

# Mécanique

## Chapitre 1

### Premiers pas en mécanique du point

# Premiers pas en mécanique du point

C'est **LE** chapitre le plus important de la mécanique car c'est celui qui contient toute la base et tous les concepts fondamentaux. Une non maîtrise / connaissance parfaite de ce chapitre sera forcément handicapant un jour ou un autre.

Pour commencer, nous n'allons pas chercher directement à décrire le mouvement des vagues sur la mer : c'est trop difficile pour une première fois étant donné qu'elles se déforment. Nous nous contenterons dans ce chapitre de faire bouger des choses très simples.

## I – Phénoménologie

### I.1 – Bouger !

#### I.1.i – monstration

- ◇ Regardons un pendule osciller et essayons de décrire son mouvement.

Montrer le début du film avec le pendule.

- ◇ Comment « dire » qu'il bouge ?
  - il faut imaginer un point de repère indépendant du pendule
  - il faut regarder comment évolue, par exemple, le centre du pendule *par rapport* à ce point de repère

#### I.1.ii – qu'est-ce qui bouge ?

- ◇ Ici nous pouvons constater que la seule donnée de la position du centre de la boule est suffisante pour décrire tout ce qui se passe.
- ◇ Nous étudierons **toujours** cette année la trajectoire de points matériels. Un seul la plupart du temps, deux simultanément dans un chapitre ultérieur.

Un *point matériel* est un point géométrique affecté d'une masse  $m > 0$  exprimée en kg.

- ◇ Un point matériel peut représenter deux choses :
  - un tout petit objet par rapport à l'espace d'évolution (ex : une molécule dans une pièce)
  - un point particulier d'un grand objet : un coin, une extrémité ou ... le centre de masse (ex : le centre de la Terre pour l'étude d'un satellite)

Tout objet solide indéformable se comporte exactement comme un point matériel lorsqu'il ne tourne pas sur lui-même.

- ◇ Nous considérerons donc tout objet, si « gros » soit-il comme un unique point matériel du point de vue mécanique et nous le dessinerons comme tel.
- ◇ Plus tard, pour les gros objets qui tournent ou se déforment, nous les découperons (par la pensée) en morceaux si petits que chacun des morceaux pourra être assimilé à un point matériel que nous pourrons alors étudier.

### I.1.iii – bouger par rapport à

Montrer la fin du film avec le pendule.

- ◇ En voyant la fin du film, il est (très) tentant de dire « en fait c'est la caméra qui bougeait » ... ce qui serait déjà une erreur !
- ◇ En effet au début, le pendule bougeait **vraiment** *par rapport* à la caméra et c'est cela qui compte car bien plus que le repère, il faut définir le référentiel.
- ◇ Dire « c'est la caméra qui bouge » (vs. le pendule bouge) c'est croire et laisser croire que certaines choses bougeraient de manière intrinsèque et pas d'autre. Ce qui est **faux** ! Il n'y a pas de référentiel « absolu », il n'y a que des référentiels plus ou moins naturels (dont le fameux référentiel terrestre).

Le *référentiel* est ce par rapport à quoi quelque chose bouge.

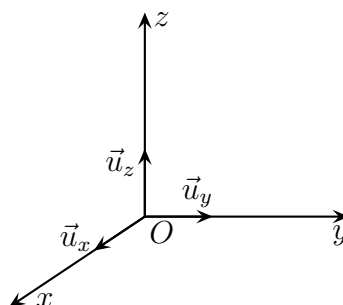
Un référentiel est toujours immobile par rapport à lui-même.

- ◇ Le référentiel est aussi arbitraire que possible : il sera possible de faire de la mécanique dans n'importe quel référentiel.
- ◇ La plupart du temps, nous le ferons dans le référentiel naturel terrestre.
- ◇ Le référentiel terrestre est si naturel qu'il pose des soucis et que lorsque nous disons qu'assis sur notre chaise nous bougeons :
  - à environ  $300 \text{ m.s}^{-1}$  par rapport au référentiel géocentrique
  - à environ  $30 \text{ km.s}^{-1}$  par rapport au référentiel héliocentrique
- ◇ Il est difficile de l'admettre véritablement car nous le ressentons pas. En fait c'est normal car nous verrons que nous ne ressentons pas la vitesse mais les forces, et les forces sont :
  - le poids qui nous fait tourner à quelques centaines de mètres par seconde
  - 1000 fois inférieure au poids pour nous faire avancer à 30 km par seconde
- ◇ Une fois choisi ce par rapport à quoi un objet bouge, il faut pouvoir décrire la manière dont il bouge.

Un *repère* est la manière que nous avons de décrire la façon dont un objet bouge par rapport à un référentiel.

Il existe donc de multiples repère pour un même référentiel.

- ◇ Le plus naturel des repère est le repère dit cartésien : 3 axes orthogonaux de centre  $O$  de base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .



## I.1.iv – finalement, c'est quoi un mouvement ?

- ◇ Nous pouvons penser naturellement à la trajectoire, mais il y a bien plus que cela, il y a le fait que l'objet se mette à bouger, s'arrête, revienne en arrière, que le phénomène soit périodique, ...

Le *mouvement* d'un objet ou d'un point matériel est l'ensemble des caractéristiques qui permettent de décrire son déplacement par rapport à un référentiel : position, vitesse et accélération.

La *position* d'un point matériel sera repérée par le *vecteur position*

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$$

Le vecteur position a une norme en mètre.

La *vitesse* d'un point matériel caractérise la manière dont la position change avec le temps et s'écrit :

$$\vec{v}(t) \triangleq \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

Le vecteur vitesse a une norme en  $\text{m.s}^{-1}$ .

- ◇ L'interprétation de la dérivée est bien cohérente avec la définition de la vitesse :  $d\overrightarrow{OM}$  représente une petite variation de position alors que  $dt$  représente une petite durée.  $\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$  représente donc bien la manière dont la position change lorsque  $t$  change, *ie.* lorsque le temps s'écoule.

La vitesse d'un point par rapport à un référentiel est un vecteur dont les composantes sont :

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz(t)}{dt}\vec{u}_z \stackrel{\text{not}}{=} \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z$$

- ◇ En effet :

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( x(t)\vec{u}_x \right) + \frac{d}{dt} \left( y(t)\vec{u}_y \right) + \frac{d}{dt} \left( z(t)\vec{u}_z \right)\end{aligned}$$

La dérivation de vecteurs se fait comme la dérivation de fonctions usuelles. En particulier, si  $\vec{u}$  est un vecteur constant dans le temps,  $\frac{dx(t)\vec{u}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{u}$ .

◇ Nous obtenons donc bien  $\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz(t)}{dt} \vec{u}_z \stackrel{\text{not}}{=} \dot{x}(t) \vec{u}_x + \dot{y}(t) \vec{u}_y + \dot{z}(t) \vec{u}_z$ .

L'accélération d'un point matériel caractérise la manière dont la vitesse change avec le temps et s'écrit :

$$\vec{a}(t) \triangleq \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

L'accélération est aussi la dérivée seconde du vecteur position :

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Le vecteur accélération a une norme en  $\text{m.s}^{-2}$ .

L'accélération d'un point par rapport à un référentiel est un vecteur dont les composantes sont :

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2y(t)}{dt^2} \vec{u}_y + \frac{d^2z(t)}{dt^2} \vec{u}_z \stackrel{\text{not}}{=} \ddot{x}(t) \vec{u}_x + \ddot{y}(t) \vec{u}_y + \ddot{z}(t) \vec{u}_z$$

- ◇ La démonstration est identique à celle faite pour la vitesse.
- ◇ Si nous cherchons à décrire un mouvement avec position, vitesse et accélération c'est parce que les lois physiques font intervenir position, vitesse et accélération!
- ◇ Ce n'est pas un choix arbitraire de s'arrêter à la dérivée d'ordre deux.

## I.2 – Origine du mouvement

◇ C'est la question du jour : à cause de quoi un objet se met-il à bouger?

### I.2.i – les forces

- ◇ La réponse naturelle est « les forces ».
- ◇ Effectivement, mais attention, les forces ne sont pas nécessaires au mouvement (par rapport à un référentiel) mais à la **mise en mouvement** par rapport à ce référentiel.
- ◇ Définir une force s'avère, au fond, délicat cette notion est intimement liée au mouvement qui, lui-même, est défini à partir du référentiel, qui est défini en lien avec les forces (cf. partie IV).
- ◇ Il est bien plus facile de décrire une force.

Une force se représente par un vecteur. Il faut donc trois choses pour la décrire entièrement :

- soit les trois composantes du vecteur dans une base
- soit sa direction, son sens et sa norme en newton

### I.2.ii – forces à distance

- ◇ Comme leur nom l'indique, ces forces peuvent agir à distance. C'est fondamentalement étrange quand nous y réfléchissons.
- ◇ Il y a :
  - l'interaction gravitationnelle, *ie.* le fait que des objets massiques s'attirent (ce sera le poids à la surface de la Terre)
  - l'interaction électromagnétique, *ie.* le fait que des objets chargés aient des influences réciproques
- ◇ Ces deux forces sont deux des quatre forces fondamentales de la physique. Les deux autres sont :
  - l'interaction nucléaire forte responsable de la cohésion du noyau atomique
  - l'interaction nucléaire faible responsable des désintégrations  $\beta^-$

### I.2.iii – forces de contact

- ◇ Là aussi elles portent bien leur nom.

Dès que deux objets sont en contact l'un avec l'autre, ils exercent une force l'un sur l'autre.

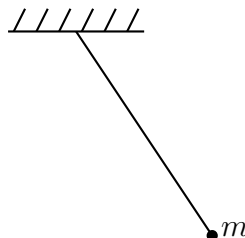
Quand deux objets ne sont pas en contact l'un avec l'autre, ils n'exercent aucune force l'un sur l'autre.

- ◇ C'est une règle et une loi extrêmement simple mais immuable : « PAS CONTACT, PAS FORCE ».
- ◇ Le fait que certaines choses influencent « à distance » le mouvement sera un guide intuitif pour la résolution et pour le choix des lois à écrire mais cela ne doit surtout pas guider l'écriture des lois en elles-mêmes.

## I.3 – Mouvement qualitatif

### I.3.i – la trop fréquente confusion

- ◇ Reprenons le film du pendule, mais un vrai pendule cette fois.
- ◇ La situation sera schématisée, à un instant quelconque de la manière suivante.



- ◇ Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse ?
  - force à distance : le poids
  - force de contact : le fil, l'air (frottement)
- ◇ Point n'a été besoin de savoir si la masse montait ou descendait ! La vitesse est indépendante de la liste des forces qui s'exercent.

Il est complètement inutile de connaître le mouvement d'un corps pour déterminer la nature des forces qui s'exercent sur lui.

- ◇ Tout comme il n'est pas utile de savoir si un condensateur se charge ou se décharge pour choisir entre  $\pm C \frac{du(t)}{dt}$  !
- ◇ Ceci dit, c'est vrai que pour avoir *l'expression* de certaines forces (les frottements), il faudra **parfois** :
  - soit connaître le sens de la trajectoire
  - soit faire des suppositions sur la trajectoire

### I.3.ii – le rôle des frottements

- ◇ Pour mieux déterminer quelles lois écrire, il est très utile de s'imaginer qualitativement le mouvement des objets étudiés.
- ◇ Quels sont les effets qualitatifs d'un frottement ?
- ◇ Nous pensons spontanément : « frottement = ralentissement » alors que c'est physiquement faux. Contre-exemple :
  - les feuilles des arbres qui s'envolent
  - le tapis de caissière
  - la voiture qui avance grâce aux frottements de la route

## II – Il bouge !

- ◇ Dans cette partie, nous allons véritablement commencer à déterminer *a priori* le mouvement d'un point matériel, c'est-à-dire apprendre à trouver, à partir d'une situation réelle décrite,

### II.1 – La loi outil : le principe fondamental de la dynamique

#### II.1.i – énoncé

Dans un référentiel galiléen, pour tout point matériel  $M$  de masse  $m$  subissant les forces  $\vec{f}_i$ , nous pouvons écrire :

$$\sum \vec{f}_i = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \quad \text{où} \quad \vec{p}(t) = m \vec{v}(t)$$

$\vec{p}(t)$  est appelée la *quantité de mouvement*.

- ◇ Les référentiels galiléens sont ceux dans lesquels le PFD est vrai. C'est une question un peu subtile de savoir quand un référentiel est **parfaitement** galiléen ; nous verrons donc cela plus tard.

La quantité de mouvement caractérise le mouvement d'un point matériel.

- ◇ La quantité de mouvement est une grandeur fondamentale en mécanique. La preuve, c'est qu'elle apparaît dans la loi fondamentale de la dynamique.

