Premiers pas en mécanique du point

Dans cette police sont écrits les raisonnements menés et autres remarques sur les méthodes employées pour trouver les réponses aux questions posées. C'est à dire à l'oral mais à ne pas écrire en DS.

Exercice 1

Cet exercice ne porte que sur de la cinématique : point n'est besoin de connaître comment et pourquoi le cerceau roule ainsi. Il faut juste se contenter de décrire le mouvement du point A.

1. Géométriquement : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} v_0\,t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\,\sin(\theta(t)) \\ -a\,\cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$.

La condition de non glissement est telle que la longueur OI soit égale à l'arc IA.
Ainsi nous avons $v_0\,t = a\,\theta$, d'où :

$$\boxed{x_A(t) = v_0\,t - a\,\sin\left(\frac{v_0}{a}\,t\right)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{y_A(t) = a\left[1 - \cos\left(\frac{v_0}{a}\,t\right)\right]}$$

2. La norme de la vitesse s'écrit $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$ or

$$\begin{cases} v_x = v_0 - v_0\,\cos\left(\dfrac{v_0}{a}\,t\right) \\ v_y = v_0\,\sin\left(\dfrac{v_0}{a}\,t\right) \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{v = \sqrt{2}\,v_0\sqrt{1 - \cos(\theta(t))}}$$

Nous pouvons remarquer que $v = 0$ pour $\theta = 0\ \ [2\pi]$, *ie.* le point A d'une roue en contact avec le sol a une vitesse **nulle** (pourvu que la roue ne dérape pas).

Exercice 2

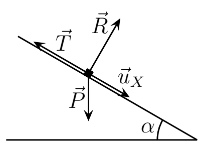
Comme dans l'exercice précédent, point de physique ici, cet exercice porte uniquement sur de la cinématique.

La trajectoire $y = \alpha\,x^2$ signifie qu'à tout instant, nous avons $y(t) = \alpha\,x^2(t)$. En dérivant cette relation (de manière à faire apparaître $v_y(t) = \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$) nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 2\,\alpha\,x(t)\,\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{v_y(t) = 2\,\alpha\,x(t)\,v_x} \quad \text{et} \quad \boxed{v(t) = v_x\sqrt{1 + 4\,\alpha^2\,x^2(t)}}.$$

Exercice 3

1. Étudions le système constitué par l'objet M dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.



Il y a 3 forces qui s'exercent sur M :
➜ son poids $\vec{P} = m\,\vec{g} = -P\,\cos\alpha\,\vec{u}_Z + P\,\sin\alpha\,\vec{u}_X$
➜ la tension exercée par le fil : $\vec{T} = -T\,\vec{u}_{\text{sortant}}$ (la direction est pour l'instant inconnue)
➜ l'action du plan incliné $\vec{R} = R\,\vec{u}_{\text{sortant}} = R\,\vec{u}_Z$ (car sans frottement)
À l'équilibre, nous pouvons écrire $\vec{T} + \vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$ ce qui donne, en projection sur $\vec{u}_X$ et $\vec{u}_Y$:

$$\begin{cases} T_X + P\,\sin\alpha = 0 \\ T_Y + 0 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{T = \sqrt{{T_X}^2 + {T_Y}^2} = m\,g\,\sin\alpha}$$

En projection sur $\vec{u}_Z$: $R - P\,\cos\alpha = 0$ soit $\boxed{R = m\,g\,\cos\alpha}$.

2. Maintenant ne s'exercent plus sur M que deux forces :
➜ son poids $\vec{P}$
➜ la réaction du plan $\vec{R}$
Ainsi le PFD en projection sur $\vec{u}_Z$ et sur $\vec{u}_X$ donne :

$$m\,\ddot{Z}(t) = R - P\,\cos\alpha \quad \text{et} \quad m\,\ddot{X}(t) = P\,\sin\alpha$$

Comme $Z(t) = \mathrm{C^{te}} = 0$ (car tout le mouvement se déroule sur le plan incliné), nous obtenons $\ddot{Z}(t) = 0$ et $R = P\,\cos\alpha$.

Il reste donc $\boxed{\ddot{X}(t) = g\sin\alpha \overset{\text{not}}{=} g'}$.

Ainsi le mouvement sur le plan incliné est celui d'un objet uniformément accéléré. La trajectoire va donc être parabolique (ou éventuellement rectiligne si la vitesse initiale est portée par $\vec{u}_X$).

☕ *Remarque* : ce dispositif permet d'étudier des mouvements avec une gravité apparente différente de celle normalement prévue. Inconvénient majeur : les mouvements et systèmes étudiés doivent être plans.

Exercice 4

1. Voir le cours, l'exemple en détail. Nous avons obtenu :

$$x(t) = v_0\,(\cos\alpha)\,t \qquad v_x(t) = v_0\,(\cos\alpha) \qquad z(t) = h + v_0\,(\sin\alpha)\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \qquad v_z(t) = v_0\,(\sin\alpha) - g\,t$$

Et la trajectoire et $\boxed{z = -\dfrac{g}{2\,{v_0}^2\,\cos^2\alpha}\,x^2 + (\tan\alpha)\,x + h}$

2. La flèche est le point le plus haut de la trajectoire, ici de la parabole.
Nous avons donc par définition $v_z(t_{\text{flèche}}) = 0$ ce qui donne :

$$v_0\,\sin\alpha - g\,t_{\text{flèche}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad t_{\text{flèche}} = \frac{v_0\,\sin\alpha}{g}$$

Nous remarquons que cette flèche existe que si $\alpha > 0$ *ie.* si l'objet est lancé vers le haut, rien de plus normal !

