Mécanique

Chapitre 2

La mécanique autrement qu'en forces

La mécanique autrement qu'en forces

Dans ce chapitre, nous allons voir comment aborder une situation mécanique autrement qu'avec la 2[e] loi de Newton et ses projections vectorielles et ses résolutions d'équations différentielles.

Pour commencerons par étudier sous l'angle énergétique des situations dites à évolution conservatives. Ensuite nous examinerons plus en détails la manière dont se font les échanges énergétiques. Enfin, dans une dernière partie nous verrons une toute nouvelle méthode permettant de représenter directement toutes les évolutions possible d'un dispositif.

I – Évolutions conservatives

I·1 – Phénoménologie

I·1·i – exemples d'évolutions

- Ce sont des évolutions où tout se passe « parfaitement bien ». Si rigoureusement, elles n'existent jamais, il est néanmoins possible sur des durées d'évolution suffisamment courtes (mais jamais infinitésimales) de les considérer comme telles.
- Exemples :
  - ➜ le pendule simple qui oscille indéfiniment
  - ➜ le ressort horizontal ou vertical qui oscille indéfiniment
  - ➜ la chute libre sans impact
  - ➜ la rotation d'un satellite autour de la Terre
- Nous sentons bien que ces évolutions sont, certes, idéales mais nous voyons quand même qu'elles ne sont pas inaccessibles.

I·1·ii – conditions à respecter

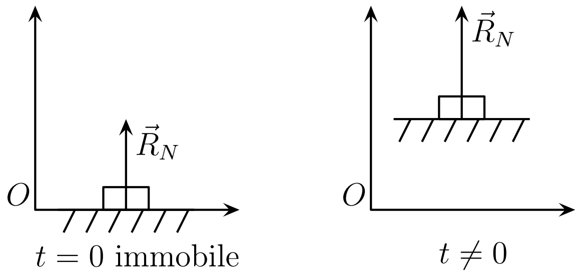
- La première condition qui saute au yeux est celle de l'absence de frottements, c'est vrai, mais c'est loin d'être la plus importante. La plus importante c'est avant tout :

> Une évolution ne peut être conservative que si elle est libre.

- Autrement dit, il faut que personne, aucun dispositif n'apporte de l'énergie (le mot est lâché).

> Pour une évolution libre soit conservative, il suffit qu'il n'y ait aucun frottements.

- C'est une condition suffisante et non nécessaire ! Nous connaissons déjà un cas où (certains) frottements peuvent permettre une évolution parfaite. C'est le cas des voitures qui roulent : les frottements sur la route sont absolument nécessaires pour avancer et ce ne sont pas eux qui ralentissent la voiture ...
- Que dire de l'évolution suivante ? Est-elle conservative ou non ? L'action du support est sans frottement et c'est bien $\vec{R}_N$ qui a poussé l'objet vers le haut. Personne d'autre !

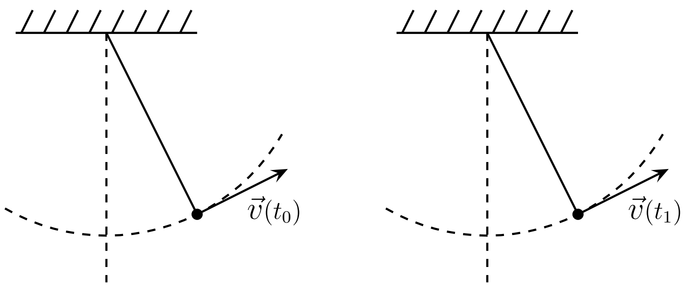


✧ Réponse : non car il faut qu'un agent extérieur intervienne pour mettre en mouvement le support. L'évolution n'est pas libre bien qu'il n'y ait pas de frottements.

✧ Au passage, pour que l'objet monte, il a fallu, obligatoirement $\|\vec{R}_N\| > \|\vec{P}\|$ ce qui signifie notamment que $\|\vec{R}_N\| \neq \|\vec{P}\|$ ou encore que les réactions normales ne compensent **pas toujours** le poids !

I·1·*iii* – particularité : un lien fort entre vitesse et position

✧ Regardons d'un peu plus près une évolution conservative, par exemple le pendule simple et faisons une photo à un instant de la situation.



✧ Refaisons plus tard, n'importe quand une photo lorsque la masse est strictement au même endroit (et va dans le même sens).

✧ La vitesse est la même, ce qui est normal étant donné que l'évolution est périodique. Avec une évolution non conservative, il est facile d'imaginer que la vitesse diminue un peu à chaque passage

> Pour une évolution conservative, la vitesse à un endroit peut être déduite de la donnée des conditions initiales indépendamment du temps écoulé.

✧ La conséquence de cette observation va être l'introduction d'une grandeur, l'énergie, qui permettra de relier position et vitesse.

I·2 – De l'énergie partout

I·2·*i* – dans le mouvement

> L'*énergie cinétique* est l'énergie que possède un objet du fait même de son mouvement.

> L'énergie cinétique, notée E_c d'un point matériel de masse m s'écrit $E_c = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2(t)$.

◇ L'énergie cinétique n'est pas si évidente et si naturelle que cela car elle dépend de la vitesse qui dépend du référentiel.

◇ Ainsi lorsque un même dispositif est étudié dans deux référentiels différents, il peut apparaître des phénomènes fondamentalement différents au point de vue énergétique, phénomènes qui peuvent paraître parfois paradoxaux.

I·2·*ii* – grâce au poids

◇ Le fait que le poids fasse naturellement tomber les objets, même initialement immobile, permet de dire que le poids permet de « créer » de l'énergie cinétique.

◇ Comme la physique refuse la création énergétique, nous dirons que cette énergie cinétique était, avant de devenir cinétique, sous une autre forme, sous une forme « potentiellement cinétique ».

L'*énergie potentielle* est une énergie due à la position particulière d'un objet et qui peut se transformer en énergie cinétique ou réciproquement.

L'énergie potentielle due au poids est appelée *énergie potentielle de pesanteur.*

L'énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel de masse m s'écrit :
$E_{\text{pp}} = m\,g\,(z - z_{\text{réf}})$ où :

➜ $\vec{u}_z$ est un axe vertical vers le haut

➜ $z_{\text{réf}}$ est la cote de référence (arbitraire) pour laquelle l'énergie potentielle de pesanteur est nulle

◇ Si l'axe vertical $\vec{u}_z$ est orienté vers le bas, ce qui arrive parfois, alors l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit :

$$E_{\text{p}} = -m\,g\,(z - z_{\text{réf}})$$

◇ De toute façon, il faut toujours vérifier que plus un objet monte, plus son énergie potentielle est grande, en faisant naturellement attention aux valeurs négatives.

I·2·*iii* – grâce aux ressorts

L'énergie potentielle due à la force exercée par un ressort est appelée *énergie potentielle élastique.*

L'énergie potentielle élastique d'un point matériel fixé à un bâti par l'intermédiaire d'un ressort s'écrit : $E_{\text{p,el}} = \dfrac{1}{2}\,k\,(\Delta\ell)^2$ où :

➜ k est la constante de raideur du ressort

➜ $(\Delta\ell) = \ell - \ell_0$ est l'allongement du ressort

Faire bien attention à l'écriture : $(\Delta\ell)^2 \neq \Delta\ell^2 = \Delta(\ell^2)$ car $(\ell - \ell_0)^2 \neq \ell^2 - {\ell_0}^2$.

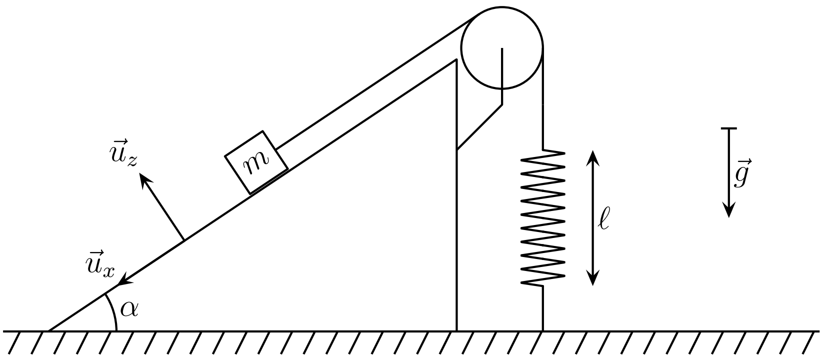
✧ Si l'autre extrémité du ressort n'est pas fixe alors la situation est un peu plus complexe que cela car cela signifie :
- ➜ soit que le bâti est mobile et alors l'évolution n'est pas conservative
- ➜ soit que l'autre extrémité du ressort est attaché à un autre point matériel et alors des outils d'études de systèmes de plusieurs points matériels (chapitre 5) seront plus adaptés

I·3 – Faire un bilan énergétique

✧ Une fois bien repéré le fait que l'évolution soit conservative, faire un bilan énergétique n'est pas difficile mais demande de la rigueur.

✧ Comme souvent, la rigueur apportée dans les cas simples semblera superflue, mais lorsque les cas plus complexes arriveront le manque d'entraînement sur ces cas presque intuitifs sera préjudiciable.

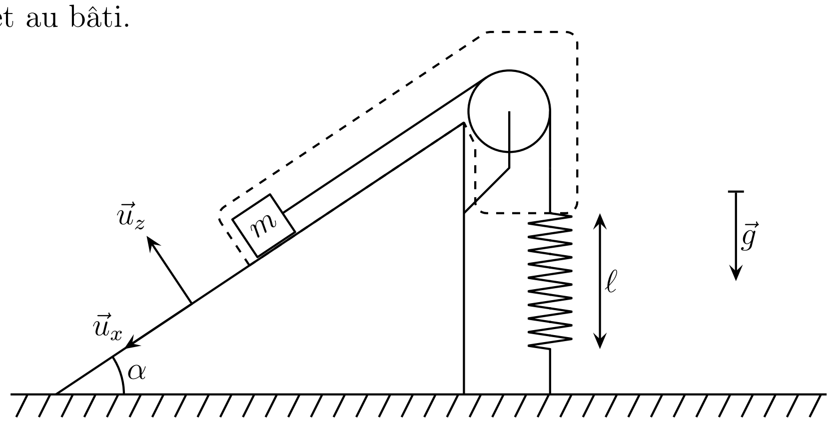
✧ Regardons ce que cela donne sur une situation déjà connue mais pour laquelle nous considérerons, cette fois, qu'il n'y a aucun frottement nulle part.



I·3·*i* – choisir le système

✧ Lorsqu'il n'y a qu'un point matériel, c'est assez simple (quoique ...)

✧ Dans le cas d'un dispositif complexe tel que celui présenté, mieux vaut arrêter le système aux extrémités des ressorts et au bâti.



I·3·*ii* – vérifier la conservation de l'énergie

✧ Il faut vérifier tout ce qui n'est pas poids ou ressort, autrement dit, toutes les forces de contact.

> Pour qu'il y ait évolution conservative, il ne faut pas de force de frottement fluide.

✧ En effet, soit le fluide est au repos et tend à ralentir l'objet, soit il tend à le pousser et alors ce n'est plus un régime libre.

✧ Pour les forces de frottement solide, lorsqu'il n'y a pas de frottement, ça va, mais il ne faut pas oublier le cas de la roue qui peut rouler indéfiniment grâce avec des frottements.

> Pour qu'il y ait évolution conservative, il faut que les forces de frottement solide soient telles que :
> ➜ il y ait glissement sans frottement
> ➜ il y ait frottement sans glissement

✧ Ici il y a plusieurs endroits où il y a des frottements solides : entre la masse et le plan et dans la poulie qui tourne autour de son axe. Mais tout va bien : la poulie est idéale et il n'y a pas de frottemens entre le plan et la masse.

> Pour qu'il y ait évolution conservative, les forces de liaison rigide doivent se faire sur des points immobiles.

✧ Sur le système étudié, il y a un point qui subit une force de liaison rigide : la barre soutenant la poulie. Ça tombe bien, ce point est immobile dans le référentiel d'étude.

✧ Nous pouvons sentir que si la barre de soutient de la poulie avait été mobile, de l'énergie aurait pu rentrer (tige reliée à un moteur) ou sortir (tige bougeant en frottant) à ce niveau là.

I·3·*iii* – et yapuka

✧ Une fois démontré l'évolution conservative (ce qui peut être plus ou moins délicat suivant le système choisi), il n'y a plus qu'à écrire la loi de conservation.

> L'*énergie mécanique* représente le total de l'énergie intéressante en mécanique et vaut :
> $$E_{\text{m}} \triangleq E_{\text{c}} + E_{\text{p}}$$

✧ Il existe des énergies plus « totale » que l'énergie mécanique, mais cela fait intervenir des grandeurs autres que des grandeurs purement mécaniques.

