Oscillateur harmonique

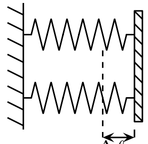
Dans cette police sont écrits les raisonnements menés et autres remarques sur les méthodes employées pour trouver les réponses aux questions posées. C'est à dire à l'oral mais à ne pas écrire en DS.

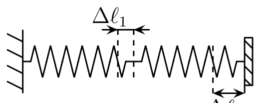
Exercice 1

➨ En parallèle

La force que la plaque subit est la somme des deux forces exercées par les ressorts. En projection sur l'axe horizontal, cela donne : $F = -k_1\,\Delta\ell_1 - k_2\,\Delta\ell_2$.

Comme les ressorts sont côte à côte, $\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 = \Delta\ell_{\text{éq}}$, et nous trouvons : $F = -(k_1+k_2)\,\Delta\ell_{\text{éq}}$ soit, en identifiant avec $F = -k_{\text{éq}}\,\Delta\ell_{\text{éq}}$, $\boxed{k_{\text{éq}} = k_1 + k_2}$.





➨ En série

La force subie par la plaque vaut $F = -k_{\text{éq}}\,\Delta\ell_{\text{éq}}$, force qui n'est autre que celle exercée par le seul ressort 2, donc $F = -k_2\,\Delta\ell_2$. Or ici comme les ressorts sont liés l'un à l'autre $\Delta\ell_{\text{éq}} = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$.

En utilisant la loi des actions réciproques, nous pouvons déterminer la force que le ressort 1 exerce sur le ressort 2, et nous obtenons : $k_1\,\Delta\ell_1 = k_2\,\Delta\ell_2$.

De plus, comme $\Delta\ell_{\text{éq}} = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$, nous avons, en reprenant la première équation, en remplaçant $\Delta\ell_2$ par son expression et en simplifiant par $\Delta\ell_1$:

$$k_{\text{éq}}\,(\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2) = k_1\,\Delta\ell_1 \quad\rightsquigarrow\quad k_{\text{éq}}\left(\Delta\ell_1 + \frac{k_1}{k_2}\,\Delta\ell_1\right) = k_1\,\Delta\ell_1 \quad\rightsquigarrow\quad \boxed{k_{\text{éq}} = \frac{k_1\,k_2}{k_1+k_2}}$$

Exercice 2

$\boxed{1.}$ *Analyse physique. Ici la masse va osciller verticalement (1 degré de description) et va être freinée par les frottements que le fluide va exercer sur la sphère. L'évolution est libre, mais à cause des frottements fluides, elle est non conservative. Les grandeurs pertinentes sont m, r, g, k, ℓ_0, η.*

Analyse technique. Nous allons orienter l'axe vers le haut et prendre l'origine en haut du ressort. En ce qui concerne la loi que nous allons utiliser, nous pouvons utiliser soit un PFD soit une approche énergétique, mais comme il y a des frottements, cette dernière ne s'impose pas. Nous allons utiliser le PFD.

Dans le référentiel du laboratoire, la sphère est soumise à trois forces :

- ➜ force à distance : son poids $\vec{P} = m\,\vec{g} = -m\,g\,\vec{u}_z$
- ➜ la tension $\vec{T}$ exercée par le ressort $\vec{T} = -k\,(\ell(t) - \ell_0)\,\vec{u}_{\text{sortant}} = -k\,(-z(t) - \ell_0)\,(-\vec{u}_z)$
- ➜ la force de frottement fluide $\vec{f} = -6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}(t)$

Le PFD s'écrit donc, en projection sur $\vec{u}_z$:

$$m\,\vec{a}(t) = k\,(-z(t) - \ell_0)\,\vec{u}_z - 6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}(t) \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{6\pi\eta r}{m}\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,z(t) = 0$$
$$\rightsquigarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,z(t) = 0$$

Étant donné qu'il y a des oscillations, c'est que le mouvement est pseudo-périodique !

Le discriminant Δ de l'équation caractéristique est donc négatif : $\Delta = \dfrac{{\omega_0}^2}{Q^2} - 4\,{\omega_0}^2 < 0 \overset{\text{not}}{=} -\delta^2$.

Les solutions de l'équation caractéristique sont donc : $x = -\dfrac{\omega_0}{2\,Q} \pm \mathrm{j}\,\dfrac{\delta}{2}$ et la pulsation des pseudo-oscillations vaut : $\omega = \dfrac{\delta}{2}$, d'où $T = \dfrac{2\,\pi}{\omega}$ soit, après calculs : $\boxed{T = \dfrac{2\,\pi\,m}{\sqrt{k\,m - (3\,\pi\,\eta\,r)^2}}}$.

$\boxed{2.}$ Dans l'air, nous pouvons négliger les frottement et ainsi l'équation différentielle vérifiée par l'oscillateur est identique au cas précédent mais sans le terme d'amortissement :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,z(t) = 0$$

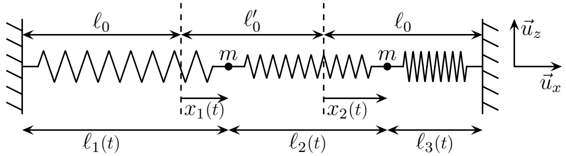
Les oscillations libres se font donc à la pulsation propre, ce qui fait que nous pouvons mesurer $T_0 = \dfrac{2\,\pi}{\omega_0}$.

En écrivant : $\omega^2 = {\omega_0}^2 - \dfrac{{\omega_0}^2}{4\,Q^2}$ et en remplaçant $\omega_0 = \dfrac{2\,\pi}{T_0}$, $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{6\,\pi\,\eta\,r}{m}$, nous trouvons, en isolant η : $\boxed{\eta = \dfrac{2\,m}{3\,r}\sqrt{\dfrac{1}{{T_0}^2} - \dfrac{1}{T^2}}}$.

