

La mécanique autrement qu'en forces

Dans cette police sont écrits les raisonnements menés et autres remarques sur les méthodes employées pour trouver les réponses aux questions posées. C'est à dire à l'oral mais à ne pas écrire en DS.

☛ Exercice 1

1. Analyse physique :

- le mouvement est rectiligne (donc à 1 degré de description) mais il y a deux phases : avant le contact avec le ressort et après, il faudrait donc faire deux études sauf que ...
- l'évolution est libre et conservative car lors du changement de phase (= lors du choc contre le ressort) il y a conservation de la vitesse (donc de l'énergie cinétique)
- les grandeurs pertinentes sont m , α , g , k , ℓ_0 et L .

Avant contact avec le ressort la masse est soumise à 2 forces :

- le poids, force conservative dérivant de l'énergie potentielle $E_{pp} = mgh$
- la réaction \vec{R} du support, force *a priori* non conservative

Comme le mouvement se fait sans frottements il n'y a pas de perte énergétique à ce niveau : l'énergie mécanique est donc constante : $E_m = E_c + E_{pp} = C_1^{te}$.

Après le contact, la masse est soumise, en plus, à la force conservative \vec{T} exercée par le ressort et dérivant de l'énergie potentielle $E_{p,el} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2$. La masse a donc toujours une évolution conservative ce qui se traduit, après le contact, par : $E_m = E_c + E_{pp} + E_{p,el} = C_2^{te}$.

Comme il y a continuité de l'énergie cinétique (car il y a continuité de la vitesse par hypothèse) et continuité des énergie potentielles lors du contact, nous avons : $C_1^{te} = C_2^{te}$, i.e. l'énergie est constante tout au long du mouvement.

Ainsi, en notant x l'allongement du ressort (ici cela donnera $x < 0$ car le ressort sera comprimé) et h l'altitude de la masse :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mgh$$

En définissant l'altitude nulle au point à l'extrémité du ressort lorsque le cube n'est pas en contact avec lui nous avons $h = x \sin \alpha$.

Finalement, en calculant l'énergie mécanique à l'instant initial : $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mgh \sin \alpha = m g L \sin \alpha$.

La compression maximale est obtenue lorsque la masse s'arrête avant de repartir en arrière, i.e. pour $\dot{x} = 0$.

Cette condition donne, après résolution, ne gardant que la solution négative (celle correspondant au ressort comprimé) : $x_{\min} = -a - \sqrt{a^2 + 2aL}$ où $a \stackrel{\text{not}}{=} \frac{m g \sin \alpha}{k}$.

2. La vitesse est maximale lorsque l'énergie cinétique est maximale, i.e. lorsque l'énergie potentielle est minimale.

En déterminant son expression à partir de l'énergie mécanique précédente, cela revient à chercher les solutions x_0 telles que : $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}kx^2 + m g x \sin \alpha \right) = 0$.

Nous trouvons : $x_0 = -a$.

☛ Exercice 2

1. Au moment du choc, les seules forces s'exerçant sur M sont la tension du fil et le poids, forces qui sont toutes les deux orthogonales à la vitesse et par conséquent ne travaillent pas entre juste avant et juste après le choc.

Si les forces ne travaillent pas, l'énergie cinétique n'est pas modifiée et *a fortiori* la norme de la vitesse non plus.

2. Analyse physique :

→ ici le mouvement est entièrement guidé (par le fil) c'est donc un mouvement à 1DD même s'il y a deux phases (chaque phase n'a qu'un DD)

→ l'évolution est libre et conservative (comme le montre la question précédente)

→ les grandeurs pertinentes sont m , ℓ , d et g .

Analyse technique :

→ Nous savons que si problème il y a, c'est lorsque la masse est sur le petit cercle, donc nous allons étudier tout particulièrement cette phase et nous utiliserons les coordonnées polaires étant donné le mouvement furieusement circulaire que nous avons.

→ Comment traduire physiquement que le fil est tendu ? Posons nous la question : quelle différence physique y a-t-il entre un fil tendu et un fil non tendu ? Le fil tendu permet de tirer quelque chose, il permet d'exercer une force. En d'autres termes, il faut déterminer la force que le fil exerce sur la masse. Finalement c'est analogue à un problème de contact, c'est le PFD que nous allons utiliser.