★ **réécriture usuelle**

- ◇ Bien que la quantité de mouvement soit la grandeur fondamentale, une réécriture usuelle du PFD s'appuie sur le fait que la masse d'un point matériel est une constante ce qui implique

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \frac{dm \vec{v}(t)}{dt} = m \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{et ainsi :}$$

Dans un référentiel galiléen, pour tout point matériel  $M$  de masse  $m$  subissant les forces  $\vec{f}_i$ , nous pouvons écrire :

$$\sum \vec{f}_i = m \vec{a}(t)$$

- ◇ Lorsqu'en 2<sup>e</sup> année, il faudra étudier des choses dont la masse est variable, la méthode usuelle sera de revenir à la version originelle de la loi, à savoir  $\frac{dp(t)}{dt} = \sum \vec{f}_i$

## II.1.ii – lecture

- ◇ Comme son nom l'indique, c'est un *principe* : il ne se démontre pas ! Des multitudes d'expériences n'ont pas réussi à le mettre en défaut dans le cadre de ses limites, **donc** il est considéré comme représentant la réalité.
- ◇ C'est le principe fondamental de la **dynamique**. À ne pas confondre avec le principe fondamental de la **mécanique** qui, en soi, n'existe pas. Pour « fabriquer » la mécanique, il faut 3 lois, les 3 lois de NEWTON, celle-ci n'est « que » la 2<sup>e</sup>. Le problème c'est que les deux autres sont trop souvent oubliées . . .
- ◇ Il est applicable à n'importe quel point matériel ! C'est un principe absolument universel et il sera toujours vrai.
- ◇ Ce principe relie les forces qui s'exercent sur un point matériel à un instant  $t$  à l'accélération à ce même instant que possède ce point matériel  $\vec{a}(t)$ . D'un point de vue cause et conséquence il est dès lors difficile d'affirmer que ce sont les forces qui *causent* l'accélération.
- ◇ Cette loi relie force et accélération, il est donc possible de la faire fonctionner de deux manières différentes :
- si les expressions des forces sont connues, alors  $\vec{a}(t)$  est connue, ce qui donne, par projection sur les vecteurs de la base, trois équations différentielles du second ordre et « yapuka » résoudre pour avoir  $\vec{OM}(t)$
  - si les expressions des forces ne sont pas connues, alors en connaissant  $\vec{a}(t)$  il est possible, toujours par projection, de retrouver l'expression des forces
- ◇ Notons tout de suite qu'il y a une grande quantité de forces dont l'expression n'est pas connue, ce sont la plupart des forces de contact. L'utilisation du PFD sera alors délicat car ses projections feront souvent intervenir des grandeurs inconnues.
- ◇ Nous pouvons maintenant répondre à la question « qu'est-ce que la masse ? »

La *masse inertielle* est la grandeur qui caractérise la capacité qu'a un point matériel à résister aux effets des forces.



## II.2 – Aborder un problème de mécanique

- ◇ Il faut avant tout se souvenir qu'un problème de mécanique n'est pas difficile car la partie « analyse physique » se fait de manière intuitive et que la partie « analyse technique » est quasi évidente.
- ◇ La difficulté en mécanique, car il y en a bien une, c'est de ne **pas** utiliser ses intuitions lors de l'utilisation des lois physiques : les explications des phénomènes sont, en effet, fort peu intuitives ... contrairement aux phénomènes eux-mêmes.

### II.2.i – analyse physique et technique

- ◇ L'analyse physique préliminaire consiste à :
  - imaginer dans sa tête le film de ce qu'il se passe, il est important de voir les choses bouger et notamment de déterminer s'il existe plusieurs étapes notablement distinctes, ou si, à la fin, le mouvement s'arrête ou pas. Les étapes se distinguent par le fait que des forces agissent ou non. Par exemple si un objet est lancé puis heurte le sol, jusqu'au moment où il est en l'air, c'est une étape et après c'en est une autre.
  - bien repérer ce qui est contraint (notamment les trajectoires) de ce qui ne l'est pas
  - penser aux grandeurs pertinentes : les grandeurs de descriptions du dispositif (masse, longueur, ...), les efforts qui agissent (forces, ...) et enfin les conditions initiales.
- ◇ L'analyse physique doit déboucher sur une représentation dessinée de la situation à **un instant scalène**, *ie.* à un instant non particulier (point matériel en position d'équilibre, dans une position de vitesse nulle, ...). C'est un genre de photo, donc il ne vaut mieux pas tracer la trajectoire (sauf si elle est contrainte) ni la vitesse.
- ◇ L'analyse technique consiste à :
  - choisir quelle(s) loi(s) utiliser sur qui pour arriver à la réponse
  - utiliser un paramètre permettant les calculs les plus simples possibles
- ◇ Lors de cette analyse technique sont placés le centre du repère et les axes  $(Ox, Oy, Oz)$  ou les vecteurs  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

### II.2.ii – trouver « le » système

Un *système* est une partie arbitraire (donc à préciser explicitement) du dispositif étudié pour lequel les lois seront écrites.

- ◇ Lorsqu'il y a un seul point matériel mis en jeu dans le problème, la question ne se pose pas : le système étudié, *ie.* ce sur quoi nous allons écrire des lois, ne pose aucune difficulté de choix.
- ◇ Lorsqu'il y aura des dispositifs complexes, il faudra systématiquement préciser le système choisi. Nous verrons alors que, souvent, il sera pertinent non pas de subdiviser en plein de petits systèmes, mais au contraire de faire des gros systèmes de manière à écrire les lois de la mécanique pour un gros machin directement.

### II.2.iii – trouver les forces

- ◇ Une fois le système (arbitraire) choisi, trouver les forces qui s'exercent sur lui est extrêmement simple :
  - regarder les forces à distance :
    - le poids à la surface de la Terre ou l'attraction gravitationnelle loin de la surface
    - l'interaction électromagnétique si le point matériel est chargé
  - déterminer les forces de contact : **tout ce qui touche et uniquement ce qui touche le système** exerce une force de contact

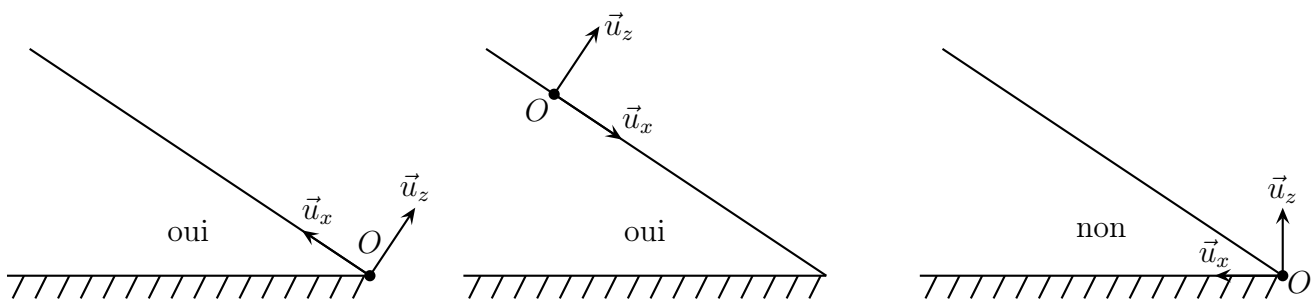
◇ Pour les forces de contact, rien de tel que de regarder le schéma réalisé : il suffit d'entourer le système et de voir tout ce qui est en contact avec le trait.

⊛ C'est une des erreurs classiques en mécanique que de se tromper dans les forces que subissent des objets sous la pression de l'intuition. Ce n'est pas parce que nous pouvons deviner *a priori* que tel ressort aura une *influence* sur le mouvement du point matériel que le point matériel subit la force exercée par le ressort !

## II.2.iv – choisir le bon repère

◇ Il est évident que pour des raisons naturelle, mieux vaut appeler  $z$  l'axe vertical et garder  $x$  et  $y$  pour les déplacements horizontaux, c'est plus parlant.

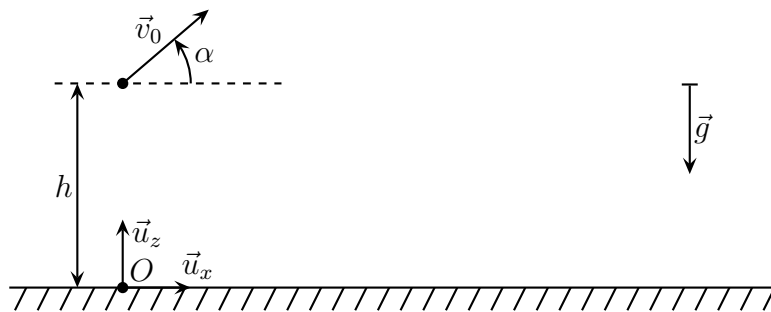
◇ Cela va avec les exemple, mais il est évident que lorsqu'un support est plan et qu'un objet glisse dessus, il est largement préférable que l'un des axes du repère soit parallèle avec le plan. L'inconvénient c'est qu'alors  $\vec{u}_z$  n'est plus vraiment vertical.



## II.3 – force à distance : le poids

### II.3.i – situation à étudier – analyse

◇ Étudions voir ce qu'il se passe lorsqu'un objet, suffisamment petit pour pouvoir être considéré comme un point matériel, est lancé de la hauteur  $h$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$  sous un angle  $\alpha$  avec l'horizontale.



◇ Analyse physique :

- nous sentons bien que l'objet va suivre une trajectoire d'abord montante puis descendante jusqu'à ce qu'il heurte le sol. Après, c'est un autre problème que nous n'étudierons pas
- il n'y a strictement aucune contrainte de mouvement pour le point matériel, il peut donc *a priori* bouger dans les trois directions de l'espace

◇ Analyse technique :

- le choix du repère est assez évident : un axe parallèle au sol, un autre vertical
- ici nous n'avons guère le choix : c'est le PFD

◇ Ici le point matériel constitua le système et le mouvement sera étudié par rapport au référentiel terrestre.

◇ La liste des forces qui s'exercent sur le point matériel sont :

- le poids (l'évolution se déroule à la surface de la Terre)
- les actions de l'air sur l'objet :
  - la poussée d'ARCHIMÈDE : négligée ici
  - la force de frottement : négligée ici

◇ Il reste uniquement le poids.

La *chute libre* correspond à un mouvement où un objet est soumis uniquement à son poids.

## II.3.ii – phénoménologie et caractéristiques du poids

### ★ phénoménologie

◇ Elle est connue! Mais à ne pas oublier et, surtout, à vérifier une fois le résultat obtenu.

Le poids a tendance à entraîner les objets vers le bas.

◇ Le poids est toujours à prendre en compte pour toute évolution qui se déroule sur Terre! Quelques fois le poids sera négligeable **devant** une autre force, mais il faudra de toute façon le prendre en compte avant de le négliger.

### ★ caractéristiques

Le poids d'un point matériel de masse  $m$  s'écrit  $\vec{P} = m \vec{g}$  où  $\vec{g}$  est l'accélération de pesanteur qui vaut  $\|\vec{g}\| \simeq 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

◇ Si sur l'ensemble de la Terre, nous avons en toute rigueur  $\|\vec{g}\| \neq C^{\text{te}}$ , nous pouvons néanmoins considérer que  $\vec{g} = \vec{C}^{\text{te}}$  dans une zone restreinte à l'échelle de la Terre, *ie.* très grande à l'échelle humaine.

Sauf cas très particuliers de mouvements amples par rapport à la Terre, nous pouvons considérer que  $\vec{g} = C^{\text{te}}$ .

◇ Nous verrons plus tard que le poids n'est pas exactement l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur un point matériel : il y a un petit quelque chose en plus.

### ★ une autre masse

◇ Nous voyons aussi apparaître ici la masse d'un corps. Toutefois son interprétation est physiquement très différente de celle rencontrée dans le PFD.

La *masse grave* caractérise la capacité d'un corps à subir la gravité, *ie.* à être attiré par les autres masses.

◇ Ce qui est tout simplement incroyable, c'est que la masse grave soit égale à la masse inertielle! Et les mesures les plus précises à  $10^{-10}$  près ne permettent pas de mettre en évidence de différence.

## II.3.iii – mouvement de la masse

### ★ équation différentielle régissant l'évolution

✧ Écrivons le PFD pour le point matériel. Comme l'action de l'air est négligée, il reste :

$$m \vec{a}(t) = \vec{P} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{a}(t) = \vec{g}}$$

Un mouvement est dit *uniformément accéléré* si tout au long du mouvement l'accélération est vectoriellement constante.

✧ Ici, nous avons bien un mouvement uniformément accéléré.

### ★ équation horaire

✧ Projétons le PFD sur les 3 axes du repère et résolvons les équations différentielles.

✧ Notons que la physique est déjà passée : elle était dans le PFD. Ici, il faudra, comme pour les circuits en régime transitoire, faire attention aux conditions initiales qui seront, cette fois, bien plus facile à déterminer.

### 🔗 mouvement sur $\vec{u}_y$

✧ En projection sur  $\vec{u}_y$ , le PFD s'écrit  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0$  ce qui est une équation différentielle simple à résoudre !

✧ En primitivant une fois nous avons :  $\frac{dy(t)}{dt} = C^{\text{te}}$ . Or à l'instant initial, comme le montre le schéma, nous avons  $v_y(0) = 0 = C^{\text{te}}$  ce qui donne  $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ .

✧ En primitivant une seconde fois, nous avons  $y(t) = C^{\text{te}'}$ . Or à l'instant initial, nous avons  $y(0) = 0 = C^{\text{te}'}$  ce qui donne  $\boxed{y(t) = 0}$ .

Un mouvement uniformément accéléré est un mouvement plan.

### 🔗 mouvement sur $\vec{u}_x$

✧ Même technique sachant que le PFD se projette en  $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0$  sur  $\vec{u}_x$ .

✧ Une première intégration donne  $\frac{dx(t)}{dt} = C^{\text{te}}$ . Or à l'instant initial  $v_x(0) = v_0 \cos \alpha = C^{\text{te}}$  ce qui donne :  $\frac{dx(t)}{dt} = v_0 \cos \alpha$ .

✧ Une deuxième intégration donne  $x(t) = v_0 (\cos \alpha) t + C^{\text{te}'}$  et comme  $x(0) = 0 = C^{\text{te}'}$  nous trouvons finalement  $\boxed{x(t) = v_0 (\cos \alpha) t}$ .

### 🔗 projeter un vecteur à la physicienne

✧ Par exemple le vecteur  $\vec{v}_0$ .

✧ Nous savons d'avance qu'il y a deux composantes, un cosinus et un sinus, reste à savoir quelle composante est quoi et, surtout, quel est le bon signe.

