

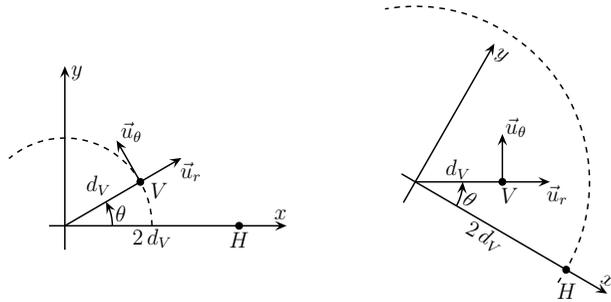
Mécanique en référentiel non galiléen

❖ Exercice 1

1. (a) Dans \mathcal{R}_V , le cheval a un mouvement de translation vertical.

Dans \mathcal{R}_H le cheval a un mouvement circulaire superposé à un mouvement d'oscillations verticales.

1. (b) Représentons la situation par rapport à \mathcal{R}_H et par rapport à \mathcal{R}_V .



Nous voyons alors immédiatement que H a une trajectoire circulaire.

2. (a) Dans \mathcal{R}_H , V parcourt un cercle de rayon d_V soit la distance $2\pi d_V$.

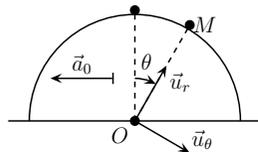
2. (b) Dans \mathcal{R}_V , H parcourt un cercle de rayon $2d_V$ soit la distance $4\pi d_V$.

☛ Remarque : si la voiture semble parcourir une distance $2\pi d_V$ pour l'observateur, ce dernier semble en parcourir deux fois plus pour la voiture !

❖ Exercice 2

Analyse physique :

- commençons par faire un schéma de la situation dans le référentiel lié à la demi-sphère
- ce référentiel est non galiléen et nous pouvons voir que la trajectoire y est circulaire, libre mais non conservative (à cause de la force d'inertie)
- grandeurs pertinentes : m (inertie), R (géométrie), g (action à distance), a_0 (effet inertiel)



Analyse technique :

- puisqu'il s'agit d'un mouvement circulaire dans ce référentiel, les coordonnées cylindro-polaires s'imposent.
 - ici comme nous cherchons une condition de contact, le PFD s'impose pour trouver R_N .
- Commençons par faire l'hypothèse que le palet reste sur la demi-sphère.
La masse est soumise à 3 forces :

- force à distance : le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta)$
- force de contact : la réaction du support $\vec{R}_N = R_N\vec{u}_{\text{sortant}} = R_N\vec{u}_r$
- force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_0 = ma_0(-\sin\theta\vec{u}_r - \cos\theta\vec{u}_\theta)$

Le PFD appliqué au palet s'écrit, dans le référentiel non galiléen lié à la demi-sphère et projeté sur \vec{u}_r et \vec{u}_θ :

$$m\vec{a}(t) = m\vec{g} + \vec{R}_N + \vec{f}_{ie} \rightsquigarrow \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = R_N - mg\cos\theta + ma_0\sin\theta & (\heartsuit) \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta + ma_0\cos\theta & (\clubsuit) \end{cases}$$

La projection sur \vec{u}_r nous fournit une expression de R_N mais en fonction de $\dot{\theta}^2$ ce qui n'est pas la panacée. Il faut donc trouver une expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ , ce qui revient soit à trouver une vitesse au carré en fonction d'une position (ce qui fait penser à un TEM), soit à trouver la primitive de l'équation (\clubsuit) (ce que nous pourrions faire en multipliant au préalable par θ et en faisant attention aux conditions initiales)

Le théorème de la puissance mécanique s'écrit : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{ie}$, soit, comme $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_0$ et avec $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$:

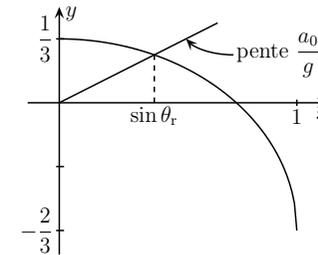
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta \right) = ma_0 R \dot{\theta} \cos\theta \quad (\heartsuit)$$

Intégrons (\heartsuit) :

$$\left(\frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta \right) - mgR = ma_0 R \sin\theta \rightsquigarrow R\dot{\theta}^2 = 2g(1 - \cos\theta) + 2a_0\sin\theta$$

Cette dernière expression permet de déterminer R_N en la remplaçant dans (\heartsuit) :

$$R_N = mg(3\cos\theta - 2 - \frac{3a_0}{g}\sin\theta)$$



L'angle de rupture est donc l'angle pour lequel $R_N = 0$ soit l'angle θ_r solution de l'équation

$$0 = 3\cos\theta - 2 - 3\frac{a_0}{g}\sin\theta \quad (\heartsuit)$$

(\heartsuit) s'écrit : $\cos\theta - \frac{2}{3} = \frac{a_0}{g}\sin\theta$ soit $\sqrt{1 - \sin^2\theta} - \frac{2}{3} = \frac{a_0}{g}\sin\theta \quad (\clubsuit)$.