Exercice 3

Analyse physique. C'est un dispositif à deux degrés de description : les positions de chaque masse. C'est un régime libre sans frottement. Comme il s'agit là de ressorts et de masses, nous pouvons penser qu'il va y avoir des oscillations sinusoïdales.

Analyse technique. Le repérage est déjà choisi, donc pas de problème. En revanche, comme il s'agit d'un dispositif à évolution conservative, nous pouvons penser à une approche énergétique. Cela ne convient malheureusement pas ici car le ressort du milieu n'a pas d'extrémité fixe. Nous devrons donc faire deux PFD : un pour chaque masse.



$\boxed{1.}$ Comme le mouvement est horizontale, comptons uniquement les forces horizontales. La masse de gauche subit :

- ➜ la tension exercée par le ressort 1 (celui à gauche) : $\vec{T}_1 = -k_0\,(\ell_1(t) - \ell_0)\,\vec{u}_{\text{sort}} = -k_0\,(\ell_1(t) - \ell_0)\,\vec{u}_x$
- ➜ la tension exercée par le ressort 2 (celui au milieu) : $\vec{T}_2 = -k\,(\ell_2(t) - \ell_0)\,\vec{u}'_{\text{sort}} = +k\,(\ell_2(t) - \ell'_0)\,\vec{u}_x$

Géométriquement, nous pouvons voir que $(\ell_1(t) - \ell_0) = x_1(t)$ et que $\ell_2(t) - \ell_0 = x_2(t) - x_1(t)$.

Il est fortement conseillé de vérifier qualitativement ces relations : quand $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$, les allongements des ressorts sont nuls, lorsque x_1 augmente, la masse de gauche se déplace vers la droite et cela fait augmenter la longueur du ressort 1 et diminuer celle du ressort 2. C'est bien ce que traduisent les relations précédentes. Tout va bien.

Le PFD sur la masse 1 (à gauche) donne donc, en projection sur $\vec{u}_x$:

$$\boxed{m\,\frac{\mathrm{d}^2x_1(t)}{\mathrm{d}t^2} = -k_0\,x_1(t) + k\,(x_2(t) - x_1(t))}$$

De même la masse 2 (à droite) subit :

➜ la tension exercée par le ressort 3 (celui à droite) : $\vec{T_3} = -k_0\,(\ell_3(t) - \ell_0)\,\vec{u}_{\text{sort}} = +k_0\,(\ell_3(t) - \ell_0)\,\vec{u}_x$

➜ la tension exercée par le ressort 2 (celui au milieu) : $\vec{T_2} = -k\,(\ell_2(t) - \ell_0)\,\vec{u}'_{\text{sort}} = -k\,(\ell_2(t) - \ell'_0)\,\vec{u}_x$

Géométriquement, nous pouvons voir que $(\ell_3(t) - \ell_0) = -x_2(t)$.

Le PFD appliqué à la masse 2 (à droite) donne en projection sur $\vec{u}_x$:

$$\boxed{m\,\frac{\mathrm{d}^2x_2(t)}{\mathrm{d}t^2} = -k_0\,x_2(t) - k\,(x_2(t) - x_1(t))}$$

$\boxed{2.}$ En additionnant puis en soustrayant les deux équations différentielles précédentes, nous trouvons :

$$\begin{cases} m\,\dfrac{\mathrm{d}^2X(t)}{\mathrm{d}t^2} = -k_0\,X(t) \\ m\,\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -(k_0 + 2\,k)\,x(t) \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2X(t)}{\mathrm{d}t^2} + \Omega^2\,X(t) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\,x(t) = 0 \end{cases}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} \Omega^2 = \dfrac{k_0}{m} \\ \omega^2 = \dfrac{k_0 + 2\,k}{m} \end{cases}}$$

$\boxed{3.}$ Comme $x_1(t) = \dfrac{X(t) + x(t)}{2}$ et $x_2(t) = \dfrac{X(t) - x(t)}{2}$, il faut d'abord déterminer $X(t)$ et $x(t)$.

Au vu des équations différentielles auxquelles obéissent $X(t)$ et $x(t)$, nous pouvons écrire directement $X(t) = X_0\,\cos(\Omega\,t + \varphi)$, et comme les conditions initiales sont $X(0) = x_1(0) + x_2(0) = 0 + 0 = 0$ et $\dot{X}(0) = \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) = v_0 + 0 = v_0$, nous trouvons : $X(t) = \dfrac{v_0}{\Omega}\,\sin(\Omega\,t)$.

De même $x(t) = x_0\,\cos(\omega\,t + \varphi)$ et $x(0) = x_1(0) - x_2(0) = 0 - 0 = 0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_1(0) - \dot{x}x_2(0) = v_0 - 0 = v_0$ d'où : $x(t) = \dfrac{v_0}{\omega}\,\sin(\omega\,t)$.

