Interaction newtonienne

Exercice 1

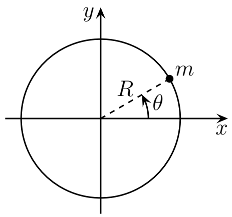
C'est un exercice à savoir faire les yeux fermés car il constitue très souvent le début voire une partie non négligeable d'un problème de mécanique spatiale.

$\boxed{1.}$ *Analyse physique :*

- ➜ *la trajectoire est circulaire par hypothèse, il va donc y avoir un seul degré de description $\theta(t)$*
- ➜ *le mouvement est libre, conservatif (mécanique spatiale sans fusée, sans frottement)*
- ➜ *les grandeurs pertinentes sont m (inertie), M, G (action) et R (contrainte ou géométrie)*

Analyse technique :

- ➜ *le repérage sera cylindro polaire (ou polaire tout court)*
- ➜ *pour déterminer la loi à laquelle obéit $\theta(t)$, rien de tel que l'énergie (mouvement à un degré de description libre et conservatif.*



Écrivons la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - G\,\frac{m\,M}{R} = \frac{1}{2}\,m\,R^2\,\dot{\theta}^2 - G\,\frac{m\,M}{R}$$

Puisque $R = \text{C}^{\text{te}}$ (mouvement circulaire) et $E_{\text{m}} = \text{C}^{\text{te}}$ (évolution conservative), alors $\dot{\theta} = \text{C}^{\text{te}}$.

Comme la trajectoire est circulaire, la vitesse s'écrit $\vec{v}(t) = r\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_\theta$ ce qui implique $\|\vec{v}(t)\| = \text{C}^{\text{te}}$ ou encore que le $\boxed{\text{mouvement est uniforme}}$.

Pour trouver la vitesse du satellite, nous devons utiliser une loi physique, mais ça ne peut pas être l'énergie (ou pas seulement) puisque l'énergie n'est pas une grandeur caractéristique du problème. Cela ne pourra pas être non plus le TMC qui ne pourra donner que « la quantité de rotation est constante ». Reste le PFD.

Projetons le PFD appliqué au satellite (dans le référentiel galiléen centré sur le centre de l'astre atracteur) sur $\vec{u}_r$:

$$-G\,\frac{m\,M}{R^2}\,\vec{u}_r = m\,\vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad -G\frac{m\,M}{R^2} = -R\,\dot{\theta}^2 = -m\,\frac{v^2}{R} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{G\,M}{R}}}$$

Comme le mouvement est uniforme, nous pouvons écrire $v = \dfrac{\ell}{T}$ où ℓ est la distance parcourue en une période. Comme $\ell = 2\,\pi\,R$ nous arrivons à $\boxed{T = 2\,\pi\,R\,\sqrt{\dfrac{R}{GM}}}$.

Par définition, le moment cinétique par rapport au centre vaut $\vec{\sigma} = \vec{R} \wedge m\,\vec{v} = R\,\vec{u}_r \wedge m\,v\,\vec{u}_\theta = m\,r\,v\,\vec{u}_z$. Donc, avec l'expression de v : $\boxed{\sigma = m\,\sqrt{G\,M\,r}}$.

L'énergie mécanique vaut :

$$E_{\text{m}} = E_{\text{c}} + E_{\text{p}} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{G\,m\,M}{R} = \frac{G\,m\,M}{2\,R} - \frac{G\,m\,M}{R} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{E_{\text{m}} = -\frac{G\,m\,M}{2\,R}}$$

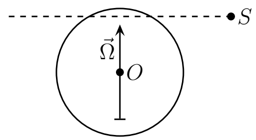
Remarque : nous retrouvons, sans surprise : $E_{\text{m}} = -E_{\text{c}}$.

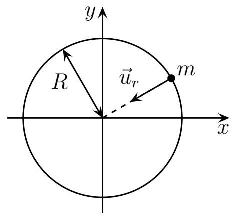
$\boxed{2.}$ En élevant au carré l'expression de la période et en n'oubliant que pour une trajectoire circulaire le rayon n'est autre que le demi-grand axe, nous obtenons :

$$T^2 = R^3\,\frac{4\,\pi^2}{G\,M} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\,\pi^2}{G\,M}}$$

Exercice 2

$\boxed{1.}$ Représentons la situation dans le référentiel géocentrique, référentiel dans lequel la Terre tourne.





Puisque le satellite est géostationnaire, il est immobile par rapport au référentiel terrestre, *ie.* il doit tourner avec le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ autour de l'axe des pôles de la Terre.