Ainsi en traçant les deux courbes $y_1(x) = \sqrt{1 - x^2} - \frac{2}{3}$ et $y_2(x) = \frac{a_0}{g}x$ et en posant $x = \sin\theta$ l'abscisse de leur point d'intersection est solution de l'équation (\clubsuit) . Nous pouvons vérifier le résultat intuitif : plus a_0 est grand, plus l'angle de rupture est petit.

✪ Exercice 3

1. Cette première relation est uniquement technique, elle n'a pour utilité que de pouvoir faire la suite. Il faut donc travailler au corps les lois imposées : la relation $y = f(x)$ et $v = C^{te}$.

$$y(O_1) = y = f(x) \quad \rightsquigarrow \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = v_x f'(x)$$

En utilisant la même méthode : $a_y = a_x f'(x) + v_x^2 f''(x)$.

En utilisant le fait que le mouvement est uniforme nous avons :

$$v_x^2 + v_y^2 = v^2 = C^{te} \quad \rightsquigarrow \quad v = v_y \sqrt{1 + 1/f'^2}$$

Nous avons aussi :

$$\frac{d}{dt}(v_x^2 + v_y^2) = 0 = 2v_x a_x + 2v_y a_y \quad \rightsquigarrow \quad v_x a_x + v_y a_y = 0$$

Remplaçons v_y et a_x dans l'équation précédente et après simplification, nous obtenons bien le résultat proposé.

2. Les seules forces agissant suivant la verticale sont le poids, la réaction du siège \vec{R} , la « force d'inertie » d'entraînement. Le PFD dans \mathcal{R}_1 s'écrit donc, en projection du (O_1y_1) et en n'oubliant pas que A est immobile :

$$m \ddot{y}(t) = -mg + R_y - m \frac{v^2 f''}{(1 + f'^2)^2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad R_y = mg + m \frac{v^2 f''}{(1 + f'^2)^2}$$

3. Lorsque le véhicule est immobile, nous avons $v = 0$ et aussitôt $R_y = P$.

Dans le cas d'une bosse, $f'' < 0$ et donc en norme le poids apparent est inférieur au poids réel.

Dans le cas d'un creux $f'' > 0$, $|R_y| > mg$ soit un poids apparent supérieur au poids réel.

4. En cherchant l'équation de la parabole sous la forme $y = ax^2 + bx + c$ et avec les trois points $(0, h)$; $(-\ell, 0)$ et $(\ell, 0)$, nous trouvons $y = h(1 - x^2/\ell^2)$.

Il y aura impesanteur en S si $T_y = 0$ soit $g + \frac{v^2 f''}{(1 + f'^2)^2} = 0$.

En calculant $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -\frac{2h}{\ell^2}$ nous trouvons qu'il y aura impesanteur pour $v = \ell \sqrt{\frac{g}{2h}}$.

✪ Exercice 4

Il s'agit essentiellement d'un exercice technique puisque les méthodes et les calculs qu'il y a à faire sont décrits dans l'énoncé.

1. Dans le référentiel lié au point d'attache de la tige, le mouvement de M est circulaire, comme tout bon pendule qui se respecte. Nous utiliserons donc le paramétrage cylindro-polaire.

Le mouvement de la masse M est étudié dans le référentiel non galiléen en translation par rapport à \mathcal{R} de centre A .

Les forces qui agissent sur M sont donc le poids \vec{P} , la tension \vec{T} de la tige, et la force d'inertie d'entraînement $-m\vec{a}_c$.

En projetant le PFD sur \vec{u}_θ , nous obtenons :

$$m \ell \ddot{\theta}(t) = -mg \sin(\theta(t)) + m h \gamma^2 \cos(\gamma t) \sin(\theta(t)) \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 (1 + \alpha \cos(\gamma t)) \sin(\theta(t)) = 0$$

2. (a) L'équation s'écrit : $\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \theta(t) = -\omega_0^2 \alpha \theta \cos(\gamma t)$.

En multipliant par $\dot{\theta}(t)$ et en remarquant que $\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2(t)}{dt}$ et $\dot{\theta}(t)\theta(t) = \frac{1}{2} \frac{d\theta^2(t)}{dt}$, nous obtenons bien le résultat proposé.

2. (b) Nous avons $\theta(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et donc en dérivant $\dot{\theta}(t) = -A(t)\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ car nous pouvons négliger le terme $\dot{A}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$ étant donné que l'énoncé précise bien que $A(t)$ varie lentement.

Dans ces conditions, $\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \theta^2 = \omega_0^2 A^2$ et ainsi :

$$-\omega_0^2 \alpha \theta \dot{\theta} \cos(\gamma t) = +\omega_0^3 \alpha A^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) \cos(\gamma t) = \frac{1}{2} \omega_0^3 A^2 \sin(2\omega_0 t + 2\varphi) \cos(\gamma t)$$

Ce qui est bien le résultat après avoir divisé par $\omega_0^2 A^2$.

