

## Mouvement de charges dans un champ $(\vec{E}, \vec{B})$

### ✿ Exercice 1

1. Puisque le moment cinétique est quantifié par  $n$  et que nous cherchons une relation avec  $n$ , cela laisse suggérer l'idée d'utiliser l'expression du moment cinétique.

Puisque  $\vec{\sigma}_O = \vec{r} \wedge m_e \vec{v}$  et que nous avons (mouvement circulaire uniforme)  $\vec{r} = r \vec{u}_r$  et  $\vec{v} = v \vec{u}_\theta$ , nous arrive à  $\sigma_O = m r v$  et avec la quantification du moment cinétique à

$$n \frac{h}{2\pi} = m_e r v$$

2. Comme tout ce qui est mouvement circulaire, nous savons qu'il existe une relation entre la vitesse (associée à l'accélération centripète) et le rayon (associé à la force). Cette relation n'est autre que le PFD.

Le PFD appliqué à l'électron et projeté sur  $\vec{u}_r$  donne  $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -m_e r \dot{\theta}^2$ .

Comme  $\dot{\theta} = \frac{v}{r}$ , nous obtenons ainsi :

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \frac{v^2}{r} \quad \rightsquigarrow \quad v^2 = \frac{e^2}{m_e 4\pi\epsilon_0 r}$$

3. Utilisons les deux expressions précédentes pour l'expression de  $v^2$ . Cela donne :

$$v^2 = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m_e^2 r^2} = \frac{e^2}{m_e 4\pi\epsilon_0 r} \quad \rightsquigarrow \quad r = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}$$

C'est bien la forme recherchée avec  $r_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} = 5,32546 \times 10^{-2} \text{ nm} = 0,532546 \text{ \AA}$ .

4. Utilisons simplement l'expression de l'énergie mécanique totale :

$$E_m = E_c + E_p \quad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{et} \quad E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Avec  $v^2 = \frac{e^2}{m_e 4\pi\epsilon_0 r}$ , nous obtenons  $E_c = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

Avec l'expression de l'énergie potentielle, nous arrivons finalement à :

$$E_m = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{m_e e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2} = 2,16367 \times 10^{-18} \text{ J} = 13,5229 \text{ eV}$$

5. L'énergie d'ionisation est l'énergie à fournir pour que l'électron s'éloigne à l'infini du proton, *ie.* pour obtenir  $n = +\infty$ .

Lorsque l'atome sera ionisé, l'électron aura une énergie mécanique nulle, ce qui fait qu'il aura reçu une énergie de :

$$0 - \left(-\frac{E_0}{1^2}\right) = E_0 \quad \rightsquigarrow \quad E_{\text{ionisation}} = E_0 = 13,5229 \text{ eV}$$

Pour la vitesse, en prenant  $n = 1$ , nous avons  $v = \frac{h}{2\pi m_e r_0} = 2,18067 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$ .

Nous pouvons constater que cette vitesse est proche de celle de la lumière dans le vide, *ie.* que la mécanique de NEWTON n'est plus tellement valide et qu'il faut lui préférer la relativité restreinte (!)  
 ✿ Remarque : tout ceci n'est qu'un modèle très limité. En fait pour étudier un électron dans un atome, il faut utiliser la mécanique quantique et pas du tout la relativité restreinte! En mécanique quantique la notion de vitesse d'une particule (tout comme celle de la position d'une particule) n'existe pas alors, forcément, ça change tout.

### ✿ Exercice 2

1. Analyse physique. Il s'agit là d'un mouvement d'un électron dans un champ électrique, le poids sera négligeable et négligé. Comme le champ est statique et uniforme, la trajectoire sera parabolique. L'électron possède trois degrés de liberté mais son mouvement se fera avec deux degrés de description (mouvement plan). Les grandeurs pertinentes seront  $m$  (inertie de l'électron) et  $e$  (charge de l'électron),  $E$  (champ électrique) et  $v_0$  (condition initiale).

Analyse technique. Puisque nous avons un mouvement à deux degrés de description, nous allons utiliser un bon vieux PFD.

Entre les deux plaques le PFD donne les équations horaires permet d'arriver à :

$$x(t) = v_0 t \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E_0 t^2$$

Une fois sorti, l'électron n'est plus soumis qu'à son poids. Comme c'est la seule force que subit l'électron nous ne pouvons pas *a priori* la négliger. Ceci étant, en comparant le travail que peut fournir le poids avec l'énergie cinétique accumulée par l'électron entre les plaques, nous pouvons aisément constater avec quelques valeurs numériques usuelles que le poids aura une influence négligeable *a posteriori*. Nous pouvons donc le négliger *a priori*.

