

Mécanique

Chapitre 3

Oscillateur harmonique

Oscillateur harmonique

Dans ce chapitre, nous allons étudier les oscillateurs sous toutes les coutures. En effet les oscillateurs sont à la base de très nombreux modèles de physique, ils sont donc très utilisés et leur maîtrise est indispensable dans tous les domaines de la physique.

Nous commencerons par l'étude de l'oscillateur mécanique harmonique en régime libre qui ira vite car tout a déjà été (presque) fait. Ensuite nous verrons deux exemples d'oscillations non linéaires et les méthodes adaptées pour les étudier. Enfin nous finirons par l'étude de l'oscillateur mécanique en régime sinusoïdal forcé, ce qui nous permettra d'introduire un nouvel outil ô combien important en physique : la notation complexe.

I – Oscillateur harmonique amorti en régime libre

I.1 – Oscillateur harmonique ?

◇ Tout d'abord la définition.

Un dispositif se comporte comme un *oscillateur harmonique* lorsque la force de rappel qui tend à le ramener à sa position d'équilibre stable est proportionnelle à son écart avec cette position d'équilibre.

- ◇ Il faut bien voir que c'est un modèle et que donc, en soi, il sera rarement « exactement parfait ».
- ◇ Toutefois, c'est un modèle dont nous pouvons sentir aisément qu'il sera très utilisé car il correspond, en fait, à des approximation à l'ordre 1 des forces autour de l'équilibre.
- ◇ Imaginons une position d'équilibre $x_{\text{éq}}$. Alors, en notant naturellement $\vec{f} = f(x)\vec{u}_x$ la force qui s'exerce sur ce point matériel, nous avons naturellement $f(x_{\text{éq}}) = 0$ et donc, quelle que soit la force, nous pouvons écrire, **autour de cette position** :

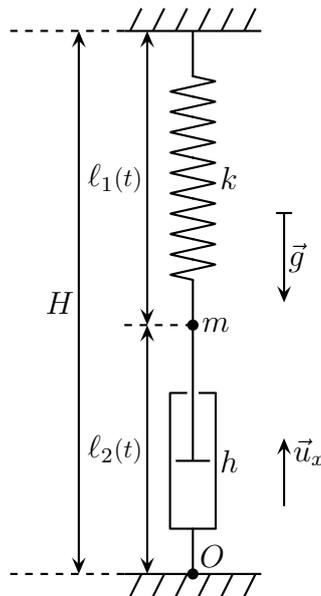
$$f(x) = f(x_{\text{éq}}) + (x - x_{\text{éq}}) \frac{df}{dx}(x_{\text{éq}}) = (x - x_{\text{éq}}) \frac{df}{dx}(x_{\text{éq}}) \propto (x - x_{\text{éq}})$$

- ◇ Ainsi, en première approximation, (presque) **tout** se comporte comme un oscillateur harmonique autour d'une position d'équilibre.
- ◇ Nous comprenons ainsi aisément pourquoi les oscillateurs sont des modèles largement utilisés pour étudier des situations proches d'une position d'équilibre.

I.2 – Modélisation mécanique

I.2.i – montage

- ◇ Considérons le dispositif ci-dessous dans lequel une masse considérée comme ponctuelle est accrochée à un ressort et à un amortisseur.



◇ Analyse physique :

- la masse va osciller verticalement en étant freinée par l'amortisseur : ce n'est pas une évolution conservative
- la trajectoire est contrainte, il y a un seul degré de description
- grandeurs pertinentes : m , H , g , k , l_0 et h qui caractérise l'amortisseur

◇ Ici nous cherchons l'équation différentielle régissant l'évolution de $x(t)$.

◇ Analyse technique :

- le repérage est simple : l'axe sera vertical et le centre sera choisi soit en haut soit en bas, mieux vaut en bas histoire d'avoir des $x(t)$ positifs
- nous avons le choix entre un PFD et une méthode énergétique : peu importe ici

I.2.ii – phénoménologie et caractéristique d'un amortisseur

◇ Un amortisseur est, comme son nom l'indique, fait pour amortir les mouvements : il résiste à l'étirement quand il est en train d'être étiré et résiste à la compression lorsqu'il est en train d'être comprimé. Il y en a sur les coffres de voiture par exemple.

◇ Lorsqu'un amortisseur ne change pas de longueur, il n'exerce aucune force.

Un amortisseur est caractérisé par sa constante d'amortissement h exprimé en N.s.m^{-1} . Plus la constante d'amortissement h d'un amortisseur est grande, plus l'amortisseur est dur.

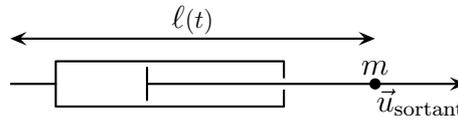
◇ À la limite, c'est comme pour les ressorts :

- une constante d'amortissement infinie correspond à une barre rigide
- une constante d'amortissement nulle correspond à une absence d'amortisseur

La force qu'exerce un amortisseur sur un objet accroché à une de ses extrémité

s'exprime sous la forme $\vec{f} = -h \frac{d\ell(t)}{dt} \vec{u}_{\text{sortant}}$ où :

- h est la constante d'amortissement
- $\ell(t)$ est la longueur de l'amortisseur
- \vec{u}_{sortant} est le vecteur unitaire toujours dirigé vers l'extérieur et tangent à l'amortisseur au niveau de ce qui subit la force



- ◇ Il n'est en rien étonnant que la force exercée par un amortisseur ressemble beaucoup à une force de frottement fluide étant donné qu'un amortisseur est rempli d'un fluide à l'intérieur duquel bouge un piston.

I·2·iii – équation différentielle régissant l'évolution

- ◇ Faisons la liste des forces qui s'exercent sur M :

- force à distance : le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -m\vec{u}_x$
- force de contact :
 - la tension exercée par le ressort :

$$\vec{T} = -k(\ell_1(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{sortant}} = +k(H - x(t) - \ell_0) \vec{u}_x$$

- la force exercée par l'amortisseur :

$$\vec{f} = -h \frac{d\ell_2(t)}{dt} \vec{u}_{\text{sortant},2} = -h \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \ell_2(t) = x(t)$$

- ◇ Écrivons le PFD sur la masse et projetons le sur \vec{u}_x .

$$\vec{P} + \vec{T}_{\text{ressort}} + \vec{f}_{\text{am}} = m\vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad -mg - k(H - x(t) - \ell_0)(-1) - h \frac{dx(t)}{dt} (+1) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

- ◇ En simplifiant nous obtenons :

$$-mg + k(H - x(t) - \ell_0) - h \frac{dx(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} x(t) = -g + \frac{k}{m} (H - \ell_0)$$

★ position d'équilibre

- ◇ Déterminons la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$.
- ◇ L'équilibre est un mouvement particulier, c'est donc une solution de l'équation différentielle régissant $x(t)$.
- ◇ Introduisons donc la solution $x(t) = x_{\text{éq}} = C^{\text{te}}$ dans l'équation différentielle :

$$0 + 0 + \frac{k}{m} x_{\text{éq}} = -g + \frac{k}{m} (H - \ell_0) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{x_{\text{éq}} = H - \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

- ◇ Ce résultat en plus d'être homogène est cohérent :

- plus H est grand plus $x_{\text{éq}}$ est grand

- plus ℓ_0 est grand plus $x_{\text{éq}}$ est petit
- plus m est grand plus $x_{\text{éq}}$ est petit
- plus k est grand plus $x_{\text{éq}}$ est grand
- et surtout h , *ie.* l'amortisseur, n'intervient pas dans le résultat !