2. (c) Nous avons :

$$\left\langle \frac{1}{A^2} \frac{dA^2}{dt} \right\rangle = \frac{\omega_0 \alpha}{2} \langle \sin[(2\omega_0 + \gamma)t + 2\varphi] + \sin[(2\omega_0 - \gamma)t + 2\varphi] \rangle$$

$$= \frac{\omega_0 \alpha}{2} \langle \sin[(2\omega_0 + \gamma)t + 2\varphi] \rangle + \frac{\omega_0 \alpha}{2} \langle \sin[(2\omega_0 - \gamma)t + 2\varphi] \rangle$$

Le premier des deux termes est nulle car la pulsation est non nulle. En revanche, le deuxième terme a une valeur moyenne non nulle, pourvu que $\gamma = 2\omega_0$. Dans ces conditions :

$$\left\langle \frac{1}{A^2} \frac{dA^2}{dt} \right\rangle = \frac{\omega_0 \alpha}{2} \sin 2\varphi$$

Nous constatons donc qu'avec φ bien choisi, $\frac{dA^2}{dt} > 0$ soit $|A|$ augmente, et donc l'amplitude augmente.

✪ Remarque : l'augmentation des amplitudes dépend fortement de φ , ie. il faut que les conditions initiales soit bien choisies. En pratique, c'est plutôt l'excitation qui est adaptée « à la main » pour observer une résonance.

✪ Exercice 5

1. Ici nous avons le choix entre deux référentiels en mouvement par rapport à la route. Les deux sont naturellement centrés sur C mais l'un est en simple translation alors que l'autre tourne en plus par rapport à la route. Dans le second, le mouvement de M est extrêmement simple puisqu'il est immobile ! En revanche le référentiel n'est ni en translation pure ni en rotation pure, ce qui risque de compliquer l'expression des lois de composition. C'est pourquoi nous préférons le premier référentiel et ce d'autant plus que le mouvement de M y est quand même simple : c'est une rotation de rayon b .

Notons $\tilde{\mathcal{R}}$ le référentiel lié à la route et \mathcal{R} celui centré sur la roue et en translation par rapport à la route. Dans ces conditions $\tilde{\mathcal{R}}$ est en translation rectiligne par rapport à $\tilde{\mathcal{R}}$ à la vitesse $\vec{v}_{\tilde{\mathcal{R}}(C)} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{v}_C$. Comme cette vitesse \vec{v}_C n'est, a priori, pas constante, la translation n'est pas uniforme et donc $\tilde{\mathcal{R}}$ n'est pas galiléen.

✪ Remarque : le fait que $\tilde{\mathcal{R}}$ soit non galiléen n'est absolument pas important pour les lois de composition. Ça le serait pour d'éventuelles lois physiques mais ici nous ne nous intéressons pas au mouvement, aux forces, ...

Nous avons alors, puisque M a un mouvement circulaire :

$$\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M) \stackrel{\text{not}}{=} \vec{v} = b \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \text{veca}_{|\mathcal{R}}(M) \stackrel{\text{not}}{=} \vec{a} = -b \dot{\theta} \vec{u}_r + b \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Le fait que la roue ne glisse pas sur la route implique une relation dite « condition de non glissement » et qui s'exprime sous la forme : $v_C = R \dot{\theta}$.

Comme $\vec{v}_e = \vec{v}_C$, la loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_e + \vec{v} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{v}_{|\mathcal{R}} = v_C \vec{u}_x + b \frac{v_C}{R} \vec{u}_\theta}$$

La loi de composition des vitesses s'écrit $\vec{a}_{|\mathcal{R}} = \vec{a}_e + \vec{a}_c + \vec{a}$

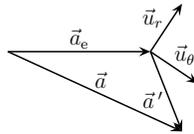
Avec $\vec{a}_e = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(C) = \frac{d\vec{v}_{|\mathcal{R}}(C)}{dt} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{a}_C$ et $\vec{a}_c = \vec{0}$ car \mathcal{R} est en translation par rapport à $\tilde{\mathcal{R}}$, nous arrivons à

$$\boxed{\vec{a}_{|\mathcal{R}}(M) = \frac{dv_C}{dt} \vec{u}_x - b \left(\frac{v_C}{R} \right)^2 \vec{u}_r + \frac{b}{R} \frac{dv_C}{dt} \vec{u}_\theta}$$

2. Comme la norme d'un vecteur est indépendante de la base grâce à laquelle nous la calculons, nous pouvons choisir la base demandant le moins de calculs.

Il est important ici de ne pas confondre base de projection et référentiel. Nous pouvons écrire aussi bien $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M)$ et $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M)$ qui sont des vecteurs fondamentalement différents dans avec les vecteurs (\vec{u}_x, \vec{u}_y) , $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ ou, s'ils étaient différents, avec $(\tilde{u}_x, \tilde{u}_y)$.

L'accélération est la somme de deux termes \vec{a}_e et \vec{a} . Représentons-les.



Comme \vec{a} a des coordonnées constantes dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et que \vec{a}_e a une norme constante et prend toutes les directions par rapport à $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, la norme maximale de \vec{a} sera la somme des normes

de ces deux accélérations, soit : $a = a_C + \frac{b}{R} \sqrt{\frac{v_C^4}{R^2} + a_C^2}$. Nous trouvons $\boxed{a = 1,71668 \times 10^3 \text{ m.s}^{-2}}$.

