\vec{u}_z = \dfrac{\lambda\,\cos\alpha_{\mathrm{f}}}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r}$ ».

✧ Pour la transcription des grandeurs, nous avons :

- ➜ $\lambda \to \sigma\,\mathrm{d}\ell$;
- ➜ $\mathrm{d}\ell \to \mathrm{d}x_{\mathrm{f}}$;
- ➜ $x_{\mathrm{f}} = z\,\tan\alpha_{\mathrm{f}}$, ce qui donne $\mathrm{d}x_{\mathrm{f}} = \dfrac{z}{\cos^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha_{\mathrm{f}}$;
- ➜ $r \to \dfrac{z}{\cos\alpha_{\mathrm{f}}}$

✧ En remplaçant :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_z &= \frac{1}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\times\left(\frac{\sigma\,z\,\mathrm{d}\alpha_{\mathrm{f}}}{\cos^2\alpha_{\mathrm{f}}}\right)\times\left(\frac{\cos\alpha_{\mathrm{f}}}{z}\right)\times\cos\alpha_{\mathrm{f}}\\ &= \frac{\sigma}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\mathrm{d}\alpha_{\mathrm{f}}\end{aligned}$$

✧ L'intégration est alors aisée et se fait entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $+\dfrac{\pi}{2}$ et nous retrouvons bien :

$$\boxed{E_z = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\text{ pour } z > 0}$$

☕ *Remarque* : Pour $z < 0$, l'intégration se serait faite entre $\dfrac{3\,\pi}{2}$ et $+\dfrac{\pi}{2}$, ce qui aurait bien donné une composante de signe opposé.

IV – Loi de superposition locale des champs magnétostatiques

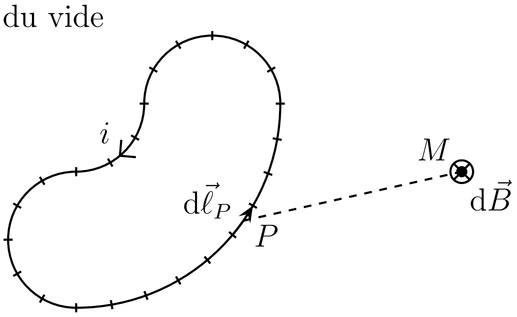
IV·1 – Loi de Biot et Savart

IV·1·i – énoncé

Le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par un circuit $\mathscr{C}$ parcouru par le courant i s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \oint_{P\in\mathscr{C}} \frac{\mu_0}{4\,\pi} \times \frac{i\,\mathrm{d}\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \qquad \text{où :}$$

- ➜ $\mathrm{d}\vec{\ell}_P$ est un déplacement élémentaire sur $\mathscr{C}$ autour de P dans le sens de i, peu importe que $i \lesseqgtr 0$
- ➜ μ_0 est la perméabilité du vide



✧ Cette loi ne **dit pas** que le champ magnétique créé en M par la petite portion de circuit en P vaut $\mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\,\pi} \times \dfrac{i\,\mathrm{d}\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$ car :

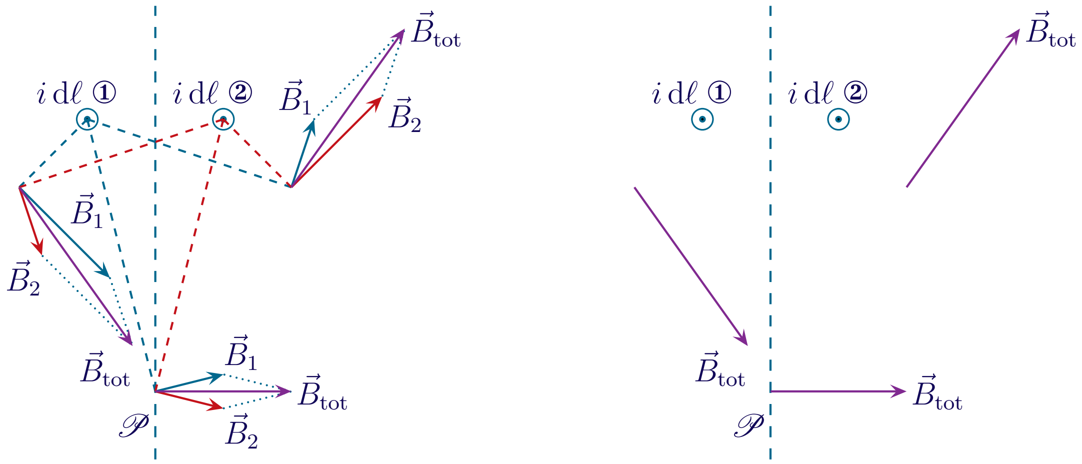
- ➜ l'idée même d'une portion infinitésimale de circuit est absurde puisqu'il faut un circuit fermé pour qu'un courant puisse circuler
- ➜ c'est faux mais le terme correctif a une résultante nulle sur l'ensemble d'un circuit fermé

✧ Dans ces conditions, dans un soucis d'allégement des notations, nous noterons parfois $\mathrm{d}\vec{B} = (\cdots)$ mais nous n'oublierons pas qu'il s'agit là d'un **intermédiaire** de calculs.