La flèche recherchée est $z(t_{\text{flèche}})$:

$$z(t_{\text{flèche}}) = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{v_0\,\sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0\,\sin\alpha\left(\frac{v_0\,\sin\alpha}{g}\right) + h$$

Ce qui donne, après simplifications : $\boxed{z(t_{\text{flèche}}) = h + \dfrac{{v_0}^2\,\sin^2\alpha}{2\,g}}$.

La flèche est plus haute que l'altitude initiale. Là aussi c'est rassurant.

$\boxed{3.}$ Cherchons à quelle condition un point quelconque $M(x_0,z_0)$ peut être atteint.

Pour que tel soit le cas, il faut qu'il existe une valeur de α telle que :

$$z_0 = -\frac{g}{2\,{v_0}^2\,\cos^2\alpha}\,{x_0}^2 + (\tan\alpha)\,x_0 + h$$

C'est une équation que nous devons chercher à résoudre en α : s'il y a une solution, le point n'est pas en sécurité, s'il n'y a pas de solution, le point est en sécurité.

Pour trouver la solution en α de l'équation précédente, écrivons $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha$, ce qui permet d'écrire l'équation sous la forme :

$$z_0+\frac{g}{2\,{v_0}^2}\,{x_0}^2\,(1+\tan^2\alpha)-(\tan\alpha)\,x_0-h=0 \quad\rightsquigarrow\quad \frac{g\,{x_0}^2}{2\,{v_0}^2}\,\tan^2\alpha-x_0\,(\tan\alpha)+\left(z_0+\frac{g\,{x_0}^2}{2\,{v_0}^2}-h\right)=0$$

C'est une équation carrée en $\tan\alpha$ qui n'admet de solution pour $\tan\alpha$ (donc pour α) si le discriminant est positif, *ie.* si :

$$\cancel{{x_0}^2} - \frac{4\,g\,\cancel{{x_0}^2}}{2\,{v_0}^2}\left(z_0+\frac{g\,{x_0}^2}{2\,{v_0}^2}-h\right)\geqslant 0$$

Après simplification nous obtenons la condition $z_0 \leqslant h + \dfrac{{v_0}^2}{2\,g} - \dfrac{g\,{x_0}^2}{2\,{v_0}^2}$.

L'équation de la courbe délimitant la zone accessible de la zone non accessible est donc :

$$\boxed{z = h + \frac{{v_0}^2}{2\,g} - \frac{g\,x^2}{2\,{v_0}^2}}$$

C'est bien l'équation d'une parabole.

PCSI1, Fabert (Metz) Mécanique , TD n°1 *2010 – 2011*

Exercice 5

Ici, c'est l'équilibre. Intuitivement, nous pouvons déjà dire que plus m_1 est grand, plus m_2 sera haut donc plus θ sera petit. Ceci dit, nous ne connaissons pas de lois permettant d'étudier un système comportant plusieurs masses. Il faudra donc étudier chaque masse à part et ensuite rassembler les résultats. Concrètement, il est évident que ce qui lie les trois masse est le point de jonction des trois fils. C'est donc lui qu'il faudra étudier à un moment ou à un autre.

Étude des systèmes m_1. Chacune des deux masses m_1 est soumise à deux forces : son poids $\vec{P_1}$ et la tension du fil $\vec{T_1}$.

La condition d'équilibre donne : $\vec{P_1} + \vec{T_1} = \vec{0}$ soit, en norme : $\|\vec{T_1}\| = \|\vec{P_1}\|$, *ie.* $T_1 = P_1 = m_1\, g$.

Étude du système m_2. Ce système est lui aussi soumis à deux forces : la tension $\vec{T_2}$ du fil et son poids $\vec{P_2}$. Avec le même raisonnement que ci-dessus, nous arrivons à $P_2 = T_2$ soit à $T_2 = m_2\, g$.

Étude du point de jonction des trois cordes. Considérons le point de jonction qui un point matériel sans masse (les fils considérés sont idéaux, donc sans masse). Sur ce point matériel s'appliquent trois forces :

- il n'y a pas de poids puisque le point matériel est sans masse
- la force $\vec{T_1'}$ exercée par le fil de gauche
- la force $\vec{T_1''}$ exercé par le fil de droite
- la force $\vec{T_2'}$ exercée par le fil du dessous

En projetant la condition d'équilibre sur $\vec{u}_z$, nous arrivon à $T_1'\,\sin\theta + T_1''\,\sin\theta - T_2' = 0$ (☼).

Caractérisation de l'équilibre. Comme les fils et les poulies sont idéaux, nous $T_1' = T_1$, $T_1'' = T_1$ et $T_2' = T_2$.

En utilisant, dans l'équation (☼), les expressions précédemment trouvées pour T_1et T_2, nous aboutissons à : $\boxed{\sin\theta = \dfrac{m_2}{2\,m_1}}$.

Remarque : comme pouvais nous laisser l'envisager notre intuition, même si m_1 devient très grande l'équilibre sera toujours possible (avec θ de plus en plus petit) mais si m_2 est vraiment trop grand (ici $m_2 > 2\,m_1$), l'équilibre n'est plus possible.

Exercice 6

Physiquement, nous sentons bien que si les oscillations sont trop grandes, il peut y avoir un problème, nous nous attendons donc à trouver une valeur maximale pour A.