☛ Remarque : cette accélération vaut près de 170 fois l'accélération de pesanteur, c'est énorme!

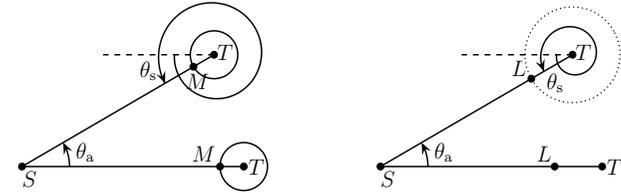
Exercice 6

1. Pour un observateur M , le Soleil est au zénith lorsque les points M , S et T sont alignés.

Sur le premier schéma ci-dessous, nous constatons qu'entre deux positions successives du Soleil au zénith, la Terre s'est déplacée de l'angle θ sur son orbite (dans le référentiel héliocentrique, celui dans lequel le centre du Soleil est fixe). Il faudra donc que la Terre effectue une rotation d'angle $\theta_s = 2\pi + \theta_a$ sur elle-même pendant la même durée, à savoir T_m .

En notant Ω_a et Ω_s les vitesses angulaires correspondant aux rotations de périodes respectives T_a et T_s , nous obtenons l'égalité angulaire suivante : $\Omega_a T_m + 2\pi = \Omega_s T_m$.

En exprimant chacune des vitesses angulaires en fonction de la période $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, nous obtenons bien le résultat demandé. Numériquement : $\boxed{T_m - T_s = 235,904437 \text{ s}}$.



2. La nouvelle Lune correspond à l'alignement dans cet ordre du Soleil, de la Lune et de la Terre.

Le cercle en pointillés sur le deuxième schéma ci-dessus correspondent à la trajectoire de la Lune dans le référentiel géocentrique. Entre deux passages de la Lune entre la Terre et le Soleil, la Terre a tourné de l'angle θ sur sa propre trajectoire. Ainsi, pendant la durée T_n , la Terre a tourné de l'angle θ_a et la Lune de l'angle $\theta_s = 2\pi + \theta_a$.

En introduisant les vitesses angulaires Ω_a et Ω_s correspondant aux rotations de périodes respectives T_a et T_s , nous obtenons l'égalité angulaire suivante : $2\pi + \Omega_a T_n = \Omega_s T_n$.

En exprimant chacune des vitesses angulaires en fonction de la période $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, nous obtenons bien le résultat demandé. $\boxed{T_n - T_s = 2,205326 \text{ j}}$.

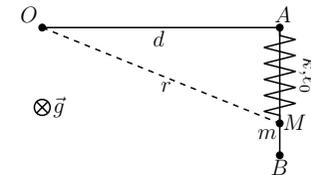
Exercice 7

Analyse physique :

- puisque le problème est de chercher un équilibre par rapport à un référentiel tournant, autant réfléchir directement dans ce référentiel
- ainsi dans le référentiel tournant, la masse est immobile et il s'agit d'un mouvement conservatif à un degré de description
- les grandeurs pertinentes sont m (inertie), d (géométrie) k, ℓ_0 (action) ω (rotation du référentiel) et pas de g car le mouvement est horizontal.
- étant donné que nous cherchons une position d'équilibre, il y a de fortes chances que la masse inertielle n'intervienne pas.

Analyse technique :

- commençons par refaire le schéma dans le référentiel tournant
- dans ce référentiel, la masse a une trajectoire rectiligne (quand elle n'est pas immobile)
- pour chercher l'équilibre, nous allons utiliser une approche énergétique (mouvement conservatif, un degré de liberté) et utiliser ℓ comme degré de description.



1. Dans le référentiel tournant, le point M est soumis aux forces suivantes :

- force à distance : le poids (qui ne joue aucun rôle car ne travaille pas)
- force de contact : la force exercée par la tige (qui ne travaille pas)
- force de contact : la tension exercée par le ressort d'énergie potentielle $E_{p,el} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$
- force d'inertie d'entraînement d'énergie potentielle $E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2$

L'équilibre est caractérisé par $\frac{dE_p(\ell)}{d\ell} = 0$. Cela donne, avec $r^2 = d^2 + \ell^2$:

$$E_p(\ell) = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 (d^2 + \ell^2) \rightsquigarrow \frac{dE_p(\ell)}{d\ell} = k (\ell - \ell_0) - m \omega^2 \ell (d^2 + \ell^2)$$

Et ainsi, après calculs nous obtenons $\ell = \frac{\ell_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ où $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

2. L'appareil peut servir à mesurer les vitesses angulaire à condition que celles-ci ne soient pas supérieures à ω_0 . En effet une mesure de ℓ (avec l'aide d'un stroboscope par exemple) permet de déterminer ω . Le maximum de sensibilité est atteint lorsque $\omega \lesssim \omega_0$ car a une faible variation de vitesse angulaire correspond une grande variation de longueur ℓ .