Dans ces conditions l'électron continue avec un mouvement rectiligne uniforme hors des plaques :

$$x(t) = v_0 t \quad \text{et} \quad y(t) = y(x=2\ell) + v_y(x=2\ell) \times \left(t - \frac{2\ell}{v_0}\right)$$

Or  $y(x=2\ell) = y(t=2\ell/v_0) = \frac{2qE_0\ell^2}{m v_0^2}$  et  $v_y(x=2\ell) = \frac{2qE_0\ell}{m v_0}$  soit finalement, après la sortie des plaques :

$$x(t) = v_0 t \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{2qE_0\ell^2}{m v_0^2} + \frac{2qE_0\ell}{m v_0} \left(t - \frac{2\ell}{v_0}\right)$$

2. Il y a impact sur l'écran lorsque  $x = D + \ell$ , soit à l'instant  $t_0$  tel que

$$D + \ell = v_0 t_0 \quad \rightsquigarrow \quad t_0 = \frac{D + \ell}{v_0}$$

En remplaçant dans l'équation horaire de  $y$ , nous obtenons  $Y = \frac{2q\ell D}{m v_0^2} E_0$ , déviation qui est bien proportionnelle à  $E_0$ .

### ✿ Exercice 3

1. Nous avons (en mettant les unités entre parenthèses) :

$$[\eta] = \frac{[|\vec{F}|]}{[6 \pi r \|\vec{v}\|]} = \frac{(\text{N})}{1 \times [(\text{m})] \times [(\text{m}) \cdot (\text{s})^{-1}]} = \frac{\text{M.L.T}^{-2}}{\text{L.L.T}^{-1}} \rightsquigarrow \boxed{[\eta] = \text{M.L}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}}$$

☛ *Remarque* : rappelons qu'il s'agit de ne pas confondre la dimension « longueur » avec l'unité « mètre ».

**[2.]** *Analyse physique.* Les gouttelettes ne subissent que deux forces verticales : leur poids et la force de frottement. Donc même avec 3 degrés de liberté, nous pouvons dire que le mouvement sera à deux degrés de description à savoir dans un plan vertical. Le mouvement est libre mais non conservatif.

*Analyse technique.* Comme le mouvement est à deux degrés de description, mieux vaut l'approche en terme de forces.

Le PFD dans le référentiel du laboratoire pour la gouttelette s'écrit, avec  $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$  :

$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -6 \pi \eta r \vec{v}(t) + m \vec{g} \rightsquigarrow \frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{9 \eta}{2 r^2 \rho} \vec{v}(t) = \vec{g}$$

Cette équation différentielle du premier ordre a pour solution :

$$\vec{v}(t) = \vec{\lambda} e^{-t/\tau} + \frac{2 r^2 \rho}{9 \eta} \vec{g} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2 r^2 \rho}{9 \eta}$$

Sans chercher à déterminer  $\vec{\lambda}$  nous constatons que la vitesse tend vers la limite :

$$\boxed{\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{2 r^2 \rho}{9 \eta} \vec{g}}$$

Avec  $v_{\text{lim}} = 0,392 \text{ mm.s}^{-1}$ , nous trouvons :  $\boxed{r = 2,00 \text{ } \mu\text{m}}$ .

**[3.]** *Analyse physique.* Ici les gouttelettes sont macroscopiques (ou du moins mésoscopiques), nous ne pouvons donc pas négliger leur poids devant la force électrique. Nous devons donc conserver les deux forces dans le raisonnement qui, hormis cet aspect, sera identique à celui mené à la question précédente.

En utilisant le même raisonnement, nous trouvons que la vitesse limite en présence d'un champ  $\vec{E}$  s'écrit, avec  $q$  la charge de la gouttelette :

$$\boxed{\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{2 r^2 \rho}{9 \eta} \vec{g} + \frac{q}{6 \pi \eta r} \vec{E}}$$

**[4.]** En présence de champ, la différence de vitesse limite  $\Delta v_{\text{lim}}$  entre deux charges différentes de la gouttelette vaut  $\Delta v_{\text{lim}} = \frac{\Delta q}{6 \pi \eta r} E$ .