En remplaçant dans les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$, nous trouvons :

$$\boxed{x_1(t) = \frac{v_0}{2}\left(\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} + \frac{\sin(\omega\,t)}{\omega}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2(t) = \frac{v_0}{2}\left(\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} - \frac{\sin(\omega\,t)}{\omega}\right)}$$

❆ Exercice 4

$\boxed{1.}$ *Analyse physique :*

➜ *ici la masse M est astreinte à se déplacer verticalement (donc 1 degré de description) à cause du mouvement du cadre. En effet, celui-ci en se soulevant va étirer le ressort qui va donc exercer (puisqu'il est étiré) une force plus importante vers le haut sur M qui va alors se mettre à bouger. Ici, l'origine physique du mouvement de M c'est le mouvement du cadre : c'est un régime forcé.*

➜ *GP : (H, m), (g, k, ℓ_0, h) et (Z, ω)*

Analyse technique :

➜ *le repérage est imposé, donc pas de question à se poser.*

➜ *comme il s'agit d'une évolution forcée, mieux vaut prendre le PFD.*

M subit trois forces :

➜ force à distance : son poids $\vec{P} = m\,\vec{g} = -m\,g\,\vec{u}_z$

➜ la tension exercée par le ressort : $\vec{T} = -k\,(\ell_{\mathrm{r}}(t) - \ell_0)\,\vec{u}_{\text{sortant}} = -k\,(\ell_{\mathrm{r}}(t) - \ell_0)\,(-\vec{u}_z)$ où $\ell_{\mathrm{r}}(t) = H - y(t) + z(t)$ est la longueur du ressort

➜ la force exercée par l'amortisseur $\vec{f} = -h\,\dot{\ell}_{\text{am}}(t)\,\vec{u}_{\text{sort}} = -h\,\dot{\ell}_{\text{am}}(t)\,\vec{u}_z$ où $\ell_{\text{am}}(t) = y(t) - z(t)$ est la longueur de l'amortisseur.

Nous avons donc, en écrivant le PFD et en le projettant sur $\vec{u}_z$ (ne pas oublier que la masse est repéré dans le référentiel $\mathscr{R}$ par la coordonnée $y(t)$:

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -m\,g + k\,(H - y(t) + z(t) - \ell_0) - h\,\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\right)$$

Ce qui donne : $\boxed{m\,\dfrac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + h\,\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + k\,y(t) = k\,z(t) + h\,\dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + k\,(H - \ell_0) - m\,g}$.

$\boxed{2.}$ *Pour trouver l'équation différentielle en $x(t)$, écart par rapport à la position d'équilibre, il est normal de commencer par rechercher où exactement se situe cette position d'équilibre. Ensuite nous relierons $x(t)$ à $y(t)$ dont nous connaissons l'équation d'évolution et substiturons $y(t)$ par son expression en $x(t)$ pour avoir l'équation recherchée.*

Géométriquement, nous pouvons constater que que $\ell_{\text{éq}} = H - y_{\text{éq}}$.

Pour déterminer $y_{\text{éq}}$ utilisons l'équation précédente en prenant $y(t) = \mathrm{C^{te}} = y_{\text{éq}}$ et $z(t) = 0$ car, après tout, l'équilibre est un mouvement particulier, il **doit** donc obéir à l'équation du mouvement. Cela nous permet d'obtenir :

$$y_{\text{éq}} = H - \ell_0 - \frac{m\,g}{k} \qquad \text{et} \qquad \ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{m\,g}{k}$$

Ainsi, en reprenant l'équation d'évolution et utilisant le fait que $x(t) = (H - y(t) + z(t)) - \ell_{\text{éq}}$, que $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}$ et que $\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}$ nous arrivons, après de nombreuses simplifications, à :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,x(t) = -\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{{\omega_0}^2 = \frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{k\,m}}{h}}$$

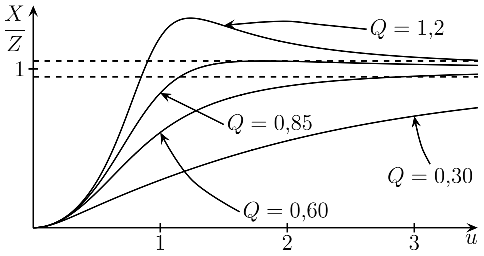
$\boxed{3.}$ *Il n'y a pas à tergiverser : pour une évolution sinusoïdale,* LE *outil qui marche trop bien, c'est la notation complexe.*

En utilisant les notations complexes l'équation différentielle donne (une fois simplifiée par $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t}$) :

$$(\mathrm{j}\,\omega)^2\,\underline{X} + \mathrm{j}\,\omega\,\frac{\omega_0}{Q}\,\underline{X} + {\omega_0}^2\,\underline{X} = -(\mathrm{j}\,\omega)^2\,\underline{Z} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{X} = -\frac{(\mathrm{j}\,\omega)^2}{(\mathrm{j}\,\omega)^2 + (\mathrm{j}\,\omega)\,\dfrac{\omega_0}{Q} + {\omega_0}^2}\,Z$$

Et ainsi $\boxed{X = |\underline{X}| = \dfrac{\omega^2\,Z}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\omega^2\,{\omega_0}^2}{Q}}}}$.

$\boxed{4.}$ Écrivons d'abord la fonction sous sa forme réduite : $\dfrac{X}{Z} = \dfrac{u^2}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \dfrac{u^2}{Q}}}$ et traçons $\dfrac{X}{Z}$ pour quelques valeurs de Q.



Nous pouvons constater que la courbe présente un maximum pour les valeurs « élevées » de Q. Nous voyons aussi que la plage intéressante, celle située entre les deux lignes en pointillés, est d'autant plus grande que le facteur de qualité est grand, pourvu que la résonance, elle, ne soit pas trop élevée. Dans ces conditions il faut rechercher la valeur de Q telle que la courbe $\dfrac{X}{Z}$ présente un maximum et que ce maximum vaille 1,05.

En calculant $\dfrac{\mathrm{d}X/Z}{\mathrm{d}\omega}$, nous trouvons que le maximum se situe en $\omega_{\mathrm{r}} = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2\,Q^2}}}$, maximum qui n'existe que pour $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Nous en déduison alors (avec des calculs que le lecteur se fera une joie de refaire, parce qu'il faut bien s'entraîner) : $\dfrac{X}{Z}(\omega_{\mathrm{r}}) = (\cdots) = \dfrac{Q}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}$.