✧ Méthode :

→ repérer selon quels vecteurs (orthogonaux !) il se décompose, ici c'est  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_z$

- repérer quel est l'angle qui change la projection, ici c'est  $\alpha$
- imaginer que  $\alpha = 0$  et en déduire lequel des deux vecteurs porte le cosinus avec quel signe, ici c'est  $+v_0 \cos \alpha \vec{u}_x$
- l'autre composante sera  $\pm \sin$ , reste à déterminer le signe avec la valeur particulière  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , ici cela donne  $+v_0 \sin \alpha \vec{u}_z$

◇ Finalement nous avons  $\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_z$ .

◇ Bien sûr, il est fortement déconseillé de se tromper dans la projection de vecteurs.

⊛ la méthode qui consiste à trouver le bon triangle pour appliquer la bonne formule trigonométrique est piégeuse car régulièrement l'angle intéressant et le vecteur à projeter seront séparés; il faudra alors ramener l'angle intéressant au niveau du vecteur ce qui causera moult dégâts.

### 🌀 mouvement sur $\vec{u}_z$

◇ Toujours la même technique. Le PFD se projette en  $\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -g$  sur  $\vec{u}_z$ .

◇ Une première intégration donne  $\frac{dz(t)}{dt} = -gt + C^{\text{te}}$  puis, avec  $v_z(0) = v_0 \sin \alpha = C^{\text{te}}$ , nous trouvons  $\frac{dz(t)}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha$ .

◇ Une deuxième intégration donne  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin \alpha)t + C^{\text{te}'}$  et comme  $z(0) = h = C^{\text{te}'}$ , nous obtenons  $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin \alpha)t$ .

### ★ cas particulier d'une vitesse initiale nulle

◇ Si  $v_0 = 0$  alors nous avons :

$$y(t) = 0 \quad \text{et} \quad x(t) = 0 \quad \text{et} \quad z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Dans le cas d'une chute libre sans vitesse initiale, la trajectoire est rectiligne.

◇ L'impact se fait à l'instant  $t_0$  tel que  $z(t_0) = 0$ , ce qui donne :

$$0 = h - \frac{1}{2}gt_0^2 \quad \rightsquigarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

◇ La vitesse au point d'impact vaut alors  $\frac{dz}{dt}(t_0)$  avec :

$$\frac{dz(t)}{dt} = -gt \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dz}{dt}(t_0) = -gt_0 = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

La vitesse après une chute libre de hauteur  $h$  sans vitesse initiale a une norme de  $v = \sqrt{2gh}$ .

◇ Nous pouvons vérifier que cette loi est homogène et cohérente : plus la hauteur de chute est importante, plus la vitesse acquise sera grande.

◇ Nous pouvons constater que cette vitesse est indépendante de la masse : ce qui est plus lourd ne tombe pas plus vite ou alors il faut qu'il y ait d'autres forces en jeu, comme les frottements.

## II.3.iv – quelques caractéristiques du mouvement

### ★ trajectoire

La *trajectoire* est l'ensemble des points par lequel est passé ou passera le point matériel étudié.

- ◇ Formellement parlant, cela signifie que le temps n'a pas d'importance pour la trajectoire. Il faut donc l'éliminer des relations obtenue pour ne conserver que des équations en  $z$  et en  $x$ .
- ◇ Ici, il est facile d'éliminer  $t$  avec  $x$  :

$$x(t) = v_0 (\cos \alpha) t \quad \rightsquigarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

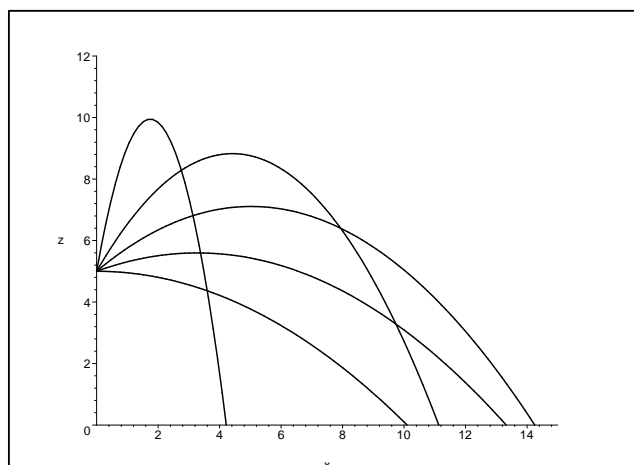
- ◇ Qu'il n'y a plus qu'à introduire dans l'expression de  $z(t)$  :

$$z = -\frac{1}{2} g \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right) + h \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{z = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha) x + h}$$

- ◇ C'est donc une parabole sauf si  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$

Lors d'un mouvement uniformément accéléré, la trajectoire est parabolique ou rectiligne.

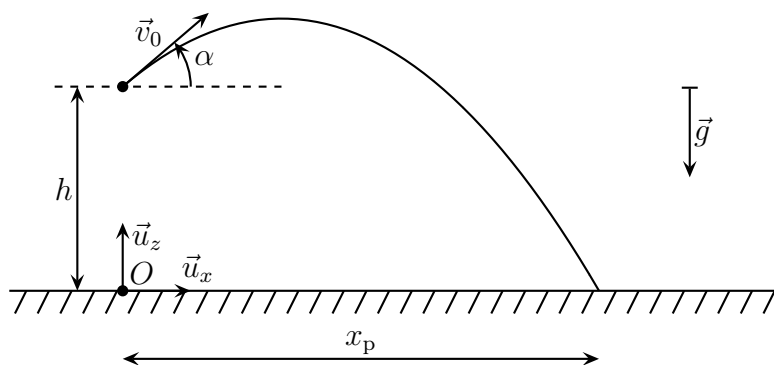
Graphique 1



- ◇ Sur le graphique 1, nous pouvons visualiser quelques trajectoire à  $v_0 = C^{te}$  et pour différents angles initiaux.

### ★ portée

- ◇ La portée est la distance parcourue entre l'instant initial et l'impact au sol.



◇ Nous avons donc, par définition,  $z(x_p) = 0$ , ce qui donne :

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_p^2 + (\tan \alpha) x_p + h \quad \rightsquigarrow \quad x_p^2 - \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} x_p - \frac{2h v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 0$$

◇ En remarquant que  $2 \cos^2 \alpha \tan \alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin(2\alpha)$ , nous obtenons l'équation suivante à résoudre :

$$x_p^2 - \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} x_p - \frac{2h v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 0$$

◇ Le discriminant vaut  $\Delta = \frac{v_0^4 \sin^2(2\alpha)}{g^2} + \frac{8h v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$  qui est toujours positif sauf si  $h \leq 0 \dots$

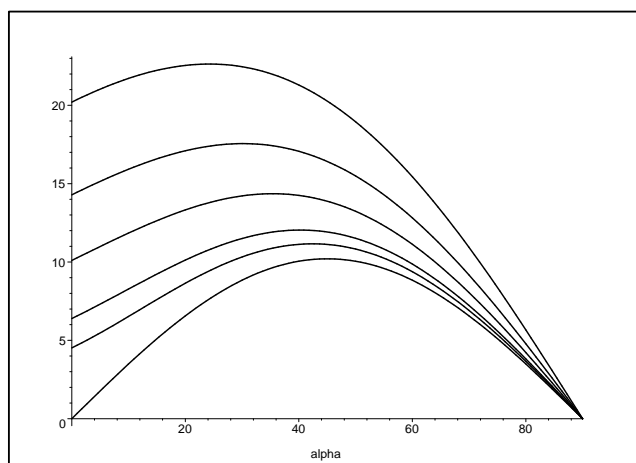
◇ De plus les deux solutions sont telles que  $x_1 x_2 = -\frac{2h v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \leq 0$ , il y en a donc une et une seule de positive. Il s'agit de :

$$x_p = \frac{\frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{v_0^4 \sin^2(2\alpha)}{g^2} + \frac{8h v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}}}{2}$$

$$\rightsquigarrow x_p = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha) + \sqrt{v_0^4 \sin^2(2\alpha) + 8gh v_0^2 \cos^2 \alpha}}{2g}$$

◇ Nous sommes loin du résultat « intuitif » que la portée est maximale pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

Graphique 2



◇ Pour  $h = 0$ , le résultat se simplifie en :

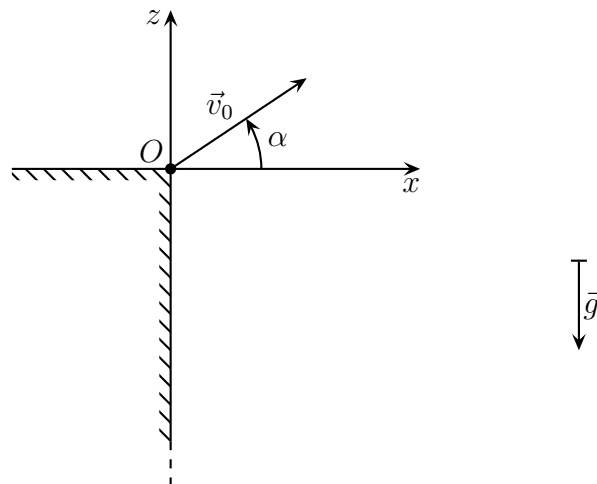
$$x_p = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha) + \sqrt{v_0^4 \sin^2(2\alpha)}}{2g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

◇ Résultat qui est bien maximal pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

## II.4 – force de contact connue : les frottements fluides

### II.4.i – situation à étudier – analyse

◇ Nous cherchons à déterminer ce qui se passe lorsqu'un caillou est jeté du haut d'un très profond ravin.



◇ Analyse physique :

- le poids va entraîner le caillou vers le bas
- comme il n'y a pas de force sur  $\vec{u}_y$  ni de vitesse initiale sur  $\vec{u}_y$ , le mouvement se fera dans le plan  $(O, x, z)$
- la vitesse va être si grande que les frottements n'auront plus un effet négligeables
- il n'y a *a priori* aucune contrainte de mouvement

◇ Analyse technique :

- le repère est évident, autant mettre le centre au point de départ
- il n'y a que le PFD qui s'offre à nous

### II.4.ii – phénoménologie et caractéristiques des frottements fluides

#### ★ phénoménologie

Lorsqu'un objet est plongé dans un fluide et qu'il est en mouvement par rapport à celui-ci, il subit une force de *frottement fluide*.

◇ Les fluides considérés sont dans l'écrasante majorité des cas l'air ou l'eau.

Les forces de frottement fluide ont tendance à faire en sorte que la vitesse de l'objet devienne égale à celle du fluide.

◇ Ainsi :



- si le fluide est au repos par rapport au référentiel d'étude, l'objet ralentira par rapport au référentiel d'étude (aspect intuitif des forces de frottement)
- si le fluide est en mouvement par rapport au référentiel d'étude, il a tendance à entraîner l'objet, donc **à le mettre en mouvement**, c'est le cas par exemple des rivières qui charrient les objets qui y sont plongés, ou du vent qui entraîne les feuilles et les graines

### ★ caractéristiques

Pour un fluide au repos dans le référentiel d'étude, la force de frottement est vectoriellement opposée au vecteur vitesse de l'objet subissant la force.

- ◇ Si le fluide n'est pas au repos, il faut prendre en compte non pas la vitesse de l'objet par rapport au référentiel mais la vitesse de l'objet par rapport au fluide.

La force de frottement fluide a une intensité telle que :

- si la vitesse n'est pas trop importante, elle est proportionnelle à cette dernière, *ie.*  $\|\vec{f}\| = \lambda v$ , soit  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$  : les frottements sont dits *linéaires*
- si la vitesse est importante, elle est proportionnelle au carré de la norme de la vitesse, *ie.*  $\|\vec{f}\| = h v^2$ , soit  $\vec{f} = -h v \vec{v}$  : les frottements sont dits *quadratiques*  
 $h$  et  $\lambda$  sont des constantes phénoménologiques qui dépendent de l'objet (matériau, forme) et du fluide.

- ◇ La limite entre vitesse importante et vitesse peu importante dépend de l'objet et du fluide. Cette limite sera discutée en 2<sup>e</sup> année.
- ◇ Dans le doute, s'il faut prendre en compte des frottements fluides (parce qu'ils sont physiquement nécessaires ou parce que l'énoncé le demande), nous prendrons des frottements fluides qui permettent de faire des calculs formellement.

## II.4.iii – trajectoires avec le modèle linéaire

### ★ application des lois physiques

- ◇ Appliquons simplement le PFD au caillou une fois lancé :

$$\vec{P} + \vec{f} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad m \vec{a}(t) = m \vec{g} - \lambda \vec{v}(t)$$

### ★ trouver la vitesse

- ◇ Projetons le PFD sur  $\vec{u}_z$  :

$$m \frac{dv_z(t)}{dt} = -m g - \lambda v_z(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dv_z(t)}{dt} + \frac{\lambda}{m} v_z(t) = -g$$

- ◇ Ce qui est une équation différentielle d'un type connu :

$$v_z(t) = A e^{-t/\tau} + v_{z,p}(t) \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{m}{\lambda}}$$

- ◇ En cherchant  $v_{z,p} = C^{te}$ , nous trouvons  $v_{z,p}(t) = -g \tau$  soit  $v_z(t) = A e^{-t/\tau} - g \tau$ .

- ◇ La condition initiale donne  $v_z(0) = v_0 \sin \alpha = A - g \tau$  et ainsi  $\boxed{v_z(t) = (g \tau + v_0 \sin \alpha) e^{-t/\tau} - g \tau}$ .

- ◇ Faisons de même sur  $\vec{u}_x$  :

$$m \frac{dv_x(t)}{dt} = -\lambda v_x(t) \rightsquigarrow \frac{dv_x(t)}{dt} + \frac{\lambda}{m} v_x(t) = 0 \rightsquigarrow v_x(t) = B e^{-t/\tau}$$

◇ Et avec la condition initiale  $v_x(0) = v_0 \cos \alpha$ , nous trouvons  $v_x(t) = v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau}$ .