★ écart à l'équilibre

- ◇ Cherchons l'équation différentielle vérifiée par $X(t) \triangleq x(t) - x_{\text{éq}}$. Pour cela, remplaçons, dans l'équation différentielle régissant l'évolution $x(t)$ par $x_{\text{éq}} + X(t)$:

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dX(t)}{dt} + \frac{k}{m} X(t) + \frac{k}{m} x_{\text{éq}} = -g + \frac{k}{m} (H - \ell_0)$$

- ◇ Et avec la condition d'équilibre :

$$\boxed{\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dX(t)}{dt} + \frac{k}{m} X(t) = 0}$$

- ◇ Oh oh ... voilà une équation qui a un gros air de déjà vu ! Le fait que le second membre soit nul est rassurant : $X(t)$ est l'écart à l'équilibre donc $X(t) = 0$ est forcément une solution.
- ◇ Nous remarquons aussi que, comme pour le ressort vertical tout seul, la pesanteur n'intervient pas dans le mouvement.

★ écriture canonique

- ◇ Identifions avec l'écriture canonique :

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX(t)}{dt} + \omega_0^2 X(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{cases}$$

- ◇ Et ainsi $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \omega_0 \frac{m}{h} = \frac{\sqrt{k m}}{h}$.

- ◇ Le facteur de qualité est d'autant plus faible que l'amortissement est grand. Rien de plus naturel !

I.3 – Cas sans frottement

I.3.i – équation horaire

- ◇ Si l'amortissement est nul $h = 0$, alors l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \omega_0^2 X(t) = 0$$

- ◇ Cette équation différentielle admet comme solution $X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec X_0 et φ qui dépendent des conditions initiales.

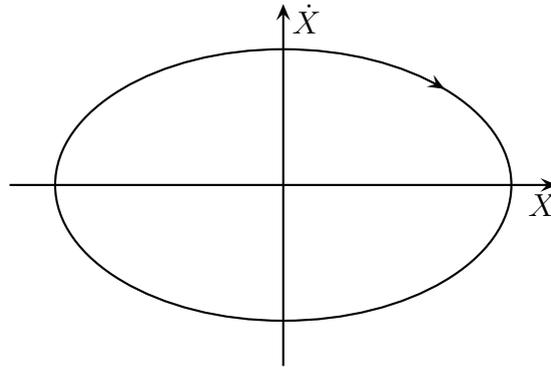
Un oscillateur harmonique oscille sinusoidalement autour de sa position d'équilibre.

I-3.ii – représentation dans le plan de phase

- ◇ Cherchons la vitesse : $\dot{X}(t) = -\omega_0 X_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$.
- ◇ Pour éliminer les t et trouver le lien entre \dot{X} et X , rien de plus facile avec une bonne vieille formule trigo :

$$\cos^2(\cdot) + \sin^2(\cdot) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{X^2}{X_0^2} + \frac{\dot{X}^2}{\omega_0^2 X_0^2} = 1$$

- ◇ C'est l'équation d'une ellipse.



Un oscillateur harmonique non amorti en régime libre a une trajectoire elliptique dans le plan de phase.

I-3.iii – aspect énergétique

★ valeur moyenne de l'énergie cinétique

- ◇ Calculons la moyenne de l'énergie cinétique.
- ◇ Comme le mouvement est périodique, nous avons naturellement :

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m \dot{X}^2(t) dt$$

- ◇ Avec $\dot{X}(t) = -X_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$, cela donne :

$$\begin{aligned} \langle E_c \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \frac{m \omega_0^2 X_0^2}{2T} \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt \\ &= \frac{m \omega_0^2 X_0^2}{2T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega_0 t + \varphi)}{2} dt = \frac{m \omega_0^2 X_0^2}{4T} \left[t - \frac{\sin(2\omega_0 t + \varphi)}{2\omega_0} \right]_0^T \\ &= \frac{m \omega_0^2 X_0^2}{4T} \left(T - \frac{\sin(2\omega_0 T + \varphi) - \sin(\varphi)}{2\omega_0} \right) = \frac{m \omega_0^2 X_0^2}{4} \end{aligned}$$

La valeur moyenne temporelle d'un $\cos(\omega t)$ ou d'un $\sin(\omega t)$ est nulle :

$$\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \sin(\omega t + \varphi) \rangle = 0$$

La valeur moyenne temporelle d'un $\cos^2(\omega t)$ ou d'un $\sin^2(\omega t)$ vaut $\frac{1}{2}$:

$$\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$$

◇ Et avec l'expression de ω_0 nous arrivons à $\langle E_c \rangle = \frac{k X_0^2}{4}$.

★ valeur moyenne de l'énergie potentielle

◇ Cherchons tout d'abord l'énergie potentielle associée à la force subie par l'oscillateur harmonique qu'est $X(t)$.

◇ L'équation différentielle vérifiée par $X(t)$ est $\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} X(t) = 0$ ce qui donne le PFD équivalent :

$$m \frac{d^2 X}{dt^2}(t) = -k X(t)$$

◇ Tout se passe comme si la masse était soumise uniquement à la force $-k X(t) \vec{u}_x$.

◇ Comme le déplacement élémentaire est vertical, il se réduit à $dX \vec{u}_x$ et le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r} = -k X dX \stackrel{?}{=} -dE_p \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dE_p}{dX} = k X \quad \rightsquigarrow \quad E_p = \frac{1}{2} k X^2 + C^{\text{te}}$$

◇ Et en prenant la constante nulle là où la force est nulle aussi, *ie.* en $X = 0$, nous trouvons $E_p = \frac{1}{2} k X^2$.