IV·1·ii – conséquence sur la symétrie du champ

✯ plan de symétrie des sources

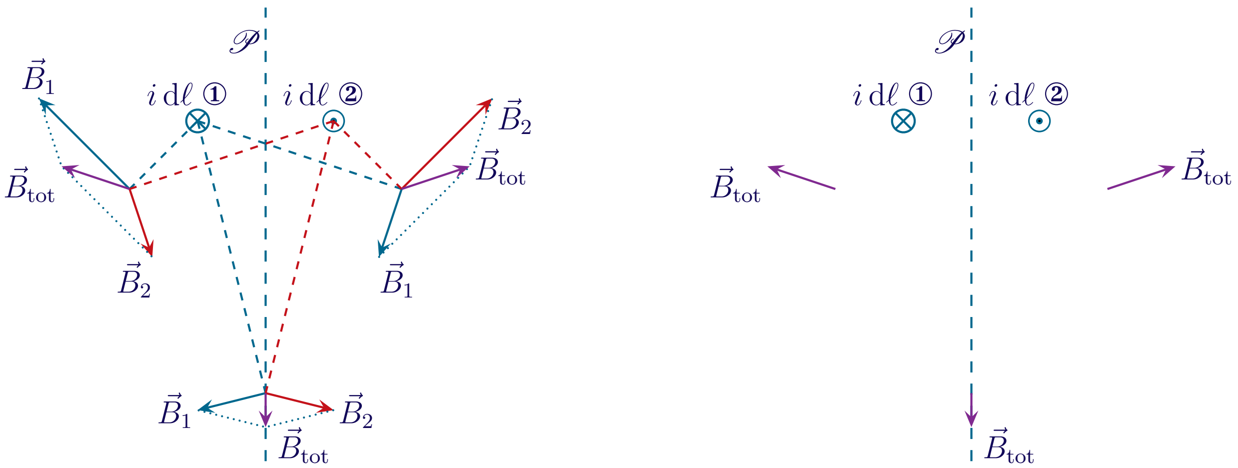
✧ Prenons deux petits bouts de circuits symétriques par rapport à $\mathscr{P}$ et cherchons le champ magnétique créé en deux points symétriques.



✧ Nous pouvons constater que :
- ➜ le champ magnétique est bien antisymétrique par rapport au plan $\mathscr{P}$
- ➜ le champ magnétique est bien orthogonal au plan $\mathscr{P}$ en un point de $\mathscr{P}$.

✯ plan de symétrie des sources

✧ Prenons cette fois une distribution élémentaire antisymétrique par rapport à $\mathscr{P}$ et traçons le champ magnétique en deux points symétriques.



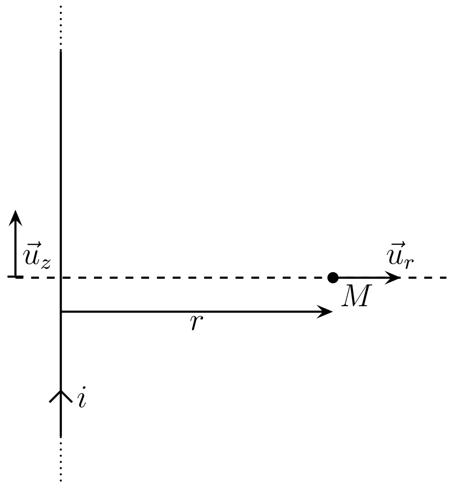
✧ Nous pouvons constater que :
- ➜ le champ magnétique est bien symétrique par rapport au plan $\mathscr{P}$
- ➜ le champ magnétique est bien contenu dans le plan $\mathscr{P}$ en un point de $\mathscr{P}$.

IV·2 – Exemple fondamental du fil infini

IV·2·i – une brique de construction . . .

✯ situation

✧ Considérons un fil infini rectiligne parcouru par un courant d'intensité i et cherchons le champ créé dans tout l'espace.

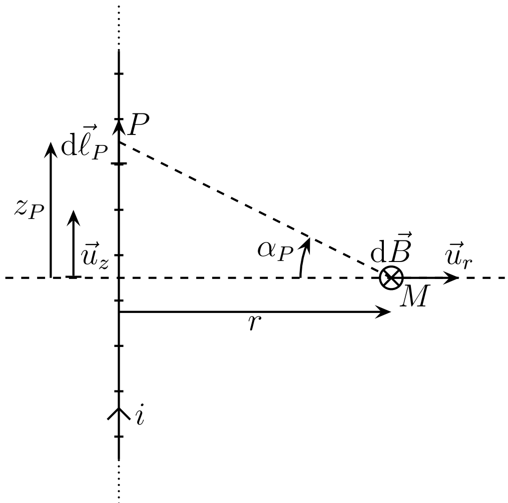


✧ Analyse physique :
- ➜ la distribution est de type « fil » : il y a une invariance par translation et une invariance par rotation. Nous utiliserons le repérage cylindro-polaire.
- ➜ soit M un point quelconque de l'espace :
  - ➜ le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ est plan de symétrie des courants
  - ➜ donc le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ est plan d'antisymétrie de $\vec{B}$
  - ➜ donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal au plan $(M,\vec{u}_r\,\vec{u}_z)$
  - ➜ donc $\vec{B}(M)$ porté par $\vec{u}_\theta$.
- ➜ finalement : $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{u}_\theta$.
- ➜ grandeurs pertinentes : i (distribution), μ_0 (structure)

✧ Analyse technique :
- ➜ avec autant d'invariance et de symétrie il faudrait sauter sur le théorème d'Ampère
- ➜ sauf que nous l'avons déjà fait, alors, pour changer, nous utiliserons la loi de Biot et Savart

✯ utilisation de la loi de Biot et Savart

✧ Commençons par découper le fil en petits morceaux $\mathrm{d}\vec{\ell}_P$.