Sa trajectoire du satellite est donc un cercle centré sur l'axe **et** orthogonal à l'axe.

Or comme la Terre, du point de vue de la gravitation, est équivalente à un point unique en son centre, ce point, centre de force, doit appartenir au plan de la trajectoire du satellite.

Cela signifie que le satellite a une trajectoire plane centrée sur le centre de la Terre et dont la normale (qui porte le moment cinétique) est colinéaire à l'axe des pôles. C'est bien le plan équatorial.

$\boxed{2.}$ Nous avons déjà démontré que la trajectoire est circulaire centrée sur le centre de la Terre.

En écrivant le PFD dans la base cylindro-polaire, nous trouvons (m étant la masse du satellite et R est le rayon de la trajectoire du satellite) :

$$-m\,R\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + m\,R\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta = -G\,\frac{m\,M_T}{R^2}\,\vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad -m\,\frac{v^2}{R}\,\vec{u}_r + m\,\frac{\text{d}v}{\text{d}t}\,\vec{u}_\theta = -G\,\frac{m\,M_T}{R^2}\,\vec{u}_r$$

En projetant sur $\vec{u}_\theta$ nous trouvons que $v = \text{C}^{\text{te}}$, *ie.* que $\boxed{\text{le mouvement est uniforme}}$.

La projection sur $\vec{u}_r$ donne : $\dfrac{v^2}{R} = G\,\dfrac{M_T}{R^2}$. En utilisant l'altitude $R = R_T + h$ et l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre $g_0 = G\,\dfrac{M_T}{{R_T}^2}$, nous trouvons : $v^2 = \dfrac{g_0\,{R_T}^2}{R_T + h}$.

En notant d la longueur de la circonférence parcourue par le satellite et T la période de révolution nous avons (parce que le mouvement est uniforme) : $d = v\,T = 2\,\pi\,R$.

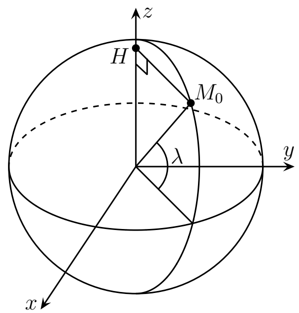
En remplaçant v, nous obtenons :

$$\frac{4\,\pi^2\,(R_T + h)^2}{T^2} = \frac{g_0\,{R_T}^2}{R_T + h} \quad \rightsquigarrow \quad h = \left(\frac{g_0\,{R_T}^2\,T^2}{4\,\pi^2}\right)^{1/3} - R_T$$

Numériquement : $\boxed{h = \underline{3{,}578}679 \times 10^4~\text{km} = \underline{5{,}618}021\,R_T}$.

Exercice 3

Ici étant donné que nous étudions un satellite autour de la Terre, mieux vaut se placer dans le référentiel géocentrique galiléen. Dans ce référentiel, le satellite est déjà en mouvement avant son lancement.



L'énergie totale du satellite est la somme de son énergie potentielle de gravitation et de son énergie cinétique, ce qui donne, avec R est la distance entre le centre de la Terre et le satellite :

$$E_\text{m} = E_\text{p,grav} + E_\text{c} = -G\,\frac{m\,M_T}{R} + \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

➨ **Avant le lancement.** Le satellite est au niveau du sol donc :

$$R = R_T \quad \text{et} \quad v = \omega_T\,HM_0 \quad \leadsto \quad v = \omega_T\,R_T\,\cos\lambda$$

L'énergie totale vaut donc : $E_{\text{m},1} = \dfrac{1}{2}\,m\,{R_T}^2\,{\omega_T}^2\,\cos^2\lambda - \dfrac{G\,M_T\,m}{R_T}$.

➨ **Sur l'orbite circulaire.** La projection du PFD sur le vecteur $\vec{u}_r$ de la base cylindro-polaire donne : $\dfrac{m\,v^2}{r} = G\,\dfrac{M_T\,m}{r^2}$.

Ainsi l'énergie cinétique vaut $E_\text{c} = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2 = G\,\dfrac{M_T\,m}{2\,r}$.

L'énergie potentielle vaut $E_\text{p,grav} = -G\,\dfrac{m\,M_T}{r}$ et l'énergie totale vaut $E_{\text{m},2} = -G\,\dfrac{M_T\,m}{2\,r}$.