◇ Nous pouvons donc maintenant déterminer l'énergie potentielle moyenne :

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} k X^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} k X_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt$$

◇ Ce qui donne, avec le résultat précédent : $\langle E_p \rangle = \frac{k X_0^2}{4}$.

★ résultat et interprétation

◇ Nous pouvons constater que $\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle$.

En régime libre, un oscillateur harmonique non amorti possède, en moyenne, autant d'énergie potentielle que d'énergie cinétique.

◇ Remarquons une fois de plus que les oscillations ont pour origine un échange énergétique entre deux formes différentes d'énergie : cinétique et potentielle.

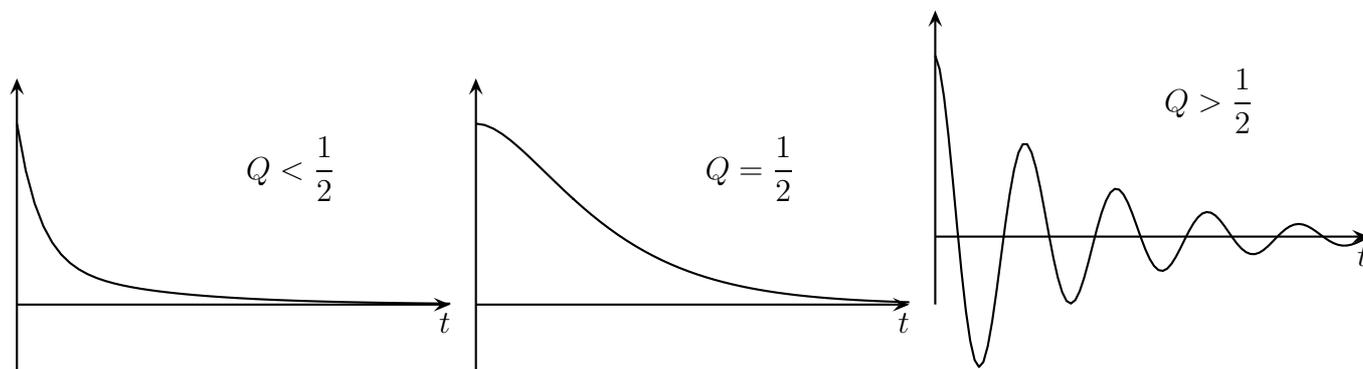
I.4 – Oscillations avec frottements

I.4.i – pour une évolution connue

◇ L'équation différentielle vérifiée par $X(t)$ s'écrit :

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX(t)}{dt} + \omega_0^2 X(t) = 0$$

◇ Nous savons déjà la résoudre (cf. circuits en régime transitoire). Le type de solution dépend du facteur de qualité :

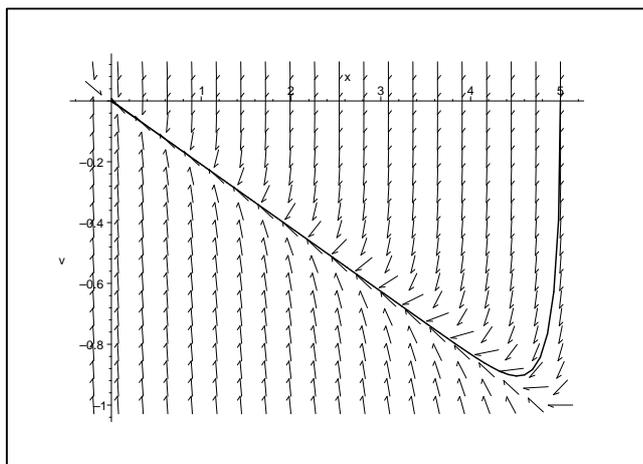


I.4.ii – vue dans le plan de phase

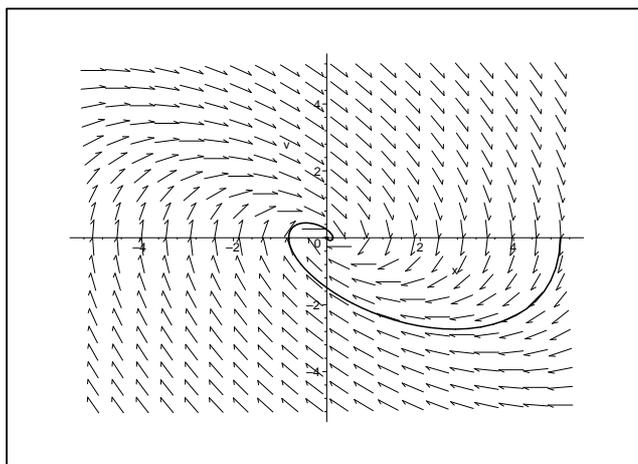
◇ Regardons les 6 trajectoires suivantes dans le plan de phase où seul le facteur de qualité varie. Il vaut : 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 ; 5 ; 50.

◇ Jouons à « qui est qui ? »