Ceci dit, tant qu'il n'y a pas décollement de la masse, cette dernière va osciller verticalement. Le repérage est alors évident : centré sur la position d'équilibre (puisque celle-ci est mise en avant dans l'énoncé) et avec $\vec{u}_z$ vertical vers le haut.

Le problème est un problème de contact, il va donc falloir déterminer la force que le plateau exerce sur la masse en supposant que la masse ne décolle pas.

Hypothèse de non décollage.

➜ *Équation d'évolution.* Étudions le système constitué par la masse. Celle-ci n'est soumise qu'à deux forces : son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ et l'action du plateau $\vec{R}$. Le PFD s'écrit alors $\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}(t)$.

Ici, nous sentons bien que la masse bouge « grâce » au ressort, mais la masse ne touche pas le ressort. Et comme ce qui relie masse et ressort n'est autre que le plateau, c'est en étudiant avec des lois physiques le plateau que nous pourrons, sinon déterminer $\vec{R}$, pour le moins la relier à la force exercée par le ressort.

➜ *Détermination de $\vec{R}$.* Pour déterminer $\vec{R}$ qui est, *a priori*, inconnue, utilisons le PFD sur le plateau.

Sur le plateau s'exerce 2 forces : la tension $\vec{T}$ exercée par le ressort et l'action de contact avec la masse sur $\vec{R}\,'$.

Comme le plateau est sans masse, le PFD s'écrit : $\vec{T} + \vec{R}\,' = M\vec{a}\,' = \vec{0}$ d'où $\vec{R}\,' = -\vec{T}$.

Mais comme la troisième loi de NEWTON postule que $\vec{R} = -\vec{R}\,'$, nous pouvons en déduire que $\vec{R} = \vec{T} = -k\,(\ell(t) - \ell_0)\,(-\vec{u}_z) = +k\,(\ell(t) - \ell_0)\,\vec{u}_z$.

Remarquons que pour que l'intuition fonctionne, à savoir que tout se passe « comme si » le ressort exerçait sa force directement sur la masse, il faut utiliser le fait que le plateau soit sans masse. Ce qui ne sera pas toujours le cas. Ce qui signifie que l'intuition sera parfois fausse ...

➜ *Équation du mouvement.* À l'équilibre de la masse nous avons :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad -m\,g + k\,(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{m\,g}{k}$$

En remarquant que $z(t) = \ell_{\text{éq}} - \ell(t)$ et que le repère a été choisi de telle sorte que $z_{\text{éq}} = 0$, le PFD se réécrit :

$$-m\,g + k\,(\ell_{\text{éq}} - z(t) - \ell_0) = m\,\ddot{z}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}\,z(t) = 0$$

Cette équation différentielle a pour solution : $z(t) = \lambda\,\cos(\omega\,t + \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et λ et φ à déterminer avec les conditions initiales qui sont $z(0) = -A$ et $\dot{z}(0) = 0$. Tous calculs faits, nous aboutissons à $z(t) = -A\,\cos(\omega\,t)$.

Validation de l'hypothèse

Comme la masse est simplement posée sur le plateau, la réaction de celui-ci ne peut être que verticale vers le haut.

Ainsi il faut $R \geqslant 0$ sans quoi la masse décolle.

Or d'après le PFD initial, nous avons $\vec{R} = m\vec{a} - \vec{P}$, ce qui donne, en projectant sur $\vec{u}_z$ et en calculant $\ddot{z}(t)$: $R = A\,k\,\cos(\omega\,t) + m\,g$. La valeur minimale étant obtenue en $\omega t = \pi$, la condition s'écrit finalement : $\boxed{A \leqslant \dfrac{m\,g}{k}}$. Nous trouvons là une valeur minimale, ce qui est rassurant.

En fait, nous aurions pu faire plus court à partir du moment où nous avons trouvé que la force exercée par le plateau sur la masse était égale à celle du ressort sur le plateau.

En effet, pour que la première soit nulle, il faut et il suffit que la seconde soit nulle, ie. que le ressort atteigne sa longueur naturelle. Or entre la longueur naturelle et la longueur à l'équilibre, il y a une différence de $\dfrac{m\,g}{k}$. Il ne faut donc pas que les oscillations soient d'une amplitude supérieure à $\dfrac{m\,g}{k}$ ce qui implique, parce que la masse est lâchée sans vitesse initiale, qu'il ne faut pas écarter la masse de plus de $\dfrac{m\,g}{k}$ de sa position d'équilibre.

Exercice 7

Nous sentons bien que si l'une des deux masses est plus élevée que l'autre, c'est elle qui tombera pendant que l'autre remontera. De plus étant donné la présence du fil, le mouvement est contraint pour les deux points matériel : il sera rectiligne.

Techniquement parlant, nous ne pouvons pas étudier les deux masses en même temps puisque ne nous connaissons qu'une loi de dynamique qui ne parle que d'un point. Il va donc falloir étudier séparément les deux masses.

Étudions le mouvement dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Le système constitué par la masse m_1 est soumis à 2 forces : son poids $\overrightarrow{P_1} = m_1\,\vec{g}$ et la tension que le fil exerce sur elle $\overrightarrow{T_1} = T_1\,\vec{u}_z$ ($\vec{u}_z$ est vertical vers le haut). Ainsi le PFD appliqué à M_1 s'écrit (en projection sur $\vec{u}_z$) : $m_1\,a_1(t) = -m_1\,g + T_1$.

Le même raisonnement appliqué à m_2 donne : $m_2\,a_2(t) = -m_2\,g + T_2$.

Comme le fil est idéal avec une poulie idéale, nous pouvons écrire (loi constitutive du fil) $T_1 = T_2$.