◇ Nous pouvons alors constater que pour  $t \rightarrow \infty$  :

→  $v_z(t) \rightarrow -g\tau = -\frac{gm}{\lambda}$  : il y a une vitesse limite d'autant plus grande que la masse est grande et d'autant plus faible que les frottements sont importants

→  $v_x(t) \rightarrow 0$  : il arrive un moment où l'objet n'avance quasiment plus, contrairement à la chute libre

### ★ trouver la position

◇ Cette fois comme nous avons la vitesse, il suffit d'intégrer en tenant compte des conditions initiales.

$$v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} = (g\tau + v_0 \sin \alpha) e^{-t/\tau} - g\tau \rightsquigarrow z(t) = -\tau (g\tau + v_0 \sin \alpha) e^{-t/\tau} - g\tau t + C^{\text{te}}$$

◇ Avec la condition initiale  $z(0) = 0$ , nous trouvons ainsi :

$$z(t) = \tau (g\tau + v_0 \sin \alpha) (1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t$$

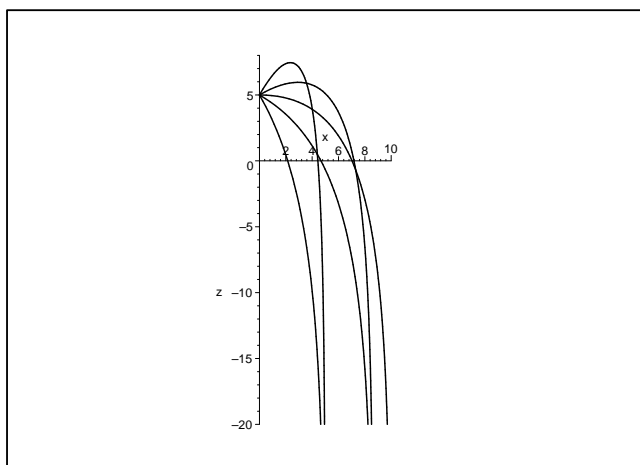
◇ De même pour la position en  $x$  avec  $x(0) = 0$  :

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau} \rightsquigarrow x(t) = -\tau v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau} + C^{\text{te}'} \rightsquigarrow x(t) = \tau v_0 \cos \alpha (1 - e^{-t/\tau})$$

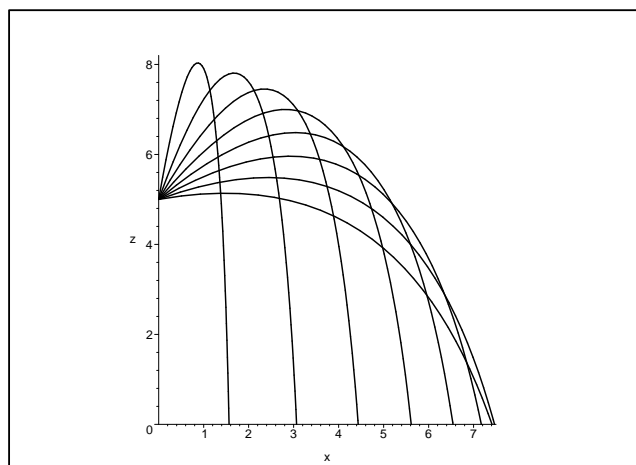
◇ Nous pouvons alors constater que  $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \tau v_0 \cos \alpha$  pourvu que le ravin soit suffisamment profond nous avons. La portée maximale est obtenue pour un tir à l'horizontale.

### ★ trajectoires

Graphique 3



Graphique 4



◇ Sur les graphiques 3 et 4, nous pouvons voir quelques trajectoires avec un frottement de type linéaire et nous pouvons constater qu'effectivement la portée est la plus longue pour un tir à l'horizontale ... si la profondeur est assez grande.

## II.4.iv – trajectoire avec le modèle quadratique

### ★ lois physiques

◇ Écrivons le PFD appliqué au caillou :

$$m \vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{f} \quad \rightsquigarrow \quad m \vec{a}(t) = m \vec{g} - h v \vec{v}$$

◇ Projétons sur  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_z$  sans oublier que  $v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_z^2(t)}$  :

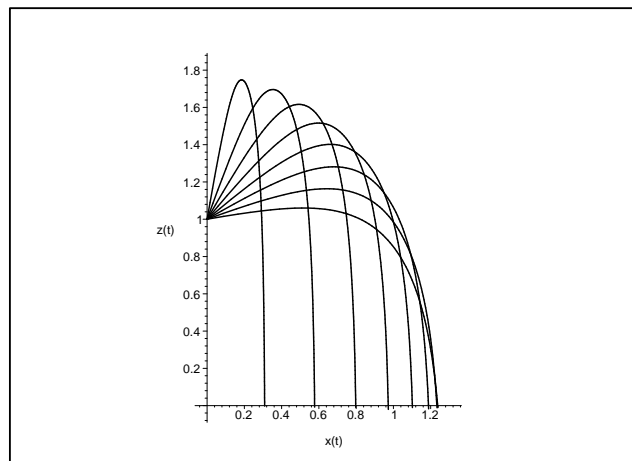
$$\begin{cases} m \frac{dv_x(t)}{dt} = -h v(t) v_x(t) \\ m \frac{dv_z(t)}{dt} = -h v(t) v_z(t) - m g \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} + \frac{h}{m} \sqrt{v_x^2(t) + v_z^2(t)} v_x(t) = 0 \\ \frac{dv_z(t)}{dt} + \frac{h}{m} \sqrt{v_x^2(t) + v_z^2(t)} v_z(t) = -g \end{cases}$$

◇ Ce qui est un système d'équations différentielles pour le moins difficile à résoudre ...

### ★ trajectoires

◇ Numériquement, la résolution de ces équations donne les trajectoires représentées sur le graphique 5.

Graphique 5

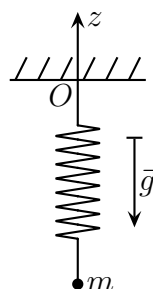


◇ Nous pouvons constater que les trajectoires sont sensiblement différentes de celles avec le frottement linéaire : elles sont moins arrondies.

## II.5 – force de contact connue : la force élastique

### II.5.i – une masse au bout d'un ressort

◇ Étudions les oscillations d'une masse accrochée au bout d'un ressort vertical.



◇ Analyse physique :

- le poids va entraîner la masse vers le bas mais cette dernière va être rappelée vers le haut : il risque d'y avoir oscillations
- nous allons supposer que le mouvement dure suffisamment longtemps, *ie.* qu'il est perpétuel à l'échelle d'observation
- le mouvement est contraint verticalement : les projections horizontales du PFD ne pourront pas servir à déterminer le mouvement horizontale de la masse

◇ Analyse technique :

- le centre du repère est presque naturel. Parfois il est mis là où la masse est à l'équilibre. Ça se fait régulièrement mais c'est piégeux au sens où le centre dépend alors précisément de la situation (masse, ressort) et risque peut-être de fausser des résultats si à la fin un paramètre (masse, ressort) varie
- pas de problème pour l'approche : c'est un PFD

◇ Liste des forces s'exerçant sur la masse :

- force à distance : le poids
- force de contact :
  - la tension exercée par le ressort
  - les contacts avec l'air : la poussée d'ARCHIMÈDE (négligée) et les frottements (négligés)

## II.5.ii – phénoménologie et caractéristiques de la force élastique

### ★ phénoménologie de l'action d'un ressort

- ◇ Prenons un ressort et comprimons le. Nous le sentons « résister » à la compression et ce d'autant plus qu'il est comprimé : le ressort cherche à recouvrer sa longueur naturelle.
- ◇ Il en est de même lorsque nous étirons un ressort.
- ◇ Tant qu'un ressort n'est pas trop étiré ou trop comprimé, il retourne ensuite à sa longueur naturelle.
- ◇ Si un ressort est trop étiré, sa déformation devient permanente, il s'agit d'une déformation plastique.
- ◇ Si un ressort est trop comprimé, les spires se touchent les unes les autres, il devient subitement incompressible

### ★ caractéristiques

Un *ressort idéal* est un ressort sans masse, parfaitement élastique à spires non jointives. Il est caractérisé par sa longueur naturelle  $\ell_0$  et sa constante de raideur  $k$  en  $\text{N.m}^{-1}$ .

- ◇ Il est préférable de parler de longueur naturelle plutôt que de « longueur à vide » car la longueur à vide n'est pas identique à la longueur naturelle lors de ressorts non idéaux.

Plus la constante de raideur  $k$  d'un ressort est grande, plus le ressort est dur.

◇ À la limite :

- une constante de raideur infinie correspond à une barre rigide
- une constante de raideur nulle correspond à une absence de ressort

La force qu'exerce un ressort idéal sur un objet accroché à une de ses extrémités s'exprime sous la forme  $\vec{f} = -k (\Delta\ell) \vec{u}_{\text{sortant}}$  où :

- $k$  est la constante de raideur
- $\Delta\ell \triangleq \ell - \ell_0 \geq 0$  est l'allongement du ressort
- $\vec{u}_{\text{sortant}}$  est le vecteur unitaire toujours dirigé vers l'extérieur et tangent au ressort au niveau de ce qui subit la force



◇ Remarquons que  $\vec{u}_{\text{sortant}}$  dépend de la position de la masse.



◇ Nous écrirons toujours la force sous la forme  $-k (\Delta\ell) \vec{u}_{\text{sortant}}$  avant d'exprimer  $\vec{u}_{\text{sortant}}$  en fonction des vecteurs de la base utilisée.

### ★ et les élastiques

Les élastiques exercent une force élastique de type  $-k (\Delta\ell) \vec{u}_{\text{sortant}}$  en étirement et n'exercent aucune force en compression.

◇ En fait lorsque nous essayons de comprimer un élastique, il devient lâche et n'exerce plus aucune force.

## II-5.iii – un mouvement déjà connu

### ★ lois physiques

◇ Écrivons le PFD appliqué à la masse et remarquons que  $\vec{u}_{\text{sortant}} = -\vec{u}_z$  :

$$\vec{P} - k (\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{sortant}} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \vec{u}_z = -m g \vec{u}_z + k (\ell - \ell_0) \vec{u}_z$$

◇ En projection sur  $\vec{u}_z$ , cela donne :

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -m g + k (\ell(t) - \ell_0)$$

◇ Reste maintenant à relier  $z(t)$  et  $\ell(t)$  et c'est là qu'il faut particulièrement faire attention : c'est de la **pure géométrie**, il serait dommage de se tromper. Nous avons toujours  $\ell(t) > 0$  (c'est une longueur) et ici nous avons  $z(t) < 0$  ce qui donne, étant donné la position du centre  $O$  :  $\ell(t) = -z(t)$ . Nous obtenons ainsi :

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -m g + k (-z(t) - \ell_0) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} z(t) = -g - \frac{k}{m} \ell_0$$

◇ Nous pouvons remarquer qu'il s'agit d'une équation différentielle du second ordre correspondant à des oscillations de pulsations propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

La pulsation propre d'une masse accrochée à un ressort de constante de raideur  $k$  vaut

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- ◇ Notons que même verticalement, la gravité  $g$  (donc le poids) n'a aucune influence dans la pulsation propre d'une masse accroché au bout d'un ressort.
- ◇ Si nous nous étions trompé dans le lien entre  $\ell(t)$  et  $z(t)$ , il y aurait eu une erreur de signe dans l'équation différentielle et cela aurait été repérable.

### ★ équations horaires

- ◇ Nous pouvons donc écrire  $z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_p(t)$  avec  $A$  et  $\varphi$  dépendant des conditions initiales.
- ◇ Cherchons  $z_p(t)$  sous la forme d'une constante puisque le second membre de l'équation différentielle régissant l'évolution de la masse est constant. Nous trouvons  $z_p(t) = -\ell_0 - \frac{m g}{k}$ .
- ◇ Il s'agit de la position d'équilibre. Son expression est cohérente : elle est négative et ce d'autant plus que  $m g$  est grand ou que  $k$  est faible.

## III – Trajectoires circulaire

- ◇ Comme l'indique le nom de cette partie, nous allons désormais nous concentrer sur les trajectoires circulaires.

Une trajectoire est *circulaire* lorsqu'elle forme un cercle ou un arc de cercle.

### III.1 – Décrire un mouvement circulaire

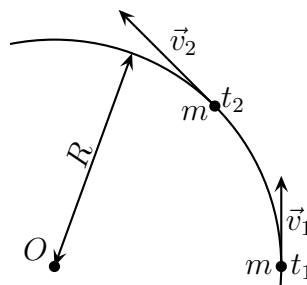
#### III.1.i – phénoménologie

##### ★ de nombreux exemples

- ◇ Bien sûr il y a tout d'abord les vraies trajectoires circulaires (au moins en première approximation) : satellites autour de la Terre, Terre autour du Soleil, manège, ...
- ◇ Mais il y a aussi les trajectoires circulaires qui ne font pas un cercle mais qui sont guidés : le pendule simple (guidé par un fil) ou un wagonnet, une voiture (guidé par des rails, une route, ...)

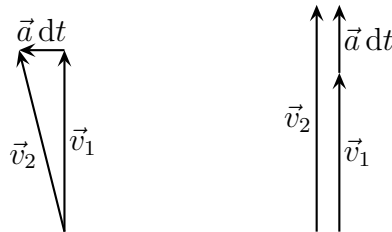
##### ★ deux accélérations

- ◇ Considérons la portion de trajectoire circulaire ci-dessous où la situation est représentée à deux instants  $t_1$  et  $t_2 > t_1$  différents.