Finalement l'équation à résoudre est $\dfrac{Q}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4\,Q^2}}} = 1{,}05$. La seule solution supérieure à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ est $\boxed{Q = 0{,}85}$ (résolution numérique bien qu'il soit possible de la trouver analytiquement en faisant apparaître une équation en Q^2).

Exercice 5

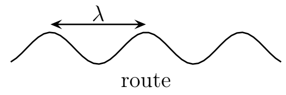
Analyse physique :

- *il s'agit ici de l'étude du mouvement d'un point matériel M. Ce mouvement, dans le référentiel lié au véhicule est contraint : il est vertical. C'est donc un problème à un degré de description. Nous pouvons imaginer que suite aux oscillations de la roue (qui monte et descend avec la route), la masse M va elle aussi osciller avec la même fréquence autour de sa position au repos. De plus comme la route excite l'oscillateur sinusoïdalement, M oscillera aussi sinusoïdalement.*
- *GP : (m), (g, k, ℓ_0, h) et (v, λ, a)*

Analyse technique.

- *le repérage est déjà imposé, nous n'avons donc pas à nous soucier de cela. Nous pouvons toutefois voir que le repérage est tel que, au repos, $z(t) = 0$, ce qui signifie qu'il faudra vérifier dans l'équation différentielle trouvée que cette solution fonctionne.*
- *En ce qui concerne l'approche choisie pour trouver l'équation du mouvement, comme le mouvement est forcé, mieux vaut utiliser un PFD (surtout que le ressort n'a aucune de ses extrémités fixes. Après, comme il s'agit de mouvement sinusoïdal forcé, la notation complexe sera inévitable.*

$\boxed{1.}$ Comme $z_O(t) = a\,\cos\left(2\,\pi\,\dfrac{x}{\lambda}\right)$, la période spatiale Δx est telle que $\dfrac{2\,\pi\,\Delta x}{\lambda} = 2\,\pi$ soit $\Delta x = \lambda$. λ représente donc la période spatiale, *ie.* la distance entre deux bosses successives.



$\boxed{2.}$ Listons les forces qui s'exercent sur M dans le référentiel $(A,\vec{u}_x,\vec{u}_z)$ galiléen :

- force à distance : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g} = -m\,g\,\vec{u}_x$
- force de contact : la force exercée par le ressort $\vec{T} = -k\,(\ell(t) - \ell_0)\,\vec{u}_{\text{sort}} = -k\,(\ell(t) - \ell_0)\,\vec{u}_x$
- force de contact : la force exercée par l'amortisseur $\vec{f} = -h\,\frac{\mathrm{d}\ell(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_{\text{sort}} = -h\,\frac{\mathrm{d}\ell(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_x$

Les longueurs de l'amortisseur et du ressort sont identiques ici car ils sont mis côte à côte. Notons ℓ_{r} la longueur qu'a le ressort (et donc aussi l'amortisseur) au repos. Ainsi : $\ell(t) = \ell_{\mathrm{r}} + z(t) - z_O(t)$.

Il est plus que fortement conseillé de vérifier qualitativement la formule précédente : quand $z(t)$ augmente, M monte et la longueur augmente et quand $z_O(t)$ augmente, O monte et la longueur du ressort diminue. C'est bon.

Le PFD s'écrit donc (en projection sur $\vec{u}_z$) :

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} = -h\,\left(\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z_O(t)}{\mathrm{d}t}\right) - k\,(z(t) - z_O(t) + \ell_{\mathrm{r}} - \ell_0) - m\,g$$

Au repos, nous avons $z_O(t) = 0$ et $z(t) = 0$ solution. Cela donne, en remplaçant dans l'équation précédente : $-k\,(\ell_{\mathrm{r}} - \ell_0) - m\,g = 0$ ce qui permet de simplifier l'équation en

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} + h\,\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + k\,z(t) = h\,\dot{z_O}(t) + k\,z_O(t)$$

Il est toujours bon de vérifier la cohérence là où elle apparaît. Ici, nous avons trouvé que la longueur au repos du ressort valait $\ell_{\mathrm{r}} = \ell_0 - \dfrac{m\,g}{k}$, ce qui signifie qu'elle est plus petite que ℓ_0 (normal : la masse appuie sur le ressort) et est d'autant plus petite que le poids est grand. Normal aussi.

Nous pouvons écrire $z_O(t)$ sous la forme $z_O(t) = a\,\cos(\omega\,t)$ car $x(t) = v\,t$ avec $\omega = \dfrac{2\,\pi\,v}{\lambda}$. Cela nous donne, dans l'équation précédente : $m\,\dfrac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} + h\,\dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + k\,z(t) = k\,a\cos(\omega\,t) - h\,a\,\omega\,\sin(\omega\,t)$ ou encore, sous forme canonique,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,z(t) = {\omega_0}^2\,a\cos(\omega\,t) - \frac{\omega_0}{Q}\,a\omega\,\sin(\omega\,t)} \text{ avec } \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \text{ et } \boxed{Q = \frac{\sqrt{k\,m}}{h}}$$

$\boxed{4.}$ Utilisons la notation complexe. Ainsi $\underline{z}(t) = \underline{Z_{\mathrm{m}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t}$ et $z_O(t) = \underline{Z_{O\mathrm{m}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t}$ avec $\underline{Z_{O\mathrm{m}}} = a$.

En tenant compte du fait que $-\sin(\omega\,t) = \cos(\omega t + \pi/2) \to \mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t}$ en notation complexe, nous trouvons d'abord :

$$\underline{Z_{\mathrm{m}}}\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\,\frac{\omega\,\omega_0}{Q} + {\omega_0}^2\right) = {\omega_0}^2\,a + \mathrm{j}\,\frac{\omega\,\omega_0}{Q}\,a \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{Z_{\mathrm{m}} = a\,\sqrt{\frac{1 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}} \quad \text{avec} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Lorsque $\omega \to 0$, $Z_{\mathrm{m}} \to a$, et lorsque $\omega \to \infty$, $Z_{\mathrm{m}} \to 0$.