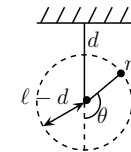
Pour que le fil reste tendu, il faut que la tension du fil soit constamment non nulle.

Avec les notations suivantes, le PFD exprimé dans la base de polaire donne :

$$m a_r = -T + P \cos \theta \quad \rightsquigarrow \quad m \frac{v^2}{\ell - d} = T - P \cos \theta$$

Par conservation de l'énergie mécanique, nous trouvons : $v^2 = 2g(d + (\ell - d) \cos \theta)$ et en remplaçant dans l'expression précédente : $T = \frac{2mg}{\ell - d}(d + (\ell - d) \cos \theta) + mg \cos \theta$.

Nous cherchons la condition pour avoir $T_{\min} \geq 0$.



Or T_{\min} est atteint quand $\cos \theta$ est minimal soit en $\theta = \pi$.

La condition donne alors :

$$\frac{2mg}{\ell - d}(d - (\ell - d)) - mg \geq 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{d \geq \frac{3}{5}\ell}$$

☛ Exercice 3

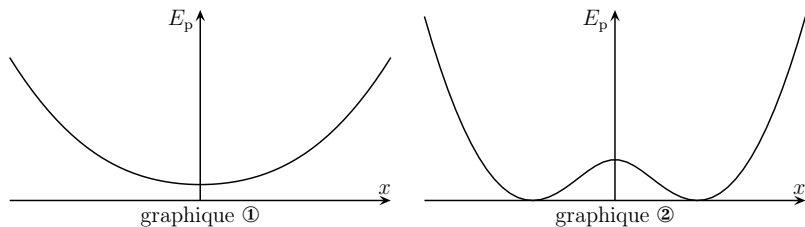
1. Phénoménologiquement, le ressort essaie de recouvrer sa longueur naturelle donc :

→ si $\ell_0 < h$, il y aura une position d'équilibre stable en $x = 0$ car c'est en cette position que le ressort aura sa longueur minimale

→ si $\ell_0 > h$, il y aura une position d'équilibre instable en $x = 0$ (car le ressort va pousser la masse orthogonalement à l'axe) et deux positions d'équilibre stables en $x = \pm \sqrt{\ell_0^2 - h^2}$ (en des endroits où le ressort a sa longueur naturelle)

Nous retrouvons ces résultats en considérant l'énergie potentielle de la masse (qui se réduit à l'énergie potentielle élastique) :

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{x^2 + h^2} - \ell_0 \right)^2$$

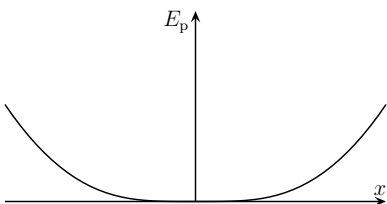


Si $h > \ell_0$ (cf. graphique ①) alors quelle que soit la position x , $E_p > 0$ et la valeur minimale est atteinte en $x = 0$.

En revanche, si $h < \ell_0$ (cf. graphique ②), l'énergie potentielle est minimale pour la valeur x qui annule l'expression, i.e. $x = \pm \sqrt{\ell_0^2 - h^2}$.

En ce qui concerne la stabilité, il est inutile de calculer $\frac{d^2 E_p(x)}{dx^2}$ car nous savons déjà que la solution trouvée correspond à un minimum d'énergie potentiel ($\frac{dE_p(x_{eq})}{dx} = 0$ alors que $E_p(x) \geq 0$) ; l'équilibre est donc stable.

2. Dans le cas étudié, l'énergie potentielle a l'allure ci-dessous.



Commençons par développer l'énergie potentielle à l'ordre deux :

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{x^2 + \ell_0^2} - \ell_0 \right)^2 = \frac{1}{2} k \ell_0^2 \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{\ell_0^2}} - 1 \right)^2$$

Or $\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, d'où (après simplifications) : $E_p(x) = \frac{k x^4}{8 \ell_0^2}$.