Ainsi, en classant les vitesses limite dans l'ordre croissant, nous pouvons constater que la différence entre deux vitesses consécutives est quasi constante, cela peut s'expliquer en faisant l'hypothèse d'une charge élémentaire  $e$  auquel cas nous avons  $\Delta q = e \Delta n$ .

En faisant la moyenne de ces différences successives notée  $\delta v_{\text{lim}}$  et en faisant l'hypothèse supplémentaire qu'entre deux vitesses nous avons  $\Delta n = 1$  nous obtenons :

$$e = \frac{6 \pi \eta r \delta v_{\text{lim}}}{E} \rightsquigarrow \boxed{e = 1,603155 \times 10^{-19} \text{ C}}$$

Il s'agit là d'une bonne méthode pour mesurer  $e$ .

☛ *Remarque* : cette expérience est connue sous le nom d'expérience de MILLIKAN du nom de celui qui l'a réalisée. Cette expérience est bien plus difficile à réaliser qu'il n'y parait, ne serait-ce que pour avoir des gouttelettes de rayon parfaitement étalonné.

### ☛ Exercice 4

*Analyse physique.* Ici il s'agit d'une particule dans un champ magnétique, nous pouvons donc négliger le poids. Comme les forces seront toutes horizontales, bien que la particule ait 3 degrés de liberté, le mouvement sera plan, c'est-à-dire avec deux degrés de description. S'il n'y avait que le champ magnétique, la trajectoire serait parfaitement circulaire. Là, avec la force de frottement, l'énergie de la particule va diminuer, donc le rayon de la trajectoire aussi. Nous pouvons donc prévoir un mouvement en spirale qui finira en un point. Les grandeurs pertinentes seront naturellement  $m$  et  $q$  pour la description de la particule,  $B$  et  $k$  pour les forces et  $a$  pour les conditions initiales. Le mouvement est libre et non conservatif.

*Analyse technique.* Le repère est déjà choisi ! Tant mieux pour nous. En ce qui concerne l'approche, vu qu'il y a deux degrés de description, mieux vaut un PFD.

Les forces qui s'appliquent sur la particule et qui doivent être prises en compte sont la force de frottement  $\vec{f} = -k \vec{v}$  et la force de Lorentz  $\vec{f}_L = q (\vec{v} \wedge \vec{B})$  (le poids est toujours négligé dans le cas d'une particule). Le PFD appliqué à la particule s'écrit alors :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -\dot{y}(t)B \\ \dot{x}(t)B \\ 0 \end{pmatrix}$$

En projetant sur  $\vec{u}_z$  et en utilisant les conditions initiales, nous avons bien la confirmation que le mouvement est plan.

Les deux autres projections nous amène aux deux équations :

$$m \ddot{x}(t) = -k \dot{x}(t) - q \dot{y}(t) B \quad \text{et} \quad m \ddot{y}(t) = -k \dot{y}(t) + q B \dot{x}(t)$$

Utilisons le changement de fonction complexe inconnue et notons  $\underline{X}(t)$  la fonction complexe

$$\underline{X}(t) = x(t) + j y(t)$$

Les deux équations se réécrivent alors :

$$m \ddot{\underline{X}}(t) = -k (\dot{x}(t) + j \dot{y}(t)) + q B (-\dot{y}(t) + j \dot{x}(t))$$

En utilisant les notations de l'énoncé :  $\ddot{\underline{X}}(t) = (j \omega - \lambda) \dot{\underline{X}}(t)$ .

Réolvons cette équation différentielle en  $\dot{\underline{X}}(t)$ .

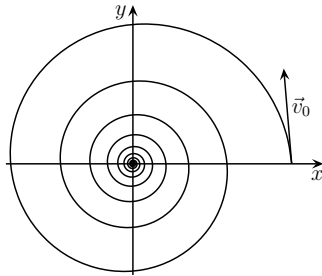
Cela donne, en utilisant la condition initiale  $\dot{\underline{X}}(0) = -a \lambda + j a \omega \stackrel{\text{not}}{=} \underline{V}_0$  :

$$\dot{\underline{X}} = \underline{V}_0 e^{(-\lambda + j \omega) t}$$

En intégrant la relation précédente et en utilisant la condition initiale  $\underline{X}(0) = a$ , nous arrivons finalement à  $\underline{X}(t) = a [e^{(j \omega - \lambda) t} - 1] + a$ .