- ◇ Nous pouvons tout d'abord constater que le vecteur vitesse est constamment tangent à la trajectoire, ce qui est, somme toute, normal.
- ◇ De plus nous pouvons constater que la vitesse change de deux manières fondamentalement différentes : en direction et en norme.
  - le changement de direction est obligatoire pour une trajectoire circulaire sur laquelle tout objet est constamment obligé de tourner : s'il y a changement de vecteur vitesse, il y aura **toujours** accélération (mais pas au sens usuel). Cette accélération sera orthogonale à la vitesse afin de la faire tourner.
  - le fait d'augmenter la norme de la vitesse est un autre type d'accélération qui correspond plus au sens usuel, mais qui n'est en aucun cas obligatoire. Cette accélération se fera dans la direction de la vitesse.
- ◇ Tout est basé sur la signification même de l'accélération : c'est ce qui caractérise comme évolue le vecteur vitesse.

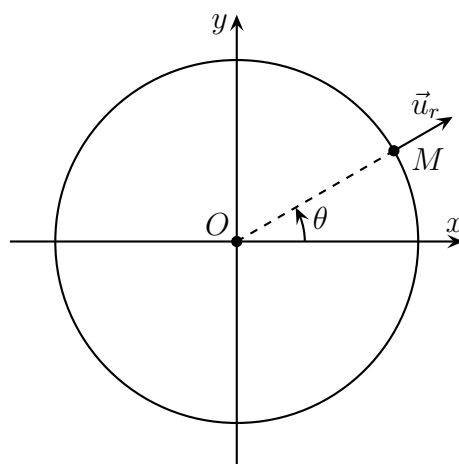
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{a} dt$$



### III.1.ii – un repère évident pour un repérage simple

- ◇ Il n'y a pas tellement besoin d'ergoter : lorsque nous avons affaire à un mouvement circulaire, nous avons tendance à centrer le repère sur le centre de la trajectoire. Réjouissons-nous, ce qui paraît le plus naturel conduira aux calculs les plus simples.

Pour repérer un point sur un cercle, il suffit de la donnée d'un seul nombre :  $\theta(t)$ .



Tout le mouvement est contenu dans  $\theta(t)$  lorsque la trajectoire est circulaire.

- ◇ Une fois le repère centré, nous pouvons constater que le repérage par  $x(t)$  et  $y(t)$  ne semble pas pertinent : pour un même  $x(t)$  il existe deux  $y(t)$  (sauf cas trop particulier pour être intéressants).

- ◇ Il paraît plus naturel de repérer la position du point  $M$  par la seule donnée de l'angle algébrique  $\theta(t)$  que nous prendrons, conventionnellement, à partir de l'axe  $(Ox)$ .
- ◇ Notons que les axes  $(Oxy)$  ne constituent pas véritablement le repère (puisque nous allons repérer avec  $\theta(t)$ ), mais plus le référentiel et est, en ce sens, indispensable.
- ◇ Puisque nous allons avoir besoin de **vecteurs** position, vitesse, accélération, nous allons définir des vecteurs idoines.

Le vecteur position d'un point situé sur un cercle s'écrit  $\overrightarrow{OM}(t) \triangleq R\vec{u}_r$ .

- ◇ La « difficulté » de ce repérage, difficulté qui n'en est pas vraiment une, est qu'il faut savoir où se situe le point  $M$  pour dessiner  $\vec{u}_r$ .

Le vecteur  $\vec{u}_r$  dépend de la position de  $M$  et est donc, en particulier, fonction du temps.

- ◇ Quand il faudra le dériver (pour la vitesse) ça posera quelques soucis.

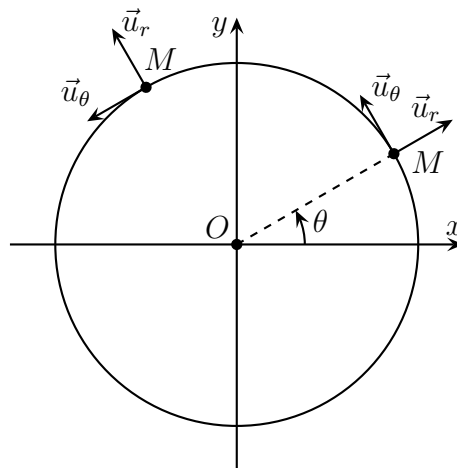
### III.1.iii – la vitesse est toujours tangentielle

- ◇ Nous admettrons très provisoirement le résultat suivant.

Pour un point  $M$  évoluant sur une trajectoire circulaire de rayon  $R$  repéré par  $\theta(t)$ , le vecteur vitesse s'écrit

$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta$$

où  $\vec{u}_\theta$  est le vecteur tangent à la trajectoire dans le sens de  $\theta$ .



- ◇ Remarquons bien que  $\vec{v}$  et  $\vec{u}_\theta$  ne sont pas forcément dans le même sens, surtout si  $\dot{\theta}(t) < 0$  :  $\vec{u}_\theta$  est un vecteur de repérage, il faut donc savoir, pour le dessiner, comment se repère  $M$  et où est  $M$ , inutile de savoir ce que fait  $M$ .
- ◇ Maintenant si nous savons par avance dans quel sens tourne  $M$ , autant prendre  $\vec{u}_\theta$  dans le sens de la vitesse!

### III.1.iv – l'accélération n'est pas toujours normale

- ◇ Nous admettrons très provisoirement le résultat suivant.



Pour un point  $M$  évoluant sur une trajectoire circulaire de rayon  $R$  repéré par  $\theta$ , le vecteur accélération s'écrit

$$\vec{a}(t) = -R\dot{\theta}^2(t)\vec{u}_r + R\ddot{\theta}(t)\vec{u}_\theta \quad \text{ou} \quad \vec{a}(t) = -\frac{v^2(t)}{R}\vec{u}_r + \frac{dv(t)}{dt}\vec{u}_\theta.$$

- ◇ La partie sur  $\vec{u}_r$  correspond à l'accélération normale et c'est celle qui permet de faire tourner le point matériel.
- ◇ La partie sur  $\vec{u}_\theta$  correspond à l'accélération tangentielle et c'est celle qui est responsable de l'augmentation (ou de la diminution) de la norme du vecteur vitesse, comme cela se voit avec l'expression  $\frac{dv(t)}{dt}\vec{u}_\theta$ .
- ◇ Notons que dans l'expression de l'accélération tangentielle, ce n'est pas le vecteur vitesse qui est dérivé mais sa composante sur  $\vec{u}_\theta$ .

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dR\dot{\theta}(t)}{dt} = R\frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} = R\ddot{\theta}(t) \quad \text{et} \quad \frac{v^2(t)}{R} = \frac{R^2\dot{\theta}^2(t)}{R} = R\dot{\theta}^2(t)$$

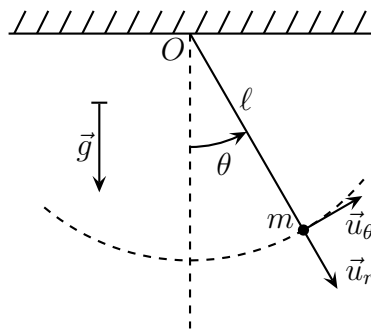
### III.1.v – piqûre de rappel préventive

- ◇ Toutes les expressions de la position, de la vitesse et de l'accélération sont à parfaitement maîtriser puisque ce sont celles qui vont permettre de décrire le mouvement circulaire.
- ◇ Si la description du mouvement n'est pas juste, les lois physiques ne peuvent pas être bien transcrites et, de là, quelle que soit les les qualités physiques dont quelqu'un peut faire preuve, il ne pourra pas aller loin.

## III.2 – force de contact inconnue : la tension exercée par un fil

### III.2.i – un pendule simple

- ◇ Étudions les oscillations d'un pendule simple, *ie.* d'une masse accrochée au bout d'un fil.



- ◇ Analyse physique :
  - il va y avoir des oscillations à cause du poids qui entraîne la masse vers le bas et qui remonte grâce au fil. En négligeant l'interaction entre l'air et la masse, les oscillations peuvent durer très longtemps
  - il y a, cette fois, une contrainte du mouvement : la masse est accrochée au bout d'un fil, elle est donc toujours à la distance  $\ell$  du point d'attache, c'est un mouvement circulaire
- ◇ Analyse technique :
  - le repérage va être naturel : le centre  $O$  au point d'attache et l'angle  $\theta$  repéré par rapport à la verticale dont on sent qu'il s'agit de la position d'équilibre au repos
  - nous utiliserons le PFD

◇ La liste des forces qui s'exercent sur la masse sont :

- force à distance : son poids  $\vec{P} = m \vec{g}$
- force de contact : la tension exercée par le fil  $\vec{T}$
- force de contact : les actions exercées par l'air (poussée d'Archimède négligée et frottements fluides négligés)

### III-2.ii – phénoménologie et caractéristiques de la tension exercée par un fil

Un *fil idéal* est un fil sans masse, sans raideur, parfaitement inextensible et infiniment souple

◇ Un fil empêche deux choses de s'éloigner de trop mais n'interdit pas qu'elles se rapproche.

- Un fil idéal exerce une force qui s'écrit  $\vec{T} = -T \vec{u}_{\text{sortant}}$  avec
- $T$  une norme inconnue et *a priori* fonction du temps
  - $\vec{u}_{\text{sortant}}$  tangent au fil à son extrémité

◇ C'est **la** difficulté des forces exercées par les fils : la norme est *a priori* inconnue.

⊛ écrire directement à l'intuition, à la logique, la norme exercée par un fil, sans passer par une loi physique, conduit à une erreur ... sauf dans les cas où cette norme est sans intérêt.

### III-2.iii – mouvement du pendule simple

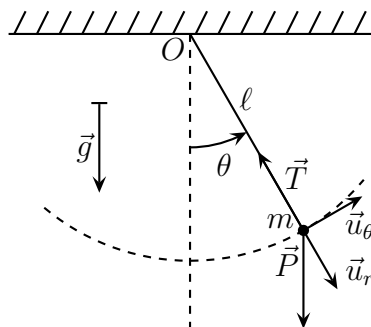
#### ★ traduction des lois physiques

◇ Écrivons le PFD :

$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad m \vec{g} + \vec{T} = m \vec{a}$$

◇ Rien d'extraordinaire, c'est maintenant qu'il faut bien faire attention à la description des forces :

- $\vec{P} = m g \cos \theta \vec{u}_\theta - m g \sin \theta \vec{u}_\theta$  (géométrie pure)
- $\vec{T} = -T \vec{u}_r$  (loi physique du fil idéal)
- $\vec{a} = -\ell \dot{\theta}^2(t) \vec{u}_r + \ell \ddot{\theta}(t) \vec{u}_\theta$  (cinématique)



#### ★ équation différentielle régissant le mouvement

◇ Projets le PFD sur le vecteur  $\vec{u}_\theta$  :

$$-m g \sin \theta + 0 = m \ell \ddot{\theta}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = 0}$$

- ◇ Ce n'est pas une équation différentielle d'oscillations classiques à cause du  $\sin \theta$ .
- ◇ Les oscillations ne dépendent pas de la masse. Ce qui est très avantageux pour les trapézistes : peu importe la personne à réceptionner, le « top » départ est le même pour tous.

### 🕒 cas des petits angles

- ◇ Lorsque  $|\theta(t)| \ll 1$ , nous avons  $\sin \theta(t) = \theta(t)$  et alors l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta(t) = 0$$

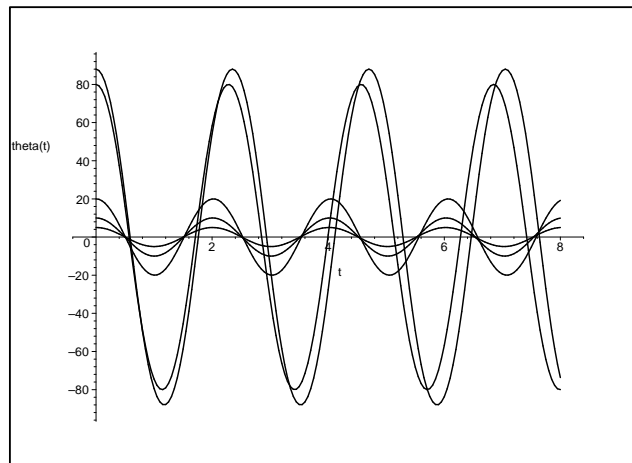
- ◇ Cette fois il s'agit bien d'oscillations de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ .

Pour un pendule simple de longueur  $\ell$  il y a *isochronisme* des petites oscillations à la pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ .

- ◇ Isochronisme signifie simplement que toutes les petites oscillations se font sur un même rythme.

### 🕒 représentation graphique

Graphique 6



- ◇ Nous pouvons constater sur le graphique 6 que les oscillations de faible amplitude sont bien synchrones, contrairement à celles de grande amplitudes qui ont tendance à se décaler progressivement.

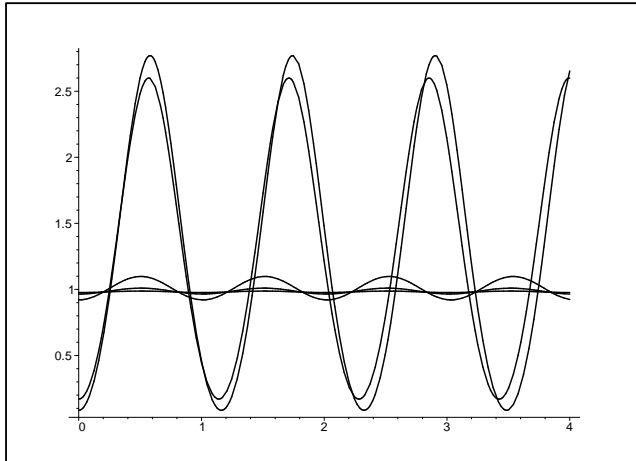
### ★ norme de la tension exercée par le fil

- ◇ Pour déterminer la norme de la tension que le fil exerce sur la masse, nous allons utiliser le revers du PFD.
- ◇ Pour cela projetons le PFD sur  $\vec{u}_r$  :

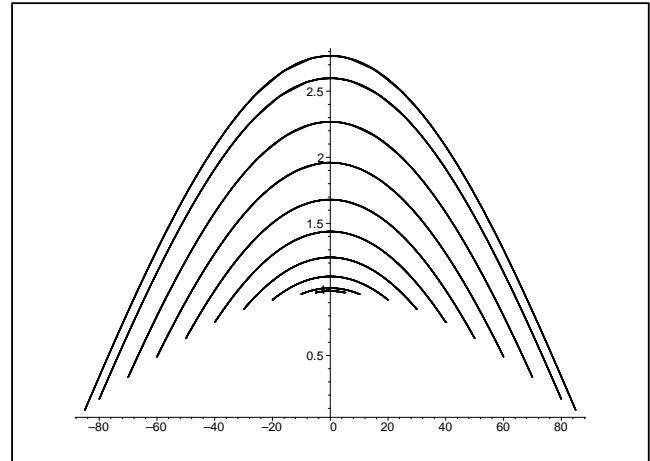
$$m g \cos \theta(t) - T = -m \ell \dot{\theta}^2(t) \quad \rightsquigarrow \quad T = m g \cos \theta(t) + m \ell \dot{\theta}^2(t)$$

- ◇ Pour l'instant nous ne pouvons pas déterminer d'expression plus simple de  $T(t)$ . Toutefois nous pouvons déjà constater que cette tension dépend bien de  $\theta$  et qu'elle est maximale pour  $\theta = 0$ , position pour laquelle non seulement  $\cos \theta$  est maximale mais aussi pour laquelle  $\dot{\theta}$  est maximale.

Graphique 7



Graphique 8

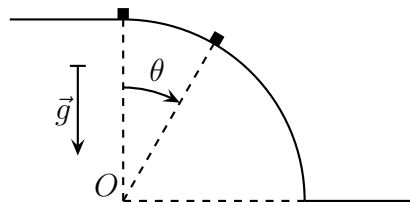


- ◇ Sur le graphique 7, nous pouvons voir  $T(t)$  alors que sur le graphique 8, nous avons tracé  $T(\theta)$ .
- ◇ Nous constatons que la tension dépend non seulement de la position mais aussi du mouvement : à  $\theta = 0$  la tension n'est pas la même suivant que les oscillations sont à faible ou forte amplitude !

## III.3 – force de contact inconnue : action exercée par un support

### III.3.i – tomber d'une bosse

- ◇ Un objet est initialement posé au sommet d'une bosse de forme circulaire. Il se met à tomber du côté bombé. Où précisément décolle-t-il de la bosse ?



- ◇ Analyse physique :
  - l'objet est dans une position instable et va se mettre à tomber à un moment, il ne suivra pas la bosse jusqu'au bout.
  - tant que l'objet n'a pas décollé, il va avoir une trajectoire circulaire.
  - nous négligerons dans ce problème tout phénomène de frottement
  - étant donné que le problème est de déterminer s'il y a contact ou pas, il va falloir se concentrer sur la détermination de la force de contact
- ◇ Analyse technique :
  - c'est une trajectoire circulaire, le repérage est immédiat
  - il y a des forces inconnues, notamment la force de contact avec le support → il faudra faire attention aux projections du PFD
- ◇ Liste des forces s'exerçant sur l'objet :
  - force à distance : le poids (évidemment)
  - force de contact : l'action de l'air (négligée)
  - force de contact : l'action du support

### III.3.ii – phénoménologie et caractéristiques du contact avec un support

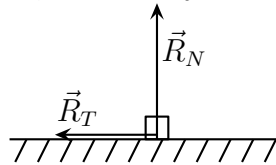
#### ★ phénoménologie

- ◇ Lorsqu'un objet est sur un support, il est important de savoir si l'objet peut, ou non, se séparer (décoller) de son support.
- ◇ Si un objet peut décoller, alors le support ne retient jamais l'objet, il ne fait **que** de le repousser.
- ◇ En plus de cela il peut y avoir des frottements lorsque l'objet glisse sur le support.

#### ★ caractéristique de l'action exercée par le support

L'action exercée par un support sur un objet se décompose en deux composantes :

- l'action normale notée  $\vec{R}_N$  dirigée vers l'extérieur du support caractérisant le fait que l'objet ne peut pas rentrer dans le support
- l'action tangentielle notée  $\vec{R}_T$  parallèle au plan du support et caractérisant les frottements, appelés *frottements solides*, entre l'objet et le support



L'action normale exercée par un support s'écrit  $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_{\text{sortant}}$  avec :

- $\vec{u}_{\text{sortant}}$  normal au support au point de contact
- $R_N \geq 0$  s'il peut y avoir décollement
- $R_N \leq 0$  s'il ne peut pas y avoir de décollement

- ◇ Comme pour la force exercée par le fil, s'il arrive d'écrire « à l'intuition » directement que la norme de la réaction normale vaut tant, c'est soit juste et parfaitement inutile, soit faux et conduit à des erreurs.

### III.3.iii – angle de rupture

#### ★ traduction du problème

- ◇ Ici tous les frottements sont négligés, en particulier ceux dus au contact solide – solide.
- ◇ L'action du support se réduit donc à la composante normale.
- ◇ Le but du problème est de déterminer une rupture, c'est-à-dire une fin de contact. Comme une force de contact ne s'exerce que s'il y a contact, nous pouvons en déduire que s'il n'y a plus de force, il n'y a plus de contact.

Il y a rupture de contact entre deux objets dès lors que la norme de l'interaction de contact entre les deux devient nulle.

- ◇ Nous allons donc chercher à déterminer  $\vec{R}_N$  et pour cela, rien de tel qu'un bon vieux PFD!

#### ★ expression des lois physique

- ◇ Écrivons le PFD sur l'objet et les expressions des forces

$$\vec{P} + \vec{R}_N = m \vec{a}(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{P} = -m g \cos \theta \vec{u}_r - m g \sin \theta \vec{u}_\theta \\ \vec{R}_N = R_N \vec{u}_r \end{cases}$$

◇ Projétons sur  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  :

$$\begin{cases} -m R \dot{\theta}^2(t) = -m g \cos \theta + R_N \\ m R \ddot{\theta}(t) = m g \sin \theta \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} R_N = -m R \dot{\theta}^2(t) + m g \cos \theta(t) \\ \ddot{\theta}(t) - \frac{g}{R} \sin \theta(t) = 0 \end{cases}$$

◇ La deuxième équation différentielle est celle vérifiée par  $\theta(t)$ . Son écriture canonique est

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - \omega_0^2 \theta(t) = 0$$

Les solutions d'une équation différentielle de forme canonique

$$\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} - \omega_0^2 \alpha(t) = \text{qqch}(t)$$

s'écrivent  $\alpha(t) = A \cosh(\omega_0 t) + B \sinh(\omega_0 t) + \alpha_p(t)$   
où  $A$  et  $B$  sont les constantes d'intégration.

◇ Ici, cela signifie que  $\theta(t) = A \cosh(\omega_0 t) + B \sinh(\omega_0 t)$ , *ie.* que  $\theta(t)$  diverge. Rien de plus normal pour une position d'équilibre instable !

◇ La première équation différentielle est insuffisante pour déterminer  $R_N$  en fonction de la position, *ie.* en fonction uniquement de  $\theta$ .

### ★ manipulations usuelles

◇ Multiplions l'équation différentielle régissant l'évolution de  $\theta(t)$  par  $\dot{\theta}(t)$  :

$$R \dot{\theta}(t) \ddot{\theta}(t) - g \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{R}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\theta}^2(t)) + \frac{d}{dt} (g \cos \theta) = 0$$

◇ Intégrons cette relation **sans oublier les conditions initiales** :  $\dot{\theta}(0) = 0$  (départ sans vitesse initiale) et  $\theta(0) = 0$  (départ en haut) :

$$\frac{R}{2} \dot{\theta}^2(t) - 0 + (g \cos \theta - g) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad R \dot{\theta}^2(t) = 2g(1 - \cos \theta)$$

◇ Nous pouvons alors remplacer cette expression dans cette de  $R_N$ , ce qui donne :

$$R_N = -m 2g(1 - \cos \theta) + m g \cos \theta(t) \quad \rightsquigarrow \quad R_N = m g (3 \cos \theta - 2)$$

◇ La force normale exercée sur le support sera nulle pour  $\cos \theta = \frac{2}{3}$  et donc l'angle de rupture vaut

$$\theta_c = \arccos \frac{2}{3} = 48^\circ$$

## IV – Mouvements plus complexes

- ◇ Plus complexes, mais pas plus difficiles! Avant cela, nous allons voir les deux dernières lois de la mécanique qui sont, parfois, bien utiles.

### IV.1 – Première loi de la mécanique : principe d'inertie

#### IV.1.i – énoncé

Il existe des référentiels dits *galiléens* dans lesquels tout point matériel a une trajectoire rectiligne uniforme si et seulement si la résultante des forces qu'il subit est nulle.

#### IV.1.ii – lecture

- ◇ C'est un énoncé dense!

##### ★ postulat

- ◇ Les référentiels galiléens existent. Donc voilà! Maintenant il va falloir en trouver, c'est une autre paire de manches.

##### ★ propriété fondamentale d'un référentiel galiléen

- ◇ « tout point » : en tout lieu, en tout temps.
- ◇ « trajectoire » : définie par rapport au référentiel
- ◇ « rectiligne » : suivant une portion de droite
- ◇ « uniforme » : à norme de vitesse constante

Un mouvement d'un point matériel est dit *uniforme* si la norme de son vecteur vitesse est constant.

- ◇ « somme des forces » : c'est appelé aussi la résultante des forces
- ◇ « est nulle » : c'est bien la somme totale des forces qui doit être nulle, pas seulement la somme d'une ou deux.

##### ★ 2<sup>e</sup> effet du postulat

- ◇ C'est quelque chose qu'il est difficile de véritablement intégrer à son mode de raisonnement, et pourtant ...

Les forces ne servent pas à faire avancer mais à modifier la quantité de mouvement d'un point matériel.

- ◇ Cela se voit dans la 2<sup>e</sup> loi.

##### ★ utilité pratique

- ◇ Cette loi nous permettra, dans un chapitre ultérieur (le 4 sûrement) de dire quand un référentiel est ou n'est pas galiléen.

★ le principe d'inertie n'est pas ...

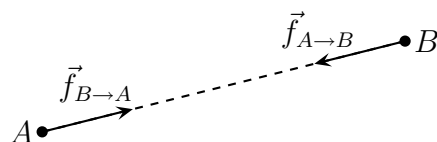
- ◇ Ce principe (pourtant souvent vu, lu, appris) est faux : « Dans un référentiel galiléen, un point matériel a une trajectoire rectiligne uniforme si et seulement si la résultante des forces qu'il subit est nulle. »
- ◇ Si tel était le cas, il pourrait se démontrer avec la 2<sup>e</sup> loi de Newton (le PFD) et deviendrait alors complètement inutile en tant que loi !

## IV·2 – Troisième loi de la mécanique : principe des actions réciproques

### IV·2·i – énoncé

Lorsque deux points matériels sont en interaction, alors :

$$\vec{f}_{A \rightarrow B} = -\vec{f}_{B \rightarrow A} \quad \text{et} \quad \vec{f}_{A \rightarrow B} \parallel \overrightarrow{AB}$$

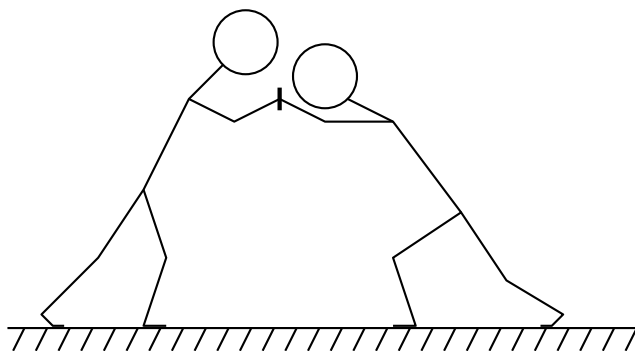


### IV·2·ii – lecture

- ◇ Tout d'abord c'est un énoncé fondamentalement différent des précédents car il parle de deux points matériels.
- ◇ La force que l'un exerce sur l'autre est à tout instant égale à l'opposée de celle que l'autre exerce sur le premier. Le fait que cela soit « à tout instant » est gênant pour l'intuition lorsque les points matériels sont éloignés. Le principe n'est alors pas véritablement faux mais appliqué sous une autre forme.

★ exemple du vas-y que je te pousse

- ◇ Étudions la situation suivante.



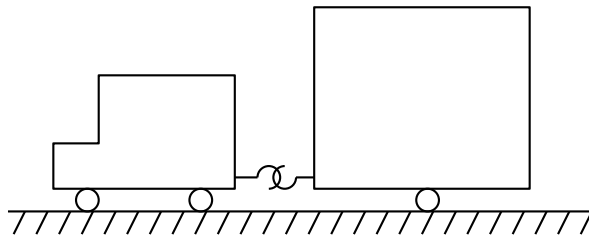
- ◇ Pourquoi l'un va-t-il gagner ? Parce qu'il pousse plus fort que l'autre ? Impossible. Ils se poussent au niveau des mains qui peuvent être considérées comme des points matériels à l'échelle de la situation : la force que l'un exerce sur l'autre est égale à celle qui subit !
- ◇ Regardons bien ce qui permet à l'un des bonhommes d'avancer. Faisons la liste des forces :
  - le poids : bof, ce n'est pas lui qui va jouer un rôle ici
  - la force de contact exercée par l'adversaire : a plutôt tendance à faire reculer



- la force de contact exercée par le sol : il **doit** y avoir des forces tangentielles et tant que le pied ne glisse pas, celles-ci sont inférieures à  $f R_N$
- ◇ Conclusion : pour gagner, mieux vaut :
  - avoir de bonnes chaussures et un sol bien agrippant
  - être lourd de sorte qu’il sera plus facile de pousser dans le sol ( $R_N$  grand)
- ◇ En plus de cela, d’après le PFD, plus la masse est imposante, plus les effets des forces subies est faible. Mieux vaut donc être lourd de telle sorte que l’action de l’autre n’ait que peu d’influence (effet sumo).