✧ La loi de Biot et Savart s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \oint_{P\in\mathscr{C}} \mathrm{d}\vec{B}_P(M) \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \times \frac{i\,\mathrm{d}\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

✧ L'idée va être de repérer P non pas par z mais par α_P.

✧ Nous avons donc :

- ➜ $\mathrm{d}\vec{\ell}_P = \mathrm{d}\ell_P\,\vec{u}_z = \mathrm{d}z_P\,\vec{u}_z$
- ➜ $\overrightarrow{PM} = r\,\vec{u}_r - z_P\,\vec{u}_z$
- ➜ $z_P = r\,\tan\alpha$ d'où $\mathrm{d}z_P = \dfrac{r}{\cos^2\alpha_P}\,\mathrm{d}\alpha_P$
- ➜ $PM = \dfrac{r}{\cos\alpha_P}$ donc $PM^3 = \dfrac{r^3}{\cos^3\alpha_P}$

En remplaçant le tout, cela donne :

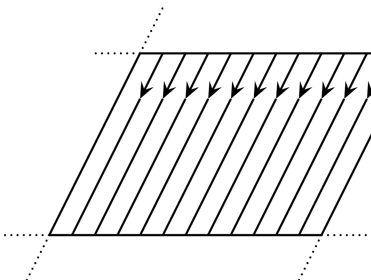
$$\vec{B}(M) = \oint_{P\in\mathscr{C}} \frac{\mu_0}{4\,\pi} \times \frac{\dfrac{\cancel{r}}{\cancel{\cos^2\alpha_P}}\,i\,\mathrm{d}\alpha_P\,\vec{u}_z\wedge(\cancel{r}\,\vec{u}_r - \cancel{z_P\,\vec{u}_z})}{\dfrac{r^{\cancel{3}}}{\cos^{\cancel{3}}\alpha_P}}$$

$$= \oint \frac{\mu_0}{4\,\pi\,r} \times i\,\cos\alpha_P\,\mathrm{d}\alpha_P\,\vec{u}_\theta \qquad = \qquad \frac{\mu_0\,i}{4\,\pi\,r} \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha_P\,\mathrm{d}\alpha_P$$

✧ Nous retrouvons $\vec{B} = \dfrac{\mu_0\,i}{2\,\pi\,r}\,\vec{u}_\theta$.

IV·2·*ii* – … pour faire une nappe

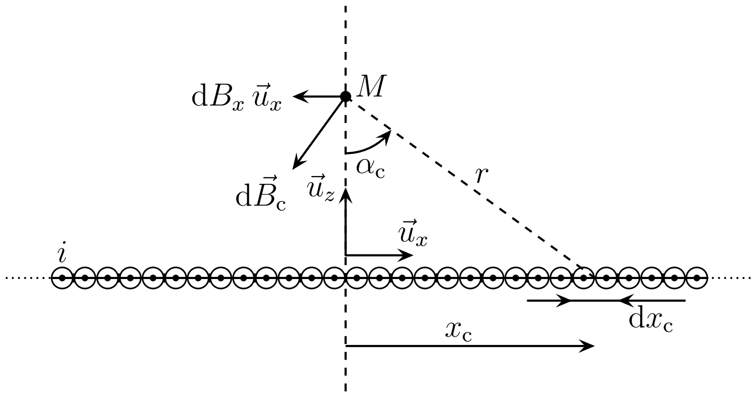
✧ À partir du champ créé par un fil, nous pouvons trouver celui créé par une nappe infini constitué de fils infinis parallèles parcourus par un courant d'intensité i et de densité n par unité de longueur.



✧ Analyse physique :
- ➜ la distribution est de type « plan » : il y a deux invariances par translation. Nous utiliserons le repérage cartésien.
- ➜ soit M un point quelconque de l'espace :
  - ➜ le plan $(M,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ est plan de symétrie des courants
  - ➜ donc le plan $(M,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ est plan d'antisymétrie de $\vec{B}$
  - ➜ donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal au plan $(M,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$
  - ➜ donc $\vec{B}(M)$ porté par $\vec{u}_x$.
- ➜ finalement : $\vec{B}(M) = B(z)\,\vec{u}_x$.
- ➜ grandeurs pertinentes : i, n (distribution), μ_0 (structure)

✧ Analyse technique :
- ➜ avec autant d'invariance et de symétrie il faudrait sauter sur le théorème d'AMPÈRE
- ➜ sauf que nous l'avons déjà fait, alors, pour changer, nous utiliserons le principe de superposition.

✧ Commençons par découper la nappe en câbles.