> Lorsqu'un système $\mathscr{S}$ subit une évolution conservative par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$, son énergie mécanique est constante au cours du temps.
> $$E_{\text{m}} = \text{C}^{\text{te}}$$

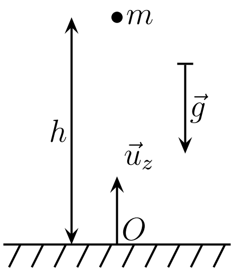
✧ Le plus souvent, nous déterminerons cette constante avec les conditions initiales, mais rien ne nous y oblige. Quelques fois, nous nous passerons de l'expression de cette constante.

I·4 – Exemples

I·4·*i* – chute libre

✧ Déterminons la vitesse en fin de chute libre pour un objet ponctuel lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h.

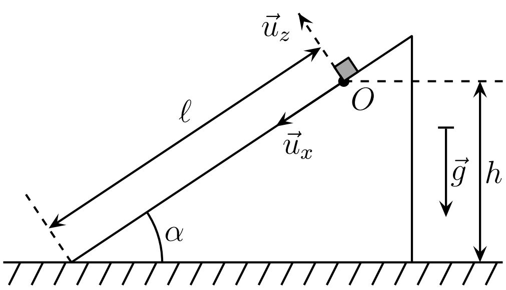
✧ Bien sûr sa vitesse finale, après impact est nulle, mais *juste avant* l'impact, qu'en est-il ?



- Analyse physique :
  - ➜ la trajectoire va être rectiligne
  - ➜ il n'y a pas de frottement (du moins jusqu'à juste avant l'impact) donc l'évolution sera conservative
- Analyse technique :
  - ➜ le repérage est immédiat étant donné que l'évolution est rectiligne
  - ➜ l'évolution étant conservative et la question ne portant que sur la vitesse sans notion de durée, un bilan énergétique s'impose
- L'évolution du point matériel est consevative donc $E_{\text{m}} = E_{\text{c}} + E_{\text{p}} = \text{C}^{\text{te}}$
- Étant donné que la vitesse est purement verticale, $v(t) = \dot{z}(t)$ d'où $E_{\text{c}} = \dfrac{1}{2}\,m\,\dot{z}^2(t)$.
- Ici seul le poids a une action, donc l'énergie potentielle se réduit à l'énergie potentielle de pesanteur. $E_{\text{p}} = +m\,g\,z$ en prenant naturellement le point de référence à la cote nulle.
- Nous avons donc : $\dfrac{1}{2}\,m\,\dot{z}^2(t) + = m\,g\,z(t) = \text{C}^{\text{te}}$.
- À l'instant initiale la vitesse est nulle, la hauteur est maximale : toute l'énergie est sous forme potentielle. $E_{\text{m}} = m\,g\,h$.
- À l'instant final (juste avant l'impact), la hauteur est minimale : toute l'énergie potentielle s'est convertie en énergie cinétique (c'est la raison de vivre de l'énergie potentielle). Nous avons donc $E_{\text{m}} = \dfrac{1}{2}\,m\,{v_{\text{f}}}^2$.
- La conservation de l'énergie implique $\dfrac{1}{2}\,m\,{v_{\text{f}}}^2 = m\,g\,h$ soit le résultat connu $\boxed{v_{\text{f}} = \sqrt{2\,g\,h}}$.
- Juste après l'impact, l'énergie mécanique est nulle :
  - ➜ elle ne s'est donc pas conservée pendant l'impact
  - ➜ c'est à cause de la force que le sol exerce sur l'objet *en mouvement*
  - ➜ l'énergie n'est pas vraiment perdue : elle a été dissipée, mais c'est une autre histoire

I·4·*ii* – descendre une pente

- Considérons un objet non susceptible de rouler glissant sur un plan incliné sur une distance ℓ. Quelle sera la vitesse finale s'il n'y a pas de frottements ?



- Analyse physique :
  - ➜ l'objet va tomber entraîné par son poids

➜ sa trajectoire est guidée
➜ il n'y a pas de frottement : l'évolution va être conservative

✧ Analyse technique :
➜ l'axe est naturel (parallèle à la pente) l'origine est au choix
➜ nous cherchons une vitesse sans considération de temps pour une évolution conservative ? faisons une approche énergétique

✧ Écrivons la conservation de l'énergie mécanique.

✧ Au début, l'énergie est uniquement potentielle du type « $E_{\text{p}} = m\,g\,z$ » sauf que z est déjà une notation réservée. Ici cela donne $E_{\text{m}} = E_{\text{p}}(0) = m\,g\,\ell\,\sin\alpha$.

✧ En bas, l'énergie est entièrement cinétique et $E_{\text{c}} = \dfrac{1}{2}\,m\,{v_{\text{f}}}^2$.

✧ La conservation de l'énergie aboutit à $\dfrac{1}{2}\,m\,{v_{\text{f}}}^2 = m\,g\,\ell\,\sin\alpha$ soit $\boxed{v_{\text{f}} = \sqrt{2\,g\,\ell\,\sin\alpha}}$.

✧ Ce résultat peut aussi s'écrire sous la forme $\boxed{v_{\text{f}} = \sqrt{2\,g\,h}}$ où h est la hauteur descendue.

✧ Ici, bien que la chute soit loin d'être libre, la vitesse acquise à la fin est la même qu'en chute libre. Cela est du au fait que le support n'a, finalement, pas d'influence énergétiquement mais a un simple rôle de guide de trajectoire.

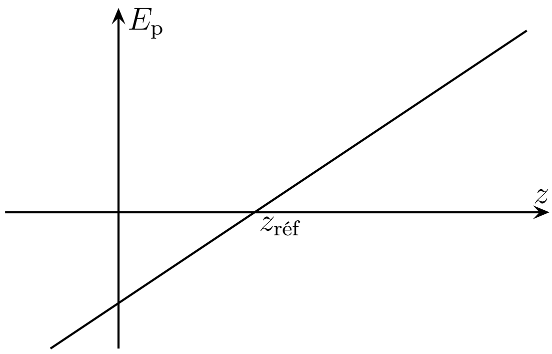
I·5 – Trouver une position d'équilibre

I·5·*i* – lien qualitatif entre force et énergie potentielle

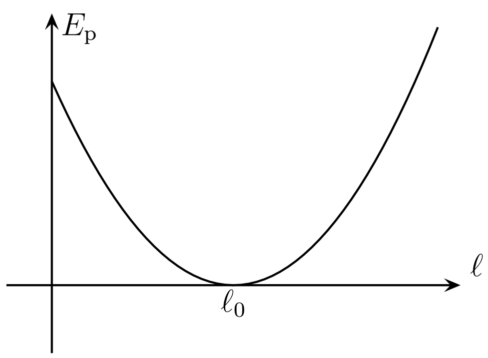
✧ Cherchons un lien qualitatif entre force et énergie potentielle.

✧ Que « cherche » à faire le poids ? Le poids tend à faire tomber vers le bas.

✧ En termes énergétique, faire aller vers le bas consiste à faire diminuer l'énergie potentielle.



✧ Que « cherche » à faire un ressort ? Un ressort tend à recouvrer sa longueur natuerelle, *ie.* à annuler son allongement.

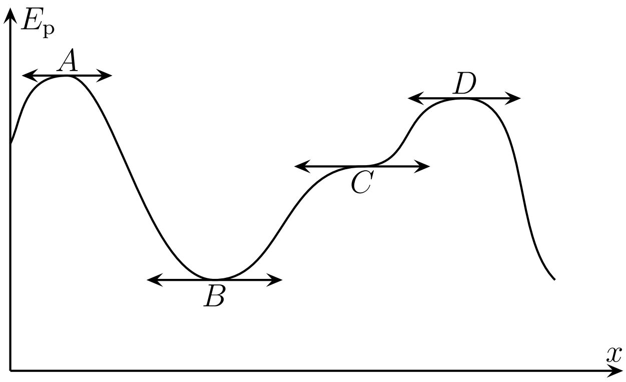


✧ En termes énergétique, recouvrer sa longueur naturelle consiste à faire diminuer l'énergie potentielle.

La force est toujours dirigée dans le sens des énergie potentielles décroissantes.

I·5·*ii* – une loi fondamentale

✧ Si les forces sont telles que naturellement, en régime libre, elles sont dirigées vers zones où l'énergie potentielle décroît, nous pouvons nous demander ce qu'il en est lorsque un point matériel est dans une zone où l'énergie est stationnaire :



✧ Nous pouvons imaginer que :
- ➜ sur un maximum, physiquement le point matériel est attiré des deux côtés, il est donc en équilibre
- ➜ sur un minimum, le point matériel n'est attiré nulle part, il est en équilibre.

Un point matériel est en équilibre en des points où l'énergie potentielle est stationnaire.

✧ Que se passe-t-il si le point matériel n'est pas rigoureusement en un point d'équilibre, mais presque ?
- ➜ en un zone où l'énergie potentielle est maximale, le point matériel est irrémédiablement attiré loin de sa position initiale
- ➜ en une zone où l'énergie potentielle est minimale, le point matériel est ramené à sa position initiale.

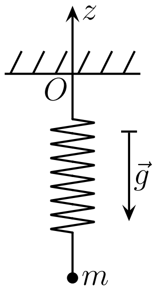
Les zones de minimum d'énergie potentielle correspondent à des positions d'équilibre stable alors que les zones où l'énergie potentielle est maximale correspondent à des équilibres instables.

✧ Dans l'exemple ci-dessus, il y a une position d'équilibre stable et trois positions d'équilibre instable.

✧ Avec la représentation graphique de l'énergie potentielle, il est toujours possible de sentir la stabilité ou l'instabilité d'une position d'équilibre. Il suffit pour cela d'imaginer que le graphique représente des rails sur lesquels une petite bille peut rouler, l'intuition fera alors le reste.

I·5·*iii* – exemple du ressort vertical

✧ Reprenons l'exemple du ressort vertical.



✧ Ici le poids et la force exercée par le ressort vont avoir une influence sur l'évolution donc l'énergie potentielle sera la somme des énergies potentielles de pesanteur et élastique, ce qui donne, compte-tenu du fait que $\ell = -z$:

$$E_{\text{p}} = E_{\text{pp}} + E_{\text{p,él}} = m\,g\,z + \frac{1}{2}\,k\,(-z-\ell_0)^2$$

✧ Le minimum de cette fonction est donc telle que :

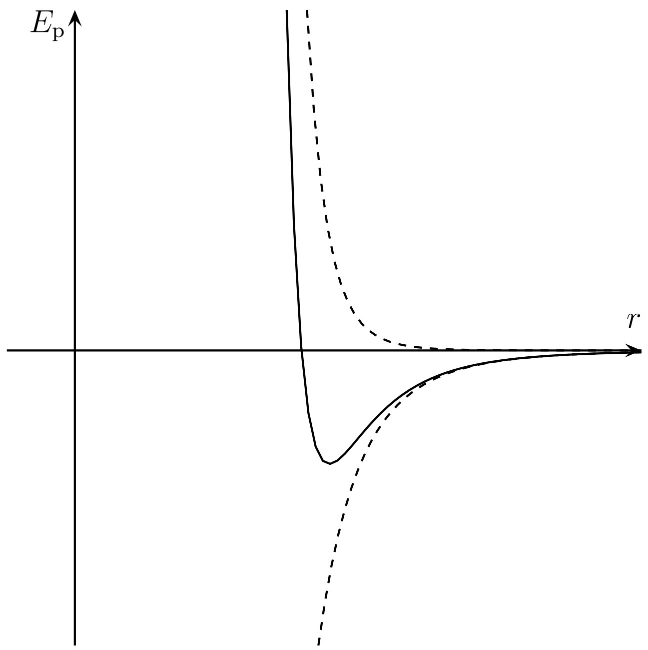
$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{p}}}{\mathrm{d}z} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad m\,g + \frac{1}{\cancel{2}}\,k\,\cancel{2}\,(-1)\,(-z_{\text{eq}}-\ell_0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad z_{\text{éq}} = -\ell_0 - \frac{m\,g}{k}$$

STOP pour rechercher une **position** d'équilibre, il est naturel de chercher comment l'énergie varie en fonction de la **position**, cela explique le $\dfrac{\mathrm{d}E_{\text{p}}}{\mathrm{d}z}$: il n'y a aucune notion de temps là-dedans.