✿ Exercice 8

Puisque le problème est de trouver les positions d'équilibre dans le référentiel tournant, le plus naturel va donc consister à raisonner dans ce référentiel.

Analyse physique :

→ dans le référentiel tournant, non galiléen, le point M a une trajectoire circulaire (quand il n'est pas immobile)

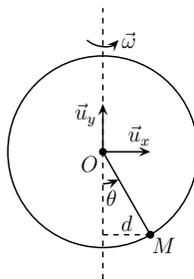
→ l'évolution est libre, conservatif et à un degré de description.

→ les grandeurs pertinentes sont m (inertie), R (géométrie), g (action), omega (force d'inertie)

Analyse technique :

→ nous allons naturellement repérer M par θ

→ comme le mouvement est conservatif et à un degré de liberté, nous allons utiliser une approche énergétique



Dans le référentiel tournant, le point M est soumis à 4 forces :

→ force de contact : la force exercée par le cerceau, qui ne travaille pas

→ force à distance : le poids, d'énergie potentielle $E_{p,p} = m g z = m g (-R \cos \theta)$

→ force d'inertie d'entraînement d'énergie potentielle $-\frac{1}{2} m \omega^2 d^2$ où d est la distance du point M à l'axe de rotation

→ force d'inertie de CORIOLIS qui ne travaille pas

Ainsi l'énergie potentielle totale vaut : $E_p(\theta) = -m g R \cos \theta - \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \sin^2 \theta$.

Les positions d'équilibres θ_{eq} sont telles que $\frac{dE_p(\theta)}{d\theta} = 0$. θ_{eq} est ainsi solution de l'équation :

$$\sin \theta_{eq} (g - \omega^2 R \cos \theta_{eq}) = 0 \rightsquigarrow \theta_{eq1} = 0 \quad \text{ou} \quad \cos \theta_{eq2} = \frac{g}{\omega^2 R}$$

La deuxième solution n'est envisageable que si $\omega^2 R > g$, ie. si le cerceau tourne assez vite.

Il y a stabilité si $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{eq}) > 0$.

Or, pour θ_{eq1} , nous avons $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{eq1}) = m R (g - \omega^2 R)$, ce qui permet de conclure que

La position d'équilibre $\theta_{eq1} = 0$ n'est donc stable que si $\omega^2 R < g$.

Pour θ_{eq2} nous avons : $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{eq2}) = (\dots) = m \omega^2 R^2 \sin^2 \theta_{eq} > 0$.

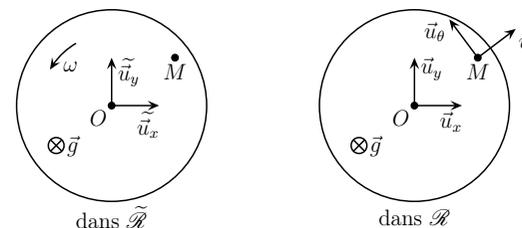
la solution θ_{eq2} est donc toujours stable ... quand elle existe.

✿ Exercice 9

► Étude générale

Quelle que soit la vitesse initiale, les équations d'évolutions de l'objet vont être identiques. C'est pourquoi nous allons d'abord chercher les équation d'évolution dans $\tilde{\mathcal{R}}$ et \mathcal{R} avant de les résoudre dans deux cas différents.

Pour que le référentiel \mathcal{R} soit en rotation pure par rapport à $\tilde{\mathcal{R}}$, nous allons centrer les deux référentiels au même point O, centre du manège.



→ Dans $\tilde{\mathcal{R}}$

Le référentiel est considéré comme galiléen. Les forces agissant sur l'objet sont

→ force à distance : le poids $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_z$

→ force de contact : la réaction du manège $\vec{R} = R \vec{n} = R \vec{u}_z$ avec $R > 0$

Le PFD s'écrit donc $\vec{P} + \vec{R} = m \vec{a}(t)$. De plus, comme le mouvement se fait sur le plan du manège, l'accélération suivant la verticale est nulle, d'où $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$. Finalement, nous avons : $m \vec{a}(t) = \vec{0}$.

→ Dans \mathcal{R}

Le référentiel est non galiléen. En plus du poids et de la réaction du manège, il faut ajouter les « forces d'inertie » :

→ la « force d'inertie » d'entraînement s'écrit $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_c$ soit ici $\vec{f}_{ie} = +m \omega^2 \vec{OM}$

→ la « force d'inertie » de CORIOLIS vaut $\vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c = -2 m \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M)$

Le PFD s'écrit donc : $m \vec{a}(t) = m \omega^2 \vec{OM}(t) - 2 m \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}(t)$.

► Vitesse initiale nulle par rapport à \mathcal{R}

→ Trajectoire par rapport \mathcal{R}

Puisque l'accélération est constamment nulle et que la vitesse initiale est nulle, les équations du mouvement s'intègrent immédiatement : $\vec{OM} = \vec{C}^{te} = \vec{r}_0$.

[L'objet est immobile par rapport \mathcal{R} .] Le manège tourne « en-dessous » de lui.

→ Trajectoire dans $\tilde{\mathcal{R}}$

En utilisant les coordonnées polaires du plan (Oxy) , nous obtenons en projetant le PFD sur \vec{u}_r et \vec{u}_θ :

$$\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2(t) = \omega^2 r(t) + 2\omega r(t)\dot{\theta}(t) \quad \text{et} \quad r(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) = -2\omega\dot{r}(t)$$

La condition initiale sur la position s'écrit : $r(0) = r_0$.

La condition initiale sur $\dot{\theta}(t)$ se trouve en utilisant la loi de composition des vitesses : $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M) + \vec{v}_e$.

Ainsi à $t = 0$, $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M) = \vec{0}$, $\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \omega r(0)\vec{u}_\theta$ et $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M) = r(0)\dot{\theta}(0)\vec{u}_\theta$ et comme $r(0) = r_0$, nous en déduisons que $\dot{\theta}(0) = -\omega$.

La solution $r(t) = C^{te} = r_0$ et $\dot{\theta}(t) = C^{te} = -\omega$ vérifie à la fois les conditions initiales et les équations différentielles. C'est donc une solution du problème. Par unicité de la solution, c'est la solution.

Nous trouvons une trajectoire circulaire. Ainsi l'objet fait le tour du manège.

▀ *Remarque* : cette trajectoire circulaire ne fait que confirmer le mouvement de M par rapport à $\tilde{\mathcal{R}}$. Le manège tournant en dessous de M , M fait alors le tour du manège sans bouger par rapport à $\tilde{\mathcal{R}}$. Mais M bouge effectivement par rapport au manège : il glisse même sur le manège !

► **Vitesse initiale nulle dans \mathcal{R}**

→ *Trajectoire dans \mathcal{R}*

Les équations du mouvement s'intègrent tout aussi facilement. Notons $\tilde{x}(t)$ et $\tilde{y}(t)$ les coordonnées de M dans un repère cartésien de \mathcal{R} . La condition initiale s'écrit : $\tilde{x}(0) = r_0$, $\tilde{y}(0) = 0$, $\dot{\tilde{x}}(0) = 0$ et $\dot{\tilde{y}}(0) = r_0\omega$.

Nous avons donc : $\tilde{x}(t) = r_0$ et $\tilde{y}(t) = r_0\omega t$.

La trajectoire est rectiligne dans $\tilde{\mathcal{R}}$. Bien sûr, tant que l'objet reste sur le manège !

→ *Trajectoire dans \mathcal{R}'*

Notons x et y les coordonnées de M dans un repère attaché à \mathcal{R} .

Le PFD s'écrit donc :

$$m\vec{a}(t) = \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} \quad \rightsquigarrow \quad m \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - 2m\omega \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

En projetant cette équation sur \vec{u}_x et sur \vec{u}_y puis en introduisant la fonction complexe inconnue $\underline{u}(t) = x(t) + jy(t)$, nous obtenons l'équation différentielle : $\ddot{\underline{u}}(t) + 2j\omega\dot{\underline{u}}(t) - \omega^2\underline{u}(t) = 0$ dont les solutions sont (le discriminant de l'équation caractéristique est nul) : $\underline{u}(t) = (A + Bt)e^{-j\omega t}$.

Les conditions initiales s'écrivent $\underline{u}(0) = r_0$ et $\dot{\underline{u}}(0) = 0$. Nous pouvons ainsi déterminer A et B .

Nous trouvons finalement : $\underline{u}(t) = r_0(1 + j\omega t)e^{-j\omega t}$ soit $x(t) = \text{Re}(\underline{u}(t)) = r_0(\cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t))$ et $y(t) = \text{Im}(\underline{u}(t)) = r_0(-\sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t))$.

Le palet décrit donc une spirale dans \mathcal{R}' .

▀ *Remarque* : en écrivant $\vec{u}_x = \sin(\omega t)\vec{u}_x + \cos(\omega t)\vec{u}_y$ et $\vec{u}_y = \cos(\omega t)\vec{u}_x - \sin(\omega t)\vec{u}_y$ et en utilisant les formules trigonométriques idoines, nous retrouvons bien que $\vec{OM} = r_0\vec{u}_x + r_0\omega t\vec{u}_y$ (heureusement).

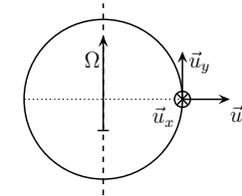
Bien que le mouvement dans \mathcal{R} soit globalement une rotation, nous n'avons pas utilisé directement les coordonnées cylindro-polaires. Cela s'explique par le fait que lorsque le mouvement n'est pas circulaire ou presque circulaire, les coordonnées cylindro-polaires aboutissent à des systèmes qu'il est difficile de découpler. Par exemple ici, cela nous aurait conduit à (essayer de le retrouver pour l'entraînement) :

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2(t) = \omega r(t) + 2\omega r(t)\dot{\theta}(t) \\ 2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t) = -2\omega\dot{r}(t) \end{cases}$$

Ceci dit, en travaillant avec la fonction complexe inconnue $\underline{u}(t)$ nous pouvons sans difficulté trouver $r(t) = |\underline{u}(t)|$ et $\theta(t) = \arg(\underline{u}(t))$, ce qui revient, en fait à travailler avec les coordonnées cylindro-polaire sans trop le dire. La chose à retenir pour cette méthode c'est que pour trouver l'équation vérifiée par $\underline{u}(t)$ qui représente les coordonnées cylindro-polaire, le plus facile c'est d'utiliser les coordonnées cartésiennes.