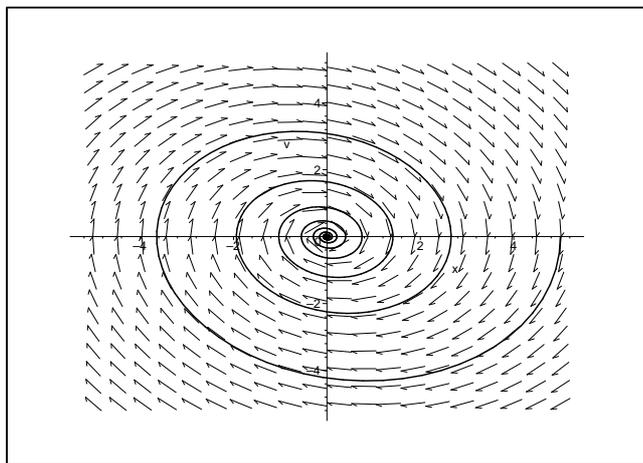
Graphique 1



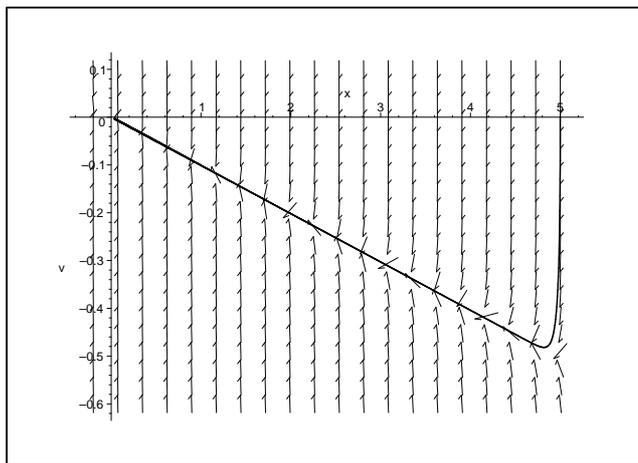
Graphique 2



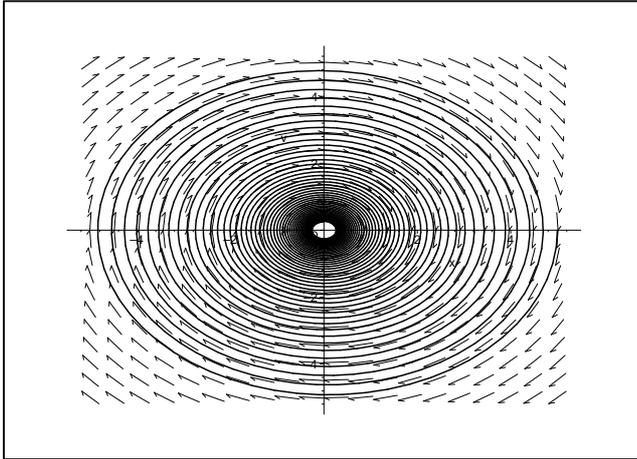
Graphique 3



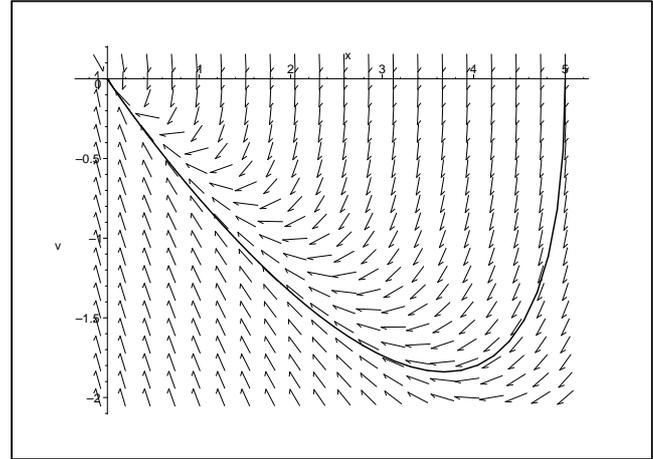
Graphique 4



Graphique 5



Graphique 6



- ◇ Repérer les trajectoires correspondant aux régimes pseudo-périodique est facile : il y a oscillation **donc** la trajectoire passe aussi en $X(t) < 0$. Associer les bons facteurs de qualité ne pose pas non plus de soucis particulier : plus il y a d'oscillations, plus le facteur de qualité est grand.
- ◇ Et pour les autres ? Nous ne pouvons plus nous fier aux oscillations puisqu'il n'y en a plus. La seule différence, c'est la rapidité avec laquelle l'OH atteint son régime permanent. Malheureusement, cette durée n'est pas visible sur les plans de phase. Cependant comme les conditions initiales et le régime permanent sont tous identiques, les évolutions les plus courtes seront les plus rapides. Il nous suffit donc de regarder les valeurs de vitesse pour savoir qui est le plus rapide. Nous obtenons donc que $Q = 0,5$ correspond au graphique 6, que $Q = 0,2$ correspond au graphique 1 et $Q = 0,1$ au graphique 4.

I.5 – Analogie avec le circuit R, L, C série

- ◇ Allons au-delà de la simple constatation de la similarité de l'équation différentielle.
- ◇ Cherchons quelles grandeurs caractéristiques jouent des rôles analogues.
- ◇ Nous avons ainsi :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \longleftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \longleftrightarrow Q = \frac{\sqrt{km}}{h}$$

- ◇ Vu que les grandeurs physiques mises en jeu R, L, C, h, k et m sont non homogènes, il existera plusieurs analogies possibles. Cherchons la plus simple.
- ◇ Remarquons que R et h n'interviennent qu'à un endroit et posons $(R \leftrightarrow h)$. Il reste :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{LC}} \longleftrightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \sqrt{\frac{L}{C}} \longleftrightarrow \sqrt{km} \end{array} \right. \rightsquigarrow \left(\begin{array}{l} \frac{1}{C} \longleftrightarrow k \\ L \longleftrightarrow m \end{array} \right)$$

- ◇ Les analogies permettent d'étudier expérimentalement des dispositifs à partir de montages sensiblement différents. Par exemple ici il est possible d'étudier les oscillations d'une masse à partir d'un circuit R, L, C série.

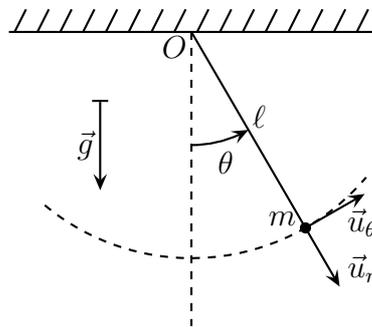
 L'analogie n'est pas ici entre la mécanique et l'électrocinétique, mais entre un montage particulier en mécanique et un montage particulier en électrocinétique.

II – Oscillations non linéaires

II.1 – Pendule simple rigide

II.1.i – encore lui !

◇ Reprenons le pendule simple rigide non amorti.



◇ Rappelons les résultats :

$$E_m = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2(t) - m g \cos \theta(t) = C^{\text{te}} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = 0$$

II.1.ii – évolution au premier ordre

◇ En considérant $|\theta(t)| \ll 1$, nous avons $\sin \theta(t) = \theta(t)$ et l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta(t) = 0$$

◇ De solution $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

◇ Nous constatons alors que la pulsation des oscillations ne dépend pas de θ_0 (pourvu seulement que θ_0 soit suffisamment faible).

Pour le pendule simple, il y a isochronisme des petites oscillations.

II.1.iii – apparition d'harmoniques

◇ Que se passe-t-il si $\theta(t)$ reste petit mais moins ?

★ une nouvelle équation différentielle

◇ Pour $\theta(t)$ petit mais moins, nous pouvons écrire :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

◇ Et l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \theta - \frac{\omega_0^2}{6} \theta^3(t) = 0$$

◇ C'est une équation différentielle **non linéaire** ce qui fait qu'elle demande, pour être résolue, des méthodes particulière.