I·5·*iv* – interaction intermoléculaire

✧ L'énergie que possède une molécule située à la distance r d'une autre molécule de même type s'écrit :

$$E_{\text{p}}(r) = E_0\left(\frac{a^{12}}{r^{12}} - \frac{a^6}{r^6}\right)$$



✧ Lorsque nous traçons séparément les deux termes nous pouvons voir que :

➜ le terme $E_0\,\dfrac{a^{12}}{r^{12}}$ est un terme répulsif et est prédominant à courte distance

➜ le terme $-E_0\,\dfrac{a^6}{r^6}$ est un terme attractif et est prédominant à grande distance

✧ La position d'équilibre, celle correspondant à la distance r_0 pour laquelle les deux molécules n'ont tendance ni à s'éloigner, ni à se rapprocher est telle que $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}(r_0) = 0$. Or :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(r)}{\mathrm{d}t} = E_0\left(-12\,\frac{a^{12}}{r^{13}} + 6\,\frac{a^6}{r^7}\right) \quad \leadsto \quad 12\,\frac{a^{12}}{{r_0}^{13}} = 6\,\frac{a^6}{{r_0}^7} \quad \leadsto \quad {r_0}^6 = 2\,a^6 \quad \leadsto \quad \boxed{r_0 = 2^{1/6}\,a}$$

✧ L'énergie potentielle vaut alors :

$$E_\mathrm{p}(r_0) = E_0\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{E_0}{4}$$

✧ Nous pouvons nous assurer de la stabilité de la position d'équilibre en dérivant une seconde fois.

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = 6\,E_0\left(-2\,\frac{a^{12}}{r^{13}} + \frac{a^6}{r^7}\right) \qquad \leadsto \qquad \frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}(r)}{\mathrm{d}r^2} = 6\,E_0\left(26\,\frac{a^{12}}{r^{14}} - 7\,\frac{a^6}{r^8}\right)$$

✧ Déterminons le signe de cette dérivée en r_0 qui est tel que ${r_0}^6 = 2\,a^6$:

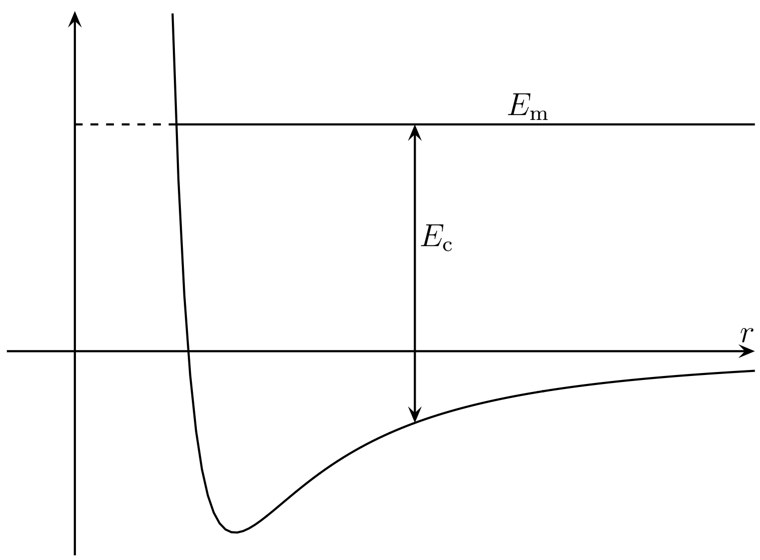
$$\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r^2}(r_0) = 6\,E_0\left(26\,\frac{a^{12}}{4\,a^{12}\,{r_0}^2} - 7\,\frac{a^6}{2\,a^6\,{r_0}^2}\right) \qquad \leadsto \qquad \frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t^2}(r_0) = \frac{6\,E_0}{{r_0}^2}\left(\frac{26}{4} - \frac{7}{2}\right) = 18\,\frac{E_0}{{r_0}^2} > 0$$

I·6 – Interprétation graphique d'une évolution conservative

I·6·i – tout est dans l'énergie potentielle

✧ Lorsqu'une évolution est conservative, alors nous pouvons écrire $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = \mathrm{C^{te}}$ avec $E_\mathrm{c} \geqslant 0$.

✧ Nous pouvons alors représenter sur un même graphique E_p, E_m et E_c.



✧ Sur le point représenté :

➜ $E_\mathrm{p} < 0$ et dans la zone attractive

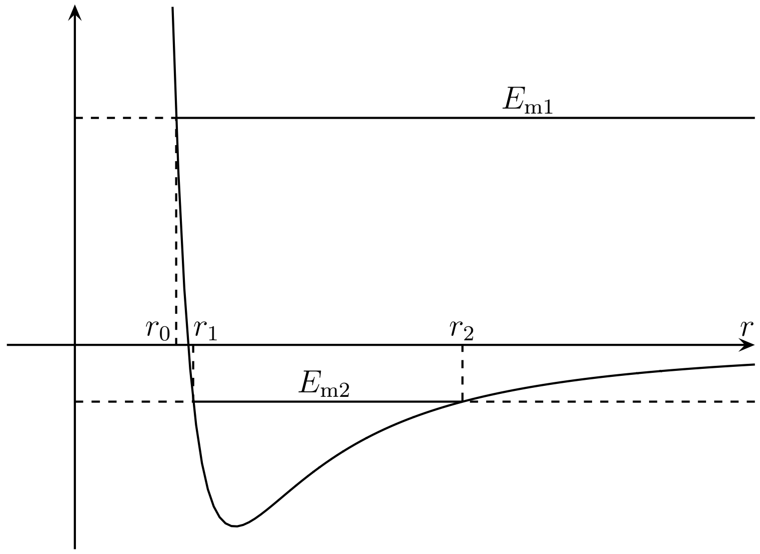
➜ $E_\mathrm{c} > 0$

➜ $E_\mathrm{m} > 0$

I·6·*ii* – différents types de mouvements

✧ L'énergie cinétique est obligatoirement positive. Dans ces conditions, quelle que soit la valeur de l'énergie mécanique, certaines positions ne seront pas accessibles (pas assez d'énergie).

✧ Suivant la valeur de l'énergie mécanique, il y a deux possibilités :
- ➜ soit les positions accessibles pour r sont comprises entre deux valeurs
- ➜ soit les positions accessibles pour r ne sont pas bornées



Lorsqu'un dispositif est tel que la variable qui caractérise sa position ne peut pas devenir infinie, l'état dans lequel il est est dit *état lié*.
Si le paramètre de position peut devenir infini, il s'agit d'un *état de diffusion*.

Un même dispositif peut être dans un état lié ou de diffusion suivant les conditions initiales.

II – Échanges énergétiques

II·1 – Phénoménologie

II·1·*i* – caractère résistant ou moteur d'une force

✧ Imaginons des dispositifs à évolution non conservative.

✧ Tout d'abord le pendule simple réel. L'expérience montre qu'à la fin le pendule s'arrête :
- ➜ l'énergie mécanique a été dissipée
- ➜ la différence entre le réel et l'idéal ce sont les frottements

Une force est dite *résistante* lorsqu'elle a tendance à faire diminuer l'énergie cinétique d'un objet.

✧ Mais il existe d'autres cas où des forces (autres que le poids ou les ressorts) permettent de mettre en mouvement.

> Une force est dite *motrice* lorsqu'elle a tendance à faire augmenter l'énergie cinétique d'un objet.

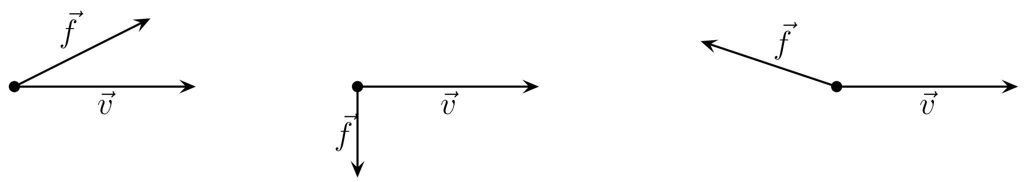
✧ Comme nous l'avons déjà dit, les frottements peuvent être moteurs :
- ➜ entraînement par le vent, par les courants pour les frottements fluides
- ➜ le tapis de caissière qui « tirent » les objets sur lui

✧ Les caractères résistant ou moteur d'une force se basent sur l'énergie cinétique, donc la vitesse, d'un objet. Par conséquent …

> Les caractères « résistant » et « moteur » d'une force dépendent de la force, du dispositif et aussi du référentiel d'étude.

II·1·*ii* – allure d'une force motrice ou résistante

✧ Dans les trois cas ci-dessous, quel est le rôle des forces ?



cas ① cas ② cas ③

- ➜ cas ① : la force sera motrice
- ➜ cas ② : la force sera ni motrice ni résistante
- ➜ cas ③ : la force sera résistante

> Pour qu'une force soit motrice, il faut que le vecteur qui la représente soit dans le même sens que le vecteur vitesse du point matériel.

II·2 – Les échangeurs d'énergie : les forces

II·2·*i* – puissance et travail fournis par une force

✯ puissance fournie par une force

> La puissance fournie par une force $\vec{f}$ à un point matériel animé de la vitesse $\vec{v}$ s'écrit :
> $$\mathscr{P} = \vec{f}\cdot\vec{v}$$

✧ Cette relation nous permet de faire le lien entre W, kg, m et s :

$$[\mathscr{P}] = [\vec{f}][\vec{v}] = (\text{kg.m.s}^{-2}).(\text{m.s}^{-1}) \qquad \rightsquigarrow \qquad 1\text{ W} = 1\text{ kg.m}^2.\text{s}^{-3}$$

✯ énergie fournie par une force

L'énergie fournie par une force s'appelle le *travail* fourni par la force et se note W.

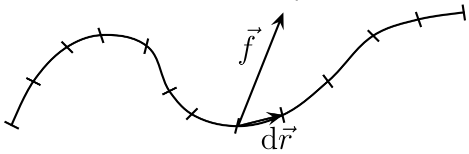
✧ Pendant la durée $\mathrm{d}t$, le point matériel parcourt $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$ et reçoit l'énergie $\delta W = \vec{f} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t$ …

Le travail élémentaire fourni par une force $\vec{f}$ à un point matériel qui se déplace de $\mathrm{d}\vec{r}$ s'écrit :

$$\delta W = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

✧ Notons qu'ici le travail élémentaire se note δW et non $\mathrm{d}W$!
✧ Un point qui ne se déplace pas (dans le référentiel d'étude) ne peut pas recevoir d'énergie (ni en perdre).
✧ Lorsque le point matériel ne parcourt pas une distance infinitésimale mais une grande distance, alors pour déterminer le travail total fourni par la force, il suffit de diviser le chemin parcouru en morveau et de sommer le tout.

Le travail total reçu par un point matériel entre deux points A et B de sa trajectoire soumis à la force $\vec{f}$ s'écrit :



$$W_{AB} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

A priori le travail fourni par la force entre les deux points A et B dépendent de la trajectoire suivie.

✧ C'est la raison fondamentale qui fait que nous devons écrire δW et pas $\mathrm{d}W$.

✯ déplacement élémentaire

✧ Quelles sont les coordonnées de $\mathrm{d}\vec{r}$?
✧ Pour les trouver, il ne faut pas oublier que $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$. Or :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_z$$

En coordonnées cartésiennes, le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$$

✧ De même en coordonnées cylindro-polaires :

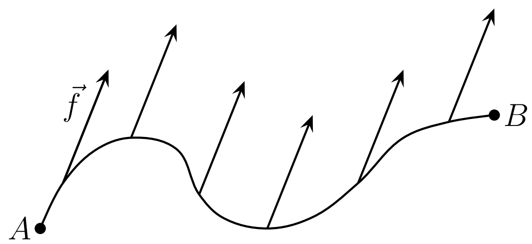
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_\theta + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_z$$

En coordonnées cylindro-polaire, le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :
$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$$

✧ Bien que cela soit **la** méthode universelle pour calculer le travail fourni par une force, nous l'utiliserons que très rarement.

II·2·*ii* – cas particulier des forces vectoriellement constantes

Un point matériel reçoit de la part d'une force vectoriellement constante $\vec{f}$ entre deux points A et B de sa trajectoire le travail :



$$W_{AB} = \vec{f}\cdot\overrightarrow{AB}$$

✧ En effet, puisque $\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{C}^{\text{te}}}$, nous pouvons la sortir de l'intégrale et :

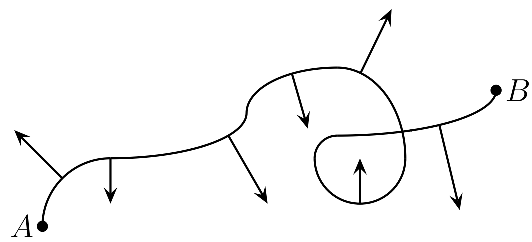
$$W_{AB} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \vec{f}\cdot\int_A^B \mathrm{d}\vec{r} \overset{\text{Chasles}}{=} \vec{f}\cdot\overrightarrow{AB}$$

✧ Une force classique dans ce cas : le poids ... mais nous n'utiliserons pas non plus cette méthode pour calculer le travail que le poids fournit.