✧ Le principe de superposition nous permet d'affirmer que :

$$\vec{B}(M) = \int_{\text{câbles}} \mathrm{d}\vec{B}_\mathrm{c}$$

✧ Comme nous pouvons le voir sur le schéma, $\mathrm{d}\vec{B}_\mathrm{c}$ n'est **pas** porté par $\vec{u}_x$ bien que la résultante le soit. C'est pourquoi nous allons nous contenter de sommer les contributions utiles, celles sur $\vec{u}_x$:

$$B_x(M) = \int_{\text{câbles}} \mathrm{d}\vec{B}_\mathrm{c} \cdot \vec{u}_x$$

✧ Ici nous allons reprendre l'expression du champ engendré par un fil « $\vec{B} = \dfrac{\mu_0\,i}{2\,\pi\,r}\,\vec{u}_\theta$ » pour écrire celui créé par le câble :

- ➜ $i \longrightarrow (n\,\mathrm{d}x_\mathrm{c})\,i$
- ➜ $r \longrightarrow \dfrac{z}{\cos\alpha_\mathrm{c}}$
- ➜ $\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_x \longrightarrow \cos\alpha_\mathrm{c}$
- ➜ avec $x_\mathrm{c} = z\,\tan\alpha$, nous avons $\mathrm{d}x_\mathrm{c} = \dfrac{z}{\cos^2\alpha_\mathrm{c}}\,\mathrm{d}\alpha_\mathrm{c}$

✧ Nous avons ainsi, en remplaçant :

$$B_x(M) = \int \frac{\mu_0\;i\,\cancel{z}\,\dfrac{\mathrm{d}\alpha_\mathrm{c}}{\cancel{\cos^2\alpha_\mathrm{c}}}}{2\,\pi\,\dfrac{\cancel{z}}{\cancel{\cos\alpha_\mathrm{c}}}} \times \cancel{\cos\alpha_\mathrm{c}}$$

$$= \int \frac{\mu_0\,n\,i}{2\,\pi}\,\mathrm{d}\alpha_\mathrm{c} \qquad = \qquad \frac{\mu_0\,n\,i}{2\,\pi} \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha_\mathrm{c}$$

✧ Et nous retrouvons : $B_x(z) = \dfrac{\mu_0\,n\,i}{2}$ pour $z > 0$.

IV·3 – Exemple fondamental de la spire circulaire

✧ Il s'agit là aussi d'un exemple fondamental à savoir refaire très très rapidement :

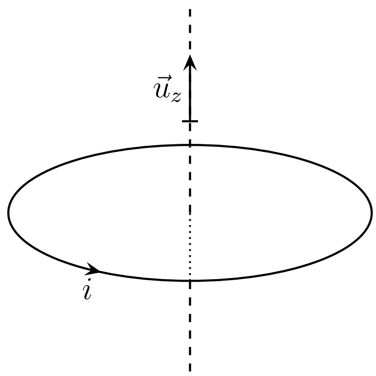
- ➜ la spire circulaire est à savoir retrouver en quelques minutes (moins de 5 pour les plus rapides jusqu'à 10 pour les plus lents)
- ➜ rajoutez autant pour passer au solénoïde fini

✧ C'est un exemple **très** fréquent, notamment en colle …

IV·3·i – champ sur l'axe d'une spire

✯ situation

✧ Considérons un circuit électrique circulaire (une « spire » circulaire) parcourue par un courant d'intensité i et cherchons le champ magnétique en un point de l'axe.



✧ Analyse physique :

- ➜ la distribution est de type « disque » : il y a qu'une invariance par rotation. Nous utiliserons le repérage cylindro-polaire.
- ➜ soit M un point de l'axe :
  - ➜ tout plan « vertical » contenant $(M,\vec{u}_z)$ est plan d'antisymétrie des courants
  - ➜ donc tout plan contenant $(M,\vec{u}_z)$ est plan de symétrie de $\vec{B}$
  - ➜ donc $\vec{B}(M)$ contenu dans tous les plans contenant $(M,\vec{u}_z)$
  - ➜ donc $\vec{B}(M)$ porté par $\vec{u}_z$.
- ➜ finalement : $\vec{B}(M) = B(0,z)\,\vec{u}_z \stackrel{\text{not}}{=} B_{\text{axe}}(z)\,\vec{u}_z$.
- ➜ grandeurs pertinentes : i (distribution), R (géométrie), μ_0 (structure)

✧ Analyse technique :

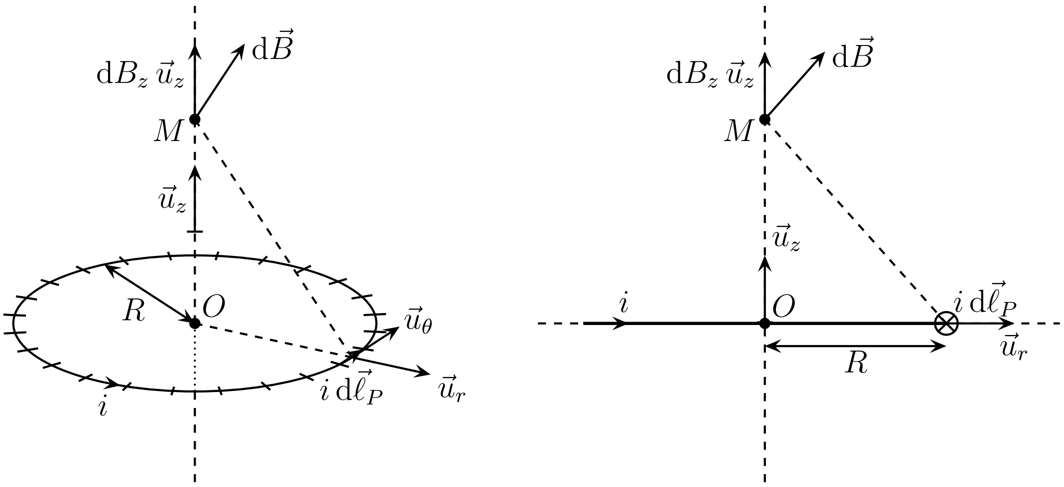
- ➜ il n'y a pas assez d'invariance pour essayer Ampère, nous allons donc utiliser la loi de Biot et Savart

STOP Écrire le champ sur l'axe $\vec{B}(z)\,\vec{u}_z$ est très piégeux car cela peut faire croire à l'existence de nombreuses symétries. Il vaut donc mieux une des deux notations suivantes :

$$\vec{B}_{\text{axe}}(z)\,\vec{u}_z \qquad \text{ou} \qquad B(0,z)\,\vec{u}_z$$

✯ utilisation de la loi de Biot et Savart

✧ Commençons par faire deux schémas de manière à bien représenter les choses et surtout toutes les grandeurs pertinentes.



✧ La loi de Biot et Savart s'écrit :

$$\vec{B}(M_{\text{axe}}) = \int_{P\in\mathscr{C}} \mathrm{d}\vec{B}_P(M_{\text{axe}}) \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}\vec{B}_P(M_{\text{axe}}) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \times \frac{i\,\mathrm{d}\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

✧ Ici nous avons :
- ➜ $\mathrm{d}\vec{\ell}_P = \mathrm{d}\ell_P\,\vec{u}_\theta$
- ➜ $\overrightarrow{PM} = -R\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$
- ➜ $PM^3 = (z^2+R^2)^{3/2}$

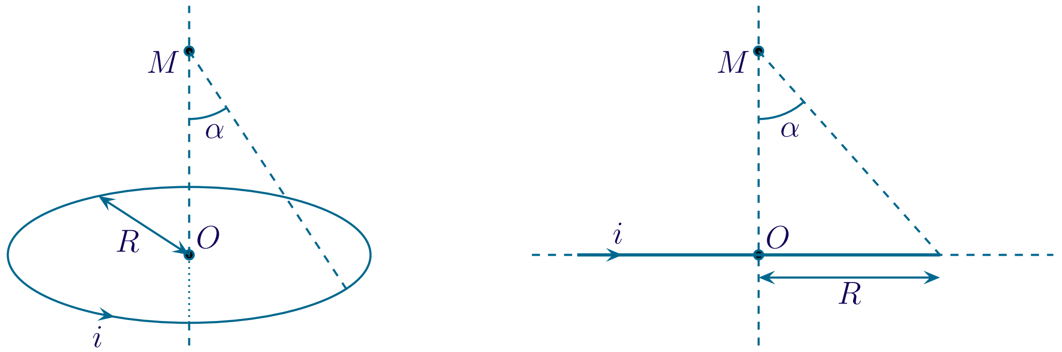
✧ Cela donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{B}(M_{\text{axe}}) &= \frac{\mu_0\,i}{4\,\pi} \times \frac{(\mathrm{d}\ell_P\,\vec{u}_\theta)\wedge(-R\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z)}{(z^2+R^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0\,i}{4\,\pi\,(z^2+R^2)^{3/2}} \times (R\,\mathrm{d}\ell_P\,\vec{u}_z - z\,\mathrm{d}\ell_P\,\vec{u}_r)\end{aligned}$$

✧ Comme nous savons déjà que le champ $\vec{B}(M_{\text{axe}})$ est porté par $\vec{u}_z$, nous pouvons nous contenter de ne déterminer que cette composante, ce qui donne :

$$\begin{aligned}B_z(M_{\text{axe}}) = \vec{B}(M_{\text{axe}})\cdot\vec{u}_z &= \int \mathrm{d}\vec{B}_P(M_{\text{axe}})\cdot\vec{u}_z = \int \mathrm{d}B_z(M_{\text{axe}}) \\ &= \int \frac{\mu_0\,i}{4\,\pi\,(z^2+R^2)^{3/2}} \times R\,\mathrm{d}\ell_P = \frac{\mu_0\,i\,R}{4\,\pi\,(z^2+R^2)^{3/2}} \times \int \mathrm{d}\ell_P \\ &= \frac{\mu_0\,i\,R^2}{2\,(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0\,i}{2\,R} \times \left(\frac{R}{(z^2+R^2)^{3/2}}\right)^3\end{aligned}$$

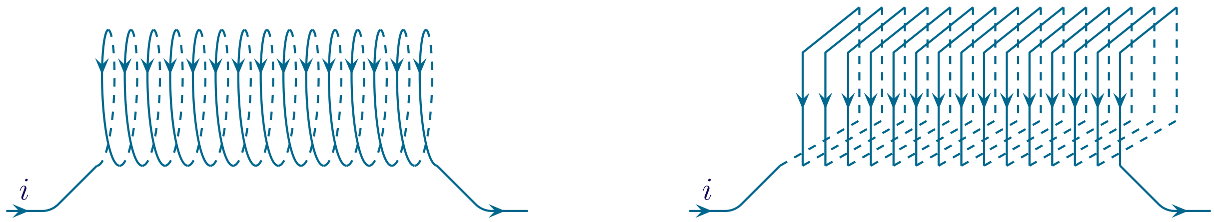
✧ Résultat que nous écrivons, par habitude sous la forme $\vec{B}(M_{\text{axe}}) = \dfrac{\mu_0\,i\,\sin^3\alpha}{2\,R}\,\vec{u}_z$ où α est l'angle sous lequel est vu le rayon de la spire depuis le point M.