★ **idée de base**

- ◇ Nous savons déjà que le mouvement va être périodique, mais nous ignorons *a priori* la pulsation ω . Nous allons donc chercher **une** solution de la forme :

$$\theta(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t)$$

- ◇ Comme nous cherchons une solution pour $\theta(t)$ petit, nous **savons** que la solution est proche de celle que nous avons trouvé avant, *ie.* que :

- $a_2 \ll a_1$
- $\omega \simeq \omega_0$

- ◇ Nous allons en plus supposer que :

- a_1 est du premier ordre, *ie.* que $a_1 \ll 1$, ce qui est normal vu que $\theta(t)$ suffisamment petit pour pouvoir faire un DL de $\sin \theta(t)$
- $a_2 \ll a_1$, ce qui est normal vu qu'il s'agit d'un terme correctif par rapport à la solution au premier ordre : a_2 est donc un infiniment petit du second ordre
- $a_3 \ll a_2$, car nous allons considérer que le 3^e terme est un terme correctif du second : a_3 est donc un infiniment petit du 3^e ordre

- ◇ Il est normal de chercher une solution « à l'ordre 3 » étant donné que l'équation différentielle (et notamment le sinus) a été développée à l'ordre 3. Cela implique qu'il **faudra** s'arrêter à l'ordre 3 et que tous les termes d'ordre 4, 5, ... devront être négligés.

- ◇ Ainsi $a_3 a_1$ est du 4^e ordre, a_2^2 aussi, $a_2 a_3$ est du 5^e ordre, ...

★ **c'est une nouvelle solution**

- ◇ Introduisons l'expression de $\theta(t)$ dans l'équation différentielle et regardons ce que cela donne.

- ◇ Pour $\theta^3(t)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \theta^3(t) &= (a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t))^3 \\ &= a_1^3 \cos^3(\omega t) + \underbrace{a_1^2 a_2 \cos^2(\omega t) + \cos(2\omega t) + a_1^2 a_3 \cos^2(\omega t) \cos(3\omega t) + \dots}_{\text{négligeable}} \end{aligned}$$

- ◇ Et ainsi : $\theta^3(t) = a_1^3 \cos^3(\omega t) = a_1^3 \times \frac{3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t)}{4}$

- ◇ Soyons organisés : en introduisant $\theta(t)$ dans l'équation différentielle, nous allons voir apparaître des $\cos(\omega t)$, $\cos(2\omega t)$ et $\cos(3\omega t)$. Regroupons les dans un tableau :

$\theta(t) =$	$a_1 \cos(\omega t)$	$a_2 \cos(2\omega t)$	$a_3 \cos(3\omega t)$
$\dot{\theta}(t) =$	$-a_1 \omega \sin(\omega t)$	$-a_2 2\omega \sin(2\omega t)$	$-a_3 3\omega \sin(3\omega t)$
$\ddot{\theta}(t) =$	$-a_1 \omega^2 \cos(\omega t)$	$-a_2 4\omega^2 \cos(2\omega t)$	$-a_3 9\omega^2 \cos(3\omega t)$
$\omega_0^2 \theta(t) =$	$a_1 \omega_0^2 \cos(\omega t)$	$+a_2 \omega_0^2 \cos(2\omega t)$	$+a_3 \omega_0^2 \cos(3\omega t)$
$-\frac{\omega_0^2}{6} \theta^3(t) =$	$-\frac{\omega_0^2}{6} a_1^3 \frac{3}{4} \cos(\omega t)$		$-\frac{\omega_0^2}{6} a_1^3 \frac{1}{4} \cos(3\omega t)$

- ◇ La somme des trois dernière ligne doit être nulle, ce qui donne :

$$\underbrace{\left(-a_1 \omega^2 + a_1 \omega_0^2 - \frac{1}{8} \omega_0^2 a_1^3\right)}_{\stackrel{\text{not}}{=}A} \cos(\omega t) + \underbrace{\left(-a_2 4 \omega^2 + a_2 \omega_0^2\right)}_{\stackrel{\text{not}}{=}B} \cos(2\omega t) + \dots$$

$$\dots + \underbrace{\left(-9 a_3 \omega^2 + a_3 \omega_0^2 - \frac{1}{24} \omega_0^2 a_1^3\right)}_{\stackrel{\text{not}}{=}C} \cos(3\omega t) = 0$$

◇ Pour que cette somme soit constamment nulle, il faut que chacun des coefficients soit nul.

★ conséquences de $A = 0$

◇ $A = 0$ donne $a_1 \omega^2 = a_1 \omega_0^2 \left(1 - \frac{a_1^2}{8}\right)$.

◇ Et comme $a_1 \neq 0$ (sinon c'est la solution correspond à $\theta(t) = 0$ ce qui n'est guère intéressant), nous trouvons, en n'oubliant pas que $a_1 \ll 1$:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{a_1^2}{8}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{a_1^2}{16}\right)}$$

◇ Ici la pulsation dépend bien de l'amplitude a_1 . La correction est d'ordre 2.

L'isochronisme des oscillations n'est pas une loi générale.

★ conséquences de $B = 0$

◇ $B = 0$ donne $(\omega_0^2 - 4\omega^2) a_2 = 0$.

◇ Comme $\omega \simeq \omega_0$, il n'est pas possible d'avoir $(\omega_0^2 - 4\omega^2) = 0$, c'est donc que $a_2 = 0$.

◇ Il n'y a pas d'harmonique paire.

★ conséquences de $C = 0$

◇ $C = 0$ donne $(\omega_0^2 - 9\omega^2) a_3 - \frac{a_1^3 \omega_0^2}{24} = 0$.

◇ Ici, si nous voulons écrire ω à l'ordre 2, cela donnerait, avec a_3 un terme d'ordre 5 que nous **devons** négliger. Par conséquent, nous écrirons simplement $\omega = \omega_0$ et cela donne :

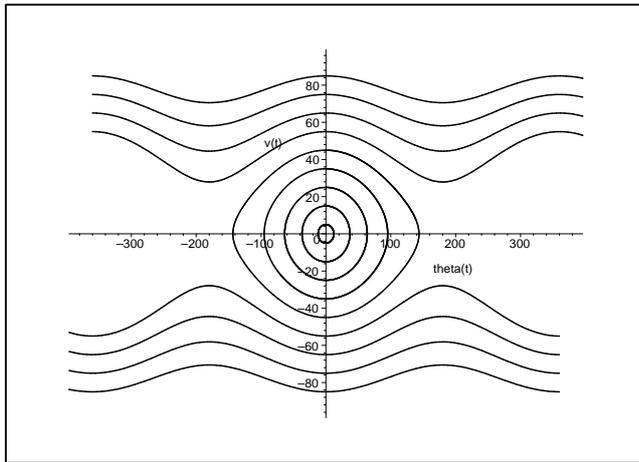
$$-8\omega_0^2 a_3 = \frac{a_1^3 \omega_0^2}{24} \quad \rightsquigarrow \quad a_3 = -\frac{a_1^3}{192}$$

◇ Nous pouvons vérifier que a_3 est bien du 3^e ordre.