✿ Exercice 10

1. (a) En notant, comme usuellement, \vec{u}_z vers le haut, \vec{u}_x vers l'est et \vec{u}_y vers le nord, nous pouvons représenter la situation sur un point de l'équateur par le schéma ci-dessous.



Nous voyons alors que $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_y$. Comme dans le référentiel terrestre la force d'inertie due à la rotation de la Terre est incluse dans le poids, il suffit, pour « voir » la déviation, de s'intéresser à la force d'inertie de CORIOLIS s'exerçant que la balle : $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ où m est la masse de la balle et \vec{v} sa vitesse dans le référentiel terrestre.

Comme $\vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z$ avec $v_x \gg v_y$ et $v_x \gg v_z$ (car la balle va essentiellement vers l'est) on trouve $\vec{f}_{ic} = 2m\Omega v_x\vec{u}_z$. Pour un tir vers l'est, $v_x > 0$, nous en déduisons $f_{ie,z} > 0$, ie. la déviation se fera vers le haut.

1. (b) Le PFD appliqué à la balle s'écrit $\vec{P} + \vec{f}_{ic} = m\vec{a}$ où \vec{P} est le poids (on rappelle qu'on néglige les frottements). Avec l'expression précédente de la force d'inertie de CORIOLIS, les projections sur \vec{u}_x et sur \vec{u}_z du PFD précédent donnent :

$$0 = m\ddot{x}(t) \quad \text{et} \quad -g + 2\Omega v_x = \ddot{z}(t)$$

De $\ddot{x}(t) = 0$ nous en déduisons $\dot{x}(t) = v_x(t) = v_x(0) = C^{te}$ et comme la balle parcourt la distance D pendant la durée t_0 nous pouvons écrire $v_x(t) = \frac{D}{t_0}$.

La deuxième projection du PFD permet d'arriver, avec les conditions initiales $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = 0$ à $z(t) = \frac{1}{2}t^2(2\Omega v_x - g)$.

L'écart Δz par rapport au mouvement sans force de CORIOLIS (donc en tenant compte uniquement du poids) vaut $\Delta z(t) = \Omega v_x t^2$ soit, au bout de la distance D correspondant à la durée t_0 :

$$\Delta z = \Omega D t_0 = 0,2 \text{ mm}$$

▀ *Remarque* : Cet écart est totalement négligeable, non pas parce qu'il n'est pas mesurable, mais parce que les forces de frottement négligées provoquent des écarts bien plus importants.

2. Les équations étant algébriques, tout ce qui a été fait précédemment reste juste, notamment l'expression de la force d'inertie de CORIOLIS : $\vec{f}_{ic} = 2m\Omega v_x\vec{u}_z$.

La différence c'est que maintenant, le tir se faisant vers l'ouest, $v_x < 0$ et donc $f_{ie,z} < 0$ ce qui permet de dire que la déviation se fera vers le bas.

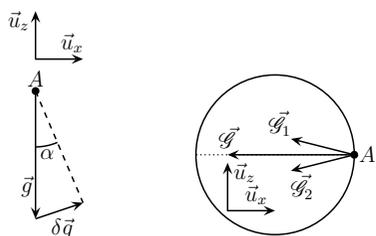
Pour la valeur numérique de l'écart, les étapes sont les mêmes, le raisonnement aussi, la seule différence est que $v_x = -\frac{D}{t_0}$ et donc que $\Delta z = -\Omega D t_0 = -0,2 \text{ mm}$.

☛ Exercice 11

1. *A priori* un tel défaut crée une modification en norme et en direction de l'accélération de pesanteur, ce que nous pouvons écrire sous la forme $\vec{g} = \vec{g}_0 + \delta\vec{g}$ où $\delta\vec{g}$ est dû au défaut géologique.

Étant donné la taille de la Terre (près de 6 400 km de rayon) et de la taille attendue du défaut géologique (au « pire » 10 km de rayon) nous pouvons en déduire immédiatement $\|\delta\vec{g}\| \ll \|\vec{g}_0\|$. Ainsi

la situation est représentée ci-dessous, ce qui donne $\alpha = \frac{\delta g_x}{g_0}$, *ie.* pour déterminer l'angle α , il n'y a besoin que de s'occuper de la composante sur \vec{u}_x (horizontale) du champ gravitationnel déviant.



2. Si une Terre sans défaut est superposée une demi-sphère notée \star de rayon R et de densité $\rho - \rho_0$ alors nous retrouvons une Terre avec le défaut géologique.

Par additivité des champs de gravitation, nous pouvons alors écrire $\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{G}}_0 + \vec{\mathcal{G}}^\star$.

Une fois que l'on prend en compte les forces d'inerties présentes dans le référentiel terrestre, cette relation se réécrit $\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{\mathcal{G}}^\star$.

En associant à la demi-sphère \star une autre demi-sphère rigoureusement identique, nous obtenons une sphère homogène dont on connaît le champ gravitationnel créé au point A (cf. schéma ci-dessus) :

$$\vec{\mathcal{G}}(A) = -G \frac{M_{\text{tot}}}{R^2} \text{ où } M_{\text{tot}} = (\rho - \rho_0) \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ est la masse de cette sphère.}$$

Nous pouvons alors constater que la composante sur \vec{u}_x d'une seule demi-sphère vaut la moitié du résultat précédent, à savoir $\mathcal{G}_x = -(\rho - \rho_0) \frac{2\pi}{3} R$.

En utilisant le résultat de la question précédente nous trouvons finalement : $\alpha = (\rho_0 - \rho) \frac{2\pi R G}{3g_0}$.

☛ Remarque : le fait que l'angle soit nul lorsque $\rho = \rho_0$ est cohérent car cela correspond, alors, à une Terre sans défaut. De plus nous pouvons constater aussi que ce résultat est valable quelle que soit la valeur de ρ : si $\rho < \rho_0$ alors $\alpha > 0$ et \vec{g} pointe « vers la droite » alors que si $\rho > \rho_0$ l'accélération de pesanteur est davantage en direction du défaut.

☛ Exercice 12

1. (a) Voir le cours. $\vec{\mathcal{M}}_A(M) = \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(T)$ où $\vec{\mathcal{G}}_A(M)$ est le champ de gravitation créé par l'astre au point M .

1. (b) Écrivons les deux champs de gravitation :

$$\vec{\mathcal{G}}_A(M) = \frac{G M_A}{r^2} \vec{u}_1 \quad \text{où} \quad \vec{u}_1 = \frac{\vec{MA}}{MA} = \cos \theta \vec{u}_x - \sin \theta \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{G}}_A(T) = \frac{G M_A}{d^2} \vec{u}_x$$

Nous obtenons ainsi $\vec{\mathcal{G}}(M) - \vec{\mathcal{G}}(T) = G M_A \frac{1}{r^2} (\cos \theta \vec{u}_x - \sin \theta \vec{u}_y) - G M_A \frac{1}{d^2} \vec{u}_x$.

De plus avec PYTHAGORE, nous pouvons écrire :

$$r^2 = (d - R \cos \lambda)^2 + R^2 \sin^2 \lambda \quad \rightsquigarrow \quad r^2 = d^2 \left(\left(1 - \frac{R}{d} \cos \lambda\right)^2 + \frac{R^2}{d^2} \sin^2 \lambda \right)$$

En faisant un développement limité au premier ordre (*ie.* les termes en $\frac{R^2}{d^2}$ sont négligés) nous obtenons $r^2 = d^2 \left(1 - \frac{2R}{d} \cos \lambda\right)$.

En remplaçant r^2 dans l'expression initiale et avec $\cos \theta = 1$ et $\sin \theta = \theta = \frac{R \sin \lambda}{d}$ à l'ordre 1, nous obtenons finalement le résultat demandé.

1. (c) Nous pouvons écrire $\vec{MF} = \vec{TF} - \vec{TM} = 3\vec{TP} - \vec{TM}$.

Or $\vec{TM} = R (\cos \lambda \vec{u}_x + \sin \lambda \vec{u}_y)$ et $\vec{TP} = R \cos \lambda \vec{u}_x$.

Nous obtenons donc $\vec{MF} = R (2 \cos \lambda \vec{u}_x - \sin \lambda \vec{u}_y)$, ce qui est le résultat attendu avec $\kappa = R$.

Nous constatons que \vec{MF} et $\vec{\mathcal{M}}_A$ sont tous les deux colinéaires à $\vec{u} \stackrel{\text{not}}{=} 2 \cos \lambda \vec{u}_x - \sin \lambda \vec{u}_y$, ils sont donc colinéaires entre eux. La construction de Proctor est ainsi justifiée car construire \vec{MF} revient à construire $\vec{\mathcal{M}}_A$.

2. Pour interpréter les marées, il faut se placer dans le référentiel terrestre. Avec \vec{u}_z la verticale locale et \vec{u}_x le vecteur qui pointe vers la côte, si le terme de marée a une composante positive sur \vec{u}_x , cela signifie qu'il y a marée haute.

Dans le type ① nous voyons bien que lors d'une demi-rotation de la Terre, *ie.* au bout d'une demi-journée, il y a une marée haute identique à celle 12 heures auparavant. La période des marées est donc d'une demi-journée, soit « semi-diurne ».

Dans le type ②, au bout de 12 heures nous pouvons constater qu'il existe bien une autre marée haute mais d'intensité différente, c'est pourquoi la période des marées est bien d'une demi-journée, mais ce sont des marées « inégales », d'où « semi-diurne à inégalité diurne ».

Pour le type ③, nous constatons qu'au bout de 12 heures, la composante horizontale (pour le point M) du terme de marée a une direction opposée, *ie.* il y a marée basse. C'est pourquoi dans ce cas il n'y a qu'une marée par jour, soit une marée « diurne ».