En repassant en notations réelles avec  $x(t) = \text{Re}(\underline{X}(t))$  et  $y(t) = \text{Im}(\underline{X}(t))$ , nous aboutissons à :

$$\boxed{x(t) = a \cos(\omega t) e^{-\lambda t}} \quad \text{et} \quad \boxed{y(t) = a \sin(\omega t) e^{-\lambda t}}$$



☛ *Remarque* : insistons une fois de plus pour dire que  $\underline{X}(t)$  n'est pas une notation complexe comme celle utilisée en régime forcé car la partie imaginaire de  $\underline{X}(t)$  a une signification physique indépendante de celle de sa partie réelle.

☛ **Exercice 5**

1. *Analyse physique.* Il s'agit là d'un mouvement de particules dans un champ électromagnétique, le poids sera négligeable et puisque le champ est un champ électrique uniforme, la trajectoire sera parabolique. Le mouvement est à trois degrés de liberté mais à seulement deux degrés de description puisque le mouvement sera plan.

*Analyse technique.* Nous allons chercher la portée du faisceau en fonction de  $E$  et  $\alpha$  grâce à un PFD usuel puis après nous allons optimiser les valeurs de  $\alpha$  et  $E$ .

La détermination des équations du mouvement de la particule donne :

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha) t \quad \text{et} \quad y(t) = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{e E}{2 m} t^2$$

Il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré, le poids  $\vec{P} = m \vec{g}$  ayant été négligé devant la force de LORENTZ  $\vec{f}_L = q \vec{E}$ .

La trajectoire a donc pour équation :  $y = x \tan \alpha - \frac{e E}{2 m v_0 \cos \alpha} x^2$ .

Pour recueillir les électrons à la fente B, il faut :  $x_c = L$  avec  $x_c$  l'abscisse du point où les électrons auront à nouveau une cote nulle.

Cela se traduit formellement par  $y(x_c) = 0$  soit, après résolution :  $L = \frac{m v_0^2}{e E} \sin(2\alpha)$  (♣).

Pour que la dispersion soit la plus faible possible, il faut minimiser  $dx_c$ , c'est-à-dire la dispersion au point d'impact.

Pour ce faire, en voyant  $x_c$  comme une fonction  $x_c(E, \alpha)$  des deux variables indépendantes  $E$  et  $\alpha$ , nous cherchons donc à avoir  $dx_c = 0$  avec

$$dx_c = \frac{\partial x_c}{\partial E} dE + \frac{\partial x_c}{\partial \alpha} d\alpha$$

Pour ce fait, nous cherchons donc à avoir  $\frac{\partial x_c}{\partial \alpha} = 0$  et en même temps  $\frac{\partial x_c}{\partial E} = 0$ .

Or  $\frac{\partial x_c}{\partial \alpha} = \frac{2 m v_0^2}{e E} \cos(2\alpha)$  qui s'annule pour  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$  (♣).

Mais nous avons  $\frac{\partial x_c}{\partial E} = -\frac{m}{e E^2}$  qui est non annulable.

La condition recherchée était donc  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ .

En rapprochant (♣) et (♣), nous obtenons :  $E = \frac{m v_0^2}{e L}$ .

2. Si seul l'angle initial est susceptible de varier,  $x_c$  ne dépend alors que de  $\alpha$ , soit  $x_c(\alpha) = L \sin(2\alpha)$ . En faisant un développement limité (à l'ordre 2) autour de la valeur optimale recherchée  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ , nous avons :

$$x_c(\alpha) = L + \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2} \frac{d^2 x_c}{d\alpha^2} \quad \rightsquigarrow \quad x_c(\alpha) = L - 2(\alpha - \alpha_0)^2 L$$

Comme  $x_c(\alpha_0)$  est un maximum, nous aurons  $\Delta L = x_{c\max} - x_{c\min}$  avec  $x_{c\min}$  atteint en  $\pm \frac{\Delta\alpha}{2}$ .

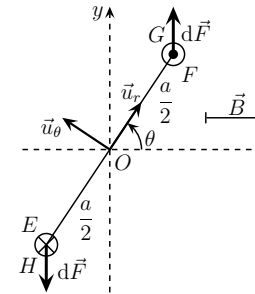
Finalement :  $\Delta L = 2 \left( \frac{\Delta\alpha}{2} \right)^2 L$ . Nous trouvons  $\Delta\alpha = 0,141421 \text{ rad} = 8,10285^\circ$ .

☛ **Exercice 6**

1. *Analyse physique.* Un circuit parcouru par un courant est plongé dans un champ magnétique, il va donc subir des forces de LAPLACE.