✧ Sur le schéma présenté, le point matériel peut-il n'être soumis qu'à la force $\vec{f}$? Non car si tel était le cas, la trajectoire serait rectiligne ou parabolique, ce qu'elle n'est visiblement pas.

II·2·*iii* – cas particulier des forces toujours orthogonales à la trajectoire

Un point matériel reçoit de la part d'une force $\vec{f}$ constamment orthogonale à la trajectoire un travail nul.



$$W_{AB} = 0$$

✧ En effet, pour chaque déplacement élémentaire $\delta W = \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0$, ce qui implique que l'énergie totale reçue est belle et bien nulle.

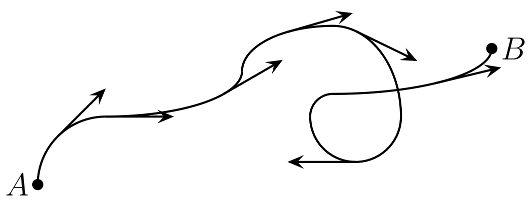
✧ Nous pouvons retrouver ce résultat avec l'expression de la puissance : $\mathscr{P} = \vec{f}\cdot\vec{v} = 0$.

✧ Nous voyons alors bien que le travail n'est pas la primitive de la puissance mais son intégrale : c'est une somme !

- Ces forces qui fournissent un travail nul ne sont pas inutiles : elles servent à guider le point matériel dans une trajectoire voulue.
- Ce cas est souvent celui de $\vec{R}_N$ ... quand le support est immobile !
- Sur le schéma présenté, le point matériel peut-il n'être soumis qu'à la force $\vec{f}$? Non car la force n'est pas toujours tournée vers la concavité de la trajectoire.

II·2·*iv* – cas particulier des forces d'intensité constante et toujours parallèle à la trajectoire

Un point matériel reçoit de la part d'une force $\vec{f}$ constamment parallèle à la trajectoire et d'intensité constante le travail :

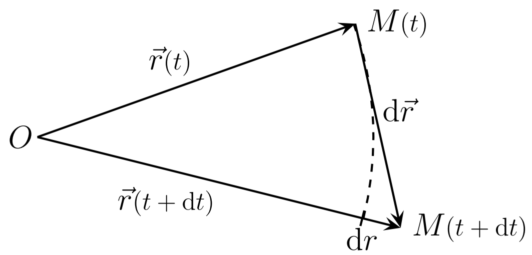


$W_{AB} = \pm \ell_{AB}\, f$ où ℓ_{AB} est la longueur totale du trajet parcouru entre A et B et le signe dépendant du caractère moteur ou résistant de la force.

- En effet, pour chaque déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{r}$, nous avons $\delta W = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ et comme $\vec{f}$ et $\mathrm{d}\vec{r}$ sont colinéaires, cela donne $\delta W = \pm f\, \mathrm{d}\ell$ où $\mathrm{d}\ell$ est la distance parcourue.
- Par sommation de tous les travaux élémentaires reçus, nous trouvons bien que le travail total reçu vaut $W = \pm f\, \ell$.

✯ Notations sur les déplacements élémentaires

- Il faut noter $\mathrm{d}\ell$ la distance parcourue et non $\mathrm{d}r$ car sinon il y risque de confusion.



- En effet :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{d}r & = & r(t+\mathrm{d}t) - r(t) = \|\vec{r}(t+\mathrm{d}t)\| - \|\vec{r}(t)\| \\ \mathrm{d}\ell & = & \|\mathrm{d}\vec{r}\| = \|\vec{r}(t+\mathrm{d}t) - \vec{r}(t)\| \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{d}\ell \neq \mathrm{d}r$$

II·3 – Réservoir officiel d'énergie : les forces conservatives

II·3·*i* – expression simple du travail fourni

Une force est dite *conservative* lorsque le travail qu'elle fournit à un point matériel ne dépend pas de la trajectoire de ce dernier mais uniquement des positions initiale et finale du point matériel.

À chaque force conservative est associée une *énergie potentielle* $E_{\text{p}}(M)$ ne dépendant que de la position et telle que :
➜ le travail élémentaire s'écrive $\delta W = -\text{d}E_{\text{p}}$
➜ le travail fourni entre A et B s'écrive $W_{AB} = -\Delta E_{\text{p}} = -\big(E_{\text{p}}(B) - E_{\text{p}}(A)\big)$

✧ La relation $\delta W = \vec{f} \cdot \text{d}\vec{r} = -\text{d}E_{\text{p}}$ est la relation fondamentale de l'énergie potentielle : c'est elle qui la définit algébriquement.
✧ Les deux relations données sont équivalentes. En effet :

$$W_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \vec{f} \cdot \text{d}\vec{r} = \int_A^B -\text{d}E_{\text{p}} = -\int_A^B \text{d}E_{\text{p}} = -\big(E_{\text{p}}(B) - E_{\text{p}}(A)\big)$$

✧ Le signe « − » est là par convention ...

✯ une infinité d'énergie potentielle

L'énergie potentielle associée à une force conservative est définie à une constante arbitraire près.

✧ Montrons que si $E_{\text{p}}(M)$ est associée à $\vec{f}$ alors $E_{\text{p}}'(M) = E_{\text{p}}(M) + E_0$ est aussi associée à $\vec{f}$.

$$\begin{aligned} -\Delta E_{\text{p}}' &= -\big(E_{\text{p}}'(B) - E_{\text{p}}'(A)\big) = -\big(E_{\text{p}}(B) + E_0 - E_{\text{p}}(A) - E_0\big) \\ &= -\big(E_{\text{p}}(B) - E_{\text{p}}(A)\big) = W_{AB} \end{aligned}$$

✧ Ce qui prouve bien qu'il est possible de calculer le travail fourni par $\vec{f}$ et donc que $E_{\text{p}}'(M)$ est associée à $\vec{f}$.
✧ Nous devrons donc bien préciser la constante **arbitraire** lorsque nous chercherons l'expression d'une énergie potentielle.

✯ des énergies potentielles additives

Si deux forces $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ sont conservatives d'énergies potentielles respectives $E_{\text{p}1}(M)$ et $E_{\text{p}2}(M)$ alors leur résultante $\vec{F}$ est conservative d'énergie potentielle associée $E_{\text{p,tot}}(M) = E_{\text{p}1}(M) + E_{\text{p}2}(M)$.

✧ Pour cela calculons le travail fourni par la résultante $\vec{F}$:

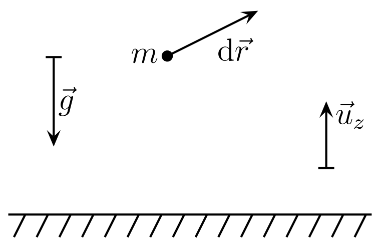
$$\begin{aligned}W_{AB}(\vec{F}) &= \int_A^B \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B (\vec{f_1}+\vec{f_2})\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B \vec{f_1}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \int_A^B \vec{f_2}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\\ &= W_{AB}(\vec{f_1}) + W_{AB}(\vec{f_2}) = -(E_{\mathrm{p1}}(B)-E_{\mathrm{p1}}(A)) - (E_{\mathrm{p2}}(B)-E_{\mathrm{p2}}(A))\\ &= -\Big((E_{\mathrm{p1}}(B)+E_{\mathrm{p2}}(B)) - (E_{\mathrm{p1}}(A)+E_{\mathrm{p2}}(A))\Big) = -(E_{\mathrm{p,tot}}(B)-E_{\mathrm{p,tot}}(A))\end{aligned}$$

✧ Ce qui prouve bien que $\vec{F}$ est conservative et que le travail qu'elle fournit se calcule grâce à l'énergie potentielle $E_{\mathrm{p,tot}}(M)$.

II·3·*ii* – retrouver E_{pp} et $E_{\mathrm{p,él}}$

✯ retrouver l'énergie potentielle de pesanteur

✧ Considérons un point matériel dans le champ de pesanteur et effectuant un déplacement $\mathrm{d}\vec{r}$.



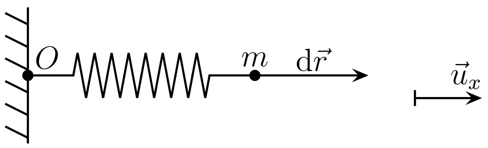
✧ Cherchons s'il existe une énergie potentielle telle que $\delta W = \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$.
✧ La force subie est le poids $\vec{P} = -m\,g\,\vec{u}_z$ et le déplacement élémentaire vaut $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$ ce qui donne $\delta W = -m\,g\,\mathrm{d}z$.
✧ L'énergie potentielle recherchée est alors telle que :

$$-\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = -m\,g\,\mathrm{d}z \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}z} = m\,g \quad\rightsquigarrow\quad E_{\mathrm{p}} = +m\,g\,z + \mathrm{C^{te}}$$

✧ Ce qui est bien le résultat connen en prenant en compte le fait que la constante est choisie de telle sorte que l'énergie potentielle soit nulle à la cote $z_{\text{réf}}$.

✯ retrouver l'énergie potentielle élastique

✧ Considérons un point matériel accroché à un ressort et effectuant un déplacement $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x$.



✧ Cherchons s'il existe une énergie potentielle telle que $\delta W = \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$.
✧ La force subie est la tension exercée par le ressort qui vaut $\vec{f} = -k\,(\ell-\ell_0)\,\vec{u}_{\text{sortant}} = -k\,(x-\ell_0)\,\vec{u}_x$ et le déplacement élémentaire vaut $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x$ ce qui donne $\delta W = -k\,(x-\ell_0)\,\mathrm{d}x$.
✧ L'énergie potentielle recherchée est alors telle que :

$$-\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = -k\,(x-\ell_0)\,\mathrm{d}x \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}z} = k\,(x-\ell_0) \quad\rightsquigarrow\quad E_{\mathrm{p}} = +\frac{1}{2}\,k\,(x-\ell_0)^2 + \mathrm{C^{te}}$$

Une convention usuelle consiste à choisir l'énergie potentielle nulle à l'endroit où la force associée est nulle.

✧ Nous cherchons donc à avoir $E_{\text{p}}(\ell_0) = 0$ ce qui donne le résultat connu $E_{\text{p,él}} = \dfrac{1}{2}\,k\,(\Delta\ell)^2$.

II·3·*iii* – la force à partir de l'énergie potentielle

Si un point matériel a une trajectoire rectiligne d'axe Ox et possède l'énergie potentielle $E_{\text{p}}(x)$, alors la force associée vaut :

$$\vec{f} = -\frac{\mathrm{d}E_{\text{p}}(x)}{\mathrm{d}x}\,\vec{u}_x$$

Attention : cette relation n'est pas valable pour les autres trajectoires. En particulier pour les trajectoires circulaires, nous n'avons pas $\cancel{f(\theta) = -\dfrac{\mathrm{d}E_{\text{p}}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}}$: c'est non homogène !

✧ Montrons cette relation. Nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{f} = f(x)\,\vec{u}_x \\ \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x\end{array}\right. \quad\rightsquigarrow\quad \delta W = \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}E_{\text{p}} \quad\rightsquigarrow\quad f(x) = -\frac{\mathrm{d}E_{\text{p}}(x)}{\mathrm{d}x}$$

✧ Nous retrouvons bien que la force est dirigée vers les zones de bas potentiels :
- ➜ si $E_{\text{p}}(x)$ augmente, $f(x) < 0$ donc attire vers les x plus faibles
- ➜ si $E_{\text{p}}(x)$ diminue, $f(x) > 0$ donc attire vers les x plus grands

II·3·*iv* – retrouver la condition d'équilibre

✧ Nous allons retrouver la condition d'équilibre dans le cas d'une trajectoire rectiligne et admettrons la généralisation du résultat.

✧ Considérons un point matériel M ayant une trajectoire rectiligne d'axe Ox et soumis à $\vec{f} = f(x)\,\vec{u}_x$ dérivant de l'énergie potentielle $E_{\text{p}}(x)$.

✧ Ce point est considéré à l'équilibre lorsque $\vec{v}(t) = \vec{0}$ ce qui implique (d'après le PFD) $\vec{a}(t) = \vec{0}$ puis $\vec{f} = \vec{0}$.

✧ Or $f(x) = -\dfrac{\mathrm{d}E_{\text{p}}(x)}{\mathrm{d}x}$ d'après le paragraphe précédent.