Remarquons qu'à ce niveau là, nous avons juste dit que les masses étaient reliées par un fil, nous n'avons pas dit précisément comment ils étaient reliés c'est-à-dire ce que nous pouvons déduire du mouvement de l'un connaissant le mouvement de l'autre.

De plus, comme le fil est inextensible, si M_1 monte M_2 descend et réciproquement, ce qui nous donne la relation $\boxed{a_1(t) = -a_2(t) \stackrel{\text{not}}{=} a(t)}$.

En rassemblant ces deux résultats et en « éliminant » T_1 et T_2 dans les équations précédentes, nous arrivons à :

$$(m_1 + m_2)\, a(t) = -(m_1 - m_2)\, g \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{a(t) = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = \text{C}^{\text{te}}}$$

Ainsi nous retrouvons bien que si $m_2 > m_1$, $a_1 = a > 0$, *ie.* que si M_2 est plus lourde que M_1, M_1 est accélérée vers le haut.

Rien de tel qu'un bon PFD pour trouver une force de contact inconnue.

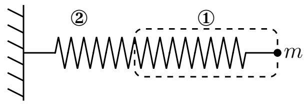
Le PFD donne $T_1 = m_1\, a_1 + m_1\, g$ soit, après calculs : $\boxed{T = \dfrac{2\, m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\, g}$.

Remarque : nous constatons donc que $T_1 \neq m_2\, g$ ce qui est contraire à l'idée reçue selon laquelle $T_1 = P_2$, *ie.* que M_2 « tire » M_1 vers le haut de tout son poids. Et pourtant il n'y a aucune raison pour que la force que le fil exerce sur M_1 soit de même intensité que la force que la Terre exerce sur M_2 !

Exercice 8

$\boxed{1.}$ *Pour établir ce genre de résultat, le plus simple reste d'utiliser un PFD avec un système « qui va bien », ie. un système qui finit à un endroit où nous savons tout ce qu'il se passe (ici l'extrémité du ressort) et à l'endroit où nous cherchons à savoir quelque chose (ici « dans » le ressort).*

Considérons le système suivant (la masse accrochée au bout du ressort n'est pas dans le système). Il est soumis à la force exercée par la masse et la force exercée par ②.



Ceci dit, comme le ressort est considéré idéal, il est sans masse et donc le PFD sur lui s'écrira :

$$\vec{0} = \vec{f}_{\text{m}\to①} + \vec{f}_{②\to①} \qquad \rightsquigarrow \qquad \|\vec{f}_{\text{m}\to①}\| = \|\vec{f}_{②\to①}\|$$

Or, d'après la 3e loi de NEWTON, $\vec{f}_{\text{m}\to①} = -\vec{f}_{①\to②} = +k\,(\Delta\ell)\,\vec{u}_{\text{sortant}}$.

Finalement, nous trouvons bien qu'en norme $\boxed{\|\vec{f}_{②\to①}\| = k\,|\Delta\ell|}$.

$\boxed{2.}$ Étudions le système constitué par la masse seule pour lequel l'équilibre est atteint lorsque $\sum \vec{f} = \vec{0}$. Cette masse est soumise à trois forces :

➜ son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$
➜ la force exercée par la partie gauche du ressort $\vec{T}_1$
➜ la force exercée par la partie droite du ressort $\vec{T}_2$

Comme cela a été montré à la question précédente, nous avons $T_1 = T_2 = k(\ell - \ell_0)$.

Or $\ell = AM + BM = 2 \times \dfrac{d}{2} \times \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{d}{\cos\alpha}$ où α est l'angle $\widehat{MAB}$.

La projection sur l'axe vertical $\vec{u}_z$ ascendant de $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = \vec{0}$ donne :

$$T_1\, \sin\alpha + T_2\, \sin\alpha - m\, g = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 2\,k \left(\frac{d}{\cos\alpha} - \ell_0\right) \sin\alpha = m\, g$$

Et finalement la condition d'équilibre s'écrit : $\boxed{d\, \tan\alpha - \ell_0\, \sin\alpha = \dfrac{m\, g}{2\, k}}$.

A.N. : une résolution numérique donne $\boxed{\alpha = \underline{7{,}0}2364\ °}$.

Exercice 9

$\boxed{1.}$ *Ici le mouvement de la masse va être purement vertical : la masse va être freinée à la montée (donc elle montera monis haut que s'il n'y avait pas eu de frottements) et sera freinée à la descente (donc ira moins vite que pour une chute libre). De plus le mouvement étant rectiligne, il n'y a aucun soucis de repérage : nous prendrons l'origine au sol.*

En ce qui concerne l'équation différentielle recherchée, écrivons le PFD d'abord et cherchons ensuite à changer les variables.

Étudions le système constitué par la masse m dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

La masse est soumise à deux forces :

➜ son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$
➜ la force de frottement exercée par l'air $\vec{f} = -k\, v\, \vec{v}$

Ainsi en projetant le PFD sur l'axe $\vec{u}_z$ (orienté vers le haut), nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -m\, g + \varepsilon\, k\, v^2$$

où $\varepsilon = +1$ à la descente et $\varepsilon = -1$ à la montée.

Pour changer de variables, rien de plus facile : il suffit de manier les d *comme des fractions bien que cela n'en soient pas.*

Nous pouvons d'abord écrire que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} \times \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} \times v$.

Avec le PFD, cela donne l'équation : $v,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = -g + \varepsilon\, \dfrac{k\, v^2}{m}$.