➨ **Rassemblement.** La variation d'énergie vaut donc :

$$\Delta E = E_{\text{m},2} - E_{\text{m},1} = G\,M_T\,m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2\,r}\right) - \frac{m}{2}(R_T\,\omega_T)^2\,\cos^2\lambda$$

Et comme $G\,M_T = g_0\,{R_T}^2$, le résultat s'écrit, en fonction de ce qui était demandé :

$$\boxed{\Delta E = g_0\,R_T\,m\left(1 - \frac{R_T}{2\,r}\right) - \frac{m}{2}(R_T\,\omega_T)^2\,\cos^2\lambda}$$

Cette énergie est d'autant plus faible que $\cos\lambda$ est grand. Ainsi les bases de lancement les « meilleures » sont celles proches de l'équateur.

Remarque : ce critère n'inclue que des considérations énergétiques. D'un point de vue sécuritaire, il faut aussi que dans la direction du lancement (vers l'est pour profiter de la rotation de la Terre) il y ait soit la mer, soit une zone désertique pour que les éventuels débris d'une explosion ne retombent pas sur une zone habitée.

Un calcul fait dans le référentiel terrestre amène à un résultat différent. Cela s'explique par le fait que l'énergie n'est pas invariante par changement de référentiel, seul le travail des interactions intérieures le sont. De manière plus détaillée, lorsqu'une fusée décolle, elle emporte un peu de moment cinétique ce qui fait ralentir un tout petit peu la vitesse de rotation de la Terre. Cette variation est évidemment totalement insensible mais c'est ce qui empêche de dire que le référentiel terrestre est en rotation pure et uniforme.

Exercice 4

$\boxed{\text{1. (a)}}$ Étant donné la valeur de l'excentricité, la trajectoire est une $\boxed{\text{ellipse}}$ dont l'un des foyer est occupé par le soleil. Le périhélie correspond à $\theta = 0$ et l'aphélie à $\theta = \pi$.

L'excentricité étant très proche de 1, cette ellipse sera peu différente (au niveau de l'origine) d'une parabole.

$\boxed{\text{1. (b)}}$ Nous avons $r_\text{min} = \dfrac{p}{1+e}$ et $r_\text{max} = \dfrac{p}{1-e}$ et comme $2\,a_\text{H} = r_\text{max} + r_\text{min}$ nous en déduisons, après calculs, $\boxed{p = a_\text{H}(1-e^2)}$.

$\boxed{\text{2. (a)}}$ La troisième loi de KÉPLER donne : $a_\text{H} = a_\text{T}\left(\dfrac{T_\text{H}}{T_\text{T}}\right)^{2/3}$.

Nous trouvons : $\boxed{a_\text{H} = \underline{2{,}67}092 \times 10^{13}\ \text{m}}$.

$\boxed{\text{2. (b)}}$ Nous en déduisons : $p = \underline{2{,}66}424 \times 10^{11}$ m puis :

$$\boxed{r_\text{min} = \underline{1{,}33}546 \times 10^{11}\ \text{m}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{r_\text{max} = \underline{5{,}32}848 \times 10^{13}\ \text{m}}$$

Et comme $TH = TS - r_\text{min}$ nous avons $\boxed{TH = \underline{1{,}54}541 \times 10^{10}\ \text{m}}$.

Nous pouvons effectivement constater que l'aphélie est 500 fois plus éloignée que le périhélie, c'est quasiment l'infini ! Vu du Soleil, la comète s'éloigne à l'infini, comme si elle était sur une trajectoire parabolique.

$\boxed{\text{3. (a)}}$ La composante radiale $\dot{r}\,\vec{u}_r$ de la vitesse est $\boxed{\text{nulle}}$ en ces points car r est extrémal.

$\boxed{\text{3. (b)}}$ En utilisant la loi des aires, nous obtenons directement :

$$v_\text{min}\,r_\text{max} = v_\text{max}\,r_\text{min} \quad \leadsto \quad v_\text{min} = \frac{r_\text{min}}{r_\text{max}}\,v_\text{max} \quad \leadsto \quad \boxed{v_\text{min} = \underline{50}1{,}253\ \text{km.h}^{-1}}$$

$\boxed{\text{4.}}$ L'énergie mécanique est constante en tout point de la trajectoire. Nous pouvons donc la calculer à l'aphélie :

$$E = \frac{1}{2}\,m_\text{H}\,{v_\text{min}}^2 - G\,\frac{M_\text{S}\,m_\text{H}}{r_\text{max}} \quad \leadsto \quad \boxed{E = -\underline{4{,}7}4079 \times 10^{18}\ \text{J}}$$

Le signe de l'énergie est correct car l'énergie est bien négative sur une orbite elliptique.