Cette dernière solution est celle que l'on recherche. « Malheureusement », en reprenant l'expression de ω, nous pouvons constater qu'elle correspond à $v \to \infty$. Ainsi, pour un maximum de confort $\boxed{\text{il vaut mieux rouler le plus vite possible sur des pavés}}$ car cela minimise les oscillations verticales de l'habitacle. Seulement, du point de vue de la sécurité, le problème est tout autre …

❃ Exercice 6

Analyse physique :
➜ *la masse va se mettre à bouger à cause du mouvement du bâti.*
➜ *C'est un régime forcé (avec une source énergétique, le moteur, non représenté) et contraint (sur l'axe vertical). Comme le mouvement du bâti est sinusoïdal, celui de la masse sera aussi sinusoïdal.*
➜ *GP : (m), $(g,\, k,\, \ell_0,\, h)$ et $(A,\, \omega)$*
Analyse technique :
➜ *ici le repérage est imposé, pas de problème.*
➜ *comme il s'agit d'un régime forcé et que le ressort n'a pas une de ses extrémité fixe, nous ne pourrons pas utiliser l'approche énergétique, il faudra faire un PFD. Bien sûr, avec des mouvements sinusoïdaux, nous utiliserons la notation complexe.*

$\boxed{1.}$ Les trois forces s'exerçant sur M sont :
➜ force à distance : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g} = +m\,g\,\vec{u}_z$
➜ force de contact : les frottements fluides : $\vec{f}(t) = -h\,\vec{v}(t) = -h\,\dot{z}(t)\,\vec{u}_z$
➜ force de contact : l'action exercée par le ressort $\vec{T} = -k\,(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_{\text{sortant}} = -k\,(\ell(t) - \ell_0)\,\vec{u}_z$.
De plus nous pouvons voir (géométriquement) que $\ell(t) = z(t) - z_B(t)$.
Le PFD en projection sur l'axe $\vec{u}_z$ donne donc :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad -k\,(z(t) - z_B(t) - \ell_0) + m\,g - h\,\dot{z}(t) = m\,\ddot{z}(t)$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,z(t) = {\omega_0}^2\,z_B(t) + g} \quad \text{avec} \quad \boxed{{\omega_0}^2 = \frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{k\,m}}{h}}.$$

$\boxed{2.}$ Pour déterminer $z_{\text{éq}}$, reprenons l'équation d'évolution précédente avec $z(t) = z_{\text{éq}} = \mathrm{C^{te}}$ et $z_B(t) = 0$.

Nous arrivons alors à $\boxed{z_{\text{éq}} = \ell_0 + \dfrac{m\,g}{k}}$.

De plus nous avons $\dot{x}(t) = \dot{z}(t)$ et $\ddot{x}(t) = \ddot{z}(t)$, ce qui donne, en remplaçant dans l'équation d'évolution obtenue dans la question précédente :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,x(t) = {\omega_0}^2\,z_B(t)}$$

$\boxed{3.}$ Avec la notation complexe nous avons :

$$\ddot{\underline{x}}(t) = (\mathrm{j}\,\omega)^2\,\underline{x}(t) = (\mathrm{j}\,\omega)^2\,\underline{X_{\mathrm{m}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t} \qquad \dot{\underline{x}}(t) = \mathrm{j}\,\omega\,\underline{x}(t) = \mathrm{j}\,\omega\,\underline{X_{\mathrm{m}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t} \quad \text{et} \quad \underline{z_B}(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t}$$

L'équation d'évolution se réécrit alors, en simplifiant par $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t}$: $(\mathrm{j}\,\omega)^2\,\underline{X_{\mathrm{m}}} + \mathrm{j}\,\omega\,\dfrac{\omega_0}{Q}\,\underline{X_{\mathrm{m}}} + {\omega_0}^2\,\underline{X_{\mathrm{m}}} = {\omega_0}^2\,A$, ce qui donne $\boxed{\underline{X_{\mathrm{m}}} = \dfrac{{\omega_0}^2\,A}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\,\omega\,\dfrac{\omega_0}{Q}}}$.

Comme $v(t) = \dot{z}(t) = \dot{x}(t)$, nous avons $\underline{V_{\mathrm{m}}} = \mathrm{j}\,\omega\,\underline{X_{\mathrm{m}}}$ soit, en notant $V_0 \overset{\text{not}}{=} \omega_0\,A$:

$$\boxed{\underline{V} = \frac{\mathrm{j}\,\omega\,\omega_0\,V_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\,\omega\,\dfrac{\omega_0}{Q}}}$$

$\boxed{4.}$ Le déphasage ϕ recherché vaut simplement : $\phi = \arg(\underline{X_{\mathrm{m}}}) = -\arg\left({\omega_0}^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\,\omega\dfrac{\omega_0}{Q}\right)$ ( ).

Comme la partie réelle change de signe, nous allons factoriser par j *ce qui va simplifier les choses.*

$$\begin{aligned}\phi &= -\arg\left[\mathrm{j}\left(\frac{\omega\,\omega_0}{Q} + \mathrm{j}\,(\omega^2 - {\omega_0}^2)\right)\right] \\ &= -\arg(\mathrm{j}) - \arg\left(\frac{\omega\,\omega_0}{Q} + \mathrm{j}\,(\omega^2 - {\omega_0}^2)\right)\end{aligned}$$

Et ainsi $\boxed{\phi = -\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\,\dfrac{\omega^2 - {\omega_0}^2}{\omega\,\omega_0}\right)}$

Comme $\underline{V_{\mathrm{m}}} = \mathrm{j}\,\omega\,\underline{X_{\mathrm{m}}}$ et que $\varphi = \arg(\underline{V})$ cela donne $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + \phi$ et $\boxed{\phi = -\arctan\left(Q\,\dfrac{\omega^2 - {\omega_0}^2}{\omega\,\omega_0}\right)}$.

$\boxed{5.\ \text{(a)}}$ La puissance fournie par les frottement vaut $\mathscr{P}_{\mathrm{f}}(t) = f(t).v(t) = -h\,v^2(t)$.

Sur une période nous avons donc $\mathscr{E}_{\mathrm{f}} = \displaystyle\int_0^T -h\,v^2(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^T h\,{V_{\mathrm{m}}}^2\,\cos^2(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t$ soit, après calculs : $\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{f}} = -\dfrac{h\,{V_{\mathrm{m}}}^2\,T}{2}}$.

Cette énergie fournie est négative. Rien de plus normal puisque ces frottements dissipent de l'énergie.

$\boxed{5.\ \text{(b)}}$ La puissance fournie par le ressort vaut $\mathscr{P}_{\mathrm{r}}(t) = T(t).v(t) = -k\,(z(t) - z_B(t) + \ell_{\mathrm{r}} - \ell_0).v(t)$.

Sur une période nous avons donc $\mathscr{E}_{\mathrm{r}} = -\displaystyle\int_0^T (x(t) - z_B(t) + z_{\text{éq}} + \ell_{\mathrm{r}} - \ell_0)\,v(t)\,\mathrm{d}t$.

En constatant que $\displaystyle\int_0^T (z_{\text{éq}} - \ell_0)\,V_{\mathrm{m}}\,\cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t = 0$, il reste :

$$\mathscr{E}_{\mathrm{r}} = -k\int_0^T [X_{\mathrm{m}}\,\cos(\omega t + \phi) - A\,\cos(\omega\,t)]\,V_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t$$

Cela donne, après calculs : $\mathscr{E}_{\mathrm{r}} = -k\,\dfrac{X_{\mathrm{m}}\,V_{\mathrm{m}}\,T}{2}\cos(\phi - \varphi) + k\,\dfrac{A\,V_{\mathrm{m}}\,T}{2}\cos\varphi$.

Mais comme $\phi - \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ nous arrivons finalement à $\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{r}} = k\,\dfrac{A\,V_{\mathrm{m}}\,T}{2}\,\cos\varphi}$.

$\boxed{5.\ \text{(c)}}$ Nous avons de même $\mathscr{E}_{\mathrm{p}} = \displaystyle\int_0^T m\,g\,v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T m\,g\,V_{\mathrm{m}}\,\cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t$ soit $\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{r}} = 0}$.

$\boxed{5.\ \text{(d)}}$ L'énergie cinétique maximale vaut $\mathscr{E}_{\mathrm{c}} = \dfrac{1}{2}\,m\,v_{\max}^2$ et comme $v_{\max} = V_{\mathrm{m}}$ nous avons tout de suite $\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{c}} = \dfrac{1}{2}\,m\,{V_{\mathrm{m}}}^2}$.

$\boxed{5.\ \text{(e)}}$ Cette différence d'énergie potentielle vaut $\Delta\mathscr{E}_{\mathrm{pp}} = m\,g\,\Delta z$ avec $\Delta z = X_{\mathrm{m}}$, ce qui nous donne $\boxed{\Delta\mathscr{E}_{\mathrm{pp}} = m\,g\,X_{\mathrm{m}}}$.

$\boxed{6.}$ Le bilan énergétique traduit le fait que, sur une période, l'ensemble des forces apporte une énergie nulle. Si tel n'était pas le cas, le théorème de l'énergie cinétique sur une période donnerait $\Delta E_{\mathrm{c}} \neq 0$, *ie.* V_{m} (amplitude de la vitesse) non constante, ce qui est contraire à l'état de régime permanent. Ainsi le bilan s'écrit simplement $\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{f}} + \mathscr{E}_{\mathrm{r}} + \mathscr{E}_{\mathrm{p}} = 0}$.

Remarque : il n'y a aucune raison d'avoir $\mathscr{E}_{\text{c}} = \Delta\mathscr{E}_{\text{pp}}$, car le mouvement de la masse n'est pas, loin s'en faut, une chute libre.

➨ **Vérification.** Comme $\mathscr{E}_{\text{p}} = 0$, il reste à vérifier que $\mathscr{E}_{\text{r}} \overset{?}{=} -\mathscr{E}_{\text{f}}$, *ie.* $h\,V_{\text{m}} \overset{?}{=} k\,A\,\cos\varphi$.

Comme $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + \phi$, $\cos\varphi = -\sin\phi$. À l'aide de() (question 4), nous trouvons que

$$-\sin\phi = \frac{\omega\,\omega_0}{Q\,\sqrt{({\omega_0}^2-\omega^2)^2 + \dfrac{\omega^2\,{\omega_0}^2}{Q^2}}}$$

Après, les expressions de V_{m} et de Q permettent de vérifier que nous avons effectivement $\mathscr{E}_{\text{r}} = -\mathscr{E}_{\text{f}}$.

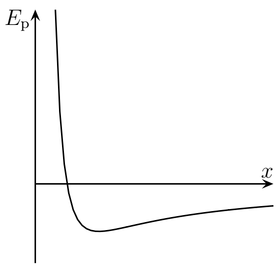
Exercice 7

Il est important de lire tout l'énoncé avant de se lancer dans la résolution, cela nous permet d'apprendre beaucoup de choses.

Ici nous pouvons voir que l'exercice traite d'une évolution conservative puisque nous donne l'énergie potentielle associée. Peu importe comment est créé ce potentiel, il suffit de le connaître et de le traiter comme tel.

Nous pouvons voir que dans une première partie il est demandé de trouver la position d'équilibre pour ensuite étudier le mouvement autour de cette position d'équilibre. En ce qui concerne le développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle, nous savons que cela va conduire à une évolution sinusoïdale, c'est le cas du cours : toute évolution (ou presque) autour d'une position d'équilibre stable est sinusoïdale pourvu qu'elle soit suffisamment petite. En revanche, en développant à l'ordre 3, cette évolution ne sera plus sinusoïdale, il y aura des termes non linéaires correctifs.

1. Voir ci-dessous.



2. *Faisons une analyse dimensionnelle de l'énergie potentielle. x étant une longueur, nous trouvons rapidement que a est aussi une longueur et E_0 une énergie. À partir de là nous pouvons tout de suite imaginer que la position d'équilibre ne sera fonction que de a. En effet, en écrivant $x_{\text{éq}} = a^\alpha\,{E_0}^\beta$ nous voyons rapidement que les dimension de masse contenue dans l'énergie doivent disparaître, ce qui signifie que E_0 doit disparaître aussi.*

La position d'équilibre est caractérisée par $\dfrac{\mathrm{d}E_{\text{p}}}{\mathrm{d}x}(x_{\text{éq}}) = 0$.

Avec $\dfrac{\mathrm{d}E_{\text{p}}}{\mathrm{d}x}(x) = E_0\left(-\dfrac{2a^2}{x^3} + \dfrac{a}{x^2}\right)$, nous arrivons rapidement à $\boxed{x_{\text{éq}} = 2\,a}$.

3. (a) *Étant donné la question suivante, autant faire le DL à l'ordre 3 tout de suite et le tronquer à l'ordre 2 pour cette question.*

N'oublions pas non plus qu'étant donné qu'il s'agit d'une position d'équilibre, le terme d'ordre 1 doit disparaître car il s'agit de $(x - x_{\text{éq}})\,\dfrac{\mathrm{d}E_{\text{p}}}{\mathrm{d}x}(x_{\text{éq}})$ qui est nul de par la condition d'équilibre.

Réécrivons d'abord E_{p} autour de la valeur à l'équilibre :

$$E_{\text{p}}(2\,a+\varepsilon) = E_0\left(\frac{a^2}{(2\,a+\varepsilon)^2} - \frac{a}{2\,a+\varepsilon}\right) = \frac{E_0}{2}\left(\frac{1}{2\left(1+\dfrac{\varepsilon}{2\,a}\right)^2} - \frac{1}{1+\dfrac{\varepsilon}{2\,a}}\right)$$

Utilisons On utilise ensuite l'expression du développement limité à l'ordre 3 :

$$(1+\varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\,\varepsilon + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}\varepsilon^2 + \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)}{6}\,\varepsilon^3$$

Nous allons utiliser cette formule avec $\alpha = -2$ et $\alpha = -1$ et « $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{2a}$ ».

Surtout pour les DL, il faut bien organiser ses calculs et les faire lentement : d'abord développer chaque terme et ensuite, seulement ensuite, les regrouper. Il ne faut pas y aller trop vite car l'homogénéité est quasi-impossible à vérifier étant donné que nous avons fait apparaître des termes sans dimension $\dfrac{\varepsilon}{2\,a}$.

$$\begin{aligned}E_{\text{p}}(2\,a+\varepsilon) &= \frac{E_0}{2}\left[\frac{1}{2}\left(1 - 2\,\frac{\varepsilon}{2\,a} + 3\left(\frac{\varepsilon}{2\,a}\right)^2 - 4\left(\frac{\varepsilon}{2\,a}\right)^3\right) - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\,a} + \left(\frac{\varepsilon}{2\,a}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{2\,a}\right)^3\right)\right]\\ &= \frac{E_0}{2}\left(-\frac{1}{2} \cancel{-\frac{\varepsilon}{2\,a} + \frac{\varepsilon}{2\,a}}\right) + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right)\frac{\varepsilon^2}{a^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)\frac{\varepsilon^3}{a^3}\end{aligned}$$

Et nous arrivons à $E_{\text{p}}(2\,a+\varepsilon) = \dfrac{E_0}{4}\left(-1 + \dfrac{\varepsilon^2}{4\,a^2} - \dfrac{\varepsilon^3}{4\,a^3}\right)$, ce qui donne, pour l'ordre 2 :

$$\boxed{E_{\text{p}}(x_{\text{éq}}+\varepsilon) = \frac{E_0}{4}\left(-1 + \frac{\varepsilon^2}{{x_{\text{éq}}}^2}\right)}$$

3. (b) *Comme il s'agit de petites oscillations autour de l'équilibre et que le dévellopement de l'énergie potentielle fait apparaître un terme en ε^2, nous savons déjà qu'il y aura isochronisme, c'est-à-dire que la pulsation recherchée sera indépendante de X_{m}.*

De plus pour obtenir une pulsation en s^{-1} à partir d'une énergie en kg.m.s^{-2} et d'une position d'équilibre en m, il faudra se débarasser de la dimension masse. Pour cela, ne doutons pas de voir apparaître la masse inertielle dans le résultat, ce qui est d'autant plus normal que cette grandeur caractérise un mouvement, ce que nous cherchons ici.

Comme l'évolution est conservative (car l'ensemble des forces que subit le point matériel dérive d'une énergie potentielle), nous avons : $E_{\text{c}}(t) + E_{\text{p}}(t) = \text{C}^{\text{te}}$.