Introduisons la grandeur $\xi(z) \stackrel{\text{not}}{=} v^2(z)$. Nous avons $\dfrac{\mathrm{d}\xi(z)}{\mathrm{d}z} = 2\, v(z)\, \dfrac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z}$, ce qui permet de réécrire l'équation d'évolution sous la forme : $\dfrac{1}{2}\, \dfrac{\mathrm{d}\xi(z)}{\mathrm{d}z} = -g + \varepsilon \dfrac{k}{m}\, \xi(z)$.

En introduisant les grandeurs de l'énoncé $\ell = \dfrac{m}{2\,k}$ et $v_{\text{lim}} = \sqrt{\dfrac{m\,g}{k}}$ dans l'équation précédente, nous arrivons finalement à $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\xi(z)}{\mathrm{d}z} - \varepsilon\, \dfrac{\xi(z)}{\ell} = -\dfrac{{v_{\text{lim}}}^2}{\ell}}$.

$\boxed{2.}$ ➠ **Équation paramétrique de la montée.**

Nous avons $\varepsilon = -1$ et donc $\dfrac{\mathrm{d}\xi_{\text{m}}(z)}{\mathrm{d}z} + \dfrac{\xi_{\text{m}}(z)}{\ell} = -\dfrac{{v_{\text{lim}}}^2}{\ell}$.

Cette équation est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants donc ses solutions sont $\xi_{\text{m}}(z) = \lambda \mathrm{e}^{-z/\ell} + \xi_{\text{m,part}}(z)$.

En cherchant $\xi_{\text{m,part}}(z) = \text{C}^{\text{te}}$, nous trouvons $\xi_{\text{m,part}}(z) = -{v_{\text{lim}}}^2$ ce qui fait que les solutions s'écrivent maitenant $\xi_{\text{m}}(z) = \lambda \mathrm{e}^{-z/\ell} - {v_{\text{lim}}}^2$.

En utilisant la condition initiale : $v = v_0$ lorsque $z = 0$, nous arrivons finalement à :

$$\boxed{v^2(z) = ({v_0}^2 + {v_{\text{lim}}}^2)\mathrm{e}^{-z/\ell} - {v_{\text{lim}}}^2 \text{ pour la montée}}$$

➠ **Équation paramétrique de la descente.**

La méthode est identique. La difficulté va reposer, ici, sur les conditions initiales.

Nous avons $\varepsilon = +1$ et donc $\dfrac{\mathrm{d}\xi_{\text{d}}(z)}{\mathrm{d}z} - \dfrac{\xi_{\text{d}}(z)}{\ell} = -\dfrac{{v_{\text{lim}}}^2}{\ell}$.

Cette équation est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et donc les solutions s'écrivent $\xi_{\text{d}}(z) = \mu \mathrm{e}^{z/\ell} + \xi_{\text{d,part}}(z)$.

En cherchant $\xi_{\text{d,part}}(z) = \text{C}^{\text{te}}$, nous trouvons $\xi_{\text{d,part}}(z) = {v_{\text{lim}}}^2$ soit $\xi_{\text{d}}(z) = \mu \mathrm{e}^{z/\ell} + {v_{\text{lim}}}^2$.

En réécrivant cette solution sous la forme équivalente : $\xi_\text{d}(z) = \mu' \text{e}^{(z-z_\text{max})/\ell} + {v_\text{lim}}^2$ avec z_max l'altitude maximale atteinte par la masse, la condition initiale s'exprime simplement par $\xi_\text{d}(z_\text{max}) = 0$, ce qui donne $\xi_\text{d}(z) = {v_\text{lim}}^2 \left(1 - \text{e}^{(z-z_\text{max})/\ell}\right)$.

Reste à déterminer z_max. Pour cela exprimons la condition $\xi_\text{m}(z_\text{max}) = 0$. Cela donne :

$$({v_0}^2 + {v_\text{lim}}^2)\text{e}^{-z_\text{max}/\ell} - {v_\text{lim}}^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{e}^{-z_\text{max}/\ell} = \frac{{v_\text{lim}}^2}{{v_0}^2 + {v_\text{lim}}^2} \; (\bullet) \quad \rightsquigarrow \quad z_\text{max} = \ell \times \ln\left(\frac{{v_0}^2 + {v_\text{lim}}^2}{{v_\text{lim}}^2}\right)$$

➠ **Vitesse en $z = 0$**

Déterminons la vitesse de la masse directement avec l'expression de $\xi_\text{d}(z)$, ce qui donne :

$$\xi_\text{d}(0) = {v_\text{lim}}^2 \left(1 - \text{e}^{-z_\text{max}/\ell}\right)$$

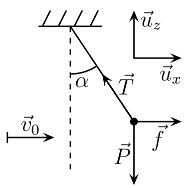
En utilisant $(\bullet)$, nous arrivons à $v^2(0) = {v_\text{lim}}^2 \left(1 - \dfrac{{v_\text{lim}}^2}{{v_0}^2 + {v_\text{lim}}^2}\right)$ soit finalement :

$$\boxed{v^2(0) = \frac{{v_0}^2\,{v_\text{lim}}^2}{{v_0}^2 + {v_\text{lim}}^2}}$$

Remarque : en écrivant $v^2(0) = \dfrac{{v_0}^2}{1 + \dfrac{{v_0}^2}{{v_\text{lim}}^2}} < {v_0}^2$ nous pouvons constater que la vitesse au sol à la fin de la descente est inférieure à la vitesse initiale. De même en écrivant $v^2(0) = \dfrac{{v_\text{lim}}^2}{1 + \dfrac{{v_\text{lim}}^2}{{v_0}^2}} < {v_\text{lim}}^2$, nous pouvons aussi constater que la vitesse à la fin de la descente est inférieure à la vitesse limite. Rien que des résultats très attendus somme toute.