Exercice 5

$\boxed{\text{1.}}$ Voir cours. Nous trouvons $E = -\dfrac{k}{2\,a}$ soit $\boxed{E = -\dfrac{G\,M_T\,m}{r_1 + r_2}}$.

$\boxed{\text{2.}}$ *Si sur chaque trajectoire le satellite garde une énergie constante, au moment où il fait fonctionner ses fusée il augmente sa propre énergie grâce aux travaux des interactions intérieures. Aux pints P et A l'énergie n'est donc pas constante.*

Sur la trajectoire circulaire, la projection du PFD sur $\vec{u}_r$ vecteur de la base cylindro-polaire donne :

$$m\,\frac{{v_1}^2}{r_1} = G\,\frac{M_T\,m}{{r_1}^2} \quad \leadsto \quad v_1 = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r_1}}$$

En utilisant $g_0 = \dfrac{G\,M_T}{{R_T}^2}$ nous obtenons : $v_1 = R_T\,\sqrt{\dfrac{g_0}{r_1}}$.

En considérant que le satellite est sur l'orbite elliptique au périgée, nous avons :

$$E = \frac{1}{2}\,m\,{v_1'}^2 - \frac{G\,M_T\,m}{r_1} \qquad \text{et} \qquad E = -\frac{G\,M_T\,m}{r_1 + r_2} \qquad \rightsquigarrow \qquad v_1' = R_T\,\sqrt{\frac{2\,g_0\,r_2}{r_1\,(r_1+r_2)}}$$

Et ainsi $\boxed{v_1' = v_1\,\sqrt{\dfrac{2\,r_2}{r_1+r_2}} > v_1}$. Les fusées ont bien apporté de l'énergie au satellite au point P car l'énergie cinétique est supérieure alors que l'énergie potentielle reste constante.

Remarque : nous retrouvons le fait qu'en un même lieu, pour un même point matériel, subissant la même force, le rayon de courbure est d'autant plus grand que la vitesse est élevée car l'accélération normale vaut $a_r\,\vec{u}_r = \dfrac{f_r}{m}\,\vec{u}_r = \dfrac{v^2}{R}\,\vec{u}_r$.

$\boxed{3.}$ En écrivant la conservation de l'énergie sur la trajectoire elliptique, nous avons :

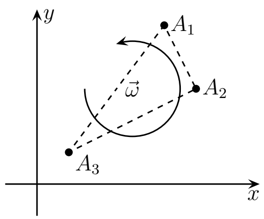
$$E = \frac{1}{2}\,m\,{v_2'}^2 - \frac{G\,M_T\,m}{r_2} \qquad \text{et} \qquad E = -\frac{G\,M_T\,m}{r_1 + r_2} \qquad \rightsquigarrow \qquad v_2' = R_T\,\sqrt{\frac{2\,g_0\,r_1}{r_2\,(r_1+r_2)}}$$

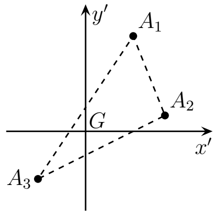
La vitesse sur la trajectoire circulaire vaut $v_2 = R_T\,\sqrt{\dfrac{g_0}{r_2}}$ et $\boxed{v_2' = v_2\,\sqrt{\dfrac{2\,r_1}{r_1+r_2}} < v_2}$. Au point A les fusées ont aussi apporté de l'énergie au satellite.

Remarque : pour déterminer la vitesse v_2', nous pouvions aussi :
- ➜ utiliser la conservation du moment cinétique sur l'ellipse de transfert. Cela donne, en simplifiant par m et parce que à l'apogée et au périgée, la vitesse est orthoradiale $\vec{r}\cdot\vec{v} = 0$: $r_1\,v_1' = r_2\,v_2'$.
- ➜ utiliser la symétrie du problème. En effet, comme les deux trajectoires circulaires jouent des rôles analogues vis-à-vis de l'ellipse de transfert, les résultats seront analogues à condition de procéder au changement d'indice $1 \longleftrightarrow 2$ dans les résultats.

Exercice 6

$\boxed{1.}$ Représentons la situation dans les référentiels $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$.