*Analyse technique.* Comme le cadre est rectangulaire (!) nous allons naturellement décomposer les forces en 4 parties. Pour chaque partie, nous calculerons le moment des forces de LAPLACE sur un petit élément avant de sommer l'ensemble dans le sens du courant.

Le schéma ci-dessous représente la situation vue de dessus. Les points  $E$  et  $F$  sont « au-dessus » et les points  $G$  et  $H$  sont « en-dessous ».



Par définition, le moment scalaire d'une force vaut  $\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u}_z$ .

Pour les portions  $EF$  et  $GH$  le courant est parallèle au plan  $(Oxy)$ , donc la force de LAPLACE associée sera suivant  $\vec{u}_z$ ; étant parallèle à l'axe de rotation, son moment scalaire sera donc nul.

Pour la partie  $GF$ , nous avons :

$$d\vec{\ell} = +d\ell \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I B d\ell \vec{u}_y$$

L'expression du moment de force donne donc :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \int_0^a \vec{OP} \wedge d\vec{F} \quad \text{avec} \quad \vec{OP} = \frac{a}{2} \vec{u}_z + z_P \vec{u}_z$$

Nous arrivons alors à  $\vec{M}_O(\vec{F}) = \int_0^a \frac{a}{2} I B dz \vec{u}_r \wedge \vec{u}_x = \frac{1}{2} a^2 I \vec{u}_r \wedge \vec{u}_y = \frac{1}{2} a^2 I B \cos \theta \vec{u}_z$ .

Comme nous trouvons un résultat identique pour la partie  $EH$ , pour une spire faisant le tour du cadre, la somme des moments scalaires des forces de LAPLACE vaut :  $a^2 I B \cos \theta$  et pour  $N$  spires :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = N a^2 I B \cos \theta$$

2. Le maximum est obtenu pour  $\theta = 0$  soit  $\mathcal{M}_{\max} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ N.m}$ .

Remarque : remarquons que le moment est nul en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , i.e. dans une position de la spire tel que le flux de  $\vec{B}$  à travers elle soit maximal. Ce résultat est à rapprocher des forces que subissent les dipôles magnétique dont le moment s'aligne avec le champ  $\vec{B}$ .

Exercice 7

1. La spire étant un circuit électrique plongé dans un champ magnétique, il subit la force de LAPLACE.

Comme l'expression de la force est  $d\vec{f} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ , nous avons :

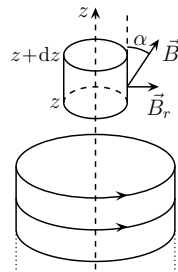
$$\vec{F} = \oint_{P \in \mathcal{C}} d\vec{f} = \oint_{P \in \mathcal{C}} i (b d\theta \vec{u}_\theta) \wedge (B_r(P) \vec{u}_r + B_z(P) \vec{u}_z) = i b \oint_{P \in \mathcal{C}} (-B_r(P) \vec{u}_z + B_z(P) \vec{u}_r) d\theta$$

Comme  $B_z(P) = B_z(r) = C^{te}$  sur la spire, nous avons :

$$\oint_{P \in \mathcal{C}} B_z(P) \vec{u}_r d\theta = B_z(r) \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{u}_r d\theta = B_z(r) \oint_{P \in \mathcal{C}} (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) d\theta = \vec{0}$$

Il reste :  $\vec{F} = -i b B_r(r) \vec{u}_z \oint d\theta$  et  $\vec{F} = -2\pi b i B_r(r) \vec{u}_z$ , ce qui prouve bien que seule la composante sur  $\vec{u}_r$  du champ a une influence ici.

2. Calculons le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface cylindrique de rayon  $r$  et comprise entre les cotes  $z$  et  $z + dz$ .



Comme  $r$  est choisi très petit, le flux à travers la surface supérieure vaut :

$$d\phi_1 = \vec{B}(z + dz) \cdot d\vec{S} = (B_r(z + dz) \vec{u}_r + B_z(z + dz) \vec{u}_z) \cdot (+dS \vec{u}_z) = B_z(z + dz) dS$$

De même le flux sur la partie inférieure vaut  $d\phi_2 = -B_z(z) dS$ .

Comme en tout point de la surface latérale, la composante suivant  $\vec{u}_r$  du champ est identique, le flux correspondant vaut  $d\phi_{lat} = B_r(r, z) \times 2\pi r dz$

Comme  $\vec{B}$  est à flux conservatif, nous avons :

$$d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_{lat} = 0 \rightsquigarrow B_z(z + dz) \pi r^2 - B_z(z) \pi r^2 + 2\pi r dz B_r(z)$$

Et ainsi  $B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z(z)}{dz}$ .