★ **camping**

- ◇ Pourquoi la voiture avance-t-elle alors qu’elle tire la caravane autant que la caravane ne la tire ?

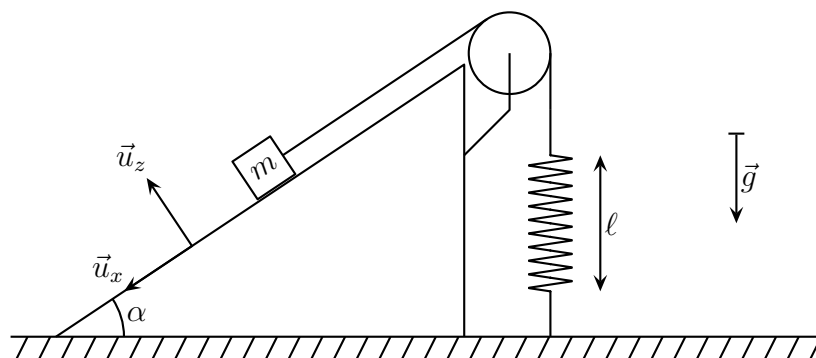


- ◇ Même réponse que ci-dessus : grâce aux frottements que la route exerce sur les pneus. Eh oui, une route sans frottement c’est une route verglacée, légèrement recouverte de produit vaisselle avec des pneus lisses. L’expérience montre qu’il est dès lors très difficile d’avance.
- ◇ Notons que les pneus, dans le cas recherché, ne glissent pas par rapport à la route, sinon cela constituerait un dérapage.

## IV.3 – Force de contact inconnue : les frottements solides – rôle d’une poulie

### IV.3.i – masse reliée à un ressort

- ◇ Regardons la situation ci-dessous et cherchons la plage de valeurs dans laquelle doit se situer la longueur du ressort pour que la masse  $M$  soit à l’équilibre compte tenu du frottement qui existe entre la masse et le plan incliné.



- ◇ Analyse physique :
  - la position est une position d’équilibre : rien ne bouge
  - si les frottements seuls peuvent retenir la masse, alors le ressort est inutile
  - si le ressort aide à soutenir la masse, alors il est étiré et son action se fait par l’intermédiaire du fil

- ◇ Analyse technique :
  - pas de mouvement ici, donc pas de PFD avec accélération
  - pour parler du ressort, nous parlerons de sa longueur  $\ell(t)$  alors que pour parler de l’immobilité de la masse, nous utiliserons la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$
- ◇ Liste des forces qui s’exercent sur la masse :
  - force à distance : le poids
  - force de contact : la tension exercée par le fil
  - force de contact : la force exercée par le support
  - force de contact : l’action de l’air est négligé
- ◇ Le ressort n’exerce aucune force sur la masse ! Et pourtant c’est grâce à lui si la masse ne tombe pas !

### IV.3.ii – phénoménologie et caractéristiques des frottements solides

- ◇ Quand un solide est posé sur un plan incliné, il peut parfois rester en équilibre. Cela prouve non seulement l’existence de forces de frottements, mais en plus l’existence de frottements à vitesse nulle !

L’action tangentielle exercée par un support dépend de si l’objet glisse ou non sur le support.

- si l’objet glisse sur le support :
  - la direction de  $\vec{R}_T$  est la même que celle de la vitesse qu’a l’objet par rapport au support
  - $\vec{R}_T$  est opposée à la vitesse qu’a l’objet par rapport au support
  - la norme de  $\vec{R}_T$  vaut  $\|\vec{R}_T\| = f \|\vec{R}_N\|$  où  $f$  est le coefficient de frottement
- si l’objet ne glisse pas sur le support :
  - la direction de  $\vec{R}_T$  est inconnue
  - le sens de  $\vec{R}_T$  est inconnu
  - la norme de  $\vec{R}_T$  vérifie  $\|\vec{R}_T\| \leq f \|\vec{R}_N\|$  où  $f$  est le coefficient de frottement

- ◇ Remarquons tout d’abord que la force dépend de la vitesse de l’objet *par rapport* au support. Si le support est fixe, pas de problème, mais si le support bouge, c’est une autre histoire. La logique et l’intuition ne marche (à peu près) que dans les cas où le support est fixe dans le référentiel d’étude.
- ◇ Pour utiliser la force de frottement solide, il est nécessaire de connaître au moins un peu l’évolution de l’objet : nous prendrons alors l’expression adéquate pour la force. Si l’évolution n’est pas du tout connue, alors il faut faire une supposition, ce qui permet d’écrire une loi connue mais il faut alors vérifier une condition.

hypothèse	loi connue	condition à vérifier
l’objet glisse	$R_T = f R_N$	$\vec{v} \neq \vec{0}$
l’objet ne glisse pas	$\vec{v} = \vec{0}$	$R_T \leq f R_N$

### IV.3.iii – phénoménologie et rôle d’une poulie

- ◇ Ici la poulie n’a pour rôle que de tordre dans la bonne direction le fil, c’est un simple guide.

Une poulie est dite *idéale* si elle est sans masse et que sa rotation s’effectue sans frottement sur l’axe.

- ◇ Autrement dit, lorsque quelqu’un tire un fil / une corde qui passe dans une poulie idéale, il ne la sent pas du tout : il ne doit lutter ni contre sa mise en rotation ni contre les frottements qui l’empêcheraient de tourner.

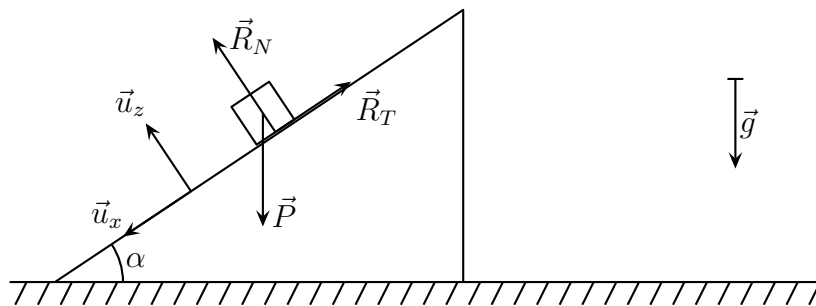
Lorsqu’un fil idéal passe par des poulies idéales, la tension que le fil exerce à chacune de ses deux extrémités est la même à chaque instant mais reste inconnue et de norme variable.

◇ Cela revient à dire que la poulie idéale a un rôle neutre dans l’histoire.

### IV.3.iv – équilibre de la masse

#### ★ équilibre sans fil – ressort

◇ Imaginons dans un premier temps que la masse n’est pas soumise à l’action du fil. Cherchons voir dans quelle condition elle est à l’équilibre.



◇ Le PFD, dans le cas particulier de l’équilibre s’écrit :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} +m g \sin \alpha + R_T = 0 \\ -m g \cos \alpha + R_N = 0 \end{cases}$$

◇ Comme ici nous **savons** qu’il y a équilibre, nous pouvons écrire (et nous l’avons déjà fait) que  $\vec{v}(t) = \vec{0}$ .

◇ Cet équilibre est vérifié tant que  $\|\vec{R}_T\| \leq f \|\vec{R}_N\|$  or :

$$\begin{cases} R_T = -m g \sin \alpha \\ R_N = m g \cos \alpha + R_N = 0 \end{cases} \rightsquigarrow |R_T| = m g \sin \alpha \leq m g f \cos \alpha \rightsquigarrow \boxed{\tan \alpha \leq f}$$

◇ Ce résultat est homogène et cohérent : il existe un angle maximal à ne pas dépasser.

◇ Il est étonnant que cet angle soit indépendant de la masse et pourtant ...

#### ★ équilibre avec fil – ressort

◇ Notons  $f = \tan \alpha_0$  et plaçons-nous dans le cas où  $\alpha > \alpha_0$  alors la masse ne peut pas être en équilibre avec la simple force de frottement exercée par le support.

◇ Le PFD dans le cas de l’équilibre s’écrit :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{T} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} +m g \sin \alpha + R_T - T = 0 \\ -m g \cos \alpha + R_N = 0 \end{cases}$$

◇ Or, avec un fil idéal et une poulie idéale, nous avons  $\|\vec{f}_{\text{fil} \rightarrow \text{masse}}\| = \|\vec{f}_{\text{fil} \rightarrow \text{ressort}}\|$ .

◇ De plus, puisque le ressort est directement attaché au fil, la 3<sup>e</sup> loi de Newton nous permet d’écrire :

$$\|\vec{f}_{\text{fil} \rightarrow \text{ressort}}\| = \|\vec{f}_{\text{ressort} \rightarrow \text{fil}}\| = k(\ell - \ell_0)$$

◇ Nous obtenons alors  $R_T = k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) - m g \sin \alpha$  et  $|R_T| \leq f R_N$  se traduit en :

$$\begin{aligned} -f m g \cos \alpha &\leq k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) - m g \sin \alpha \leq f m g \cos \alpha \\ -m g \cos \alpha \sin \alpha_0 &\leq k \cos \alpha_0 (\ell_{\text{éq}} - \ell_0) - m g \sin \alpha \cos \alpha_0 \leq m g \cos \alpha \sin \alpha_0 \\ -m g \cos \alpha \sin \alpha_0 + m g \sin \alpha \cos \alpha_0 &\leq k \cos \alpha_0 (\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \leq m g \cos \alpha \sin \alpha_0 + m g \sin \alpha \cos \alpha_0 \\ m g \sin(\alpha - \alpha_0) &\leq k \cos \alpha_0 (\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \leq m g \sin(\alpha + \alpha_0) \\ \ell_0 + \frac{m g}{k \cos \alpha_0} \sin(\alpha - \alpha_0) &\leq \ell_{\text{éq}} \leq \ell_0 + \frac{m g}{k \cos \alpha_0} \sin(\alpha + \alpha_0) \end{aligned}$$

◇ Que raconte le résultat ?

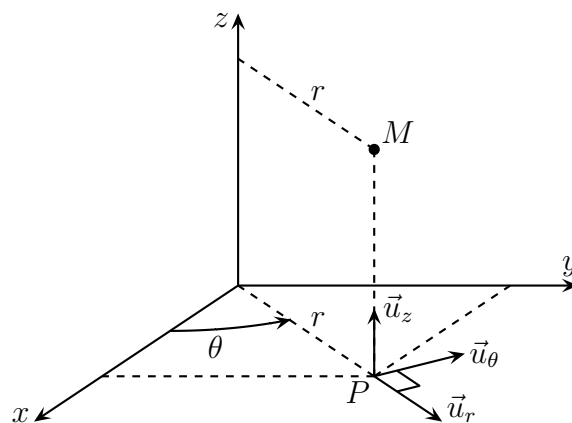
- qu'il existe une valeur minimale pour  $\ell_{\text{éq}}$  supérieure à  $\ell_0$  puisque  $\alpha > \alpha_0$
- que cette valeur minimale correspond au cas où  $R_T < 0$ , *ie.* dirigée vers le haut : la force de frottement empêche aide le ressort à empêcher la masse de remonter
- la valeur maximale correspond au cas où  $R_T > 0$  *ie.* dirigée vers le bas : la force de frottement aide à « faire tomber » la masse car le ressort tire trop fort vers le haut

## IV.4 – Dynamique en coordonnées cylindro-polaires

### IV.4.i – grandeurs cinématiques

#### ★ objectif – repérage

◇ Nous allons généraliser le cas particulier du mouvement circulaire et chercher à décrire le mouvement (position, vitesse, accélération) d'un point en coordonnées cylindro-polaires.



Pour repérer un point en coordonnées cylindro-polaires, il faut trois nombres :

- $r(t) \geq 0$ , la distance à l'axe privilégié
- $\theta(t)$ , un angle
- $z(t)$  la cote

## ★ vecteur position

◇ En utilisant la relation de Chasles nous avons directement :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$$

En coordonnées cylindro-polaire, la position est décrite par la donnée des trois grandeurs  $(r, \theta, z)$  et le vecteur position s'écrit

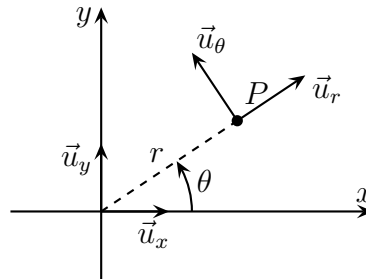
$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}_r(t) + z(t) \vec{u}_z$$

## ★ vecteur vitesse

◇ Dérivons le vecteur position.

$$\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \vec{u}_r(t) + \frac{dz(t)}{dt} \vec{u}_z = \frac{dr(t)}{dt} \vec{u}_r + r(t) \frac{d\vec{u}_r(t)}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{u}_z$$

◇ Pour pouvoir dériver  $\vec{u}_r(t)$ , écrivons ses composantes dans la base cartésienne fixe.