Les trois seules forces qui s'exercent sur A_1 dans le référentiel $\mathscr{R}'$ sont :
- ➜ la force de gravitation exercée par A_2 :

$$\vec{f}_{2\to1} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{{r_{12}}^2}\,\vec{u}_{21} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{{r_{12}}^3} \times \overrightarrow{M_2M_1}$$

Comme $\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ nous arrivons à $\boxed{\vec{f}_2 = -G\,m_1\,m_2\,\dfrac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{{r_{12}}^3}}$

- ➜ la force de gravitation exercée par A_3 $\boxed{\vec{f}_3 = -G\,m_1\,m_3\,\dfrac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{{r_{13}}^3}}$
- ➜ la force d'inertie d'entraînement : $\boxed{\vec{f}_{\text{ie}} = +m_1\,\omega^2\,\vec{r}_1}$.

La force d'inertie de Coriolis est nulle parce que A_1 est à l'équilibre dans $\mathscr{R}'$.

$\boxed{2.}$ Le PFD s'écrit donc, toujours en considérant l'équilibre :

$$\vec{0} = -G\,m_1\,m_2\,\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{{r_{12}}^3} - G\,m_1\,m_3\,\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{{r_{13}}^3} + m_1\,\omega^2\,\vec{r}_1$$

Avec la définition du centre de masse $m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2 + m_3\,\vec{r}_3 = \vec{0}$ nous obtenons, en éliminant $\vec{r}_3$:

$$\left(\frac{m_2}{{r_{12}}^3} - \frac{m_2}{{r_{13}}^3}\right)\,\vec{r}_2 = \left(\frac{m_1}{{r_{13}}^3} + \frac{m_2}{{r_{12}}^3} + \frac{m_3}{{r_{13}}^3} - \frac{\omega^2}{G}\right)\,\vec{r}_1$$

Or les trois points ne sont pas alignés, *ie.* $\vec{r}_1$ n'est pas colinéaire à $\vec{r}_2$, par conséquent les deux membres de cette expression sont nuls et $\boxed{r_{12} = r_{13} = r}$.

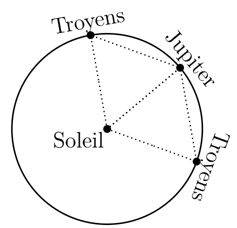
$\boxed{3.}$ En utilisant le même raisonnement pour A_2 nous trouvons $r_{23} = r_{21} = r$.

Les trois points sont donc situés à égale distance les uns des autres, ils sont donc bien aux sommets d'un triangle équilatéral.

En reprenant l'équation précédente, nous avons :

$$\frac{m_1}{{r_{13}}^3} + \frac{m_2}{{r_{12}}^3} + \frac{m_3}{{r_{13}}^3} - \frac{\omega^2}{G} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{r = \left(\frac{G\,(m_1+m_2+m_3)}{\omega^2}\right)^{1/3}}$$

Remarque : cette situation est l'une des rares solutions exactes d'un système à trois corps. Les positions déterminées sont appelées « points de Lagrange L_5 et L_6 » et, par définition, ceux qui les occupent sont appelés « les troyens ». Dans le système solaire, deux groupes d'astéroïdes forment, chacun, avec Jupiter et le Soleil un système stable.



Exercice 7

$\boxed{1.}$ *Cette question est très classique puisqu'elle concerne une trajectoire circulaire autour d'un astre.*

La vitesse de la station est déterminée en projetant le PFD appliqué à la station sur $\vec{u}_r$ vecteur de la base cylindro-polaire.

Nous trouvons alors $\boxed{v_{\text{s}} = \sqrt{\dfrac{g_0\,{R_T}^2}{r_0}} = 7{,}393044 \times 10^3\ \text{m.s}^{-1}}$.

Nous pouvons écrire $T_0 = \dfrac{2\,\pi\,r_0}{v_{\text{s}}}$ car le mouvement est uniforme (projection du PFD sur $\vec{u}_\theta$).

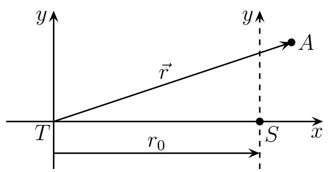
Numériquement : $\boxed{T_0 = 6{,}17011 \times 10^3\ \text{s}}$.

$\boxed{2. (a)}$ Si A est sur la même orbite, il lui est impossible de rejoindre la station en restant sur cette trajectoire. En effet, il faudrait pour cela augmenter (ou diminuer) $\dot{\theta}$ histoire de gagner (ou perdre) du terrain sur la station.