Exercice 10

1. Le dispositif est représenté ci-dessous.



L'équilibre de la masse, soumise aux trois forces poids $\vec{P}$, tension du fil $\vec{T}$ et force de frottement $\vec{f}$ s'écrit, dans le référentiel terrestre considéré galiléen et en projetant sur $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_x$:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad T\cos\alpha - m\,g = 0 \quad \text{et} \quad k\,\pi\,a^2\,{v_0}^2 - T\,\sin\alpha = 0$$

Ces deux équations donnent :

$$\begin{cases} T\,\cos\alpha = m\,g \\ T\,\sin\alpha = k\,\pi\,a^2\,{v_0}^2 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \tan\alpha = \frac{k\,\pi\,a^2\,{v_0}^2}{m\,g} \quad \rightsquigarrow \quad k = \frac{m\,g\,\tan\alpha}{\pi\,a^2\,{v_0}^2}$$

Et comme $m = \rho \times \dfrac{4}{3}\pi\,a^3$, nous arrivons à $\boxed{k = \dfrac{4\,\rho\,g\,a\tan\alpha}{3\,{v_0}^3} = \underline{0{,}2}51304 \text{ kg.m}^{-3}}$.

2. (a) En réalité, les deux expressions sont rigoureusement identiques car les forces de frottement fluide font intervenir la vitesse de l'objet par rapport au fluide. Or dans la première question l'objet est immobile par rapport au référentiel d'étude, il reste donc v_0 la vitesse du fluide par rapport au référentiel d'étude alors que dans la deuxième question c'est le contraire : c'est le fluide qui est immobile.

2. (b) Lors de sa chute, la masse n'est plus soumise qu'à deux forces : son poids $\vec{P}$ et la force de frottement $\vec{f}$. Le PFD s'écrit alors $\vec{P} + \vec{f} = m\dfrac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t}$.

Lorsque la vitesse limite est atteinte, $\dfrac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t} = \vec{0}$ et $\vec{P} + \vec{f} = \vec{0}$ c'est-à-dire, en projection sur l'axe vertical :

$$-m\,g + k\,\pi\,a^2\,{v_\text{lim}}^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{v_\text{lim} = \sqrt{\frac{m\,g}{k\,\pi\,a^2}} = \underline{76}{,}7872 \text{ m.s}^{-1}}$$

En chute libre (départ arrêté), la vitesse v est liée à la hauteur de chute h par $v = \sqrt{2\,g\,h}$. Ainsi la vitesse limite précédente correspond à une chute de $\boxed{\underline{3{,}0}0830 \text{ hm}}$.

2. (c) D'après la questions précédente, s'il n'y avait pas de frottements il faudrait une chute de plusieurs centaines de mètres pour atteindre la vitesse limite. Avec des frottements, il faudra une chute plus longue.

Ainsi pour une chute de 2 mètres, les frottement ne vont pas, *a priori*, se faire sentir, autrement dit nous allons les négliger en première approximation. Dans ces conditions, nous avons $v = \sqrt{2\,g\,h}$, ce qui nous permet de trouver une vitesse de $\underline{6{,}2}6099$ m.s^{-1}.

Vérifions que nous avions bien le droit de négliger les frottements. À la vitesse précédente, la force de frottement correspondante a une intensité de $f = \underline{3{,}0}9482 \times 10^{-3}$ N ce qui donne $\boxed{\dfrac{f}{P} = \underline{0{,}66}4826 \text{ \%}}$.

Pas de doute : les frottements sont bien parfaitement négligeables pour une chute de si faible hauteur.

Exercice 11

Pour un mouvement circulaire nous avons, en norme : $a = \dfrac{v^2}{\ell}$ et $v = \ell\,\omega$, soit $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{a}{\ell}}}$.

Nous obtenons numériquement : $\boxed{\omega = 3{,}4 \text{ rad.s}^{-1} = 33 \text{ tour.min}^{-1}}$.

Ces hommes centrifugés sont russes : des français se seraient appelés spationautes et des américains des astronautes et, depuis le 15 octobre 2003, les chinois de l'espace sont appelés des taïkonautes.

Exercice 12

Comme $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ nous avons, en remplaçant r par son expression : $\vec{v} = a\,\dot{\theta}\,\vec{u}_r + a\,\theta\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$.

Ainsi en norme $v = a\,\dot{\theta}\,\sqrt{1+\theta^2}$ et donc :

$$\dot{\theta} = \frac{v}{a\,\sqrt{1+\theta^2}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{v} = \frac{v}{\sqrt{1+\theta^2}}\,\vec{u}_r + \frac{v\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\,\vec{u}_\theta}$$

Exercice 13

La voiture va avancer pour des raisons inconnues et que nous n'avons pas à déterminer : ici non seulement la trajectoire est contrainte mais en plus la vitesse est connue.

Le repérage va être simple puisqu'il s'agit d'une trajectoire irculaire. Comme le problème est ici est un problème de contact, il va falloir déterminer la force de contact avec le sol.

Notons O le centre du cercle de la trajectoire, M le point représentant la voiture et θ l'angle entre (OM) et la verticale. Nous avons alors $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$.