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit alors :

$$E_c + E_p = E_p(a) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{k}{8 \ell_0^2} (a^4 - x^4)$$

Pour déterminer la période, nous allons utiliser ce qui est une méthode, à savoir sommer les durées infinitésimales $dt = \frac{dt}{dx} dx = \frac{dx}{\dot{x}}$ nécessaires pour aller d'une position à une autre. Ici, nous allons dire que la durée pour aller de $x = 0$ à $x = a$ nécessite un quart de période soit :

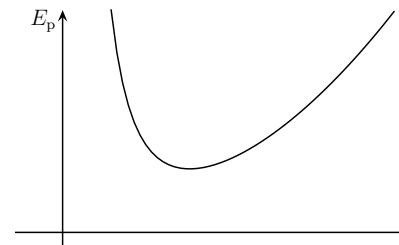
$$T = 4 \int_0^a \frac{dx}{\dot{x}} = 4 \int_0^a dt = 8 \sqrt{\frac{m}{k}} \ell_0 \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$$

Faisons le changements de variable : $u = \frac{x}{a}$. Cela donne : $T = 8 \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\ell_0}{a} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$.
Nous trouvons le résultat demandé en faisant le changement de variable $u = \sin \varphi$.

✳ Exercice 4

Ici l'exercice donne directement la forme de l'énergie potentielle. Cela laisse sous-entendre que l'évolution est conservative. De plus, ici, nous n'avons pas à nous préoccuper de comment et pourquoi cette énergie potentielle, nous devons seulement raisonner sur cette énergie potentielle.

Traçons l'énergie potentielle afin d'avoir une image de la cuvette de potentiel.



1. (a) L'équilibre en terme énergétique est en x_0 tel que $\frac{dE_p(x_0)}{dx} = 0$.

Après calculs, nous pouvons trouver : $x_0 = a$.

Comme l'énergie potentielle est positive, qu'elle tend vers l'infini en 0 et en $x \rightarrow \infty$, l'extremum précédent ne peut être qu'un minimum. Toutefois, nous pouvons le vérifier en déterminant l'expression de la dérivée seconde en x_0 . Nous trouvons : $\frac{d^2 E_p(x_0)}{dx^2} = 4 m \omega^2 > 0$, l'équilibre est donc stable.

Il est fortement recommandé de retrouver l'expression de la dérivée seconde. C'est moins trivial qu'il n'y paraît.

1. (b) En écrivant l'énergie autour de la position d'équilibre en utilisant la formule de Taylor, nous obtenons :

$$E_p(x) = m \omega^2 a^2 + 2 m \omega^2 (x - a)^2$$

Par analogie avec le ressort dont l'énergie potentielle s'écrit $\frac{1}{2} k x^2$, nous trouvons que la pulsation des oscillations est ici : $\omega_{puls} = 2 \omega$, soit une période de $T = \frac{\pi}{\omega}$.

2. (a) Comme $\lim_{x \rightarrow 0} E_p(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} E_p(x) = +\infty$, il existe deux positions x_1 et x_2 où toute l'énergie mécanique est contenue dans l'énergie potentielle.

En ces positions, le point matériel a alors une énergie cinétique (et donc une vitesse) nulle et est soumis à une force tendant à le ramener à son point de départ : la position d'équilibre. Il va donc y avoir oscillation entre x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$).

Nous pouvons alors dire que le mouvement est périodique grâce à l'unicité du mouvement de deux points matériels de même masse soumis à la même force et ayant à une même position, une même vitesse. C'est ce qui arrivera à m lorsqu'il repassera par x_1 (ou x_2) : il sera au même endroit et avec la même vitesse (nulle) que la fois d'avant.

(Son évolution ultérieure sera identique à la précédente, le mouvement sera donc bien périodique).

2. (b) Il y a conservation de l'énergie mécanique et en calculant la valeur de l'énergie mécanique à la position $x = a$, nous trouvons :

$$\dot{x}^2 = \frac{\omega^2}{x^2} \left(-a^4 - x^4 + \frac{v_0^2}{\omega^2} x^2 + \frac{2\omega^2 a^2}{\omega^2} x^2 \right) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega^2}{x^2} A(x^2)$$

où $A(x)$ est un polynôme qui s'annule en x_1^2 et x_2^2 (par définition de x_1 et x_2).