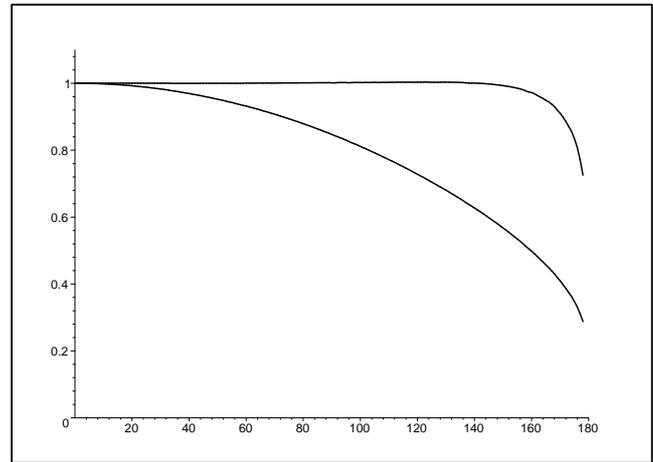
★ comparaison avec des résultats numériques

◇ Sur le graphique 7, nous avons tracé le plan de phase sur lequel nous pouvons visualiser les mouvements périodiques mais non sinusoïdaux.

Graphique 7



Graphique 8



◇ Sur le graphique 8, nous avons tracé :

→ la valeur approchée $\frac{\omega_{\text{approx}}}{\omega_0} = 1 - \frac{a_1^2}{16}$

→ le rapport $\frac{\omega_{\text{calc}}}{\omega_{\text{approx}}}$ où ω_{calc} est la pulsation des oscillations obtenues après une résolution numérique de l'équation différentielle en $\sin \theta$.

◇ Nous voyons alors bien que l'approximation est excellente jusqu'à $a_1 = 160^\circ$, *ie.* que l'approximation $|\theta(t)| \ll 1$ est parfaitement justifiée jusqu'à $\theta = \frac{160}{180} \pi = 2,8 \dots$

II.2 – Oscillateur de VAN DER POL

II.2.i – équation d'évolution

◇ L'équation de VAN DER POL modélise de manière purement mathématique un oscillateur.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \varepsilon \omega_0 \left(1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right) \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

◇ Comme nous allons le voir, cette équation permet la naissance et la stabilisation d'oscillations, ce qui peut être utile pour représenter des évolutions de phénomènes naturels.

II.2.ii – résolution « avec les mains »

◇ Supposons tout d'abord que $|x(t)| \ll x_0$, alors l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \varepsilon \omega_0 \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

◇ Cela ressemble à une équation différentielle du second ordre dont nous avons l'habitude, **sauf que** le second terme possède un coefficient négatif, un peu comme si le facteur de qualité était négatif.

◇ Du point de vue des solutions, cela signifie qu'au lieu d'être exponentiellement décroissantes en $e^{-t/\tau}$, elles seront exponentiellement croissantes en $e^{+t/\tau}$: c'est à ce moment que les oscillations vont apparaître.

◇ Supposons maintenant que $|x(t)| \gg x_0$, alors l'équation différentielle s'écrit :

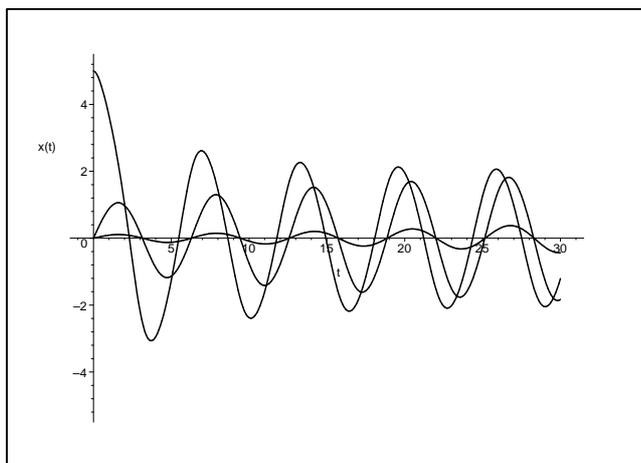
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \varepsilon \omega_0 \frac{x^2(t)}{x_0^2} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

- ◇ Cette fois le terme d'amortissement $\varepsilon \omega_0 \frac{x^2(t)}{x_0^2} \frac{dx(t)}{dt}$ est non négligeable et, en plus, est d'autant plus élevé que $|x(t)|$ est grand : les oscillations ne peuvent croître jusqu'à l'infini.

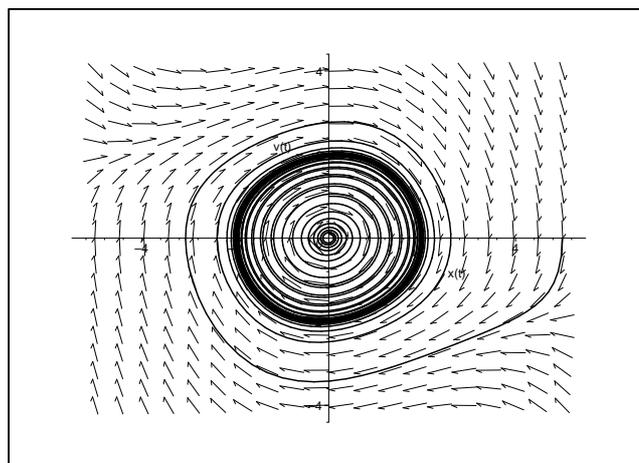
II-2.iii – évolutions dans le plan de phase

- ◇ Regardons l'évolution d'un oscillateur de VAN DER POL pour lequel $\varepsilon = 0,1$ en mode temporel et dans le plan de phase pour trois conditions initiales différentes.