3. En réunissant les deux premières expressions et en remarquant que le champ se calcule en  $r = b$ , nous trouvons

$$F_z = 2\pi b i \frac{b}{2} \times \frac{dB_z}{dz} = \pi b^2 i \frac{dB_z}{dz}$$

Il s'agit bien de l'expression proposée avec  $\mathcal{M} = \pi b^2 i$ .

4. Il faut montrer, ici, comme dans le cours l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde fini. Revoir le cours pour la démarche complète.

Rappelons seulement que nous avons trouvé  $\vec{B} = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$  où  $\alpha_1$  (resp.  $\alpha_2$ ) est l'angle sous lequel est vu un rayon de la spire la plus à gauche (resp. la plus à droite).

Si nous choisissons l'origine  $O$  du repère au centre de la spire de la face de droite, nous avons :

$$\cos \alpha_1 = \frac{L + z}{\sqrt{(L + z)^2 + R^2}} \quad \text{et} \quad \cos \alpha_2 = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Ce qui donne  $F(z) = \mathcal{M} \left( \frac{R^2}{[(L + z)^2 + R^2]^{3/2}} - \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right)$

La force est maximale lorsque  $\frac{dF(z)}{dz} = 0$  or :

$$\frac{dF(z)}{dz} = -3 \mathcal{M} R^2 \times \left( \frac{L + z}{[(L + z)^2 + R^2]^{5/2}} - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{5/2}} \right)$$

Numériquement les solutions sont :

$$\left. \begin{aligned} \frac{z_0}{R} = 0,148 \text{ pour } \frac{L}{R} = 1, \\ \frac{z_0}{R} = 3,41 \cdot 10^{-2} \text{ pour } \frac{L}{R} = 2, \\ \frac{z_0}{R} = 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ pour } \frac{L}{R} = 5, \\ \frac{z_0}{R} = 7,75 \cdot 10^{-5} \text{ pour } \frac{L}{R} = 10. \end{aligned} \right\}$$

Remarque : nous pouvons constater que le point où la force est la plus intense est d'autant plus proche de la face de sortie de la bobine que celle-ci a un rapport  $\frac{L}{R}$  grand, i.e. que la bobine est allongée. Toutefois, expérimentalement parlant à partir de  $\frac{L}{R} = 2$  nous pouvons considérer que ce point est sur la surface.

Exercice 8

1. La force de LAPLACE s'exerçant sur un morceau élémentaire de conducteur s'écrit

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Or, avec la convention «  $d\vec{\ell}$  dans le sens de  $I$  » nous avons

$$d\vec{\ell} = -d\ell \vec{u}_r \rightsquigarrow d\vec{F} = I d\ell B \vec{u}_\theta$$

En sommant les différentes contributions sur  $MN$ , la force de LAPLACE s'écrit

$$\vec{F}_{MN} = I B \ell \vec{u}_\theta$$

Les forces de LAPLACE s'exerçant sur les parties  $NP$  et  $MQ$  passent par le centre de courbure  $O$  leur moment en  $O$  est donc nul.

Quant à la partie  $PQ$ , elle se trouve en dehors du champ et ne subit donc pas de force de LAPLACE.

2. Considérons le système constitué par la balance et la masse.

L'équilibre se traduit par un moment cinétique par rapport à  $O$  constant, *ie.* par l'annulation de la somme des moments par rapport à ce point.

Les forces qui s'exercent sont :

→ le poids de moment  $\mathcal{M}_O(\vec{P}) = \vec{OA} \wedge \vec{P} = -m g R' \vec{u}_z$

→ la force de LAPLACE de moment  $\mathcal{M}_O(\vec{F}) = \int_N^M \vec{OP} \wedge d\vec{F}$ ,

→ la réaction de l'axe de rotation sur la balance, de moment nul parce qu'il n'y a pas de frottement

Calculons d'abord le moment exercé par les forces de LAPLACE

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}) = \int_N^M \vec{OP} \wedge d\vec{F} = \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} r \vec{u}_r \wedge B dr \vec{u}_\theta = \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} I B r dr \vec{u}_z = I B R \ell \vec{u}_z$$

Ainsi la projection du TMC à l'équilibre donne :

$$I B \ell R = m g R' \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{B = \frac{m g R'}{I \ell R}}$$

3.  $B = 0,1962 \text{ T}$  avec  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .