

Mécanique des systèmes de points

⊛ Exercice 1

ici, assez peu de questions à se poser vu que le problème est très guidé. Néanmoins, faisons l'analyse physique :

- la luge va avancer et glisser sur le profil tant qu'elle n'aura pas décroché
- tant qu'elle ne décroche pas, et en considérant que l'évolution se fait dans le plan vertical (plan de la figure) la luge a un mouvement à un seul degré de description
- l'évolution est libre et conservative
- les grandeurs pertinentes sont m (inertie), R (géométrie) g (action) et pour une fois v_0 (condition initiale).

1. Les deux forces s'exerçant sur G sont :

- le poids $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_x$
 - la réaction du support (normale car sans frottement) $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_{\text{sortant}} = R_N \vec{u}_r$
- En utilisant le TMC par rapport au point O , nous avons :
- $\vec{\sigma}_O = \vec{O}\vec{A} \wedge m \vec{v} = R \vec{u}_r \wedge m v \vec{u}_\theta = m R^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$
 - $\mathcal{M}_O(\vec{P}) = \vec{O}\vec{G} \wedge \vec{P} = +m g R \sin \theta \vec{u}_z$
 - $\mathcal{M}_O(\vec{R}_N) = \vec{0}$

Nous obtenons, en projection sur \vec{u}_z :

$$m R^2 \dot{\theta} = m g R \sin \theta \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\dot{\theta}(t) - \frac{g}{R} \sin \theta(t) = 0}$$

2. En multipliant par $\dot{\theta}(t)$ l'équation précédente, nous obtenons :

$$\dot{\theta}(t) \ddot{\theta}(t) - \frac{g}{R} \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) = 0$$

Cette équation s'intègre en :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2(t) + \frac{g}{R} \cos \theta(t) = C^{\text{te}}$$

La constante se détermine avec les conditions initiales. À $t = 0$, nous avons :

$$R \dot{\theta}(0) = v_0 \quad \rightsquigarrow \quad \dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2(t) + \frac{g}{R} \cos(\theta(t)) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2(0) + \frac{g}{R} \cos(\theta(0)) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\dot{\theta}^2(t) = \frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2g}{R} [1 - \cos(\theta(t))]}$$

3. Le PFD s'écrit $\vec{P} + \vec{R} = m \vec{a}(t)$ soit, en coordonnées cylindro-polaires avec $r(t) = C^{\text{te}} = R$:

$$-m g \vec{u}_x + R_N \vec{u}_r = m (-R \dot{\theta}^2(t) \vec{u}_r + R \ddot{\theta}(t) \vec{u}_\theta)$$

La projection sur \vec{u}_θ redonne la relation obtenue à la question 1.

La projection sur \vec{u}_r donne :

$$-m g \cos(\theta(t)) + R_N = -m R \dot{\theta}^2(t) \quad \rightsquigarrow \quad R_N = -m R \dot{\theta}^2(t) + m g \cos \theta(t)$$

Et en utilisant l'expression de $\dot{\theta}^2(t)$ obtenue ci-dessus :

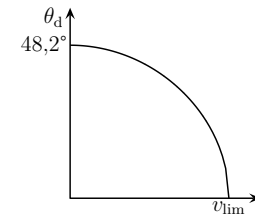
$$\boxed{R_N(t) = -m \frac{v_0^2}{R} + m g (3 \cos(\theta(t)) - 2)}$$

4. La luge quitte le sol en θ_d lorsque $R_N(\theta_d) = 0$, soit :

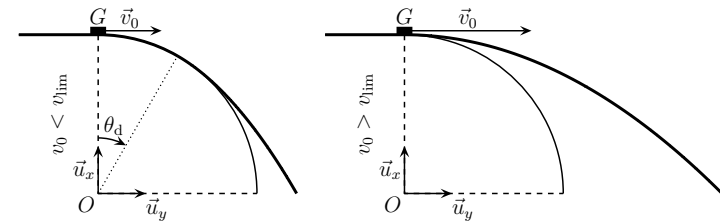
$$m g (3 \cos \theta_d - 2) = m \frac{v_0^2}{R} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\theta_d = \arccos \left(\frac{v_0^2}{3 g R} + \frac{2}{3} \right)}$$

Cette expression n'a de sens que pour :

$$\frac{v_0^2}{3 g R} + \frac{2}{3} \leq 1 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{v_0 \leq v_{\text{lim}} = \sqrt{g R}}$$



5. Au delà de cette limite, la luge quitte la piste dès $\theta = 0$; la trajectoire est semblable à celle représentée ci-dessous.



⊛ Exercice 2

Analyse physique :

- ici la tige va osciller à cause de la présence du ressort
- le mouvement est un seul degré de description et l'évolution est libre et conservative
- les grandeurs pertinentes sont : m (inertie) b , a (géométrie), k , ℓ_0 et g (actions)

Analyse technique :

- bien que le dispositif soit à un degré de description, en évolution libre et conservative, l'énoncé nous impose l'utilisation du TMC. Soit.
- parce que la tige va tourner autour de O , nous allons centrer le repère sur lui.

1. Choisissons comme système { tige + masse }.

À l'équilibre, la somme des forces appliquée à ce système est nulle.

Cette somme est composée de trois termes :

- le moment exercé par le poids $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_z$
- le moment exercé par la force créée par le ressort $\vec{T} = -k (\ell - \ell_0) \vec{u}_{\text{sortant}} = -k (\ell - \ell_0) (\cos \alpha \vec{u}_y - \sin \alpha \vec{u}_z)$

→ le moment exercé par la réaction d'axe est nulle car il n'y a pas de frottement.

Pour un équilibre horizontal, le point M est tel que $\vec{OM} = b \vec{u}_y$ et donc :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = -m b g \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = +k (\ell - \ell_0) \sin \alpha \vec{u}_x$$

Ainsi :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\ell = \frac{k a}{k a - m g} \times \ell_0}$$

Pour que l'équilibre soit possible, il est donc nécessaire que $k a > m g$ car $\ell < 0$ n'a aucun sens physique.

2. Avec θ très petit, nous avons $\sin \theta = \theta$ et $\cos \theta = 1$.

Ainsi $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OB} \wedge m \vec{g} = -m g b \vec{u}_x$.

Pour déterminer le moment exercé par le ressort, il va falloir faire des approximations. Commen-

çons par réécrire la force sous la forme $\vec{T} = -k (AB - \ell_0) \frac{\vec{AB}}{AB}$.

Au premier ordre, nous avons :

$$\vec{OB} = b \cos \theta \vec{u}_y - b \sin \theta \vec{u}_z = b \vec{u}_y - b \theta \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} b \\ b \theta - a \end{pmatrix}$$

De plus :

$$AB^2 = b^2 + (b \theta - a)^2 = b^2 + a^2 + 2 a b \theta = \ell^2 + 2 a b \theta$$

Ce qui donne :

$$AB = \sqrt{\ell^2 + 2 a b \theta} = \ell \sqrt{1 + \frac{2 a b \theta}{\ell^2}} = \ell \left(1 + \frac{b \theta}{\ell^2} \right)$$

Ainsi, après de lourds (mais pas très longs) calculs, en simplifiant tous les termes d'ordre supérieur ou égal à deux, nous trouvons :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \frac{k a b}{\ell} \left(-\frac{a b \ell_0}{\ell^2} \theta + (\ell - \ell_0) \right) \vec{u}_x$$

Le théorème du moment cinétique s'écrit donc, en projection du \vec{u}_x :

$$m b^2 \ddot{\theta} = -m g b + \frac{k a b (\ell - \ell_0)}{\ell} - \frac{k a^2 b^2 \ell_0}{\ell^3}$$

En utilisant la condition d'équilibre et en remplaçant ℓ par la valeur déterminée ci-dessus, nous trouvons :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{(k a - m g)^3}{m k^2 a \ell_0^2} \theta(t) = 0$$

Nous reconnaissons une équation du type $\ddot{\xi}(t) + \omega_0^2 \xi(t) = 0$ dont les solutions sont sinusoïdales

de période : $T_0 = 2 \pi \sqrt{\frac{m k^2 a \ell_0^2}{(k a - m g)^3}}$.

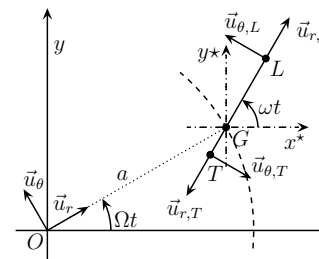
Si $m g \simeq k a$, la période devient très longue.

Exercice 3

Ici, comme les deux points matériels considérés (la Terre et la Lune) sont rigidement liés (puisque la distance qui les sépare est constante), ils constituent un solide. Dans ces conditions l'approche systématique est plus adaptée : nous allons donc utiliser les théorèmes de KOENIG. Pour cela, il faut d'abord regarder ce qui se passe dans le référentiel barycentrique.

Préliminaires

Notons T et L les points matériels représentant respectivement la Terre et la Lune et \mathcal{S} le système { Terre - Lune }.



Détermination de la position et de la vitesse de T et de L dans \mathcal{R}^*

Notons $(\vec{u}_{r,T}, \vec{u}_{\theta,T})$ la base polaire associée au point T et $(\vec{u}_{r,L}, \vec{u}_{\theta,L})$ la base polaire associée au point L .

Remarque : nous pouvons voir que $\vec{u}_{r,T} = -\vec{u}_{r,L}$ et $\vec{u}_{\theta,T} = -\vec{u}_{\theta,L}$.

Nous avons donc : $\vec{GT} = GT \vec{u}_{r,T}$ et $\vec{GL} = GL \vec{u}_{r,L}$.

Comme G est le centre de masse de T et de L , nous avons :

$$m_T \vec{GT} + m_L \vec{GL} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad m_T GT = m_L GL$$

Comme $\ell = TL = GT + GL$, nous trouvons : $GT = \frac{m_L}{m_L + m_T} \ell$ et $GL = \frac{m_T}{m_L + m_T} \ell$.

Comme les mouvements de T et L dans \mathcal{R}^* sont circulaires, nous avons directement :

$$\vec{v}^*(T) = GT \omega \vec{u}_{\theta,T} \quad \text{et} \quad \vec{v}^*(L) = GL \omega \vec{u}_{\theta,L}$$

Moment et énergie cinétique dans \mathcal{R}^*

Par extensivité du moment cinétique, nous avons :

$$\vec{\sigma}^*(\mathcal{S}) \triangleq \vec{\sigma}^*(T) + \vec{\sigma}^*(L) = \vec{GT} \wedge m_T \vec{v}^*(T) + \vec{GL} \wedge m_L \vec{v}^*(L) = m_T GT^2 \omega \vec{u}_z + m_L GL^2 \omega \vec{u}_z$$

Cela donne $\vec{\sigma}^*(\mathcal{S}) = \omega \ell^2 \frac{m_T m_L^2 + m_L m_T^2}{(m_T + m_L)^2} \vec{u}_z = \frac{m_T m_L}{m_T + m_L} \ell^2 \omega \vec{u}_z$.

De même pour l'énergie cinétique :

$$E_c^*(\mathcal{S}) \triangleq E_c^*(T) + E_c^*(L) = \frac{1}{2} m_T v^{*2}(T) + \frac{1}{2} m_L v^{*2}(L) = \frac{1}{2} m_T GT^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_L GL^2 \omega^2 = \frac{\omega^2 \ell^2}{2} \frac{m_L m_T}{m_L + m_T}$$

Vitesse de G dans le référentiel héliocentrique

Notons $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ la base polaire associée au point G . Ainsi, comme le mouvement de G est circulaire, $\vec{v}_{|\mathcal{R}(G)} = a \Omega \vec{u}_\theta$.

1. Utilisons le théorème de KOENIG relatif à l'énergie cinétique :

$$E_{c|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} (m_L + m_T) v_{|\mathcal{R}}^2(G) + E_c^*(\mathcal{S}) \rightsquigarrow E_{c|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \frac{m_T + m_L}{2} a^2 \Omega^2 + \frac{\omega^2 \ell^2}{2} \frac{m_L m_T}{m_L + m_T}$$

2. Utilisons le théorème de KOENIG relatif au moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_{O|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \overrightarrow{OG} \wedge (m_T + m_L) \vec{v}_{|\mathcal{R}}(G) + \vec{\sigma}^* \rightsquigarrow \vec{\sigma}_{O|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \left[(m_T + m_L) a^2 \Omega + \frac{m_T m_L}{m_T + m_L} \ell^2 \omega \right] \vec{u}_z$$

3. En considérant d'abord $m_T \gg m_L$, nous trouvons : $E_{c|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \frac{m_T}{2} a^2 \Omega^2 + \frac{\ell^2 \omega^2}{2} m_L$.

Comme numériquement $a^2 \Omega^2 \simeq 900 \ell^2 \omega^2$, nous avons en fait : $E_{c|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \frac{m_T}{2} a^2 \Omega^2$, i.e. l'énergie cinétique du système Terre – Lune est principalement due au mouvement de la Terre autour du Soleil.

$m_T \gg m_L$ donne $\vec{\sigma}_O = (m_T a^2 \omega + m_L \ell^2 \omega) \vec{u}_z$ et comme $m_T a^2 \omega \gg m_L \ell^2 \omega$, nous avons simplement : $\vec{\sigma}_{O|\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = m_T a^2 \omega \vec{u}_z$, i.e. le moment cinétique du système Terre – Lune est principalement dû au mouvement de la Terre autour du Soleil.

Conclusion : lorsque l'on étudie le mouvement de la Terre autour du Soleil, nous pouvons raisonnablement négliger en première approximation l'influence de la Lune.

Exercice 4

Analyse physique :

- les deux masses étant reliées par une tige rigide, elles vont bouger de conserve vers la droite tout en tournant sur elles-mêmes
- dans le référentiel lié au plan, le mouvement est libre et conservatif
- comme le mouvement est plan, il y aura deux degrés de liberté pour G et un degré de liberté de rotation. Finalement il y aura 3 degrés de liberté qui seront en fait des degrés de description.
- Les résultats vont dépendre de m_1, m_2 (inertie), ℓ (géométrie) et ω (condition initiale). Le poids ne va pas intervenir ici puisque le mouvement est horizontal.

Analyse technique :

- le repérage est déjà choisi. Pas de problème de ce point de vue.
- étant donné que les deux points sont rigidement liés, nous allons aborder le mouvement de manière systémique : d'abord le mouvement d'ensemble et ensuite le mouvement propre.
- vu le nombre de degrés de description de translation, nous allons plutôt utiliser une approche en terme de force

Équations du mouvement

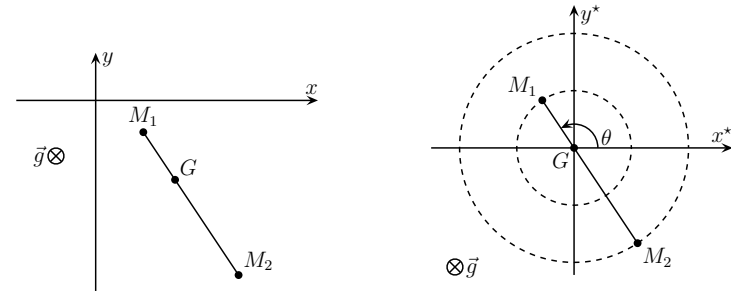
→ Mouvement d'ensemble

Notons \mathcal{S} le système $\{ m_1 + m_2 + \text{tige} \}$. Les forces extérieures qui s'exercent sur lui sont :

- force à distance : le poids total de m_1 et m_2
- force de contact : les réactions du support s'exerçant sur m_1 et m_2

Ces quatre forces sont orthogonales à (Oxy) , notamment parce que le contact est sans frottement.

Dès lors le TCI appliqué à \mathcal{S} projeté sur (Oxy) donne $(m_1 + m_2) \vec{a}_G(t) = \vec{0}$ puis $\vec{v}_G(t) = \vec{C}^{\text{te}}$.



→ Mouvement propre

Écrivons le théorème du moment cinétique barycentrique : $\frac{d\vec{\sigma}^*(t)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{f})$.

Comme les deux masses sont à une distance constante du cdm G (et pour cause, elles sont reliées par une tige), elles ont un mouvement circulaire (*a priori* pas uniforme) dans \mathcal{R}^* .

En notant $\dot{\theta}(t)$ la vitesse angulaire de rotation, nous trouvons :

$$\begin{cases} \vec{\sigma}_1^*(t) = m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z \\ \vec{\sigma}_2^*(t) = m_2 \ell_2^2 \dot{\theta}(t) \vec{u}_z \end{cases} \quad \text{où} \quad \ell_1 \stackrel{\text{not}}{=} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell \quad \text{et} \quad \ell_2 \stackrel{\text{not}}{=} \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ell$$

De plus comme toutes les forces subies par m_1 et m_2 sont parallèles à \vec{u}_z , leurs moments associés $\overrightarrow{GM_i} \wedge \vec{f}$ n'ont aucune composante sur \vec{u}_z .

Ainsi, le TMCB donne, en projection sur \vec{u}_z : $(m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2) \ddot{\theta}(t) = 0$ soit $\dot{\theta}(t) = C^{\text{te}}$.

Détermination des conditions initiales

Nous avons toujours $(m_1 + m_2) \vec{v}_G(t) = m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t)$ et en particulier à l'instant initial où $\vec{v}_1(0) = \vec{0}$ et $\vec{v}_2(0) = \ell \omega \vec{u}_x$. Nous trouvons alors $\vec{v}_G(0) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell \omega \vec{u}_x = \ell_1 \omega \vec{u}_x$.

Nous avons aussi toujours (loi de composition des vitesses avec le référentiel baricentrique) :

$$\vec{v}_1^*(t) = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_G(t) \rightsquigarrow \vec{v}_1^*(0) = -\ell_1 \omega \vec{u}_x$$

Nous trouvons de même $\vec{v}_2^*(0) = \ell_2 \omega \vec{u}_x$.

Par identification avec $v_1^*(t) = \ell_1 \dot{\theta}(t)$ et $v_2^*(t) = \ell_2 \dot{\theta}(t)$ nous obtenons $\dot{\theta}(0) = \omega$.

Finalement nous avons $\vec{v}_G(t) = \ell_1 \omega \vec{u}_x$ et $\dot{\theta}(t) = \omega$.

Équations horaires

En notant $\theta(t)$ l'angle algébrique $(\vec{u}_y, \overrightarrow{M_2 M_1})$, nous pouvons remarquer que :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_G(t) - \ell_1 \sin(\theta(t)) \\ y_1(t) = y_G(t) + \ell_1 \cos(\theta(t)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2(t) = x_G(t) + \ell_2 \sin(\theta(t)) \\ y_1(t) = y_G(t) - \ell_2 \cos(\theta(t)) \end{cases}$$

Cela donne, puisque $\theta(t) = \omega t$:

$$\begin{cases} x_1(t) = \ell_1 [\omega t - \sin(\omega t)] \\ y_1(t) = \ell_1 [\cos(\omega t) - 1] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2(t) = \ell_1 \omega t + \ell_2 \sin(\omega t) \\ y_1(t) = -\ell_1 - \ell_2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

⊛ Exercice 5

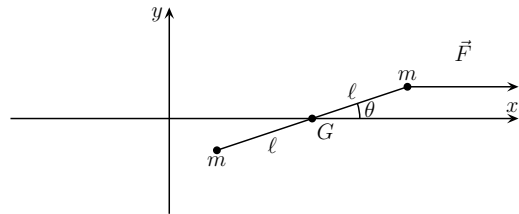
Analyse physique :

- l'ensemble étant tiré vers la droite, les deux masses vont globalement se déplacer vers la droite
- il y a 3 degrés de liberté (2 pour la position du centre de masse, 1 pour l'angle θ) donc ici 3 degrés de description
- le mouvement est forcé (une « source » extérieure tire la une des deux masses)
- les résultats vont dépendre de m (inertie), ℓ (géométrie) et F (contrainte).
- nous allons supposer que le fil est toujours tendu

Analyse technique :

- étant donné le nombre de degré de description, une approche en terme de forces (TCI puis TMCB) s'impose
- le repérage sera cartésien pour le mouvement d'ensemble car globalement les deux masses reliées ont tendance à se translater horizontalement
- comme les deux masses sont reliées, nous allons plutôt choisir une approche systémique

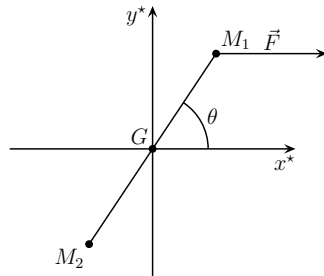
► Mouvement d'ensemble



Le TCI appliqué à $\mathcal{S} \{ M_1 + M_2 + \text{fil} \}$ s'écrit, en projection sur \vec{u}_x : $2 m a_G(t) = F$, ce qui donne, avec la condition initiale $x_G(0) = 0$ (déterminée à partir de $x_1(0)$ et de $x_2(0)$), $x_G(t) = \frac{F}{2m} t^2$.

► Étude dans le référentiel barycentrique

Réfaçons un schéma dans le référentiel barycentrique.



En notant $\theta(t)$ l'angle $(\vec{u}_x, \overrightarrow{GM_1})$, le théorème du moment cinétique barycentrique s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}^*(t)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}) \quad \text{avec} \quad \frac{d\vec{\sigma}^*(t)}{dt} = 2 m \ell^2 \ddot{\theta}(t) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}) = F \ell \sin \theta(t) \vec{u}_z$$

Cela donne l'équation d'évolution suivante : $\ddot{\theta}(t) = \frac{F}{2 m \ell} \sin \theta(t)$.

En considérant $\theta(t) \ll 1$ et en remarquant que $\dot{\theta}(0) = 0$, nous trouvons finalement :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega^2 \stackrel{\text{not}}{=} \frac{F}{2 m \ell}$$

► Regroupement des résultats $x_2(t) = \frac{F}{2m} t^2 - \ell \cos \theta(t)$ et $y_2(t) = -\ell \sin \theta(t)$.

⚡ Remarque : pour être complet, il faudrait vérifier l'hypothèse « le fil est toujours tendu ». Pour cela, il faudrait écrire un PFD sur une des deux masses dans le référentiel barycentrique (en tenant compte de la force d'inertie) et montrer que la tension \vec{T} subie est bien toujours vers « l'intérieur ».

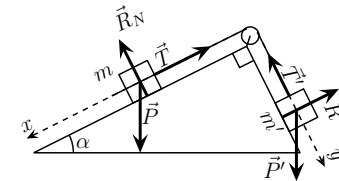
⊛ Exercice 6

1. Analyse physique :

- à cause du caractère inextensible du fil, le dispositif est à un degré de liberté donc à un seul degré de description
- ici l'évolution est libre et, puisque les frottements sont négligés, conservative
- les grandeurs pertinentes sont : m, m' (inertie), α (géométrie), g (action)

Analyse technique :

- nous allons privilégier les deux axes correspondant aux deux directions selon lesquelles les masses glissent
- de plus comme le dispositif est à un degré de liberté et conservatif, nous allons utiliser une approche énergétique
- comme les deux masses ont des mouvements relativement indépendants, l'approche systémique – avec les théorèmes de KOENIG – ne semble pas appropriée.



► Approche énergétique. Définissons le système $\mathcal{S} \{ m + \text{fil} + \text{poulie} + m' \}$ et listons les forces qui interviennent dans l'évolution :

- les poids de m et m' associés aux énergies potentielles :

$$E_p = m g \text{ altitude} = -m g x \sin \alpha \quad \text{et} \quad E_p = m' g \text{ altitude}' = -m' g y \cos \alpha$$

- les forces de contact exercées par le support sur les masses : ne travaille pas car pas de frottement et support immobile
 - l'action de l'axe de la poulie sur la poulie : ne travaille pas car pas de frottement
 - les interactions $m \leftrightarrow \text{fil}$ et $m' \leftrightarrow \text{fil}$: ne travaillent pas car les points sont rigidement liés
 - l'interaction fil \leftrightarrow poulie : ne travaille pas car le contact est un frottement sans glissement
- Finalement, l'énergie mécanique totale est bien conservée.

L'énergie cinétique se réduit à l'énergie cinétique des deux masses car tant le fil que la poulie sont sans masse. Cela donne :

$$E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} m' \dot{y}^2(t)$$

Nous allons choisir comme degré de description la position $x(t)$ de m . Il faut donc maintenant écrire $y(t)$ en fonction de $x(t)$.

Ce qui contraint $y(t)$ par rapport à $x(t)$, *ie.* ce qui **physiquement** fait que m' bouge quand m bouge, c'est le fil et surtout sa qualité d'inextensibilité.

Nous avons ainsi $x(t) + y(t) = L$ et donc $\dot{x}(t) = -\dot{y}(t)$.

Cela donne :

$$E_m = E_c + E_{p,tot} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} m' (-\dot{x})^2(t) - m g x(t) \sin \alpha - m' g (L - x(t)) \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{2} (m + m') \dot{x}^2(t) - g (m \sin \alpha - m' \cos \alpha) x(t) - m' g L$$

En dérivant par rapport au temps, cela donne :

$$\frac{dE_m}{dt} = (m + m') \ddot{x}(t) \dot{x}(t) - g (m \sin \alpha - m' \cos \alpha) \dot{x}(t) = 0$$

En simplifiant par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre $\dot{x}(t) = 0$, nous arrivons à

$$a(t) = g \frac{m \sin \alpha - m' \cos \alpha}{m + m'}$$

Ce résultat est homogène et cohérent :

→ si m est « trop grand », alors il va y avoir $a(t) > 0$, *ie.* m va être entraînée vers le bas

→ si m' est trop grand, là m va être entraîné vers le haut $a(t) < 0$

► **Solution avec la méthode en terme de forces.**

Ici, comme nous l'avons déjà remarqué, une approche systémique, *ie.* un TCI ne sera pas adapté. Pour une approche en force, il faut donc faire deux PFD sur les deux masses.

Chacune des deux masses est soumise à trois forces : son poids (\vec{P} ou \vec{P}'), la réaction normale du support (\vec{R} ou \vec{R}') et la tension exercée par le fil (\vec{T} ou \vec{T}').

Les projections des PFD respectivement sur \vec{u}_x et sur \vec{u}_y donnent :

$$m a(t) = m g \sin \alpha - T \quad \text{et} \quad m' a'(t) = m' g \cos \alpha - T'$$

Comme le fil est inextensible, nous pouvons écrire $a(t) = -a'(t)$ et comme en plus il est idéal soutenu par une poulie idéale, nous avons aussi $T = T'$.

Finalement, par « élimination » de T , nous trouvons $a(t) = g \frac{m \sin \alpha - m' \cos \alpha}{m + m'}$.

[2.] Ici le dispositif n'est plus conservatif, l'approche énergétique est donc à renégocier. Le but est de déterminer une position d'équilibre avec une force de frottement de type solide. C'est impossible énergétiquement. L'approche en terme de forces est donc obligatoire ici.

Remarquons bien que seule m subit des frottements solides.

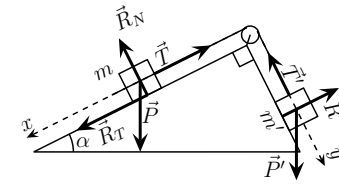
Comme m' ne subit pas de frottement, son équation d'évolution est identique à la question précédente : $m' a'(t) = m' g \cos \alpha - T'$.

De plus, comme nous allons considérer des cas limites d'équilibre, nous pouvons poser $a'(t) = 0$. Nous obtenons ainsi $T = T' = m' g \cos \alpha$.

Le PFD sur m s'écrit maintenant, en tenant compte du frottement solide, et pour la position d'équilibre :

$$\vec{0} = m \vec{g} + \vec{T} + \vec{R}_N + \vec{R}_T \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} 0 = m g \sin \alpha - T \pm R_T & \text{où } R_T > 0 \\ 0 = m g \cos \alpha - R_N \end{cases}$$

Dans le cas de l'équilibre limite nous avons donc $R_T = f R_N = R_N \tan \varphi$.



→ Le mouvement s'amorce vers le bas (x positifs).

Nous avons alors $\vec{R}_T = -R_T \vec{u}_x$ et le PFD donnent $T = m' g \cos \alpha = m g \sin \alpha - (\tan \varphi) m g \cos \alpha$. L'équilibre est donc rompu dès que $m' < m'_{lim1} = \frac{m}{\cos \alpha} (\sin \alpha - \tan \varphi \cos \alpha) = m (\tan \alpha - \tan \varphi)$.

→ Le mouvement s'amorce vers le haut (x négatifs).

Nous avons alors $\vec{R}_T = +R_T \vec{u}_x$ et le PFD donnent $T = m' g \cos \alpha = m g \sin \alpha + (\tan \varphi) m g \cos \alpha$. L'équilibre est donc rompu dès que $m' > m'_{lim2} = m (\tan \alpha + \tan \varphi)$.

→ **Rassemblement.** Finalement, les conditions se résument par $\tan \alpha - \tan \varphi \leq \frac{m'}{m} \leq \tan \alpha + \tan \varphi$.

☛ **Remarques :**

→ si $\alpha < \varphi$, la limite inférieure est toujours respectée, ce qui signifie que le glissement vers le bas est toujours impossible;

→ pour la limite sans frottement $f = \tan \varphi \rightarrow 0$, il n'existe qu'une valeur de m' assurant l'équilibre : $m' = m \tan \alpha$, valeur confirmée par les résultats de la première question lorsque l'on cherche $a = 0$.

☛ **Exercice 7**

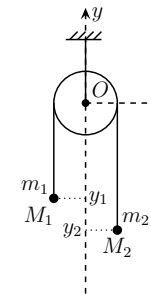
Cet exercice est extrêmement guidé : le repérage est donné, les lois à utiliser aussi, de même pour le système, ... Finalement il ne reste plus qu'à faire un peu d'analyse physique histoire d'anticiper sur les résultats.

Analyse physique :

→ en supposant que le mouvement des deux masses soit vertical (pas d'effet « pendule simple »), alors le dispositif est à un degré de liberté donc à un degré de description.

→ l'évolution est libre et conservative

→ enfin les résultats dépendront de m_1, m_2 (inertie), L longueur du fil et de R rayon de la poulie (géométrie) et g (action).



[1.] En faisant attention au caractère négatif des ordonnées de $y_1(t)$ et de $y_2(t)$, nous voyons que la longueur du fil s'écrit $\ell(t) = -y_1(t) + \pi R - y_2(t)$.

Comme la longueur du fil est constante (fil inextensible), nous pouvons écrire $\dot{\ell}(t) = 0 = -\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)$ soit $\dot{y}_1(t) = -\dot{y}_2(t)$.

Et en dérivant une fois de plus cette relation nous arrivons à $\ddot{y}_1(t) = -\ddot{y}_2(t)$.

2. Recherche des accélérations.

→ PFD sur M_1 . Il n'y a que deux forces qui s'exercent sur M_1 : son poids $\vec{P}_1 = -m_1 g \vec{u}_y$ et la tension exercée par le fil $\vec{T}_1 = T_1 \vec{u}_y$ (T_1 forcément positif).

La projection du PFD sur \vec{u}_y donne donc $m_1 \ddot{y}_1(t) = -m_1 g + T_1$.

→ PFD sur M_2 . Ici aussi il n'y a que deux forces qui s'exercent sur M_2 : son poids $\vec{P}_2 = -m_2 g \vec{u}_y$ et la tension exercée par le fil $\vec{T}_2 = T_2 \vec{u}_y$ (T_2 forcément positif).

La projection du PFD sur \vec{u}_y donne donc $m_2 \ddot{y}_2(t) = -m_2 g + T_2$.

→ Regroupement. Comme le fil et la poulie sont idéaux, nous pouvons dire que $T_1 = T_2$.

Dès lors, en soustrayant les deux PFD nous arrivons à $m_1 \ddot{y}_1(t) - m_2 \ddot{y}_2(t) = (m_2 - m_1) g$.

En utilisant la relation obtenue dans la première question nous obtenons

$$\ddot{y}_1(t) = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = -\ddot{y}_2(t)$$

☛ Remarque : avec $m_2 > m_1$, l'accélération de M_1 est positive, ie. vers le haut ; c'est cohérent.

3. Comme les deux masses ont des mouvements distinct, la notion de centre de masse ne paraît pas très intéressante ici, c'est la raison pour laquelle nous n'utiliserons pas une approche systémique, mais une approche particulière.

Pour utiliser le TMC, il suffit de prendre en compte les forces extérieures s'exerçant sur le système \mathcal{S} . Celles-ci sont : les poids de M_1 et M_2 ainsi que les forces de contact que la poulie exerce sur chaque petit bout du fil.

→ Expression du moment cinétique. Par extensivité du moment cinétique, nous avons :

$$\vec{\sigma}_O(\mathcal{S}) = \vec{\sigma}_O(M_1) + \vec{\sigma}_O(M_2)$$

Les moments cinétiques des points s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{\sigma}_O(M_1) = \overrightarrow{OM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 = (-R \vec{u}_x + y_1 \vec{u}_y) \wedge \dot{y}_1 \vec{u}_y = -m_1 R \dot{y}_1 \vec{u}_z \\ \vec{\sigma}_O(M_2) = \overrightarrow{OM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2 = m_2 R \dot{y}_2 \vec{u}_z \end{cases}$$

Finalement, en utilisant la relation trouvée à la première question $\vec{\sigma}_O(\mathcal{S}) = -R(m_2 + m_1) \dot{y}_1(t) \vec{u}_z$.

☛ Remarque : dans la définition du moment cinétique, il faudrait normalement rajouter celui du fil, mais comme le fil est sans masse... pas de masse, pas de moment cinétique !

→ Expression des moments des forces. Commençons par les deux poids. Par définition :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_1) \triangleq \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{P}_1 = (-R \vec{u}_x + y_1 \vec{u}_y) \wedge (-m_1 g \vec{u}_y) = m_1 g R \vec{u}_z$$

De même $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_2) \triangleq \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{P}_2 = (\dots) = -m_2 g R \vec{u}_z$.

Sur chaque petite portion de fil en contact avec la poulie, il s'exerce une force normale au support parce que le contact est sans frottement.

Ainsi en notant N un point quelconque du fil en contact avec la poulie, la force $\vec{R}(N)$ est telle que $\vec{R}(N) = \lambda \overrightarrow{ON}$ avec λ inconnu.

Dès lors le moment de cette force élémentaire vaut $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{ON} \wedge \vec{R}(N) = \vec{0}$ parce que les deux vecteurs sont colinéaires.

Ainsi, en considérant tous les points N de contact entre le fil et la poulie, le moment global de toutes les forces exercées par la poulie est nul.

☛ Remarque : puisque les forces que la poulie exerce sur le fil sont à moment total nul, alors les forces que le fil exerce sur la poulie sont aussi à moment total nul. Dans ces conditions **la poulie ne tourne**

pas autour de son axe. Eh oui ! Cela peut paraître paradoxal mais ça ne l'est pas : s'il n'y a pas de frottement le fil **glisse** sur la poulie et il ne peut donc pas l'entraîner.

→ Rassemblement. Le TMC s'écrit $\frac{d\vec{\sigma}(\mathcal{S})}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_{\text{ext}})$.

En reprenant les résultats précédents et en projetant sur \vec{u}_z nous arrivons à

$$-R(m_1 + m_2) \dot{y}_1(t) = Rg(m_1 - m_2)$$

Puis, en simplifiant, nous retrouvons bien l'accélération trouvée dans la question 2.

4. Nous allons utiliser le théorème de la puissance mécanique. Pour l'étude de systèmes de points, il est nécessaire de prendre en compte les forces extérieures ainsi que les interactions intérieures.

→ Les forces extérieures. Le bilan a déjà été fait : il s'agit des poids de M_1 et M_2 ainsi que la force de contact entre la poulie et le fil.

Le poids étant une force conservative, nous pouvons introduire l'énergie potentielle dont dérivent les poids de M_1 et M_2 . Il s'agit respectivement de $E_{p1} = m_1 g y_1$ et $E_{p2} = m_2 g y_2$.

Lorsque le système est en mouvement, le fil glisse dans la gorge de la poulie. Ainsi en considérant juste un tout petit bout de fil, nous constatons que son déplacement (suivant la poulie) est orthogonal à la force qu'il subit (dirigée suivant le rayon de la poulie). Dans ces conditions la force s'exerçant sur ce petit bout de fil ne travaille pas et, par extension, la force globale que la poulie exerce sur le fil ne travaille pas.

→ Les interactions intérieures. Il y a l'interaction entre le fil et M_1 d'une part et entre le fil et M_2 d'autre part. Ces interactions ne travaillent pas car les points (fil / poulie) sont rigidement liés.

→ Rassemblement. Le théorème de la puissance mécanique s'écrit $\frac{dE_m(\mathcal{S})}{dt} = \mathcal{P}_{\text{nc,int}} + \mathcal{P}_{\text{nc,ext}}$.

Nous avons $\mathcal{P}_{\text{nc,int}} = \mathcal{P}_{\text{nc,ext}} = 0$ et $E_c(\mathcal{S}) = E_c(M_1) + E_c(M_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2(t) + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2(t)$.

En remplaçant et en dérivant nous obtenons $m_1 \dot{y}_1 \ddot{y}_1(t) + m_2 \dot{y}_2 \ddot{y}_2(t) + m_1 g \dot{y}_1(t) + m_2 g \dot{y}_2(t) = 0$.

En utilisant les relations de la première question et en simplifiant par $\dot{y}_1(t)$ (car $\dot{y}_1(t) = 0$ est une solution inintéressante correspondant à l'équilibre) nous arrivons à $(m_1 + m_2) \ddot{y}_1(t) + (m_1 - m_2) g = 0$ ce qui redonne bien l'accélération obtenue dans la deuxième question.

☛ Exercice 8

Analyse physique :

→ l'ensemble va osciller à cause du ressort

→ le mouvement est libre, conservatif (pas de frottement)

→ le dispositif est à un degré de liberté (une fois connue la longueur du ressort, tout le reste peut être parfaitement positionné)

→ les résultats vont dépendre de m_1, m_2 (inertie), R et L longueur du fil (géométrie) k, ℓ_0, g (action)

→ cela dit, avec un ressort, la pulsation des oscillations fait rarement intervenir le poids : seule la position de l'équilibre dépend du poids et nous savons que la loi des fils implique que leur longueur n'est importante que pour la position statique, pas pour l'évolution dynamique

Analyse technique :

→ un degré de description ? un mouvement conservatif ? La décision est déjà prise : ce sera une approche énergétique

→ ici pour étudier l'ensemble, nous passerons évidemment par un système mais que nous regarderons de manière particulière et non systémique car la position du centre de masse n'est clairement pas pertinente ici.

Choisissons le système suivant : { la poulie + le fil + les deux masses }. Ce système est à évolution conservative.

En effet les forces extérieures auxquelles est soumis ce système sont : le poids (conservatif), la tension du ressort (conservative) et la force exercée par le support sur le fil. Cette dernière force,

non conservative, ne travaille pas car le point d'application (le bout du fil) ne se déplace pas, donc $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. L'évolution est bien conservative.

L'origine du repère est en O avec \vec{u}_z orienté vers le haut, donc $z_1(t)$ et $z_2(t)$ sont négatifs.

► **Énergie potentielle.** Notons $\ell(t) = -z_1(t)$ est la longueur du ressort et $\ell_0 = -z_0$ sa longueur naturelle. Alors :

$$E_p = E_{p,p} + E_{p,el} = m_1 g z_1(t) + m_2 g z_2(t) + \frac{1}{2} k (\ell(t) - \ell_0)^2$$

► **Ramener tout au degré de description.** Si tout est relié, c'est à cause du fil et surtout de son inextensibilité. Traduisons-la.

Notons d la longueur du fil, $z_t(t)$ la cote du point d'attache et R le rayon de la poulie. Nous avons donc : $d = (z_1(t) - z_t(t)) + \pi R + (z_1(t) - z_2(t))$.

Or $d = C^{te}$, donc $\dot{d} = 0$ ce qui donne : $2\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t)$

► **Énergie cinétique :** $E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2(t) + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2(t) = \frac{m_1 + 4m_2}{2} \dot{z}_1^2(t)$

► **Conservation de l'énergie mécanique.** Celle-ci s'écrit :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad g(m_1 + 2m_2)\dot{z}_1(t) + k(z_1(t) - z_0)\dot{z}_1(t) + (m_1 + 4m_2)\dot{z}_1(t)\ddot{z}_1(t) = 0$$

En simplifiant par la solution inintéressante $\dot{z}_1(t) = 0$ correspondant à l'équilibre, nous trouvons :

$$\boxed{\ddot{z}_1(t) + \omega^2 z_1(t) = \omega^2 z_{\text{éq}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{z_{\text{éq}} = z_0 - \frac{g}{k}(m_1 + 2m_2)} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega^2 = \frac{k}{m_1 + 4m_2}}$$

La solution de cette équation est donc bien une solution sinusoïdale de pulsation ω et de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ce qui donne bien le résultat proposé.

✪ **Exercice 9**

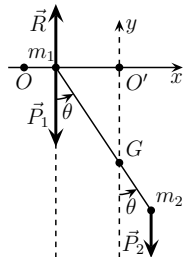
Analyse physique :

- le pendule va osciller, les deux masses vont bouger (c'est ça le but)
- l'évolution est libre est conservatif puisqu'aucune force ne dissipe de l'énergie
- il y a deux degrés de description : la position de M_1 ainsi que l'angle θ .
- les résultats vont dépendre de m_1, m_2 (inertie), ℓ (géométrie) et g (action)

Analyse technique :

- le repérage est déjà choisi
- l'approche, elle est déjà sous-entendue par les questions
- ceci étant, une approche systémique de \mathcal{S} est pertinente étant donné le lien très fort qui existe entre M_1 et M_2 .

1. Utilisons le TCI appliqué au système $\mathcal{S} = \{ M_1 + M_2 + \text{tige} \}$.



Les forces extérieures s'exerçant sur \mathcal{S} sont les poids \vec{P}_1 de M_1 et \vec{P}_2 de M_2 (la tige, elle, est sans masse) et la réaction \vec{R} de l'axe (Ox) sur M_1 .

Comme ces trois forces sont verticales (notamment parce qu'il n'y a pas de frottement), la projection du TCI sur l'axe (Ox) donne $(m_1 + m_2) a_{G,x}(t) = 0$ puis $v_{G,x}(t) = C^{te}$.

Nous avons toujours $(m_1 + m_2) \vec{v}_G(t) = m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t)$ ce qui permet d'obtenir, en considérant l'instant initial : $\vec{v}_G(0) = \vec{0}$ puis $v_{G,x}(0) = 0$.

Finalement nous avons $\boxed{v_{G,x}(t) = 0}$, ie. le mouvement du centre de masse est purement vertical.

Nous pouvons donc changer de repérage et utiliser $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

2. Considérons toujours le système \mathcal{S} . Comme ce dernier constitue un solide, les masses M_1 et M_2 ne bougeant pas l'une par rapport à l'autre, la puissance des forces intérieures est nulle. La puissance des forces extérieures non conservatives ne comprend que la puissance fournie par la réaction de l'axe (Ox) sur M_1 , mais comme le contact est sans frottement, \vec{R} est toujours orthogonale au déplacement de M_1 , la force ne travaille donc pas.

Le TEM s'écrit donc ici :

$$E_m(\mathcal{S})(t) = C^{te} \quad \text{avec} \quad E_m(\mathcal{S}) = E_c(\mathcal{S}) + E_p(\mathcal{S})$$

De plus $E_p(\mathcal{S}) = E_p(M_1) + E_p(M_2)$. Or $E_p(M_1) = C^{te}$ car son mouvement est horizontal. Nous pouvons donc ne pas la prendre en compte dans l'énergie potentielle totale.

Ainsi : $E_p(M_2) = m_2 g$ altitude = $m_2 g y_2$.

Par extensivité de l'énergie cinétique :

$$E_c(\mathcal{S}) = E_c(M_1) + E_c(M_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2(t) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2(t) + \dot{y}_2^2(t))$$

Il reste à exprimer les coordonnées cartésiennes $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $y_2(t)$ en fonction de $\theta(t)$. Avec la définition du centre de masse, nous trouvons :

$$GM_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell \stackrel{\text{not}}{=} \ell_1 \quad \text{et} \quad GM_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ell \stackrel{\text{not}}{=} \ell_2$$

Ainsi, comme $x_1(t) = -\ell_1 \sin \theta(t)$, $x_2(t) = \ell_2 \sin \theta(t)$ et $y_2(t) = -\ell \cos \theta(t)$, nous trouvons, en remplaçant dans l'expression de l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}^2(t) \cos^2 \theta(t) + \frac{1}{2} m_2 \ell_2^2 \dot{\theta}^2(t) (\ell_2^2 \cos^2 \theta(t) + \ell^2 \sin^2 \theta(t))$$

Puis, en utilisant les expressions de ℓ_1 et de ℓ_2 et en simplifiant avec la formule trigonométrique $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, nous arrivons à $E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ell^2 \dot{\theta}^2(t) \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta(t) \right)$.

Le TEM s'écrit donc, en déterminant la constante avec les conditions initiales :

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ell^2 \dot{\theta}^2(t) \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta(t) \right) - m_2 g \ell \cos \theta(t) = -m_2 g \ell \cos \theta_0$$

Ou encore, en utilisant l'expression de ω et avec la formule trigonométrique $\cos \theta = 1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}$:

$$\boxed{\dot{\theta}^2(t) \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta(t) \right) + 4\omega^2 \left(\sin^2 \frac{\theta(t)}{2} - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) = 0}$$

✪ **Remarques :**

- l'expression ci-dessus montre qu'il est nécessaire d'avoir $\sin^2 \frac{\theta}{2} \leq \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$, ie. $|\theta| \leq \theta_0$;

- l'équation n'étant pas du type $\ddot{\alpha}(t) + \omega_0^2 \alpha(t)$, le pendule va donc osciller de manière non sinusoïdale;
- l'équation d'évolution est non linéaire, il est donc inutile de chercher des solutions « exactes » sans faire d'approximations.

3. Comme le pendule va osciller entre θ_0 et $-\theta_0$, si l'on considère des petites oscillations, cela implique que $\theta_0 \ll 1$.

Ainsi $\sin \frac{\theta(t)}{2} = \frac{\theta(t)}{2}$ et $\sin \theta(t) = \theta(t)$.

En remplaçant nous obtenons $\dot{\theta}^2(t) \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \theta^2(t) \right) + \omega^2 (\theta^2(t) - \theta_0^2) = 0$.

Le terme en $\dot{\theta}^2(t) \theta^2(t)$ est d'ordre 4, il est donc totalement négligeable devant le terme en $\dot{\theta}^2(t)$.

Il reste alors $\dot{\theta}^2(t) + \omega^2 (\theta^2(t) - \theta_0^2) = 0$ soit, en dérivant et en simplifiant par la solution non intéressante correspondant à l'équilibre $\dot{\theta}(t) = 0$, nous arrivons à $\left[\ddot{\theta}(t) + \omega^2 \theta(t) = 0 \right]$, ce qui est bien l'équation d'évolution d'oscillations sinusoïdales (cette fois) de pulsation ω .

Remarque : si $m_1 \gg m_2$, la masse M_1 est quasiment fixe et on se retrouve dans le cas d'un pendule simple de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

Exercice 10

Analyse physique :

- c'est la simple chute d'une tige massique à deux degrés de liberté : la position de la masse au sol et l'angle que forme la tige avec la verticale (si tout se passe dans un plan et si la masse au sol reste au sol, bien sûr)
- l'évolution est libre et conservatif
- les grandeurs pertinentes sont m (inertie), ℓ (géométrie), g et m .

Analyse technique :

- ici avec deux degrés de description, un théorème énergétique ne suffira pas.
- nous allons passer par un TCI (qui donnera des information sur la position du centre de masse) puis par autre chose (pour trouver l'évolution en $\alpha(t)$)

1. Les forces extérieures s'exerçant sur le système \mathcal{S} constitué par les deux masses et la tige sont les poids des deux masses ainsi que la réaction du support sur A .

Le TCI s'écrit donc : $2m\vec{a}_G(t) = m\vec{g} + m\vec{g} + \vec{R}(t)$.

Comme toutes ces forces sont verticales (le contact est sans frottement), la projection sur (Ox) donne $a_G(t) = 0$ soit $v_G(t) = C^{te}$.

De plus à l'instant initial nous avons $2m\vec{v}_G(0) = m\vec{v}_1(0) + m\vec{v}_2(0) = \vec{0}$. Nous en déduisons que la vitesse de G sur (Ox) est constamment nulle, ie. $\left[\text{le mouvement de } G \text{ est vertical} \right]$.

2. Ici, le plus naturel serait une approche énergétique, comme dans l'exercice précédent. Nous allons présenter ici comment faire autrement : avec le TMC. L'écriture de ce théorème ne pas poser de difficulté sauf que la réaction exercée par le sol va intervenir et que celle-ci est parfaitement inconnue. Cela étant, nous connaissons la méthode pour déterminer l'expression d'une force inconnue : un bon vieux TCI.

La projection du TCI sur l'axe (Oy) donne $2m \dot{y}_G(t) = -2mg + R$.

Comme $y_G(t) = \ell \sin(\alpha(t))$, nous avons :

$$\dot{y}_G(t) = \dot{\alpha}(t) \ell \cos(\alpha(t)) \quad \text{et} \quad \ddot{y}_G(t) = \ell \ddot{\alpha}(t) \cos(\alpha(t)) - \ell \dot{\alpha}^2(t) \sin(\alpha(t))$$

Ainsi $2m \ell [\ddot{\alpha}(t) \cos(\alpha(t)) - \dot{\alpha}^2(t) \sin(\alpha(t))] = -2mg + R(t)$

Cette première équation n'est pas suffisante pour trouver l'équation en $\alpha(t)$ car $R(t)$ est a priori inconnue et fonction du temps.

La deuxième équation va provenir du théorème du moment cinétique barycentrique :

$$\frac{d\vec{\sigma}^*(\mathcal{S})}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{f})$$

Par définition :

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P}_A) = \vec{G}\vec{A} \wedge \vec{P}_A = (-\ell \cos(\alpha(t)) \vec{u}_x - \ell \sin(\alpha(t)) \vec{u}_y) \wedge (-mg \vec{u}_y) = mg \ell \cos(\alpha(t)) \vec{u}_z$$

Nous trouvons de même :

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P}_B) = \vec{G}\vec{B} \wedge \vec{P}_B = -mg \ell \cos(\alpha(t)) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{R}) = \vec{G}\vec{A} \wedge \vec{R} = -R \ell \cos(\alpha(t)) \vec{u}_z$$

De plus $\vec{\sigma}^*(\mathcal{S}) = \vec{\sigma}^*(A) + \vec{\sigma}^*(B)$.

Or dans le référentiel barycentrique, les deux points matériels ont des trajectoires circulaires de rayon ℓ .

Nous avons ainsi immédiatement :

$$\vec{\sigma}^*(A) = \vec{\sigma}^*(B) = m \ell^2 \dot{\alpha}(t) \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\sigma}^*(\mathcal{S}) = 2m \ell^2 \dot{\alpha}(t) \vec{u}_z$$

Au final, la relation initiale donne, en projection sur \vec{u}_z : $2m \ell \dot{\alpha}(t) = -R(t) \cos(\alpha(t))$

Remarque : le poids n'intervient pas dans le TMCB. C'est un résultat général : le poids ne permet pas de faire tourner un système (cf. dans le cours l'exemple du marteau en §MECA5-II).

En éliminant $R(t)$ entre les deux équations trouvées, nous arrivons à

$$2 \ell \frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} [1 + \cos^2(\alpha(t))] + 2g \cos \alpha - \ell \sin(2\alpha(t)) \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} \right)^2 = 0$$

3. L'équation d'évolution considérée à $t = t_0$ tel que $\alpha(t_0) = 0$ (contact avec le sol) donne :

$$4 \ell \ddot{\alpha}(t_0) + 2g = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{\alpha}(t_0) = -\frac{g}{2\ell}$$

En reprenant l'expression de $\ddot{y}_G(t)$ nous arrivons à $\left[a_{G,y}(t_0) = -\frac{g}{2} \right]$.

4. Pour déterminer la vitesse sans résoudre l'équation différentielle (ce qui est inenvisageable de manière exacte), nous allons utiliser un théorème énergétique, le TEM.

→ Travaux des interactions intérieures. Comme le système \mathcal{S} constitue un solide, la puissance des interactions intérieures est nulle, donc les travaux associés sont nuls.

→ Travaux des forces extérieures. Les travaux des poids de A et de B sont comptés dans l'énergie potentielle : $E_p = mgy_2 = 2mg \ell \sin(\alpha(t))$.

Nous ne tenons compte que de l'énergie potentielle de pesanteur de B car A a un mouvement horizontal.

La force de contact exercée par le sol sur A ne travaille pas car elle est toujours orthogonale au mouvement de A .

→ Énergie cinétique. Utilisons le théorème de Koenig :

$$E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} (2m) \dot{y}_G^2(t) + E_c^*(\mathcal{S})$$

Comme $E_c^*(\mathcal{S}) = E_c^*(A) + E_c^*(B)$, nous arrivons, puisque A et B ont des mouvements circulaires de vitesse angulaire $\dot{\alpha}(t)$ et de rayon ℓ dans le référentiel barycentrique, à :

$$E_c^*(\mathcal{S}) = m \ell^2 \dot{\alpha}^2(t) \quad \rightsquigarrow \quad E_c(\mathcal{S}) = m \ell^2 \dot{\alpha}^2(t) [1 + \cos^2(\alpha(t))]$$

→ *Rassemblement.* Le TEM s'écrit $E_c(\mathcal{S}) + E_p(\mathcal{S}) = C^{\text{te}}$ soit, en remplaçant le tout et en déterminant la constante avec les conditions initiales :

$$m \ell^2 \dot{\alpha}^2 (1 + \cos^2 \alpha) + 2 m g \ell \sin \alpha = 2 m g \ell$$

Cette relation se réécrit $\dot{\alpha}^2 = \frac{2g}{\ell} \times \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$.

→ *Conclusion.* Pour $t = t_0$ nous avons $\alpha(t_0) = 0$ et ainsi $\dot{\alpha}(t_0) = -\sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

En reprenant l'expression de $\dot{y}_G(t)$ nous obtenons donc $v_{G,y} = \dot{y}_G(t_0) = -\sqrt{\ell g}$.

☛ *Remarque :* bien que G chute d'une hauteur ℓ , sa vitesse n'est pas égale à $\sqrt{2g\ell}$. C'est normal : ce n'est pas une chute libre ; il y a un contact avec le sol. Cela se comprend en songeant qu'ici (et contrairement à la chute libre) l'énergie potentielle initiale n'est pas uniquement convertie en énergie cinétique de translation $\frac{1}{2}(2m)\dot{y}_G^2(t)$, mais aussi en partie en énergie cinétique de rotation $E_c^*(\mathcal{S})$.

5. Pour qu'il y ait toujours contact, il faut vérifier que \vec{R} est toujours dirigée vers le haut. Avec l'algébrisation adoptée il faut vérifier que $R \geq 0$.

Les deux équations déterminées dans la deuxième question sont :

$$\begin{cases} 2m\ell(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) = -2mg + R \\ 2m\ell \ddot{\alpha} = -R \cos \alpha \end{cases}$$

En éliminant $\ddot{\alpha}$ entre ces deux équations et en remplaçant $\dot{\alpha}^2$ par la relation trouvée à la question 4, nous arrivons, après quelques manipulations, à $R(1 + \cos^2 \alpha) = 2mg \left(1 - 2 \frac{\sin \alpha - \sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}\right)$.

La condition $R \geq 0$ se réécrit donc $1 + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha + 2 \sin^2 \alpha \geq 0$ ou encore $X^2 - 2X + 2 \geq 0$ où $\sin \alpha \stackrel{\text{not}}{=} X$.

Cette dernière relation est toujours vérifiée car le trinôme a un discriminant négatif ($\Delta = -4$), donc garde un signe constant, qui est positif pour $X = 0$.

Conclusion : il y a bien toujours contact, ce qui valide tous les résultats précédents (ouf!).