Malheureusement à r_0 fixé, il n'y a qu'une valeur de $\dot{\theta}$ qui permet une trajectoire circulaire. Changer $\dot{\theta}$ impliquerait donc un changement d'orbite : il serait alors impossible de rejoindre la station.

Remarque : nous pouvons imaginer faire en sorte que les réacteurs compensent le changement de trajectoire. Sauf que cette solution est gourmande en carburant et que le carburant est une des choses qu'il convient d'économiser au maximum.

$\boxed{2. (b)}$ *Faisons le schéma dans le référentiel $\mathscr{R}$ non galiléen mais en rotation pure et uniforme (cool ! ☺) par rapport au référentiel géocentrique.*



Le référentiel $\mathscr{R}$ n'est pas galiléen. Ainsi, le satellite A subit :

➜ la force de gravitation exercée par la terre : $\vec{f}_{\text{grav}} = -\dfrac{G\,M_T\,m}{r^3}\,\vec{r}$.

Or, avec la question précédente $v_s = r_0\,\omega$, ce qui donne $\boxed{\vec{f}_{\text{grav}} = -\dfrac{m\,\omega^2\,{r_0}^3}{r^3}\,\vec{r}}$

➜ la force d'inertie d'entraînement $\boxed{\vec{f}_{\text{ie}} = m\,\omega^2\,\vec{r}}$

➜ la force d'inertie de CORIOLIS $\boxed{\vec{f}_{\text{ic}} = -2\,m\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}}$

$\boxed{2. (c)}$ Le PFD dans $\mathscr{R}$ non galiléen permet d'aboutir, après factorisation, à :

$$\boxed{\vec{a} = \omega^2\left(1 - \frac{{r_0}^3}{r^3}\right)\vec{r} - 2\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}}$$

$\boxed{3.}$ *Il s'agit ici d'un changement de repérage. Au lieu de repérer par rapport à A, nous repérons par rapport à S. Remarquons que puisque S est immobile par rapport à A, ce n'est pas un changement de référentiel !*

Nous avons $\vec{r} = \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SA}$ donc :

$$r^2 = \left(\overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SA}\right)^2 = {r_0}^2 + SA^2 + 2\,\overrightarrow{TS}\cdot\overrightarrow{SA} = {r_0}^2 + SA^2 + 2\,r_0\,x$$

En négligeant $SA^2 = x^2 + y^2$ qui est d'ordre 2, cela donne $r^2 = {r_0}^2\left(1 + \dfrac{2\,x}{r_0}\right)$.

Toujours en continuant les DL à l'ordre 1 : $\dfrac{r}{r_0} = 1 + \dfrac{x}{r_0}$ et $\dfrac{r^3}{{r_0}^3} = 1 + \dfrac{3\,x}{r_0}$.

Nous avons donc $1 - \dfrac{{r_0}^3}{r^3} = -\dfrac{3\,x}{r_0}$.

Le PFD s'écrit finalement dans le plan (Sxy) :

$$\boxed{\begin{pmatrix}\ddot{x}(t)\\ \ddot{y}(t)\end{pmatrix} = 3\,\omega^3\,\frac{x(t)}{r_0}\begin{pmatrix}r_0 + x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} + 2\,\omega\begin{pmatrix}\dot{y}(t)\\ -\dot{x}(t)\end{pmatrix}}$$

$\boxed{4.}$ Dans le cas où les points S et A sont très proches nous pouvons négliger les termes d'ordres 2 en x^2 et $x\,y$ devant les termes à l'ordre 1. Les équations se simplifient alors bien en les expressions proposées.

$\boxed{4. (a)}$ Ces termes proviennent de $\boxed{\text{la force d'inertie de CORIOLIS}}$.

$\boxed{4. (b)}$ L'intégration de la seconde équation donne, en tenant compte des conditions initiales :

$$\dot{y}(t) - \dot{y}(0) = -2\,\omega\,(x(t) - x(0)) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\dot{y}(t) = -2\,\omega\,x(t)}.$$

$\boxed{4. (c)}$ En utilisant cette expression de $\dot{y}(t)$ dans la première équation, nous trouvons, en tenant compte des conditions initiales :

$$\ddot{x}(t) + \omega^2\,x(t) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega\,t)}$$

Nous en déduisons alors :

$$\dot{y}(t) = -2\,v_0\,\sin(\omega\,t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{y(t) = -\frac{2\,v_0}{\omega}(1 - \cos(\omega\,t)) + y_0}$$

$\boxed{4. (d)}$ En éliminant le paramètre temps entre ces deux équation (en faisant par exemple $\cos^2(\omega\,t) + \sin^2(\omega\,t) = 1$), nous obtenons l'équation de la trajectoire :

$$\left(\frac{x}{v_0/\omega}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0 + 2\,v_0/\omega}{2\,v_0/\omega}\right)^2 = 1$$

La trajectoire est bien une ellipse de demi-axes $a = \dfrac{v_0}{\omega}$ et $b = \dfrac{2\,v_0}{\omega}$, centrée au point de coordonnées $x = 0$ et $y = y_0 - 2\,v_0/\omega$.

L'arrimage est réalisé pour $t = t_1$ tel que $x = 0$ et $y = 0$. Nous avons alors $\omega\,t_1 = \pi$ soit $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega} = \dfrac{\pi\,r_0}{v_s} = \dfrac{T_0}{2}$ d'où $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Il faut alors $0 = -\dfrac{2\,v_0}{\omega}(1+1) + y_0$ soit $y_0 = \dfrac{4\,v_0}{\omega}$.

Ainsi, si A est en avant de la station ($y_0 > 0$), il faut lui donner une impulsion tendant à augmenter le rayon de sa trajectoire ($v_0 > 0$) et si A est en arrière de la station ($y_0 < 0$), il faut le faire « plonger » vers la Terre ($v_0 < 0$).

Remarque : cette dernière constatation peut s'interpréter dans le référentiel géocentrique. Une impulsion en direction de la Terre ne modifie pas le moment cinétique du satellite. En revanche cela modifie sa distance à la Terre. Or avec $\sigma = m\,R^2\,\dot{\theta}$, si le satellite est en avance, il faut le « ralentir », donc diminuer $\dot{\theta}$ *ie.* augmenter r. De manière analogue, si le satellite est en retard sur la station, il faut le faire plonger vers la Terre de telle sorte que r diminue et $\dot{\theta}$ augmente. N'oublions pas, enfin, que le satellite a une trajectoire elliptique dans le référentiel géocentrique.

Exercice 8

Version calcul bourrin (âmes sensibles s'abstenir)

Établir l'équation d'évolution du système . . .

Plaçons nous dans le référentiel héliocentrique et négligeons tous les astres autre que le Soleil que nous noterons S.

En utilisant la base polaire de centre S, le PFD s'écrit $m\vec{a} = -\dfrac{G\,m\,M_S}{r^2}\,\vec{u}_r$ où m est la masse du corps.

Comme le corps est lâché sans vitesse initiale, le moment cinétique par rapport à S est nul, ce qui implique $r^2\,\dot\theta = 0$ puis $\theta = \mathrm{C^{te}}$, ou encore que le mouvement est rectiligne.

Finalement l'accélération se réduit à $\vec a(t) = \ddot r(t)\,\vec u_r$.

L'équation d'évolution est donc : $\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}(t) = -G\,\dfrac{M_S}{r^2(t)}$.

➨ **... dont la première intégration est aisée ...**

En multipliant l'équation précédente par $\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$, puis en l'intégrant nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{G\,M_S}{r(t)} - \frac{G\,M_S}{r_0}$$

Cette équation n'est autre que la conservation de l'énergie).

Nous pouvons en déduire $\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$ en faisant attention que $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} < 0$ car le corps se rapproche du Soleil : $\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2\,G\,M_S}\,\sqrt{\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_0}}$.

➨ **... et la deuxième un peu plus technique ...**

Nous pouvons résoudre l'équation précédente en utilisant la technique de séparation des variables ;

L'équation se réécrit : $\sqrt{\dfrac{r\,r_0}{r_0 - r}}\,\mathrm{d}r = -\sqrt{G\,M_S}\,\mathrm{d}t$.

Nous pouvons alors intégrer de part et d'autre entre l'instant initial où nous avons $t = t_0$ et $r = r_0$ et l'instant final où nous avons $t = t_0 + T$ et $r = 0$.

Le membre de droite s'intègre aisément en $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} = -\sqrt{G\,M_S}\,\mathrm{d}t = -\sqrt{G\,M_S}\,T$.

Reste à calculer $\displaystyle\int_{r_0}^{0}\sqrt{\frac{r r_0}{r_0 - r}}\mathrm{d}r \overset{\text{not}}{=} (\text{🌧})$.