Or $E_{\text{c}} = \dfrac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2(t)$ (mouvement sur un axe) et avec $x(t) = x_{\text{éq}} + \varepsilon(t)$, nous avons $\dot{x}(t) = \dot{\varepsilon}(t)$ ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{\varepsilon}^2(t) + \frac{E_0}{4}\left(-1 + \frac{\varepsilon^2(t)}{{x_{\text{éq}}}^2}\right) = \text{C}^{\text{te}}$$

En dérivant cette équation (et en simplifiant par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre $\dot{\varepsilon}(t) = 0$), nous arrivons à $m\,\dfrac{\mathrm{d}^2\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{E_0}{2\,{x_{\text{éq}}}^2}\,\varepsilon(t) = 0$ de solution $\varepsilon(t) = X_{\text{m}}\,\cos(\omega_0\,t + \varphi)$ avec

$\boxed{\omega_0{}^2 = \dfrac{E_0}{2\,m\,x_{\text{éq}}{}^2}}$ et comme $x(t) = x_{\text{éq}} + \varepsilon(t)$, il s'agit bien du résultat proposé.

$\boxed{\text{4. (a)}}$ Le développement limité a déjà été effectué (merci la prévoyance) et on a trouvé :

$$\boxed{E_{\text{p}}(x_{\text{éq}} + \varepsilon) = \frac{E_0}{4}\left(-1 + \frac{\varepsilon^2}{x_{\text{éq}}{}^2} - 2\frac{\varepsilon^3}{x_{\text{éq}}{}^3}\right)}$$

Nous pouvons ici aussi dériver par rapport au temps la conservation de l'énergie. Cela donne :

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{\varepsilon}^2(t) + E_{\text{p}}(x_{\text{éq}} + \varepsilon(t)) = \text{C}^{\text{te}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{m\,\ddot{\varepsilon}(t) + \frac{E_0}{2\,x_{\text{éq}}{}^2}\,\varepsilon(t) - \frac{3\,E_0}{2\,x_{\text{éq}}{}^3}\,\varepsilon^2(t) = 0}$$

Il s'agit d'une équation d'évolution non linéaire, autrement dit impossible à résoudre dans le cas général de manière analytique.

$\boxed{\text{4. (b)}}$ En posant $\varepsilon(t) = A + X_{\text{m}}\,\cos(\omega_0\,t) + B\,\cos(2\,\omega_0\,t)$, nous avons :

$$\ddot{\varepsilon}(t) = -\omega_0{}^2\,A\,\cos(\omega_0\,t) - 4\,\omega_0{}^2\,B\cos(2\,\omega_0\,t) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon^2(t) = X_{\text{m}}{}^2\,\cos^2(\omega_0\,t) = \frac{X_{\text{m}}{}^2}{2} + \frac{X_{\text{m}}{}^2}{2}\,\cos(2\,\omega_0\,t)$$

Remarque : nous nous limitons *a priori* pour $\varepsilon^2(t)$ au seul terme $X_{\text{m}}\,\cos(\omega_0\,t)$ car il s'agit là d'un terme correctif, ce qui fait que nous l'approximons par la solution obtenue à l'ordre précédent (voir résolution identique pour le pendule simple rigide dans le chapitre 3 de mécanique ou, plus tard, pour la déviation vers l'est dans le chapitre 7 de mécanique). De toutes façons, si nous avions gardé les autres termes, nous aurions été obligé de les négliger après.

En injectant ces résultats dans l'équation d'évolution, nous arrivons à :

$$\left(\frac{E_0\,A}{2\,x_{\text{éq}}{}^2} - \frac{3\,E_0}{2\,x_{\text{éq}}{}^3}\,\frac{X_{\text{m}}{}^2}{2}\right) + \left(-m\,\omega_0{}^2\,X_{\text{m}} + \frac{E_0\,X_{\text{m}}}{2\,x_{\text{éq}}{}^2}\right)\cos(\omega_0\,t) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{E_0\,B}{2\,x_{\text{éq}}{}^2} - 4\,m\,\omega_0{}^2\,B - \frac{3\,E_0}{2\,x_{\text{éq}}{}^2}\,\frac{X_{\text{m}}{}^2}{2}\right)\cos(2\,\omega_0\,t) = 0$$

Après quelques (!) simplifications basée sur l'expression de $\omega_0{}^2$ et sur la multiplication de l'ensemble par $\dfrac{2\,x_{\text{éq}}{}^2}{E_0}$ nous obtenons :

$$\left(A - \frac{3\,X_{\text{m}}{}^2}{2\,x_{\text{éq}}}\right) - \left(3\,B + \frac{3\,X_{\text{m}}{}^2}{2\,x_{\text{éq}}}\right)\cos(2\,\omega_0\,t) = 0$$

Pour que cette fonction de t soit constamment nulle, il faut que les facteur devant $\cos(\omega_0\,t)$ et $\cos(2\,\omega_0\,t)$ soient constamment nuls, ce qui donne $\boxed{A = \dfrac{3\,X_{\text{m}}{}^2}{2\,x_{\text{éq}}}}$ et $\boxed{B = \dfrac{X_{\text{m}}{}^2}{2\,x_{\text{éq}}}}$.

Nous pouvons (devons!) vérifier que $\dfrac{A}{X_{\text{m}}} \ll 1$ et $\dfrac{B}{X_{\text{m}}} \ll 1$, ce qui est bien le cas parce que $\dfrac{X_{\text{m}}}{x_{\text{éq}}} \ll 1$.

$\boxed{\text{4. (c)}}$ Si nous autorisons une plus grande amplitude pour le mouvement du point matériel autour de $x_{\text{éq}}$, alors nous constatons que $\langle x(t)\rangle = \langle x_{\text{éq}} + \varepsilon(t)\rangle = x_{\text{éq}} + a \neq x_{\text{éq}}$. En d'autres termes, la particule s'éloigne, en moyenne, de sa position d'équilibre.

Remarque : un résultat fondé sur des calculs analogues est à l'origine de l'explication du phénomène de dilatation des solides.