◇ Nous avons ainsi :

$$\begin{cases} \vec{u}_r(t) = \cos \theta(t) \vec{u}_x + \sin \theta(t) \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta(t) = -\sin \theta(t) \vec{u}_x + \cos \theta(t) \vec{u}_y \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \frac{d\vec{u}_r(t)}{dt} &= -\dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \vec{u}_x + \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \vec{u}_y \\ &= \dot{\theta}(t) (-\sin \theta(t) \vec{u}_x + \cos \theta(t) \vec{u}_y) \end{aligned}$$

$$\text{Dans la base cylindro-polaire : } \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta.$$

◇ Et finalement :

Dans la base cylindro-polaire, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \vec{u}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta + \dot{z}(t) \vec{u}_z$$

## ★ vecteur accélération

◇ Avant de dériver le vecteur vitesse, regardons voir ce qui se passe lorsque nous dérivons le vecteur  $\vec{u}_\theta$  par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \vec{u}_x - \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \vec{u}_y = -\dot{\theta}(t) (\cos \theta(t) \vec{u}_x + \sin \theta(t) \vec{u}_y)$$

$$\text{Dans la base cylindro-polaire : } \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}(t) \vec{u}_r.$$

- ◇ Nous pouvons constater que dériver un vecteur unitaire par rapport au temps revient à tourner ce vecteur de  $\frac{\pi}{2}$  dans le sens de rotation et à le multiplier par  $\dot{\theta}(t)$ .
- ◇ Nous pouvons à présent dériver le vecteur vitesse.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \dot{r}(t) \vec{u}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta + \dot{z}(t) \vec{u}_z \right) \\ &= \frac{dr(t)}{dt} \vec{u}_r + \frac{dr(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{u}_z \\ &= \ddot{r}(t) \vec{u}_r + \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta + (\dot{r} \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t)) \vec{u}_\theta + (r(t) \dot{\theta}(t)) (-\dot{\theta}(t) \vec{u}_r) + \ddot{z} \vec{u}_z \end{aligned}$$

Dans la base cylindro-polaire, le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t)) \vec{u}_r + (2\dot{r}(t) \dot{\theta} + r(t) \ddot{\theta}(t)) \vec{u}_\theta + \ddot{z}(t) \vec{u}_z$$

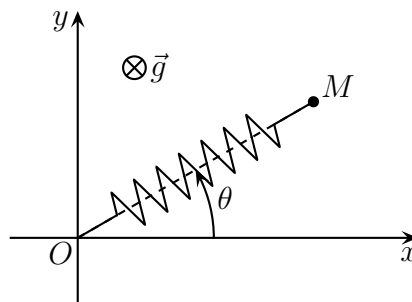
- ◇ Bien sûr dans le cas du mouvement circulaire où  $r(t) = C^{te}$  et  $z(t) = C^{te'}$ , nous retrouvons les résultats connus :

$$v(t) = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R \dot{\theta}^2(t) \vec{u}_r + R \ddot{\theta}(t) \vec{u}_\theta$$

### IV.4.ii – exemple du ressort tournant

#### ★ problème

- ◇ Quelles sont les équations régissant l'évolution d'une masse posée sur un plan sans frottement et reliée à un ressort ?



- ◇ Analyse physique :
- la masse va tourner autour du centre tout en oscillant
  - le poids ne va pas intervenir puisque le mouvement se fait dans un plan horizontal
  - le dispositif est totalement libre, il n'y a pas de contrainte *a priori* de trajectoire
- ◇ Analyse technique :
- étant donné que la masse a tendance à tourner autour du centre, mieux vaut utiliser les coordonnées cylindro-polaire
  - ici les forces intervenant dans le mouvement (tension exercée par le ressort) sont toutes parfaitement connues : un PFD ira très bien.
- ◇ Liste des forces qui s'exercent sur M :

- force à distance : le poids  $\vec{P} = -m g \vec{u}_z$
- force de contact : la force normale exercée par le plan (sans frottement)  $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_z$
- force de contact : la tension exercée par le ressort  $\vec{T} = -k (\Delta \ell) \vec{u}_{\text{sortant}}$

### ★ mise en équation

◇ Écrivons le PFD et projetons le sur  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$  :

$$m \vec{g} + \vec{R}_N + \vec{T} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} m \ddot{z}(t) = -m g + R_N \\ m (\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t)) = -k (r(t) - \ell_0) \\ m (2 \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t)) = 0 \end{cases}$$

- ◇ Comme nous savons que le mouvement est plan,  $z(t) = 0 = \text{C}^{\text{te}}$  ce qui permet à la première équation de nous apprendre que  $R_N = m g$ . Peut-être que nous aurions pu le dire intuitivement. Pour une fois, cela aurait été vrai ... mais parfaitement inutile.
- ◇ Les autres projections forment un système d'équations différentielles couplées qu'il est délicat de résoudre « comme ça ». Nous verrons, dans longtemps, comment aborder ce genre de problème, ce qui constituera un préliminaire à l'étude des satellites.

### ★ un bon départ

- ◇ En supposant que les conditions initiales soient  $\theta(0) = 0, r(0) = L$  et  $v(0) = v_0$ , quelle relation doivent vérifier ces conditions initiales pour que le mouvement soit circulaire ?
- ◇ Supposons le mouvement circulaire. Alors la projection sur  $\vec{u}_\theta$  conduit à :

$$m r(t) \ddot{\theta}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{\theta}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \dot{\theta}(t) = \text{C}^{\text{te}} \quad \text{et} \quad v(t) = \text{C}^{\text{te}}$$

- ◇ Si le mouvement est circulaire (forcément de rayon  $L$ ), alors il est uniforme donc se fait avec une vitesse de norme  $v_0$ .
- ◇ Que nous apprend l'autre projection ?

$$-m L \dot{\theta}^2(t) = -k (L - \ell_0) \quad \rightsquigarrow \quad -m \frac{v_0^2}{L} = -k (L - \ell_0) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{m v_0^2 = k L (L - \ell_0)}$$

# Premiers pas en mécanique du point

## Au niveau du cours

### ★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
  - les définitions de position, vitesse, accélération
  - les définitions de ressort idéal, fil idéal, poulie idéale
  - la définition de l'accélération de pesanteur

### ★ Les grandeurs

- ◇ Connaître :
  - les coordonnées cartésiennes, la base cartésienne
  - les coordonnées cylindro-polaire, la base cylindro polaire
- ◇ Connaître les liens entre mètre, seconde, kilogramme, newton

### ★ Les lois

- ◇ Sont à connaître :
  - les expressions de position, vitesse et accélération pour un mouvement quelconque en coordonnées cartésiennes
  - les expressions de position, vitesse et accélération pour un mouvement circulaire
  - les expressions de position, vitesse et accélération pour un mouvement quelconque en coordonnées cylindro-polaire
  - la seconde loi de Newton
  - la première et la 3<sup>e</sup> loi de Newton

### ★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
  - la phénoménologie du poids, des forces de frottement
  - la phénoménologie de la force exercée par un ressort
  - la phénoménologie d'un fil idéal, d'une poulie idéale
  - la phénoménologie de l'action d'un support

## Au niveau de l'analyse

### ★ Analyse physique

- ◇ Il faut savoir imaginer qualitativement l'évolution mécanique d'un dispositif et surtout savoir maîtriser ses impulsions intuitives explicatives.

### ★ Analyse technique

- ◇ Il faut savoir déterminer quel est le meilleur repérage (cartésien ou cylindro polaire) et agir en conséquence.



## Au niveau des savoir-faire

### ★ outils mathématiques

- ◇ Connaître parfaitement :
  - les dérivées temporelles des vecteurs de la base polaire

### ★ petits gestes

- ◇ Savoir :
  - faire un bilan de forces

### ★ exercices classiques

- ◇ Savoir refaire :
  - la chute libre
  - le ressort
  - le pendule simple

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Phénoménologie</b>	<b>1</b>
I.1	Bouger! . . . . .	1
I.1.i	monstration . . . . .	1
I.1.ii	qu'est-ce qui bouge? . . . . .	1
I.1.iii	bouger par rapport à . . . . .	2
I.1.iv	finaleme nt, c'est quoi un mouvement? . . . . .	3
I.2	Origine du mouvement . . . . .	4
I.2.i	les forces . . . . .	4
I.2.ii	forces à distance . . . . .	4
I.2.iii	forces de contact . . . . .	5
I.3	Mouvement qualitatif . . . . .	5
I.3.i	la trop fréquente confusion . . . . .	5
I.3.ii	le rôle des frottements . . . . .	6
<b>II</b>	<b>Il bouge!</b>	<b>6</b>
II.1	La loi outil : le principe fondamental de la dynamique . . . . .	6
II.1.i	énoncé . . . . .	6
	réécriture usuelle . . . . .	6
II.1.ii	lecture . . . . .	7
II.2	Aborder un problème de mécanique . . . . .	7
II.2.i	analyse physique et technique . . . . .	8
II.2.ii	trouver « le » système . . . . .	8
II.2.iii	trouver les forces . . . . .	8
II.2.iv	choisir le bon repère . . . . .	9
II.3	force à distance : le poids . . . . .	9
II.3.i	situation à étudier – analyse . . . . .	9
II.3.ii	phénoménologie et caractéristiques du poids . . . . .	10
	phénoménologie . . . . .	10
	caractéristiques . . . . .	10
	une autre masse . . . . .	10
II.3.iii	mouvement de la masse . . . . .	10
	équation différentielle régissant l'évolution . . . . .	10
	équation horaire . . . . .	11
	cas particulier d'une vitesse initiale nulle . . . . .	12
II.3.iv	quelques caractéristiques du mouvement . . . . .	12
	trajectoire . . . . .	13
	portée . . . . .	13
II.4	force de contact connue : les frottements fluides . . . . .	14
II.4.i	situation à étudier – analyse . . . . .	14
II.4.ii	phénoménologie et caractéristiques des frottements fluides . . . . .	15
	phénoménologie . . . . .	15
	caractéristiques . . . . .	15
II.4.iii	trajectoires avec le modèle linéaire . . . . .	16
	application des lois physiques . . . . .	16
	trouver la vitesse . . . . .	16
	trouver la position . . . . .	17
	trajectoires . . . . .	17
II.4.iv	trajectoire avec le modèle quadratique . . . . .	17

	lois physiques . . . . .	17
	trajectoires . . . . .	18
II-5	force de contact connue : la force élastique . . . . .	18
II-5 <i>.i</i>	une masse au bout d'un ressort . . . . .	18
II-5 <i>.ii</i>	phénoménologie et caractéristiques de la force élastique . . . . .	19
	phénoménologie de l'action d'un ressort . . . . .	19
	caractéristiques . . . . .	19
	et les élastiques . . . . .	20
II-5 <i>.iii</i>	un mouvement déjà connu . . . . .	20
	lois physiques . . . . .	20
	équations horaires . . . . .	20
<b>III</b>	<b>Trajectoires circulaire</b>	<b>21</b>
III-1	Décrire un mouvement circulaire . . . . .	21
III-1 <i>.i</i>	phénoménologie . . . . .	21
	de nombreux exemples . . . . .	21
	deux accélérations . . . . .	21
III-1 <i>.ii</i>	un repère évident pour un repérage simple . . . . .	22
III-1 <i>.iii</i>	la vitesse est toujours tangentielle . . . . .	23
III-1 <i>.iv</i>	l'accélération n'est pas toujours normale . . . . .	23
III-1 <i>.v</i>	piqûre de rappel préventive . . . . .	24
III-2	force de contact inconnue : la tension exercée par un fil . . . . .	24
III-2 <i>.i</i>	un pendule simple . . . . .	24
III-2 <i>.ii</i>	phénoménologie et caractéristiques de la tension exercée par un fil . . . . .	24
III-2 <i>.iii</i>	mouvement du pendule simple . . . . .	25
	traduction des lois physiques . . . . .	25
	équation différentielle régissant le mouvement . . . . .	25
	norme de la tension exercée par le fil . . . . .	26
III-3	force de contact inconnue : action exercée par un support . . . . .	27
III-3 <i>.i</i>	tomber d'une bosse . . . . .	27
III-3 <i>.ii</i>	phénoménologie et caractéristiques du contact avec un support . . . . .	27
	phénoménologie . . . . .	27
	caractéristique de l'action exercée par le support . . . . .	28
III-3 <i>.iii</i>	angle de rupture . . . . .	28
	traduction du problème . . . . .	28
	expression des lois physique . . . . .	28
	manipulations usuelles . . . . .	29
<b>IV</b>	<b>Mouvements plus complexes</b>	<b>29</b>
IV-1	Première loi de la mécanique : principe d'inertie . . . . .	29
IV-1 <i>.i</i>	énoncé . . . . .	29
IV-1 <i>.ii</i>	lecture . . . . .	30
	postulat . . . . .	30
	propriété fondamentale d'un référentiel galiléen . . . . .	30
	2 <sup>e</sup> effet du postulat . . . . .	30
	utilité pratique . . . . .	30
	le principe d'inertie n'est pas . . . . .	30
IV-2	Troisième loi de la mécanique : principe des actions réciproques . . . . .	30
IV-2 <i>.i</i>	énoncé . . . . .	31
IV-2 <i>.ii</i>	lecture . . . . .	31

---

exemple du vas-y que je te pousse . . . . .	31
camping . . . . .	32
IV·3 Force de contact inconnue : les frottements solides – rôle d’une poulie . . . . .	32
IV·3·i masse reliée à un ressort . . . . .	32
IV·3·ii phénoménologie et caractéristiques des frottements solides . . . . .	33
IV·3·iii phénoménologie et rôle d’une poulie . . . . .	33
IV·3·iv équilibre de la masse . . . . .	33
équilibre sans fil – ressort . . . . .	34
équilibre avec fil – ressort . . . . .	34
IV·4 Dynamique en coordonnées cylindro-polaires . . . . .	35
IV·4·i grandeurs cinématiques . . . . .	35
objectif – repérage . . . . .	35
vecteur position . . . . .	35
vecteur vitesse . . . . .	36
vecteur accélération . . . . .	36
IV·4·ii exemple du ressort tournant . . . . .	37
problème . . . . .	37
mise en équation . . . . .	38
un bon départ . . . . .	38
Analyse physique . . . . .	39