Graphique 9

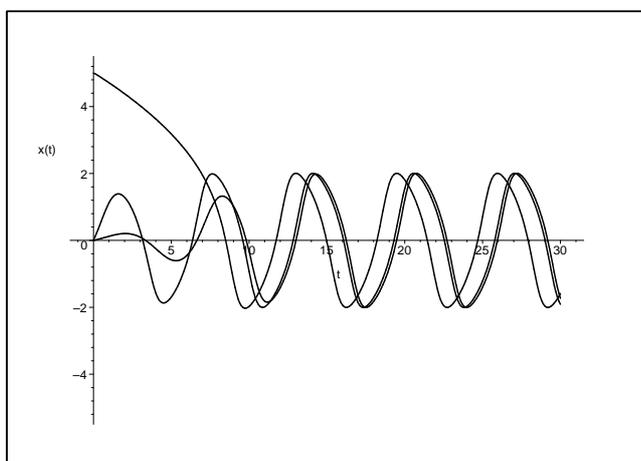


Graphique 10

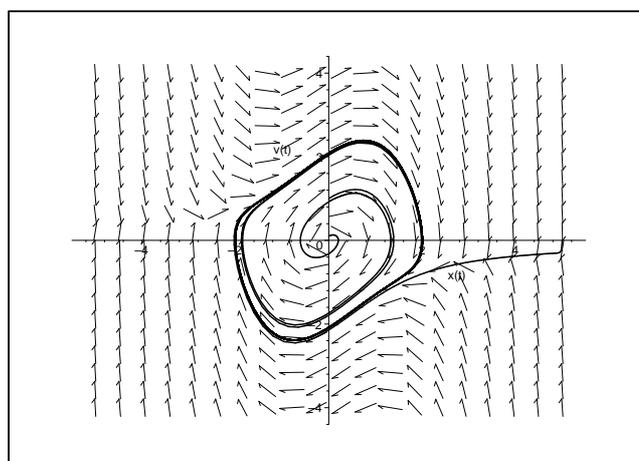


- ◇ Nous pouvons constater que quelles que soient les conditions initiales, la trajectoire dans le plan de phase tend vers un cycle limite, *ie.* vers une trajectoire correspondant à un mouvement périodique.
- ◇ Notons qu'ici, comme dans les évolutions suivantes, que les trajectoires ne se coupent pas : l'oscillateur de VAN DER POL est en régime libre.
- ◇ Pour $\varepsilon = 0,7$, cela donne, avec les mêmes conditions initiales :

Graphique 11

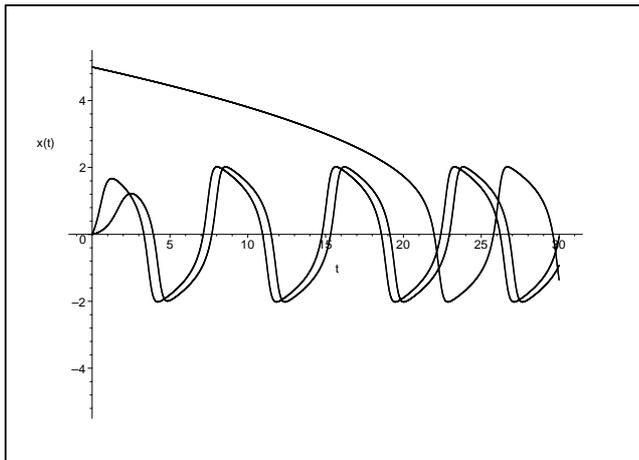


Graphique 12

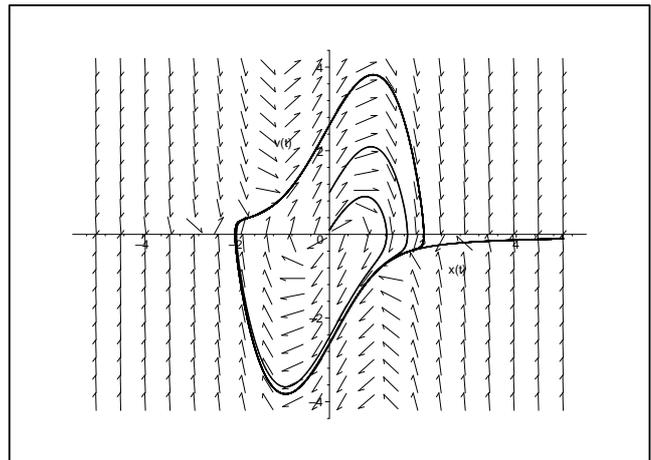


- ◇ Comme cela se voit avec l'évolution temporelle, le régime permanent est atteint beaucoup plus vite et ne ressemble vraiment plus à une évolution sinusoïdale.
- ◇ Pour $\varepsilon = 2$, cela donne, avec les mêmes conditions initiales :

Graphique 13



Graphique 14



◇ L'effet est amplifié : le régime permanent est atteint encore plus rapidement et le cycle limite n'est plus du tout sinusoïdal.

III – Oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé

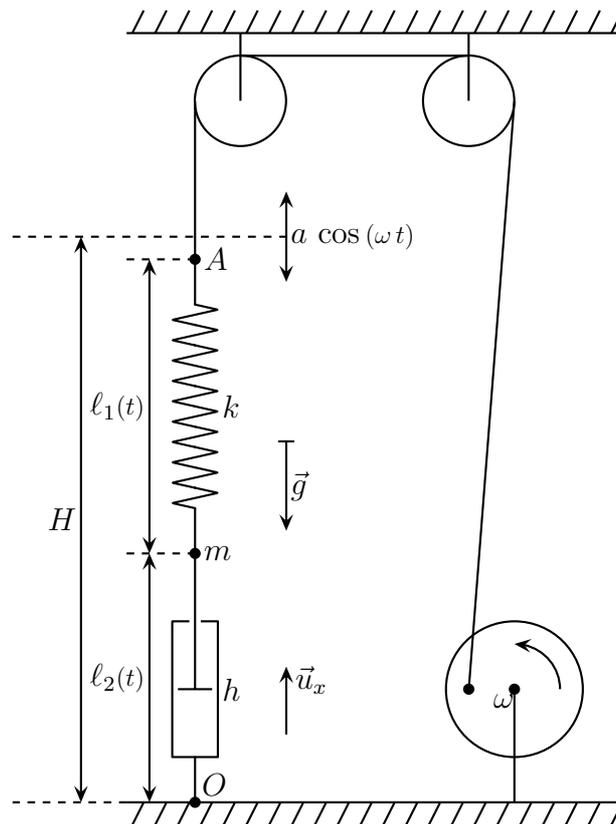
III.1 – Modélisation mécanique

III.1.i – montage

◇ Introduisons dans le montage précédent un excitateur. C'est moins évident qu'avec un circuit électrocinétique, mais quand même possible.

◇ Au repos (moteur éteint), le point A est à la hauteur H et lorsque le moteur tourne, la cote de A vaut $x_A(t) = H + a \cos(\omega t)$.

◇ Le moteur tourne à la vitesse angulaire ω .



◇ Analyse physique :

- le moteur va faire osciller la masse va osciller verticalement tout étant freinée par l'amortisseur mais le moteur n'agit pas directement sur la masse!
- la trajectoire est contrainte, il y a un seul degré de description mais l'évolution est forcée.
- les grandeurs pertinentes : $m, H, a, \omega, g, k, \ell_0, h$

◇ Analyse technique :

- le repérage est simple : l'axe sera vertical et le centre sera choisi soit en haut soit en bas, mieux vaut en bas histoire d'avoir des $x(t)$ positifs
- ici, vu que nous ne savons pas comment le moteur va intervenir énergétiquement parlant, mieux vaut utiliser un PFD.