Ici, la voiture n'est soumise qu'à deux forces :

- ➜ son poids $\vec{P} = -P\,\cos\theta\,\vec{u}_r + P\,\sin\theta\,\vec{u}_\theta$
- ➜ la réaction de la route : $\vec{R} = R_r\,\vec{u}_r + R_\theta\,\vec{u}_\theta$ (*a priori* nous ne savons pas s'il y a une réaction tangentielle ou pas)

L'accélération normale est telle que $a_r = -\dfrac{v^2}{\ell}$.

En utilisant le PFD projeté sur $\vec{u}_r$, nous trouvons : $m\,a_r = -m\,g\,\cos\theta + R_r$.

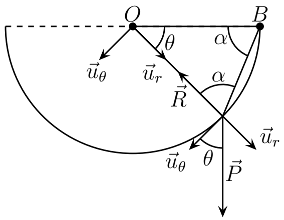
Or il faut $R_r \geqslant 0$ quel que soit θ (il faut que la route soutienne la voiture et non la retienne).

En remarquant que la valeur minimale de R_r est obtenue en $\theta = \alpha$, nous obtenons après simplifications : $\boxed{v^2 \leqslant g\,\ell\,\cos\alpha}$.

❆ Exercice 14

1. *Ici la masse va avoir tendance à descendre en bas à cause du poids mais sera retenue par le ressort. La trajectoire est contrainte, ce qui va faciliter le repérage.*

Nous travaillons dans le référentiel du laboratoire. Le point M est soumis à trois forces : $\vec{P}$ son poids, $\vec{T}$ la tension exercée par le ressort et $\vec{R}$ la réaction exercée par la rigole.



Dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$, on a : $\vec{P} = P\,\sin\theta\,\vec{u}_r + P\,\cos\theta\,\vec{u}_\theta$, $\vec{R} = -R\,\vec{u}_r$ et $\vec{T} = +k\,\overrightarrow{MB}$ car B est le point où l'extrémité du ressort est au repos lorsqu'il est à vide. En écrivant $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$, nous trouvons $\vec{T} = k\,b\,[(\cos\theta - 1)\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta]$.

À l'équilibre, nous avons $\sum \vec{f} = \vec{0}$ et en projetant cette équation sur $\vec{u}_\theta$, nous obtenons après résolution : $\boxed{\tan\theta_0 = \dfrac{P}{k\,b}}$.

2. En projetant le PFD $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\,\vec{a}(t)$ sur $\vec{u}_\theta$, nous arrivons à :

$$m\,b\,\ddot{\theta}(t) = m\,g\,\cos(\theta(t)) - k\,b\,\sin(\theta(t)) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,\sin(\theta(t)) - \frac{g}{b}\,\cos(\theta(t)) = 0}$$

3. Nous allons tout simplement remplacer $\theta(t)$ par $\theta(t) = \theta_0 + \varepsilon(t)$ dans l'équation différentielle régissant le mouvement. Il faut donc maintenant chercher à simplifier chacun des trois termes.

Tout d'abord nous avons $\ddot{\theta}(t) = \ddot{\varepsilon}(t)$.

Pour les autres, nous allons développer les formules trigonométriques. Par exemple :

$$\cos(\theta_0 + \varepsilon(t)) = \cos\theta_0\,\cos(\varepsilon(t)) - \sin\theta_0\,\sin(\varepsilon(t))$$

En considérant $|\varepsilon(t)| \ll 1$, cela donne $\cos\varepsilon = 1$ et $\sin(\varepsilon(t)) = \varepsilon(t)$ (car $\varepsilon(t) \ll 1$) puis :

$$\cos(\theta_0 + \varepsilon(t)) = \cos\theta_0 - \varepsilon(t)\sin\theta_0$$

Nous trouvons de même $\sin(\theta_0 + \varepsilon(t)) = \sin\theta_0\cos(\varepsilon(t)) + \sin(\varepsilon(t))\cos\theta_0 = \sin\theta_0 + \varepsilon(t)\cos\theta_0$.

En remplaçant dans l'équation différentielle précédente et en utilisant le fait que θ_0 est la position d'équilibre (*ie.* $\dfrac{m\,g}{b}\cos\theta_0 - k\,\sin\theta_0 = 0$) et en simplifiant l'expression obtenue, nous aboutissons à :

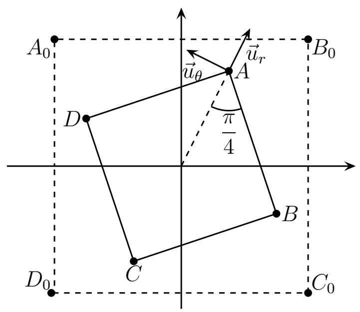
$$\boxed{\ddot{\varepsilon}(t) + \frac{k}{m\,\cos\theta_0}\,\varepsilon(t) = 0}$$

La masse oscille donc autour de sa position d'équilibre avec une pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m\,\cos\theta_0}}$ et une période $\boxed{T_0 = 2\,\pi\,\sqrt{\dfrac{m\,\cos\theta_0}{k}}}$.

❆ Exercice 15

Il s'agit ici aussi d'un pur exercice de cinématique. Pas tellement d'intérêt physique, mais c'est le genre d'exercice qui tombe de temps en temps à l'oral ...

Faisons tout d'abord un beau schéma.



1. Le problème admet une symétrie d'ordre 4 et de centre O : le problème est identique à lui-même par rotation d'angle $\dfrac{2\,\pi}{4}$.