➔ *Premier changement de variable.*

Faisons le changement de variable $r = u^2$. Cela donne $\mathrm{d}r = 2\,u\,\mathrm{d}u$ et sans oublier de changer les bornes d'intégration, nous obtenons : $(\text{🌧}) = \displaystyle\int_{\sqrt{r_0}}^{0}\frac{2\,u^2\sqrt{r_0}\,\mathrm{d}u}{\sqrt{r_0 - u^2}}$.

En faisant une intégration par partie avec $f = u$, $f' = 1$, $g' = \dfrac{u}{\sqrt{r_0 - u^2}}$ et $g = -\sqrt{r_0 - u^2}$ cela donne :

$$(\text{🌧}) = \underbrace{\Big[-2\,\sqrt{r_0}\,u\sqrt{r_0 - u^2}\Big]_{\sqrt{r_0}}^{0}}_{=0} + 2\,\sqrt{r_0}\int_{\sqrt{r_0}}^{0}\sqrt{r_0 - u^2}\,\mathrm{d}u$$

➔ *Deuxième changement de variable*

Faisons le changement de variable $u = \sqrt{r_0}\,\cos\varphi$. Nous avons alors $\mathrm{d}u = -\sqrt{r_0}\,\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$ et (attention aux bornes) :

$$(\text{🌧}) = 2\,\sqrt{r_0}\int_0^{\pi/2}\sqrt{r_0}\,\sqrt{1-\cos^2\varphi}\,(-\sqrt{r_0}\,\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = -2\,r_0\,\sqrt{r_0}\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Cette dernière intégrale se calcule aisément, soit en linéarisant le $\sin^2\varphi$, soit en se rappelant que $\dfrac{1}{2\,\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \langle\sin^2\varphi\rangle = \frac{1}{2}$ et en remarquant que $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$

Nous trouvons finalement $(\text{🌧}) = -\dfrac{\pi\,\sqrt{r_0}\,r_0}{2}$.

➔ *Rassemblement*

L'égalité initiale permet de déterminer T en remarquant que $r_0 = d$, rayon de l'orbite terrestre : $T = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\dfrac{d^{3/2}}{\sqrt{G\,M_S}}$.

➨ **... puis exprimons le résultat en fonction de ce qui est demandé.**

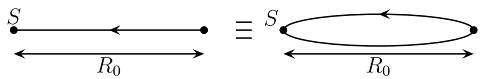
La projection du PFD appliqué à la Terre sur $\vec u_r$ vecteur de la base cylindro-polaire, donne, en considérant que la Terre a une trajectoire circulaire : $M_T\,\dfrac{v^2}{d} = G\dfrac{M_T\,M_S}{d^2}$ soit $v = \sqrt{G\,\dfrac{M_S}{d}}$.

La distance totale parcourue par la Terre sur son orbite est $\ell = 2\,\pi\,d$ et comme la vitesse est uniforme (projection du PFD sur $\vec u_\theta$) et que cette distance est parcourue en une année (T_0), nous avons $T_0 = \dfrac{2\,\pi\,d}{v} = 2\,\pi\,\dfrac{d^{3/2}}{\sqrt{G\,M_S}}$.

En utilisant cette dernière expression dans l'expression de T, nous obtenons : $\boxed{T = \dfrac{T_0}{4\sqrt{2}}}$ soit $\boxed{T = 64{,}6\text{ jours}}$. Nous ne mettons pas plus de C.S. car les approximations (Soleil ponctuel, orbite terrestre circulaire) sont nombreuses.

Correction version physique

Toute l'idée consiste à voir la chute directe vers le Soleil comme une trajectoire elliptique extrêmement aplatie qui finirait sur le Soleil. Pour qu'elle finisse sur le Soleil, comme ce dernier est nécessairement un foyer, il faut que le Soleil soit à l'une des extrémités de l'ellipse.



Nous avons ainsi les caractéristiques de l'ellipse :

➜ grand axe R_0 donc demi grand-axe $R_0/2$

➜ période : deux fois la durée de chute (c'est un aller simple vers le Soleil), ce que nous noterons $2\,T$

Ainsi avec la troisième loi de KÉPLER utilisée avec la Terre de demi grand axe R_0 et de période T_0 nous obtenons :

$$\frac{{T_0}^2}{{R_0}^3} = \frac{(2\,T)^2}{(R_0/2)^3} \quad\leadsto\quad \boxed{T = \frac{T_0}{4\sqrt{2}}}$$

☕ *Remarque* : c'est sûr, c'est plus rapide, mais il fallait le voir !