Nous pouvons donc écrire : $A(x) = \lambda (X - x_1^2)(X - x_2^2)$ et par identification du terme de plus

haut degré, $\lambda = -1$, ce qui donne : $\boxed{\dot{x}^2 = \frac{\omega^2}{x^2} (x^2 - x_1^2)(x_2^2 - x^2)}$.

2. (c) La période n'est autre que deux fois la durée mise pour aller d'une extrémité x_1 à l'autre x_2 .

Cela se traduit par $T = 2 \int_{x_1}^{x_2} dt$ et ainsi $\boxed{T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\dot{x}}}$.

2. (d) En remplaçant \dot{x} par la valeur précédemment calculée, puis en faisant le changement de

variable $y = x^2$, nous obtenons $T = \frac{1}{\omega} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{(y - y_1)(y_2 - y)}}$. Puis avec le changement de variable

$u = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, nous obtenons $\boxed{T = \frac{A}{\omega}}$.

2. (e) La période est indépendante de l'amplitude des oscillations : ceci est rarissime, c'est l'isochronisme des oscillations. Mais bien qu'il y ait isochronisme des oscillations, ces dernières ne sont pas sinusoïdales pour autant.

✿ Exercice 5

1. Le ressort va osciller, mais pas tout à fait sinusoïdalement à cause des frottements solides. L'avantage du repérage choisi, c'est que nous avons directement $\Delta\ell = x$, ce qui facilitera l'écriture de la force que le ressort va exercer.

L'équilibre se traduit par, en projection sur \vec{u}_x : $-kx + f_x = 0$.

L'équation du mouvement suivant \vec{u}_z s'écrit : $N - mg = 0$ ce qui donne $N = mg$.

Ainsi $f_x = kx$ et comme il faut, lorsque $\vec{v} = \vec{0}$, $\|\vec{f}\| < \lambda N$, cela se traduit par : $-\lambda mg < f_x < \lambda mg$ soit $-\frac{\lambda mg}{k} < x < \frac{\lambda mg}{k}$.

Ainsi, il est possible de réaliser un équilibre sur une large plage de valeurs : $-a < x < a$ avec

$\boxed{a = \frac{\lambda mg}{k}}$. Dans un tel cas, où un léger écart par rapport à une position d'équilibre est une autre position d'équilibre, l'équilibre est dit *indifférent*.

2. Lorsqu'il y a mouvement, $|f_x| = \lambda mg$ et comme $f_x \cdot \dot{x} < 0$, nous avons : $f_x = \varepsilon \lambda mg$. Ainsi le PFD appliqué à la masse et projeté sur \vec{u}_x donne : $\boxed{m \ddot{x}(t) = -kx(t) + \varepsilon \lambda mg}$.

3. (a) Si $\varepsilon = 1$, $\dot{x}(t) < 0$ et le mouvement se fait de la droite vers la gauche. L'ED régissant le mouvement de la masse s'écrit, avec sa solution (le $+a$ est la solution particulière de l'ED) :

$$m \ddot{x}(t) + kx(t) = \lambda mg \quad \rightsquigarrow \quad x_1(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + a$$

Déterminons A et B avec les conditions initiales : $A + a = X_1$ et comme $\dot{x}_1(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$, nous obtenons : $\omega_0 B = 0$ et finalement : $\boxed{x_1(t) = (X_1 - a) \cos(\omega_0 t) + a}$.

(b) Le mouvement se fait de la gauche vers la droite. Avec la même méthode que ci-dessus, l'équation différentielle et sa solution sont :

$$m \ddot{x}(t) + kx(t) = -\lambda mg \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{x_2(t) = (X_2 + a) \cos(\omega_0 t) - a}$$

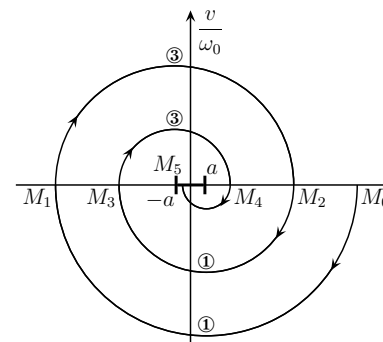
4. (a) En notant (x,y) les coordonnées d'un point dans le plan de phase, il faut montrer que : $(x - a)^2 + y^2 = R^2$ avec R à trouver.

Ici $y = \frac{\dot{x}_1}{\omega_0} = -(X_1 - a) \sin(\omega_0 t)$ et $x = x_1$, ce qui donne, en remplaçant x et y par leur expression : $(x - a)^2 + y^2 = (X_1 - a)^2$, ce qui est bien la forme recherchée.

La trajectoire dans le plan de phase est donc bien portée par un cercle de rayon $X_1 - a > 0$ dans le demi plan inférieur (car $\dot{x} < 0$). La masse obéit à cette ED tant que $\dot{x} < 0$, i.e. tant que la trajectoire n'a pas atteint l'axe \vec{u}_x du plan de phase. La trajectoire est donc bien le demi-cercle en entier.

4. (b) Avec le même raisonnement, nous trouvons : $(x + a)^2 + y^2 = (X_2 + a)^2$. Le rayon du demi-cercle est $-X_2 - a > 0$.

4. (c) Suivre les explications avec le schéma ci-dessous.



① Tracer le demi cercle centré sur $(a,0)$ passant par le point $(X_0,0)$ dans le demi plan inférieur.

② Si l'extrémité M_1 de ce cercle est dans le segment de l'axe \vec{u}_x compris entre $-a$ et a , cela signifie que la masse a une vitesse nulle dans la plage de stabilité. Elle est donc à l'équilibre et son mouvement s'arrête. Si ce n'est pas le cas, passer à l'étape suivante.

③ Tracer le demi cercle centré sur $(-a,0)$ passant par le point M_1 dans le demi-plan supérieur.

④ Si l'extrémité M_2 est dans le segment compris entre $-a$ et a de l'axe \vec{u}_x , pour les mêmes raisons qu'en ②, la masse s'arrête. Sinon, continuer en recommençant en ① en prenant comme nouveau point M_0 le point M_2 .

✿ Exercice 6

1. (a) Calculons simplement la dérivée en sachant que les vecteurs se dérivent normalement. Nous pouvons alors reconnaître le PFD :

$$\frac{dA}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{r} + m \vec{v} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{r} + m v^2 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{r} + 2 E_c}$$

1. (b) Écrivons la valeur moyenne de $\frac{dA}{dt}$ comme elle définit : sur une durée Δt très longue :

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\Delta T} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} \frac{dA}{dt} dt = \frac{1}{\Delta T} \int_{A(t_0)}^{A(t_0 + \Delta T)} dA = \frac{A(t_0 + \Delta T) - A(t_0)}{\Delta T}$$

Avec les hypothèse, A garde une valeur finie, par conséquent, en faisant tendre ΔT vers $+\infty$, nous trouvons $\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = 0$. Et comme : $\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \langle \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle + 2 \langle E_c \rangle$, en remplaçant dans l'équation initiale nous trouvons le résultat proposé.

$$\boxed{2. (a)} \quad \vec{F} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = -nk \frac{1}{r^{n+1}} \vec{u}_r \text{ d'où } \vec{F} \cdot \vec{r} = n \left(-k \frac{1}{r^n} \right) = nV(r) \text{ de là } \langle \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle = n \langle V(r) \rangle \text{ et}$$

$$\text{donc } \langle E_c \rangle = -\frac{n}{2} \langle V \rangle.$$

$\boxed{2. (b)}$ Le cas $n = -2$ correspond au cas où le potentiel est en r^2 , c'est l'oscillateur (le ressort). Nous trouvons alors avec la relation précédente $\langle E_c \rangle = \langle V \rangle$ et c'est un résultat que nous montrerons au chapitre suivant, a moins que cela ne soit déjà fait.

☛ *Remarque* : pour un potentiel de type newtonien (interaction gravitationnelle ou électrostatique), le potentiel s'écrit $n = 1$ et nous avons alors $\langle E_c \rangle = -\frac{\langle V \rangle}{2}$. Résultat qu'il faudra connaître car nous ne le démontrerons pas de manière générale avec les équations que nous aurons obtenu. Ce sera trop compliqué. C'est dire la puissance de ce théorème du viriel. ☺