Les positions d'équilibres d'un point matériel possédant l'énergie potentielle E_{p} sont les points de l'espace où cette énergie potentielle est stationnaire.

II·3·*v* – retrouver la condition de stabilité

✧ Nous allons retrouver la condition d'équilibre dans le cas d'une trajectoire rectiligne et admettrons la généralisation du résultat.

✧ Considérons un point matériel M ayant une trajectoire rectiligne d'axe Ox et soumis à $\vec{f} = f(x)\,\vec{u}_x$ dérivant de l'énergie potentielle $E_{\text{p}}(x)$.

Une position d'équilibre est dite *stable* si un point matériel légérèment écarté de cette position subit des forces qui tend à l'y faire revenir.
Une position d'équilibre est dite *invariante* si un point matériel légérèment écarté de cette position ne subit aucune force.
Dans les autres cas, la position d'équilibre est dite *instable*.

✧ Considérons donc une position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ et un point M légèrement écarté de cette position et cherchons la force que subit le point matériel.

✧ Aux alentours de $x_{\text{éq}}$, l'énergie potentielle peut s'écrire :

$$E_{\text{p}}(x) = E_{\text{p}}(x_{\text{éq}}) + (x - x_{\text{éq}}) \times \frac{\mathrm{d}E_{\text{p}}}{\mathrm{d}x}(x_{\text{éq}}) + \frac{1}{2}\,(x - x_{\text{éq}})^2 \times \frac{\mathrm{d}^2E_{\text{p}}}{\mathrm{d}x^2}(x_{\text{éq}})$$

✧ Ce n'est ni plus ni moins que le développement de Taylor d'une fonction $f(x)$ mais en notation « à la physicienne » :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \times f'(x_0) + \frac{1}{2}\,(x - x_0)^2\, f''(x_0)$$

✧ Pour l'énergie potentielle, compte tenu de la position d'équilibre et en notant $A_{\text{éq}} \stackrel{\text{not}}{=} \dfrac{\mathrm{d}^2E_{\text{p}}}{\mathrm{d}x^2}(x_{\text{éq}})$:

$$E_{\text{p}}(x) = E_{\text{p}}(x_{\text{éq}}) + 0 + \frac{1}{2}\,(x - x_{\text{éq}})^2\, A_{\text{éq}} \qquad \rightsquigarrow \qquad f(x) = -\frac{\mathrm{d}E_{\text{p}}(x)}{\mathrm{d}x} = 0 - (x - x_{\text{éq}})\, A_{\text{éq}}$$

✧ Et ainsi :

Si	il faut	et donc
$x > x_{\text{éq}}$	$f(x) < 0$	$A_{\text{éq}} > 0$
$x < x_{\text{éq}}$	$f(x) > 0$	$A_{\text{éq}} > 0$

Les positions d'équilibre stables correspondent à des points où l'énergie potentielle est minimale.

II·4 – Théorèmes énergétiques

II·4·*i* – version cinétique

THÉORÈME DE LA PUISSANCE CINÉTIQUE
Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum \vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{c}}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\vec{f}) \text{ où :}$$

➜ E_{c} est l'énergie cinétique de M
➜ $\mathscr{P}(\vec{f})$ est la puissance fournie par la force $\vec{f}$

✧ Démontrons ce résultat en commençant par écrire le PFD appliqué au point M :

$$\sum \vec{f} = m\,\vec{a} = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

✧ Multiplions scalairement cette équation par $\vec{v}$:

$$\vec{v}\cdot\left(m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right) = \vec{v}\cdot\left(\sum\vec{f}\right) = \sum(\vec{v}\cdot\vec{f}) = \sum(\vec{f}\cdot\vec{v}) = \sum\mathscr{P}(\vec{f})$$

✧ De plus : $\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}\cdot\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v} = 2\,\vec{v}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$.

✧ Nous arrivons ainsi à :

$$m\,\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = \sum\mathscr{P}(\vec{f}) \qquad\rightsquigarrow\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right) = \sum\mathscr{P}(\vec{f})$$

> Théorème de l'énergie cinétique
>
> Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum\vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Alors entre deux points A de sa trajectoire :
>
> $\Delta E_{\mathrm{c}} = \sum W(\vec{f})$ où :
>
> ➜ $\Delta E_{\mathrm{c}} = E_{\mathrm{c}}(B) - E_{\mathrm{c}}(A)$ est la variation d'énergie cinétique de M
>
> ➜ $W(\vec{f})$ est le travail fourni par la force $\vec{f}$

✧ La démonstration est immédiate : c'est le théorème de la puissance cinétique intégré entre A et B.

$$\int_A^B \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_A^B \mathrm{d}E_{\mathrm{c}} = E_{\mathrm{c}}(B) - E_{\mathrm{c}}A$$

✧ Et aussi :

$$\int_A^B \left(\sum\vec{f}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = \sum\int_A^B \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum W(\vec{f})$$

II·4·*ii* – version mécanique

> Théorème de l'énergie mécanique
>
> Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum\vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Alors entre deux points A de sa trajectoire :
>
> $\Delta E_{\mathrm{m}} = \sum W(\vec{f}_{\mathrm{nc}})$ où :
>
> ➜ $\Delta E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{m}}(B) - E_{\mathrm{m}}(A)$ est la variation d'énergie mécanique de M
>
> ➜ $W(\vec{f}_{\mathrm{nc}})$ est le travail fourni par les forces non conservatives

✧ Écrivons le TEC pour le point M en séparant le travail fourni par les forces conservatives du travail fourni par les forces non conservatives :

$$\Delta E_{\mathrm{c}} = \sum W(\vec{f}_{\mathrm{c}}) + \sum W(\vec{f}_{\mathrm{nc}}) = -\sum(\Delta E_{\mathrm{p}}) + \sum W(\vec{f}_{\mathrm{nc}}) = -\Delta(\sum E_{\mathrm{p}}) + \sum W(\vec{f}_{\mathrm{nc}})$$

✧ Et ainsi :

$$\sum W(\vec{f}_{\mathrm{nc}}) = \Delta E_{\mathrm{c}} + \Delta(\sum E_{\mathrm{p}}) = \Delta(E_{\mathrm{c}} + \sum E_{\mathrm{p}}) = \Delta E_{\mathrm{m}} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

STOP écrire $\Delta E_{\mathrm{m}} = 0$ ou $E_{\mathrm{m}} = \mathrm{C^{te}}$ n'est **pas** le théorème de l'énergie mécanique mais un cas particulier qu'il convient de redémontrer à chaque fois.

Théorème de la puissance mécanique

Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum \vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\vec{f}_{\mathrm{nc}}) \text{ où :}$$

- ➜ E_{m} est l'énergie cinétique de M
- ➜ $\mathscr{P}(\vec{f}_{\mathrm{nc}})$ est la puissance fournie par la force $\vec{f}$

✧ C'est la dérivée du TEM.

II·4·*iii* – quand les utiliser ?

✧ Il y a deux styles de théorèmes : ceux en ΔE et ceux en $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$. Il y a aussi ceux qui parlent d'énergie cinétique et ceux qui parlent d'énergie mécanique. Tous ces théorèmes sont très proches les uns des autres donc il peuvent quasiment être utilisé indifféremment l'un que l'autre.

✧ Toutefois, dans l'esprit :

- ➜ les théorèmes en ΔE sont plus adaptés aux question portant sur un bilan sans notion de temps (comme par exemple pour trouver une vitesse à un endroit donné)
- ➜ les théorèmes en $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ expriment comment $\mathrm{d}E$ varie en fonction de $\mathrm{d}t$: c'est donc plutôt une nouvelle manière de trouver une équation différentielle régissant l'évolution du point matériel, la notion de « temps » y est importante

✧ Plutôt énergie cinétique ou énergie mécanique ? C'est quasiment équivalent

- ➜ pour un problème de mécanique « pure », les versions avec l'énergie mécanique seront plus adaptées, c'est presque une évidence car l'énergie mécanique est faite pour cela
- ➜ pour un problème énergétique avec des considérations mécaniques, les versions cinétiques pourront parfois être plus claires en ce qui concerne les échanges énergétiques

✧ Il y a un autre facteur à prendre en compte : le nombre d'inconnues de position.

Le nombre minimal de grandeurs permettant de décrire entièrement la position d'un dispositif est appelé le *nombre de degré de liberté.*

✧ Il y a un seul degré de liberté, par exemple quand :

- ➜ la trajectoire est rectiligne : $x(t)$ ou $z(t)$
- ➜ la trajectoire est circulaire : $\theta(t)$
- ➜ la trajectoire est guidée : $\ell(t)$

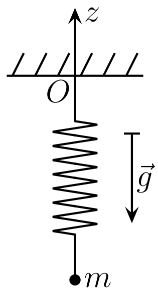
✧ De manière générale, plus il y a de contraintes sur la trajectoire, moins il y a de degré de liberté.

✧ Il faut savoir que les méthodes énergétiques sont extrêmement performantes sur les problèmes à un degré de liberté, que l'évolution soit conservative ou non.

II·5 – Une nouvelle méthode pour des exemples connus

II·5·*i* – ressort vertical

✧ Retrouvons l'équation différentielle vérifiée par une masse accrochée à un ressort vertical.



✧ Comme nous cherchons une équation différentielle, nous allons écrire le TPM.

✧ La masse est soumise :
- ➜ à son poids d'énergie potentielle $E_{\text{pp}} = m\,g\,z$
- ➜ à la force exercée par le ressort d'énergie potentielle $E_{\text{p}} = \dfrac{1}{2}\,k\,(\ell-\ell_0)^2 = \dfrac{1}{2}\,k\,(-z-\ell_0)^2$
- ➜ il n'y a pas de forces non conservatives

✧ L'énergie cinétique s'écrivant $E_{\text{c}} = \dfrac{1}{2}\,m\,\dot{z}^2(t)$ (trajectoire rectiligne) :

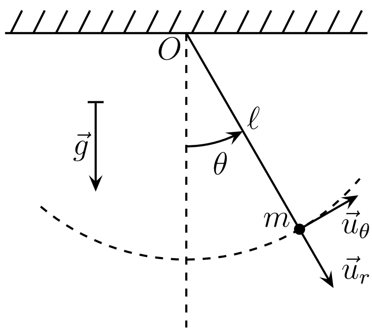
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,m\,\dot{z}^2(t)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,g\,z(t) + \frac{1}{2}\,k\,(-z(t)-\ell_0)^2\right) = 0$$
$$\rightsquigarrow \qquad m\,\ddot{z}(t)\,\dot{z}(t) + m\,g\,\dot{z}(t) - k\,\dot{z}(t)\,(-z(t)-\ell_0) = 0$$

✧ Et en simplifiant par la solution inintéressante $\dot{z}(t) = 0$ correspondant à l'équilibre :

$$m\ddot{z}(t) + k\,z(t) = -m\,g - k\,\ell_0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,z(t) = -g - \frac{k}{m}\,\ell_0$$

II·5·*ii* – pendule simple

✧ Reprenons l'exemple du pendule simple.



✧ La masse est soumise :
- ➜ à son poids qui est est une force conservative
- ➜ à la tension exercée par le fil qui ne travaille pas étant donné la trajectoire et l'idéalité du fil

✧ Analyse technique :
- ➜ repérage polaire obligatoire
- ➜ un bon petit théorème énergétique, le TPM

✧ Pour l'énergie potentielle, nous avons $E_{\text{p}} = +m\,g\,z = -m\,g\,\ell\,\cos\theta$.

✧ Et pour l'énergie cinétique : $E_{\text{c}} = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2 = \dfrac{1}{2}\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2(t)$

✧ Et le TPM donne :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2(t)\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-m\,g\,\ell\,\cos\theta\right)=0 \quad\rightsquigarrow\quad m\,\ell^2\,\ddot{\theta}(t)\,\dot{\theta}(t)+\dot{\theta}(t)\,m\,g\,\ell\,\sin\theta(t)=0$$

✧ Et en simplifiant par la solution inintéressante $\dot{\theta}(t)=0$ correspondant à l'équilibre, nous obtenons :

$$m\,\ell^2\,\ddot{\theta}(t)+m\,g\,\ell\,\sin\theta(t)=0 \qquad\rightsquigarrow\qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{\ell}\,\sin\theta(t)=0$$

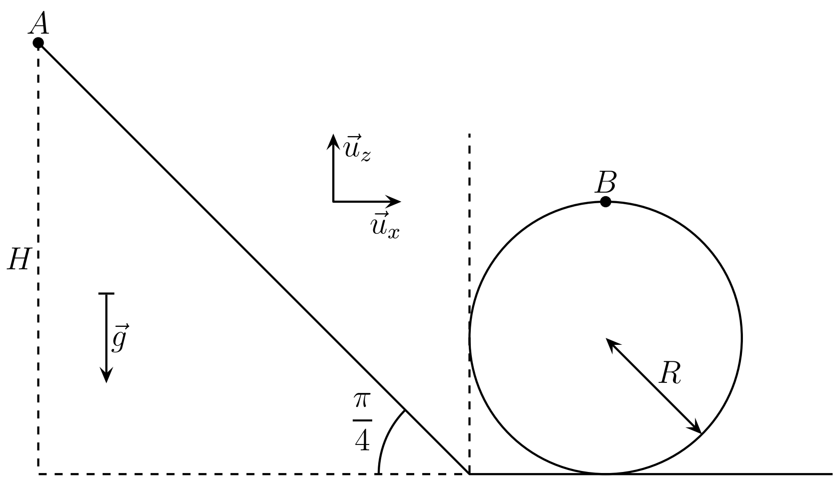
✧ L'avantage ? Pas de forces à projeter ...

II·6 – Looping sur un grand 8

✧ Travaillons maintenant sur une situation où les théorèmes énergétiques ne serviront pas « que » à trouver la réponse directement.

II·6·*i* – une attraction connue

✧ Considérons le looping suivant.



✧ Un chariot suffisamment petit pour être considéré ponctuel roule sur des rails. L'ensemble des frottements est assimilé à une force $\vec{f}$ d'intensité constante et toujours opposée à la vitesse.
✧ Le chariot est lâché en A sans vitesse initiale.

II·6·*ii* – vitesse au sommet

✧ Première question que nous pouvons nous poser c'est : « Le chariot, dont le but est de faire le tour, va-t-il arriver en B et si oui, à quelle vitesse ? »
✧ Analyse physique :
  ➜ le chariot va déjà descendre de plus en plus vite, entraîné par son poids (et ralenti par les frottements) puis va remonter en ralentissant
  ➜ le dispositif est à trajectoire connue il y aura donc des forces inconnues
  ➜ l'évolution globale n'est pas conservative à cause des frottements
✧ Analyse technique :
  ➜ ici il n'y a pas vraiment de repérage à faire étant donné que la situation est étudiée à un endroit. Dans ces conditions, nous allons utiliser les coordonnées les plus naturelles pour repérer B et A : les cartésiennes

➜ comme aucune notion de temps n'est recquise, un bon bilan énergétique sera parfait pour répondre à la question

✫ écriture du théorème

✧ Le chariot est soumis à trois forces :
- ➜ force à distance : le poids (conservatif donc ☺)
- ➜ la réaction normale des rails (les frottements sont comptés avec $\vec{f}$) : pas conservatif
- ➜ les frottements : pas conservatifs

✧ Nous avons donc pour ce chariot :

$$\Delta E_{\text{m}} = W(\vec{R}_N) + W(\vec{f})$$

✧ Or :

$$\left\{\begin{array}{l} E_{\text{m}}(A) = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2(A) + m\,g\,z(A) = 0 + m\,g\,H \\ E_{\text{m}}(B) = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2(B) + m\,g\,z(B) = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2(B) + m\,g\,2\,R \end{array}\right. \rightsquigarrow \Delta E_{\text{m}} = \frac{1}{2}\,m\,v^2(B) + m\,g\,(2\,R - H)$$

✫ travaux fournis par les différentes forces

✧ Comme $\vec{R}_N$ est normal à la trajectoire (contact sans frottement d'un support immobile), le travail fourni est nul, *ie.* $W(\vec{R}_N) = 0$.

✧ $\vec{f}$ est une force résistante d'intensité constante, le travail qu'elle fournit vaut donc $W(\vec{f}) = -f\,\ell_{AB}$ où ℓ_{AB} est la longueur de la trajectoire entre A et B. Ici cela donne : $W(\vec{f}) = -f\,(H\,\sqrt{2} + R + \pi\,R)$.

✫ regroupement et interprétation

✧ Nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\,m\,v^2(B) + m\,g\,(2\,R - H) = -f\,(H\,\sqrt{2} + R + \pi\,R) \\ \rightsquigarrow \qquad & \frac{1}{2}\,m\,v^2(B) = m\,g\,(H - 2\,R) - f\,(H\,\sqrt{2} + R + \pi\,R) \end{aligned}$$

✧ Pour que le chariot arrive en B, il faut naturellement que le membre de droite soit positif (*ie.* que le poids ait fourni plus d'énergie que les frottements n'en ont dissipés), ce qui donne :

$$\begin{aligned} m\,g\,(H - 2\,R) &\geqslant f\,(H\,\sqrt{2} + R + \pi\,R) \\ (m\,g - f\,\sqrt{2})\,H &\geqslant f\,(\pi + 1)\,R + 2\,R\,m\,g \\ H &\geqslant \frac{2\,m\,g + (\pi + 1)\,f}{m\,g - \sqrt{2}\,f} \end{aligned}$$

✧ Le fait que H possède une valeur minimale est rassurant.

✧ Si $f\,\sqrt{2} = m\,g$ alors la force de frottement compense exactement la partie du poids qui fait avancer.

✧ Si $f\,\sqrt{2} > m\,g$ la valeur limite de H semble être négative, ce qui contre-intuitif. En fait le cas $f\,\sqrt{2} > m\,g$ car cela signifierait que les frottements poussent le chariot vers le haut . . .

✧ La vitesse associée en B vaut donc $v(B) = \sqrt{2\,g\,(H - 2\,R) - \dfrac{2\,f}{m}\,(\sqrt{2}\,H + (\pi + 1)\,R)}$.

✧ Nous pouvons dire que :

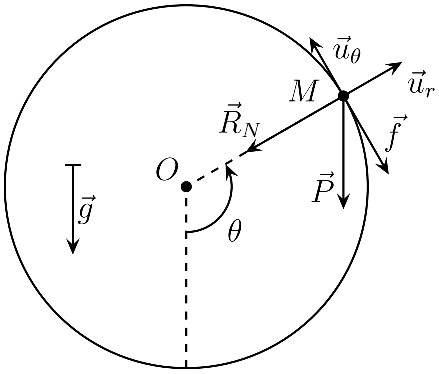
- ➜ la vitesse est bien d'autant plus faible que les frottements sont importants
- ➜ un chariot de masse élevée subit moins l'influence des frottements
- ➜ si les frottements sont nuls ($f = 0$) nous retrouvons le cas de la chute libre guidée : $v(B) = \sqrt{2\,g\,(H - 2\,R)}$

II·6·*iii* – tombera ? tombera pas ?

✧ Le tout n'est pas vraiment d'arriver en haut, mais de faire le tour du looping : il ne faut pas que le chariot se décroche du rail.

✧ Anlyse technique :
- ➜ comme tout va se passer dans le looping, nous allons repérer le chariot dans le looping avec les coordonnées polaires
- ➜ nous cherchons une force $\vec{R}_N$ qui permettra de dire si le contact est rompu ou non : il faut du PFD

✧ La situation à un instant quelconque est la suivante.



✧ Les forces subies par le chariot s'écrivent :
- ➜ $\vec{P} = p\,\cos\theta\,\vec{u}_r - P\,\sin\theta\,\vec{u}_\theta$
- ➜ $\vec{f} = -f\,\vec{u}_\theta$
- ➜ $\vec{R}_N = -R_N\,\vec{u}_r$

✯ première expression de $\vec{R}_N$

✧ Pour avoir une première expression de $\vec{R}_N$, projetons le PFD sur $\vec{u}_r$:

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = m\,\vec{a}(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad m\,g\,\cos\theta - R_N = -m\,\frac{v^2}{R} \qquad \rightsquigarrow \qquad R_N = m\,g\,\cos\theta + m\,\frac{v^2}{R}$$

✯ intervention de l'énergie mécanique

✧ Ecrivons le TEM entre le point A et un point quelconque du looping repéré par θ :

$$\Delta E_{\text{m}} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \Delta E_{\text{p}} = \underbrace{W(\vec{R}_N)}_{=0} + W(\vec{f})$$

✧ Or $\Delta E_{\text{p}} = m\,g\,R\,(1 - \cos\theta) - m\,g\,H = m\,g\,(R - H - R\,\cos\theta)$.

✧ De plus $W(\vec{f}) = -f\,\ell_{AM} = -f\,(H\,\sqrt{2} + R + r\,\theta)$.

✧ Et ainsi :

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,(R - H - R\,\cos\theta) = -f\,(H\,\sqrt{2} + R + r\,\theta)$$
$$\rightsquigarrow \qquad m\,v^2 = 2\,m\,g\,(R\,\cos\theta + H - R) - 2\,f\,(H\,\sqrt{2} + R + r\,\theta)$$

Remarque : si nous l'avions connu, nous aurions pu utiliser le TEM pour déterminer $\dot{\theta}^2$ dans l'exemple de l'objet qui tombe d'une bosse. Mais nous ne connaissions pas ce théorème à l'époque et nous avons utilisé le PFD ... avec succès.

✯ rassemblement

✧ Avec $R_N = m\,\dfrac{v^2}{R} + m\,g\,\cos\theta$ nous obtenons :

$$R_N = \frac{2\,m\,g}{R}\,(R\,\cos\theta + H - R) - \frac{2\,f}{R}\,(H\,\sqrt{2} + R + r\,\theta) + m\,g\,cos\theta$$

✯ condition minimale de sécurité : cas sans frottement

✧ Faisons $f = 0$ dans l'expression précédente. Il reste :

$$R_N = \frac{2\,m\,g}{R}\,(R\,\cos\theta + H - R) + m\,g\,cos\theta = \frac{2\,m\,g}{R}\,(H - R) + 3\,m\,g\,\cos\theta$$

✧ Il faut que cette fonction ne s'annule pas. Sans l'étudier avec toute la rigueur qui devrait s'imposer, nous voyons bien que puisque la seule dépendance en θ se fait pas un $\cos\theta$, que le minimum est atteint en $\theta = \pi$.

✧ La condition revient donc à $R_N(\pi) > 0$ or :

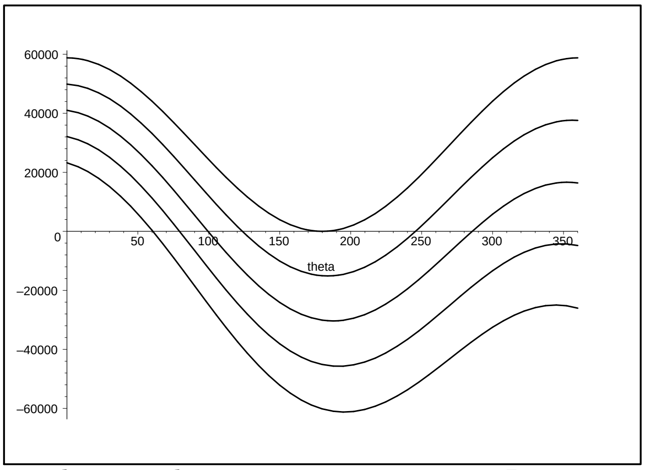
$$R_N(\pi) = \frac{2\,m\,g}{R}\,(H - R) - 3\,m\,g = \frac{m\,g}{R}\,(2\,H - 5\,R)$$

✧ La condition minimale de sécurité vaut donc $\boxed{H \geqslant \dfrac{5}{2}\,R}$. Il est très rassurant de voir que $H_{\text{min}} \geqslant 2\,R$.

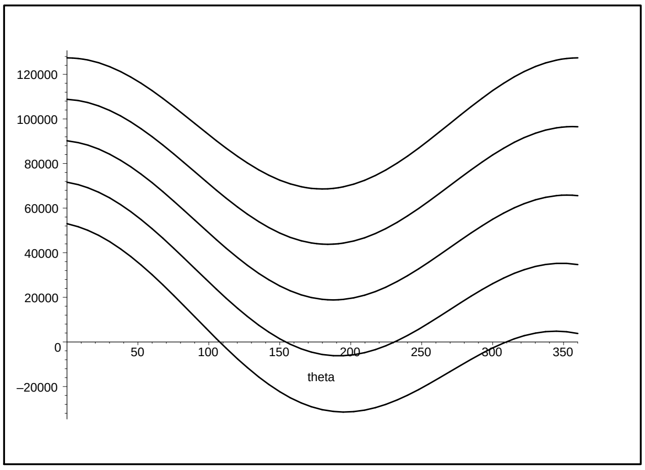
✯ cas avec frottement

✧ Utilisons maple.

Graphique 1



Graphique 2



✧ Les valeurs utilisées sont $m = 1{,}0$ t et $R = 5$ m.

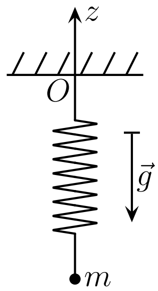
✧ Sur le graphique 1, $H = \dfrac{5}{2}\,R$ et nous avons représenté ce qu'il se passe dans 5 cas de frottements ($f = 0$; $f = 0{,}1\,P$; $f = 0{,}2\,P$; $f = 0{,}3\,P$; $f = 0{,}4\,P$). Seul un cas passe : celui pour lequel les frottements sont nuls. Deux cas sont dangereux car le décolage se fait après $\dfrac{\pi}{2}$.

✧ Sur le graphique 2, $H = 6\,R$ et nous avons représenté ce qu'il se passe dans 5 cas de frottements ($f = 0$; $f = 0{,}1\,P$; $f = 0{,}2\,P$; $f = 0{,}3\,P$; $f = 0{,}4\,P$). Cette fois, ça passe mieux.

II·7 – Oscillations autour d'une position d'équilibre stable

II·7·*i* – ressort vertical

✧ C'est une situation connue.



✧ Rappelons les résultats :
- ➜ l'évolution est conservative
- ➜ l'énergie mécanique vaut $E_{\text{m}} = \dfrac{1}{2}\,m\,\dot{z}^2(t) + \dfrac{1}{2}\,k\,(-z(t) - \ell_0)^2 + m\,g\,z(t)$
- ➜ la position d'équilibre est en $z_{\text{éq}} = -\ell_0 - \dfrac{m\,g}{k}$

✧ Cherchons comment le ressort évolue autour de sa position d'équilibre, *ie.* cherchons l'équation différentielle régissant l'évolution de $\varepsilon(t)$ tel que $z(t) = z_{\text{éq}} + \varepsilon(t)$.

✧ Remplaçons $z(t)$ par son expression dans l'énergie mécanique et écrivons que l'évolution est conservative, *ie.* $\dfrac{\mathrm{d}E_{\text{m}}}{\mathrm{d}t} = 0$. Remarquons au passage que $\ddot{z}(t) = \dot{\varepsilon}(t)$.

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{\varepsilon}^2(t) + \frac{1}{2}\,k\,(-z_{\text{éq}} - \varepsilon(t) - \ell_0)^2 + m\,g\,(z_{\text{éq}} + \varepsilon(t))$$
$$\rightsquigarrow \qquad m\,\ddot{\varepsilon}(t)\,\dot{\varepsilon}(t) - k\,\dot{\varepsilon}(t)\,(-z_{\text{éq}} - \varepsilon(t) - \ell_0) + m\,g\,\dot{\varepsilon}(t) = 0$$

✧ En simplifiant par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre $\dot{\varepsilon}(t) = 0$ nous obtenons :

$$m\,\ddot{\varepsilon}(t) + k\,\varepsilon(t) = -k\,z_{\text{éq}} - k\,\ell_0 - m\,g$$

✧ Soit, avec la condition d'équilibre :

$$m\,\ddot{\varepsilon}(t) + k\,\varepsilon(t) = 0$$

✧ L'évolution est sinusoïdale, ce qui n'est guère surprenant, toutefois …

II·7·*ii* – interaction intermoléculaire

✧ Reprenons l'interaction moléculaire où une molécule possède l'énergie potentielle $E_{\text{p}}(r)$ et simplifions le problème en supposant qu'elle ne se déplace que sur l'axe repéré par r. Nous avons donc :

$$E_\mathrm{p} = E_0 \left(\frac{a^{12}}{r^{12}} - \frac{a^6}{r^6}\right) \qquad \text{et} \qquad {r_0}^6 = 2\,a^6$$

✧ Le PFD s'écrit donc :

$$m\,\ddot{r}(t) = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = 12\,E_0\,\frac{a^{12}}{r^{13}(t)} - 6\,E_0\,\frac{a^6}{r^7(t)}$$

✧ Cherchons le mouvement autour de la position d'équilibre : $r(t) = r_0 + \varepsilon(t)$ avec $|\varepsilon(t)| \ll r_0$ et simplifions en conséquence :

$$\begin{aligned}
m\,\ddot{\varepsilon}(t) &= 12\,E_0\,\frac{a^{12}}{(r_0+\varepsilon(t))^{13}} - 6\,E_0\,\frac{a^6}{(r_0+\varepsilon(t))^7} \\
&= 12\,E_0\,\frac{a^{12}}{{r_0}^{13}\left(1+\dfrac{\varepsilon(t)}{r_0}\right)^{13}} - 6\,E_0\,\frac{a^6}{{r_0}^7\left(1+\frac{\varepsilon(t)}{r_0}\right)^7} \\
&= 12\,E_0\,\frac{a^{12}}{{r_0}^{13}}\left(1-13\,\frac{\varepsilon(t)}{r_0}\right) - \frac{6\,E_0\,a^6}{{r_0}^7}\left(1-73\,\frac{\varepsilon(t)}{r_0}\right) \\
&= \cancel{12\,E_0\,\frac{a^{12}}{{r_0}^{13}} - \frac{6\,E_0\,a^6}{{r_0}^7}} + \left(-12\times 13\,\frac{E_0}{4\,r_0} + 6\times 7\,\frac{E_0}{2\,r_0}\right)\frac{\varepsilon(t)}{r_0} \qquad \text{cf. condition d'équilibre} \\
&= -18\,\frac{E_0}{{r_0}^2}\,\varepsilon(t)
\end{aligned}$$

✧ Et ainsi : $m\,\dfrac{\mathrm{d}^2\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t^2} + 18\,\dfrac{E_0}{{r_0}^2}\,\varepsilon(t) = 0$, ce qui est aussi une équation d'évolution sinusoïdale.

II·7·*iii* – ce n'est pas une coïncidence

> Les petites évolutions autour d'une position d'équilibre stable sont toujours sinusoïdales.

✧ Pour y arriver, après avoir introduit le petit déplacement $\varepsilon(t)$, il y a deux méthodes :
- ➜ développer l'énergie à l'ordre deux et utiliser un théorème version puissance
- ➜ utiliser le PFD et ensuite utiliser des DL à l'ordre 1

✧ Dans les deux cas, la condition d'équilibre **doit** être utilisée de manière à aboutir à une équation du type $\ddot{\varepsilon}(t) + {\omega_0}^2\,\varepsilon(t) = 0$.

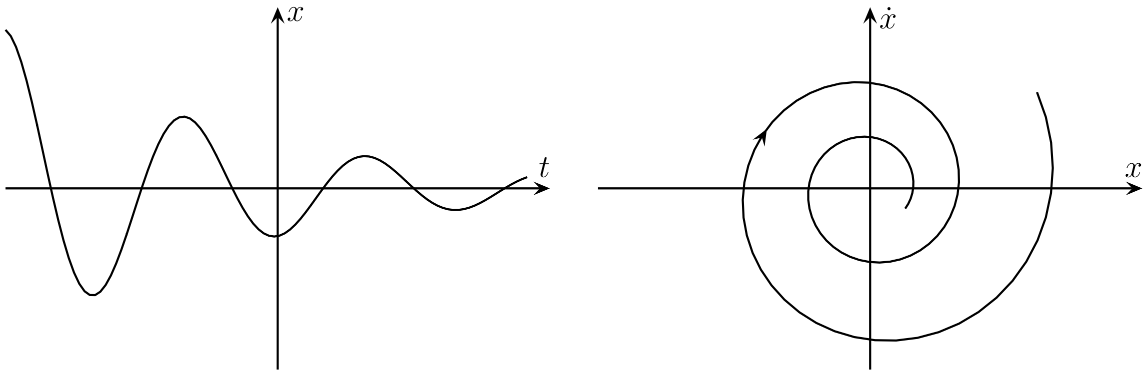
III – Visualiser toutes les évolutions en un graphique

III·1 – Le plan de phase

✧ Dans tout ce qui suit, nous allons parler de l'évolution d'un dispositif à un seul degré de liberté que nous noterons $x(t)$ mais qui pourra très bien être $\theta(t)$.

III·1·*i* – présentation

✧ Nous allons chercher à représenter l'évolution de x non pas en fonction du temps $x(t)$ mais plutôt $\dot{x}(x)$.

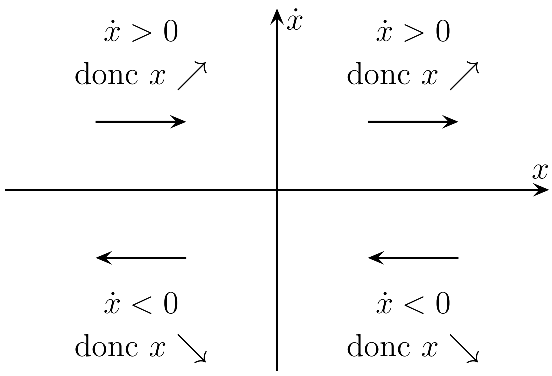


✧ C'est très bizarre mais :
- ➜ avec l'habitude, ça va
- ➜ c'est extrêmement pratique

> Le *plan de phase* est le plan qui permet de représenter la vitesse en fonction de la position.

III·1·*ii* – des cadrans orientés

✧ Les trajectoires vont forcément dans une certaine direction suivant le cadran.



> Dans le plan de phase, les trajectoires tournent globalement dans le sens horaire.

> Dans le plan de phase, les points de vitesse nulle sont situés sur l'axe des absisses.

III·1·*iii* – une et une seule trajectoire par évolution libre

✧ Imaginons une PFD presque quelconque : $\ddot{x} = f(\dot{x},x)$.

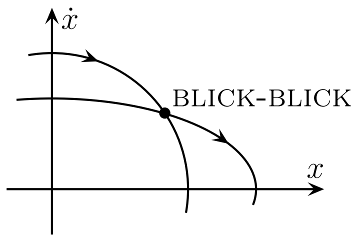
✧ Cela correspond à un régime libre parce que l'ED peut se réécrire $\ddot{x} - f(\dot{x},x) = 0$ ce qui fait que toutes les inconnues sont du même côté, il n'y a pas de terme de source.

✧ Prenons un point de la trajectoire dans le plan de phase : $(\dot{x}(t_0),x(t_0))$. Dans ces conditions, d'après le PFD : $\ddot{x}(t_0) = f(\dot{x}(t_0),x(t_0))$.

✧ Dès lors, le point suivant, dt plus tard est parfaitement connu grâce à la méthode d'Euler :

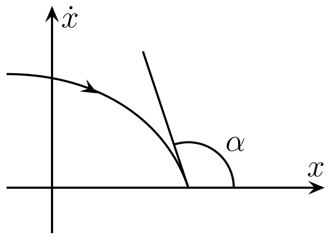
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t_0+\mathrm{d}t) & = & x(t_0) + \dot{x}(t_0)\,\mathrm{d}t \\ \dot{x}(t_0+\mathrm{d}t) & = & \dot{x}(t_0) + \ddot{x}(t_0)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Dans le plan de phase, en régime libre, deux trajectoires ne peuvent pas se croiser.



III·1·*iv* – intersection avec l'axe des abscisses

✧ Reprenons un cas de régime libre tel que $\ddot{x} = f(\dot{x},x)$ et cherchons α.



✧ Par définition de la dérivée :

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x} \quad \rightsquigarrow \quad \tan\alpha = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$$

✧ Sauf que sur l'axe des abscisse $\dot{x} \to 0$, il y a donc deux cas :
- ➜ si $\ddot{x} \neq 0$ alors $\tan\alpha \to \infty$ et $\alpha \to \dfrac{\pi}{2}$
- ➜ si $\ddot{x} = 0$ alors $\tan\alpha \to \dfrac{0}{0}$ et nous ne pouvons rien dire

Pour un régime libre, la trajectoire dans le plan de phase coupe perpendiculairement l'axe des abscisses en des points où il n'y a pas équilibre.

III·2 – De nombreuses informations

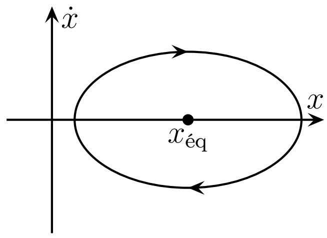
III·2·*i* – positions d'équilibre et stabilité

✧ Les positions d'équilibre sont forcément telles que $\dot{x} = 0$ donc elles sont situées sur l'axe des abscisses.

✯ position d'équilibre stable

✧ Nous savons qu'il y a des oscillations sinusoïdales autour des positions d'équilibre stable, donc :

$$\begin{cases} x(t) = x_{\text{éq}} + x_0\,\cos(\omega\,t + \varphi) \\ \dot{x}(t) = -x_0\,\omega\,\sin(\omega\,t + \varphi) \end{cases}$$

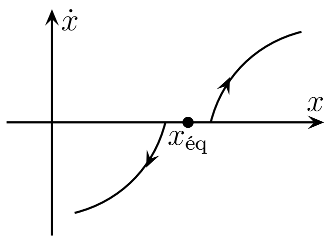


> Dans le plan de phase, les trajectoires autour d'une position d'équilibre stables sont elliptiques.

✧ Nous pouvons constateur que légèrement écarté de sa position d'équilibre (et lâché sans vitesse initiale), le point a effectivement tendance à retourner vers sa position d'équilibre.

✯ position d'équilibre instable

✧ Légèrement écarté de sa position d'équilibre instable, un point a tendance à le fuir. Cela donne, graphiquement :



> Dans le plan de phase, les trajectoires ont tendance à s'écarter des positions d'équilibre instables.

III·2·*ii* – frottement ou non

✧ En régime libre, s'il y a des frotttements, alors à la fin, le point matériel finit par s'arrêter et donc sa trajectoire, dans le plan de phase, se finit sur l'axe des abscisses.

> Dans le plan de phase, toutes les trajectoires d'un régime libre pour laquelle il y a des frottements finissent sur l'axe des abscisses.

✧ Les points terminaux de ces trajectoires sont évidemement des points d'équilibre et comme ils « attirent » les trajectoires, ils sont appelés « attracteurs ».

III·2·*iii* – mouvement périodique

✧ Considérons un mouvement périodique de période T. Par définition du mouvement périodique, l'évolution se répète identique à elle-même soit :

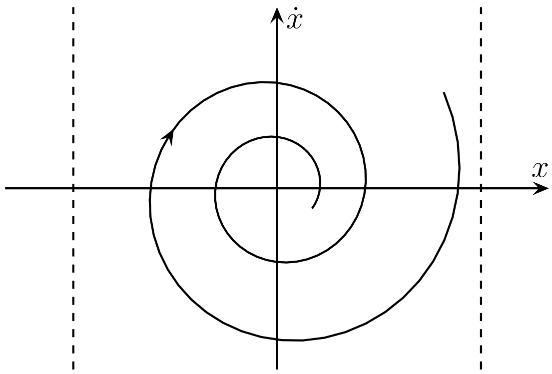
$$\left\{\begin{array}{l} x(t_0+T) = x(t_0) \\ \dot{x}(t_0+T) = \dot{x}(t_0) \end{array}\right.$$

✧ Autrement dit le point représentatif de $t_0 + T$ est le même que celui représentatif de t_0.

> Dans le plan de phase, un mouvement périodique correspond à une trajectoire fermée.

III·2·*iv* – état lié ou de diffusion

✧ Pour un état lié, le paramètre de position ne peut pas devenir infini, donc la trajectoire est restreinte à une bande verticale du plan de phase.

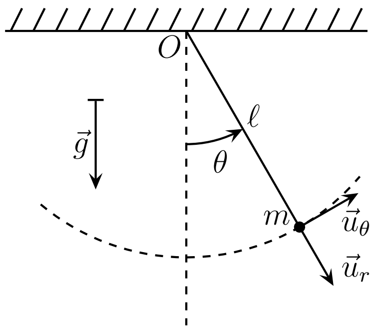


> Dans le plan de phase, les états de diffusion ont des trajectoires qui partent vers l'infini sur l'axe des abscisses.

III·3 – Exemple du pendule simple rigide

III·3·*i* – mise en équation

✧ La situation est identique à celle du pendule simple sauf qu'il ne s'agit pas d'un fil mais d'une tige rigide. Il n'y a pas de frottement au niveau de l'axe, mais il y en a au niveau de la masse : $\vec{f} = -h\,\vec{v}$.



✧ Analyse physique :

- ➜ suivant les conditions initiales, le pendule va osciller
- ➜ la trajectoire de M est obligatoire circulaire

✧ Analyse technique :
- ➜ le repérage est immédiat : coordonnées cylindro-polaire
- ➜ le problème c'est qu'ici il n'est plus possible de dire que l'action exercée par la tige est colinéaire à $\vec{u}_r$: ce n'est pas un fil, c'est une tige donc il faut dire au revoir au PFD

✧ Le point matériel possède donc l'énergie mécanique :

$$E_{\text{m}} = E_{\text{c}} + E_{\text{p}} = \frac{1}{2}\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2(t) - m\,g\,\ell\,\cos\theta$$

✧ Écrivons le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{m}}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}\cdot\vec{v} \qquad \rightsquigarrow \qquad m\,\ell^2\,\ddot{\theta}(t)\,\dot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t)\,m\,g\,\ell\,\sin\theta = -h\,\ell\,\dot{\theta}(t)\,\ell\,\dot{\theta}(t)$$

✧ En simplifiant par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre $\dot{\theta}(t) = 0$, nous obtenons :

$$m\,\ell^2\,\ddot{\theta}(t) + m\,g\,\ell\,\sin\theta = -h\,\ell\,\ell\,\dot{\theta}(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{h}{m}\,\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{\ell}\,\sin\theta(t) = 0$$

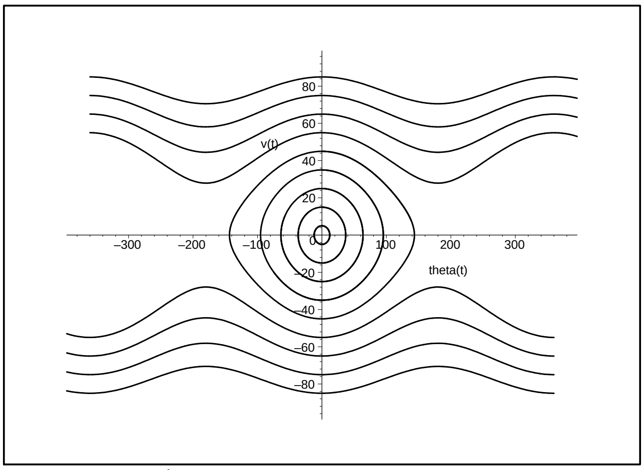
III·3·*ii* – sans frottement

✧ Faisons $h = 0$ dans l'équation précédente, cela donne :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\,\sin\theta(t) = 0$$

✧ C'est l'équation du pendule simple sauf qu'elle est valable aussi pour $\theta > \dfrac{\pi}{2}$.

Graphique 3

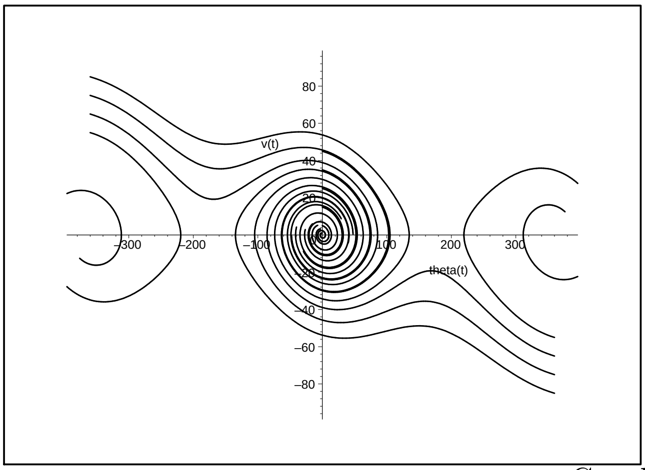


✧ Sur le plan de phase, nous pouvons voir :
- ➜ qu'aucune trajectoire n'en croise une autre : cela confirme le régime libre
- ➜ qu'il y a des états liés
- ➜ qu'il y a des états de diffusion (le pendule n'arrête pas de tourner)
- ➜ qu'il y a des oscillations quasi-sinusoïdales pour des faibles amplitudes
- ➜ qu'il y a des oscillations non sinusoïdales pour des amplitudes un peu plus grandes

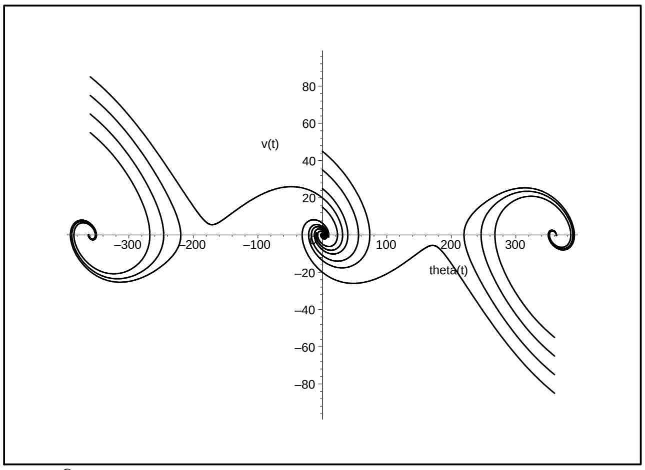
III·3·*iii* – avec frottement

✧ Reprenons l'équation complète et traçons les trajectoires dans le plan de phase pour trois valeurs de frottements.

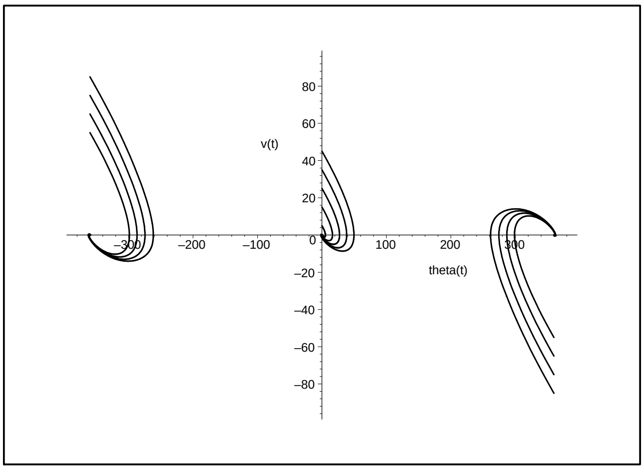
Graphique 4



Graphique 5



Graphique 6



✧ Nous voyons :

- ➜ qu'aucune trajectoire n'en croise une autre : cela confirme le régime libre
- ➜ les points attracteurs situés à 0, $2\,\pi$, $-2\,\pi$ de façon absolument non étonnante
- ➜ qu'il a des oscillations sur les graphiques 4 et 5 : le régime est pseudo périodique
- ➜ qu'il n'y a pas d'oscillations sur le graphique 6 : le régime est apériodique

La mécanique autrement qu'en forces

Au niveau du cours

✫ Les définitions

✧ Sont à savoir :
- ➜ les définitions d'énergie cinétique, potentielle, mécanique
- ➜ les définitions de travail fourni par une force
- ➜ la définition du nombre de degrés de liberté
- ➜ la définition du plan de phase

✧ Connaître les liens entre mètre, seconde, kilogramme, newton, joule, watt

✫ Les lois

✧ Sont à connaître :
- ➜ les théorèmes énergétiques
- ➜ les expressions des énergies potentielles de pesanteur et élastique
- ➜ la relation fondamentale de l'énergie potentielle
- ➜ la caractérisation de l'équilibre et de la stabilité en terme énergétique

✫ la phénoménologie

✧ Connaître :
- ➜ la phénoménologie d'une évolution conservative
- ➜ la phénoménologie des forces motrices et résistantes
- ➜ le type d'oscillations autour d'une position d'équilibre stable
- ➜ savoir interpréter une évolution à partir de la représentation graphique de l'énergie potentielle
- ➜ savoir interpréter un ensemble de trajectoires dans le plan de phase

Au niveau de l'analyse

✫ Analyse physique

✧ Il faut savoir :
- ➜ savoir compter le nombre de degrés de liberté d'un problème
- ➜ repérer les forces qui fournissent un travail et celles qui n'en fournissent pas

✫ Analyse technique

✧ Il faut savoir déterminer quelle est la meilleure approche (force ou énergie) pour répondre à une question.

Au niveau des savoir-faire

✫ petits gestes

✧ Savoir :
- ➜ calculer le travail fourni par une force vectoriellement constante
- ➜ calculer le travail fourni par une force toujours orthogonale à la trajectoire
- ➜ calculer le travail fourni par une force d'intensité constante et toujours parallèle à la trajectoire

✯ exercices classiques

✧ Savoir refaire :

- ➜ le looping sans frottement
- ➜ tout sur le ressort vertical (mise en équation, position d'équilibre, oscillations autour de l'équilibre) à l'aide de méthodes énergétiques
- ➜ tout sur le pendule simple à l'aide de méthodes énergétiques

Table des matières