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t} = (\vec{v}_B - \vec{v}_A) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}^2}{\mathrm{d}t} = 2\,\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

Comme $\vec{v}_B$ orthogonale à $\overrightarrow{AB}$ et en notant $\ell = \|\overrightarrow{AB}\|$, nous avons $2\,\ell\,\dfrac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = -2\,v\,\ell$, d'où $(\ldots)$ $\ell = a - v\,t$. La rencontre a lieu à t_0 tel que $0 = a - v\,t_0$, soit $\boxed{t_0 = \dfrac{a}{v}}$.

2. Au bout de t_0, chaque souris a parcouru la distance $\boxed{d = v \times t_0 = a}$.

3. La géométrie du problème fait que $\vec{v}_A$ a toujours les mêmes coordonnées dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$: $\vec{v} = -\dfrac{v}{\sqrt{2}}\,\vec{u}_r - \dfrac{v}{\sqrt{2}}\,\vec{u}_\theta$. Ainsi $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{v}{\sqrt{2}}$; $r\dot{\theta} = -\dfrac{v}{\sqrt{2}}$, d'où $r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}r}{r} = \mathrm{d}\theta$ et $\theta - \theta_0 = \ln\dfrac{r}{r_0}$.

Avec les conditions initiales cela donne : $\boxed{r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\theta - 3\,\pi/4}}$.

$\boxed{4.}$ Comme $r = \dfrac{\ell}{\sqrt{2}}$ (à cause de la géométrie du problème), $\boxed{r(t) = \dfrac{a - v\,t}{\sqrt{2}}}$ et nous avons aussitôt : $\boxed{\theta(t) = \dfrac{3\,\pi}{4} + \ln\left(1 - \dfrac{v}{a}\,t\right)}$.

☕ *Remarque* : nous pouvons voir que les souris mettent une durée finie $\dfrac{a}{v}$ pour parcourir une distance finie a en faisant une infinité de tours autour de O ($\theta \longrightarrow \infty$ pour $t \longrightarrow a/v$). Sacrées souris !

Exercice 16

Cet exercice est un exercice de pure cinématique, typique de ce qu'est la physique enseignée par les mathématiciens. Les seules lois physiques se réduisent à la définition de la vitesse.

Notons H le point représentant le maître et C celui représentant son chien. Nous cherchons $x(t)$ et $y(t)$ l'abscisse et l'ordonnée du chien en fonction du temps. Nous savons en revanche déjà que $\overrightarrow{OH}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ v\,t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Cela nous donne donc $\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} -x(t) \\ v\,t - y(t) \end{pmatrix}$.

Traduisons le fait que la vitesse du chien est toujours orientée selon la direction $\overrightarrow{CH}$. Techniquement, cela signifie que les vecteur $\vec{v}_C$ et $\overrightarrow{CH}$ sont colinéaires, *ie.* que $\vec{v}_C = \lambda \overrightarrow{CH}$. Cela nous donne :

$$-x(t) = \lambda\,\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad v\,t - y(t) = \lambda\,\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

En éliminant λ entre ces deux équations, nous arrivons à : $-x(t)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = vt - y(t)$ (❋). Cette équation fait intervenir 3 paramètres (x, y et t) ce qui est bien trop, essayons d'en éliminer un.

En dérivant (❋) par rapport à x puis en simplifiant : $-x\,\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = v\,\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ (⚡). Nous avons maintenant une équation où t a presque disparu mais pas encore totalement. Il va falloir rajouter une loi pour l'éliminer définitivement.

La chose que nous n'avons pas encore traduite, c'est le fait que le chien court à vitesse constante. Nous avons $\|\vec{v}_C\| = 2\,v = \sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ soit $4v^2 = \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \left[1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]$.

Nous en déduisons (attention au signe : x diminue donc $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} < 0$) :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{2v}{\sqrt{1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2\,v}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \quad (☼)$$

En égalant (⚡) et (☼), nous obtenons : $x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$, ce qui est une équation différentielle que nous pouvons enfin penser à résoudre.

Pour cela, procédons à un changement de fonction inconnue : $z = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, nous avons l'équation différentielle suivante : $\sqrt{1+z^2} = 2\,x\,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}x}{2\,x} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}}$. Nous pouvons alors intégrer directement, ce qui donne, avec les conditions initiales (trouvées notamment avec (❋)) : $\ln\sqrt{\dfrac{x}{a}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$.

En remplaçant z par son expression dans l'équation précédente, nous obtenons :

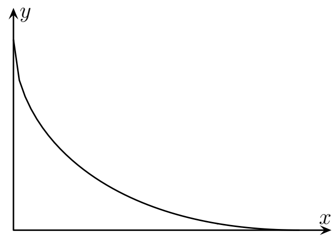
$$\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 1}$$

Puis, en élevant au carré et en simplifiant : $2\sqrt{\dfrac{x}{a}}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{a} - 1$.

L'équation précédente est une équation différentielle à variables séparables que nous pouvons intégrer :

$$2\,\mathrm{d}y = \left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}\right)\mathrm{d}x \qquad \rightsquigarrow \qquad 2\,y = \frac{2}{3}\left(x\sqrt{\frac{x}{a}} - a\right) - 2\,a\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - 1\right)$$

Et finalement : $\boxed{y = \dfrac{1}{3}\,x\sqrt{\dfrac{x}{a}} - \sqrt{x\,a} + \dfrac{2}{3}\,a}$.



Lorsque le chien rejoint son maître, $x = 0$ d'où $y = \dfrac{2}{3}\,a$, ce qui est aussi l'abscisse du maître qui aura alors marché pendant la durée $\boxed{t = \dfrac{2\,a}{3\,v}}$.