IV·3·*ii* – champ sur l'axe d'un solénoïde fini

✫ situation et modélisation

> Un *solénoïde* est un enroulement de fils dont le but est de créer un champ magnétique.



✧ Même si techniquement c'est identique à une bobine, le rôle est différent :
- ➜ une bobine est optimisée pour son rôle électrocinétique
- ➜ un soléloïde est optimisé pour son rôle magnétique

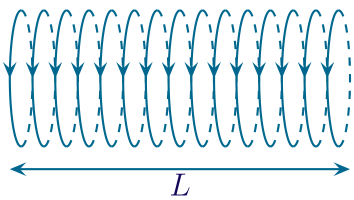
✧ Quelquefois, les deux rôles sont si imbriqués que le vocabulaire ne revêt plus d'importance (par exemple pour les transformateurs).

> Une *spire* est un tour complet d'un enroulement.

✧ Dans la suite, nous allons nous concentrer sur un solénoïde de révolution, *ie.* un solénoïde de section circulaire.

✧ Dans ces conditions, si les spires sont assez serrées, alors leur forme est quasiment circulaire et nous allons pouvoir modéliser la spirale électrique par une association « côte à côte » de spires circulaire.

☕ *Remarque* : c'est pour cette raison que le circuit précédent s'appelle une « spire ».



✧ Analyse physique :
- ➜ la distribution est de type « disque » : il y a qu'une invariance par rotation. Nous utiliserons le repérage cylindro-polaire.
- ➜ soit M un point de l'axe :
  - ➜ tout plan contenant l'axe du solénoïde $(M,\vec{u}_z)$ est plan d'antisymétrie des courants

- ➜ donc tout plan contenant l'axe $(M,\vec{u}_z)$ est plan de symétrie de $\vec{B}$
- ➜ donc $\vec{B}(M)$ contenu dans tous les plans contenant l'axe $(M,\vec{u}_z)$
- ➜ donc $\vec{B}(M)$ porté par $\vec{u}_z$.

➜ finalement : $\vec{B}(M) = B(0,z)\,\vec{u}_z$.

➜ grandeurs pertinentes : i (distribution), R (géométrie), μ_0 (structure)

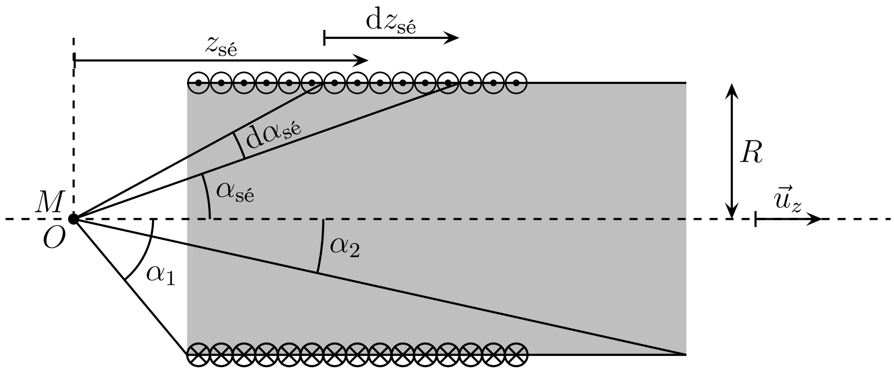
✧ Analyse technique :

➜ il n'y a pas assez d'invariance pour essayer Ampère, nous allons donc utiliser la loi de Biot et Savart

✧ Nous allons donc utiliser le principe de superposition en découpant le solénoïde en tranches un peu épaisses pour contenir quelques spires à chaque fois mais pas trop pour qu'il soit possible de considérer qu'elles soient toutes au même endroit afin de pouvoir sommer le tout.

✯ découpage

✧ Commençons, comme souvent, par bien découper la distribution en « solénoïdes élémentaires » (sé)



✧ Le principe de superposition s'écrit :

$$\vec{B}(M_{\text{axe}}) = \int \mathrm{d}\vec{B}_{\text{sé}}(M_{\text{axe}}) \qquad \text{avec} \qquad « \mathrm{d}\vec{B}_{\text{sé}}(M_{\text{axe}}) = \frac{\mu_0\,i}{2\,R}\,\sin^3\alpha\, »$$

✧ Ici, l'adaptation de l'expression du champ créé par une spire circulaire donne :

- ➜ $R \longrightarrow R$
- ➜ $i \longrightarrow n\,\mathrm{d}z_{\text{sé}}\,i$
- ➜ $\alpha \longrightarrow \alpha_{\text{sé}}$

✧ Le champ sur l'axe se récrit donc :

$$\vec{B}(M_{\text{axe}}) = \int \frac{\mu_0}{2\,R}\,n\,i\,\sin^3\alpha_{\text{sé}}\,\mathrm{d}z_{\text{sé}}\,\vec{u}_z \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{B}(M_{\text{axe}}) = \frac{\mu_0\,n\,i}{2\,R}\int \sin^3\alpha_{\text{sé}}\,\mathrm{d}z_{\text{sé}}\,\vec{u}_z$$

✧ En choisissant le centre de repérage en M, nous avons :

$$\tan\alpha_{\text{sé}} = \frac{R}{z_{\text{sé}}} \qquad \rightsquigarrow \qquad z_{\text{sé}} = \frac{R}{\tan\alpha_{\text{sé}}} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}z_{\text{sé}} = -\frac{R}{\sin^2\alpha_{\text{sé}}}\,\mathrm{d}\alpha_{\text{sé}}$$

✧ La seule difficulté est de ne pas se tromper sur les bornes : comme il faut toujours sommer dans le sens algébrique, *ie.* ici dans le sens de $\vec{u}_z$, nous devons sommer de α_1 à α_2.

✧ Cela donne :

$$\vec{B}(M_{\text{axe}}) = \frac{\mu_0\,n\,i}{2\,R} \times \int \sin^3\alpha_{\text{sé}} \times \left(-\frac{R\,\mathrm{d}\alpha_{\text{sé}}}{\sin^2\alpha_{\text{sé}}}\right) \qquad = \qquad -\frac{\mu_0\,n\,i}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha_{\text{sé}}\,\mathrm{d}\alpha_{\text{sé}}$$

$$= \frac{\mu_0\,n\,i}{2}\left[\cos\alpha_{\text{sé}}\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \qquad = \qquad \frac{\mu_0\,n\,i}{2}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right)$$

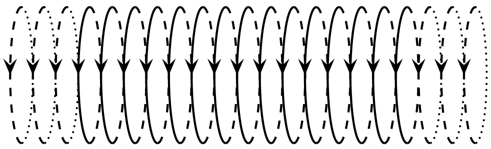
✧ Pour un solénoïde de révolution infini, le champ sur l'axe s'écrit donc :

$$\alpha_1 \longrightarrow \pi \quad \text{et} \quad \alpha_2 \longrightarrow 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{B}(M_{\text{axe}}) \longrightarrow \mu_0\, n\, i$$

IV·3·*iii* – champ créé par un solénoïde infini dans tout l'espace

✯ situation analyse

✧ Comme précédemment, modélisons une spirale par un ensemble de spires circulaires côte-à-côte.

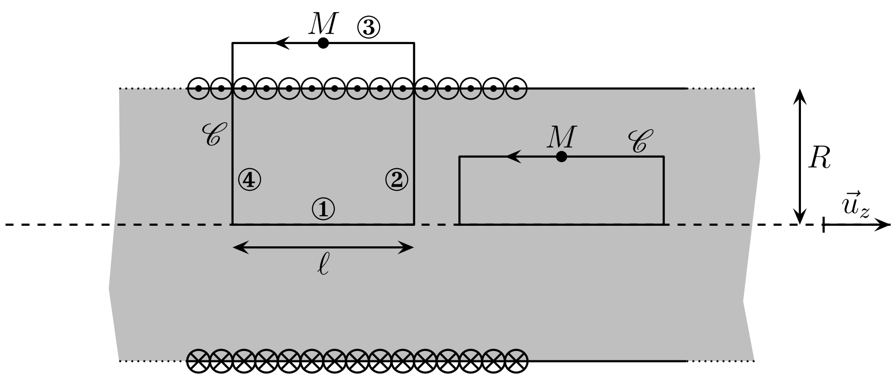


✧ Analyse physique :
- ➜ la distribution est de type « fil » : il y a une invariance par translation et une invariance par rotation. Nous utiliserons le repérage cylindro-polaire.
- ➜ soit M quelconque de l'espace :
  - ➜ tout plan contenant $(M,\vec{u}_r\,\vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie des courants
  - ➜ donc tout plan contenant $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ est plan d'antisymétrie de $\vec{B}$
  - ➜ donc $\vec{B}(M)$ orthogonal au plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$
  - ➜ donc $\vec{B}(M)$ porté par $\vec{u}_z$.
- ➜ finalement : $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{u}_z$.
- ➜ grandeurs pertinentes : i, n (distribution), R (géométrie), μ_0 (structure)

✧ Analyse technique :
- ➜ Il y a beaucoup de symétrie et d'invariance, Ampère et son théorème nous seront utiles.

✯ soupoudrons d'Ampère

✧ Commençons par choisir un point quelconque et un contour adapté. Ici il s'agit d'un rectangle dont un des côtés passe par M et un autre est confondu avec l'axe.



✧ Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$C_B = \mu_0\, i_{\text{enlacé}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \oint_{P\in\mathscr{C}} \vec{B}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P = \mu_0\, i_{\text{enlacé}}$$

la circulation

✧ En découpant le contour en 4 parties (chacun des 4 côtés du rectangle !), nous avons, par linéarité de la circulation :

$$C_B = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

✧ La circulation sur le premier côté donne :

$$C_1 = \int_{P\in①} \vec{B}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P = \int_{P\in①} B(0)\,\vec{u}_z\cdot \mathrm{d}\ell_P\,\vec{u}_z = B(0)\int\int_{P\in①} \mathrm{d}\ell_P = B(0)\,\ell$$

✧ La circulation sur les côtés ② et ④ sont nuls car en chaque point de ② et ④, nous avons :

$$\vec{B}(P \text{ sur ② ou ④}) /\!/ \vec{u}_z \qquad \text{et} \qquad \vec{\ell}(P \text{ sur ② ou ④}) \perp \vec{u}_z \qquad \leadsto \qquad \mathrm{d}C = \vec{B}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P = 0$$

✧ La circulation sur le côté ③ se détermine de la même manière que celle sur le côté ① :

$$C_3 = \int_{P\in③} \vec{B}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P = \int_{P\in③} B(r_P)\,\vec{u}_z\cdot(-\mathrm{d}\ell_P)\,\vec{u}_z = -\int\int_{P\in③} B(r_P)\mathrm{d}\ell_P$$

✧ Et comme le contour a été judicieusement choisi : $r_P = r_M = \mathrm{C^{te}} \overset{\text{not}}{=} r$:

$$C_3 = -\int\int_{P\in③} B(r)\,\ell_P = -B(r)\int\int_{P\in③} \mathrm{d}\ell_P = -B(r)\,\ell$$

✧ Finalement :

$$C = (B(0) - B(r))\,\ell$$

le courant enlacé

✧ Nous voyons qu'il y a deux cas.
✧ Si M est à l'intérieur du solénoïde, alors $i_{\text{enlacé}} = 0$.
✧ Si M est à l'extérieur du solénoïde, alors $i_{\text{enlacé}} = +n\,\ell\,i$ (attention au signe).
✧ Donc nous avons :

$$B(r) = B(0) \text{ pour } r < R \qquad \text{et} \qquad B(r) = B(0) - \mu_0\,n\,i \text{ pour } r > R$$

première manière de conclure

✧ Il nous manque quelque chose pour conclure : l'expression du champ en un point, quelque part.
✧ Nous pouvons reprendre l'expression du champ sur l'axe : $\vec{B}(0) = \mu_0\,n\,i\,\vec{u}_z$ et nous avons alors :

Le champ magnétique créé par un solénoïde infini est nul à l'extérieur.

Le champ magnétique créé par un solénoïde infini est uniforme et s'écrit $\mu_0\,n\,i$ où n est le nombre de spires par unité de longueur ; le sens du champ étant donné par la règle de la main droite.

deuxième manière de conclure

- Nous pouvons calculer facilement le champ à l'infini en disant que, vu de l'infini, la distribution est nulle, *ie.* que les courants se « compensent ».
- S'il n'y a pas de courants, il n'y a pas de source donc pas de champ et nous pouvons retrouver les résultats précédents avec :
  - $B(\infty) = 0$
  - $B(r) = B(0) - \mu_0\, n\, i$ pour $r > R$
  - $B(r) = B(0)$ pour $r < R$

STOP un champ à l'infini n'est pas toujours nul, cela dépend furieusement de la distribution (cf. nappe infinie).

Approche locale du champ $(\vec{E},\vec{B})$

Au niveau du cours

✫ Les définitions

✧ Sont à savoir :
- ➜ potentiel électrostatique, courbe isopotentielle
- ➜ solénoïde, spire

✫ Les grandeurs

✧ Savoir vérifier l'homogénéité de l'expression d'un potentiel électrostatique.

✫ Les lois

✧ Connaître :
- ➜ la relation entre $\vec{E}$ et v
- ➜ la loi régissant la circulation de $\vec{E}$ sur un contour fermé
- ➜ la loi régissant le flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée
- ➜ l'expression de la capacité d'un condensateur plan idéal
- ➜ la loi de Coulomb
- ➜ la loi de Biot et Savart

✫ la phénoménologie

✧ Connaître :
- ➜ la topographie relative des lignes de champ et des courbes isopotentielles
- ➜ l'allure des lignes de champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide
- ➜ savoir ce que signifie « négliger les effets de bord »

✫ les exemples fondamentaux

✧ Savoir :
- ➜ retrouver le champ $\vec{E}$ dans le plan médiateur d'un segment uniformément chargé
- ➜ retrouver le champ $\vec{E}$ créé sur l'axe d'un disque
- ➜ retrouver le champ $\vec{B}$ créé sur l'axe d'une spire circulaire
- ➜ retrouver le champ $\vec{B}$ créé sur l'axe d'un solénoïde fini
- ➜ retrouver le champ $\vec{B}$ dans tout l'espace créé par un solénoïde infini

Au niveau de l'analyse

✫ Analyse physique

✧ Savoir repérer le type de la distribution (sphère, plan, fil, ...) et voir toutes les invariances et symétries particulières que peut présenter la distribution de sources.

Au niveau des savoir-faire

- Connaître parfaitement
  - ➜ la définition du gradient, son interprétation géométrique
  - ➜ les coordonées du gradient en cartésiennes, cylindro-polaire et sphérique

✯ petits gestes

- Il faut savoir découper une distribution (de charges ou de courants) pour se ramener à des distributions connues ou à des situations élémentaires qui deviennent techniquement calculables.

✯ exercices classiques

- Savoir retrouver la capacité d'un condensateur.

Table des matières