III.1.ii – équation différentielle régissant l'évolution

◇ Les forces qui s'exercent sur la masse sont physiquement les mêmes que lorsque le régime n'était pas forcé :

$$\vec{P} + \vec{T}_{\text{ressort}} + \vec{f}_{\text{am}} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad -mg - k(\ell_1(t) - \ell_0)(-1) - h \frac{d\ell_2(t)}{dt}(+1) = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

◇ Écrivons maintenant (et c'est là que nous allons voir apparaître l'influence du moteur) tout avec un seul degré de description, ici $x(t)$:

$$\ell_1(t) = x_A(t) - x(t) = H + a \cos(\omega t) - x(t) \quad \text{et} \quad \ell_2(t) = x(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\ell_2(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$$

◇ En remplaçant nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 -mg + k(H + a \cos(\omega t) - x(t) - \ell_0) - h \frac{dx(t)}{dt} &= m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\
 \rightsquigarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} x(t) &= -g + \frac{k}{m} (H - \ell_0) + \frac{k}{m} a \cos(\omega t)
 \end{aligned}$$

◇ C'est la même équation différentielle que précédemment avec seulement le terme $a \cos(\omega t)$ en plus dans le second membre.

★ équation différentielle en $X(t)$

◇ Introduisons la position d'équilibre $x(t) = x_{\text{éq}} + X(t)$ où $x_{\text{éq}} = H - \ell_0 - \frac{mg}{k}$:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} x(t) = \frac{k}{m} x_{\text{éq}} + \frac{k}{m} a \cos(\omega t) \rightsquigarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} (x(t) - x_{\text{éq}}) = \frac{k}{m} a \cos(\omega t)$$

◇ Et ainsi puisque $\frac{dX(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$:

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dX(t)}{dt} + \frac{k}{m} X(t) = \frac{k}{m} a \cos(\omega t) \rightsquigarrow \frac{d^2X(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX(t)}{dt} + \omega_0^2 X(t) = \omega_0^2 a \cos(\omega t)$$

◇ Cherchons maintenant à résoudre cette équation.

III.1.iii – phénoménologie et premiers pas vers la solution

★ phénoménologie

◇ Nous savons que la solution sera du type $X(t) = X_{\text{libre}}(t) + X_{\text{p}}(t)$ où :

→ $X_{\text{libre}}(t)$ est une solution de type régime libre (apériodique, critique ou pseudo périodique)

→ X_{p} est une solution particulière, la seule qui restera en régime permanent, qui sera du type $X_0 \cos(\omega t + \varphi)$

◇ En d'autres termes la solution complète va tendre, de toute façon, vers une solution sinusoïdale de même pulsation que l'excitation.

La réponse d'un dispositif linéaire à une excitation sinusoïdale est elle aussi sinusoïdale de même pulsation que la pulsation d'excitation.

◇ Cela n'a l'air de rien, mais la loi précédente est absolument fondamentale. Elle l'est tellement et nous l'utiliserons de manière tellement naturelle que nous aurons tendance à oublier qu'elle n'est en rien évidente.

◇ Le corollaire de cette loi est que si nous voulons « créer » une pulsation 2ω à partir d'une excitation ω il va être nécessaire d'utiliser un dispositif non linéaire.

★ trouver la solution particulière

◇ Cherchons la solution sous la forme $X_{\text{p}}(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$.

◇ Cette solution est une solution de l'équation différentielle, calculons donc les différents termes.

$$\begin{aligned}
 \omega_0^2 X(t) &= A \omega_0^2 \cos(\omega t) & + B \omega_0^2 \sin(\omega t) \\
 \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX(t)}{dt} &= + \frac{B \omega_0 \omega}{Q} \cos(\omega t) & - \frac{A \omega_0 \omega}{Q} \sin(\omega t) \\
 \frac{d^2X(t)}{dt^2} &= -A \omega^2 \cos(\omega t) & - B \omega^2 \sin(\omega t)
 \end{aligned}$$

◇ La somme de tous ces termes doit valoir, d'après l'équation différentielle, $a \cos(\omega t)$ ce qui donne :

$$\left(A \omega_0^2 + \frac{B \omega_0 \omega}{Q} - A \omega^2 \right) \cos(\omega t) + \left(B \omega_0^2 - \frac{A \omega_0 \omega}{Q} - B \omega^2 \right) \sin(\omega t) = a \cos(\omega t)$$

◇ Pour que cette équation soit vérifiée à tout instant, il faut :

◇ Il ne reste plus qu'à résoudre en A et B ...

◇ Ce n'est pas tant que cette méthode ne marche pas, bien au contraire, mais c'est qu'elle est assez pédestre et, surtout, qu'elle ne permet pas de déterminer les paramètres véritablement importants comme, notamment, l'amplitude des oscillations.

◇ C'est pourquoi nous allons utiliser une autre et nouvelle méthode.

III.2 – Un puissant outil : la notation complexe

III.2.i – une grandeur sinusoïdale ...

Pour une grandeur sinusoïdale $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$:

- X_m est l'amplitude
- ω est la pulsation
- $\omega t + \varphi$ est la phase instantannée
- φ est la phase à l'origine (des dates)

III.2.ii – ... peut se représenter par une grandeur complexe ...

Une grandeur sinusoïdale réelle $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ est représentée par la grandeur complexe notée $\underline{x}(t)$ qui vaut :

$$\underline{X}(t) \triangleq X_m e^{j(\omega t + \varphi)} \stackrel{\text{not}}{=} \underline{X}_m e^{j\omega t} \text{ où } \underline{X}_m \text{ est l'amplitude complexe.}$$

◇ Pour passer du réel en complexe, il suffit de faire $\cos() \rightarrow e^{j\cdot}$.

◇ Si nous avons l'expression complète de la grandeur complexe alors il est très simple de retrouver la grandeur réelle.

Entre une grandeur réelle $X(t)$ et sa grandeur complexe associée $\underline{X}(t)$ nous avons :

$$X(t) = \Re(\underline{X}(t))$$

◇ La pulsation ω est imposée par le moteur. Il faut donc trouver, pour la solution particulière, X_m et φ . Or, justement : $X_m = |\underline{X}_m|$ et $\varphi = \arg(\underline{X}_m)$.

Toutes les informations intéressantes d'une grandeur sinusoïdale sont dans l'amplitude complexe.

III.2.iii – ... pour être facilement dérivée

◇ Soit une grandeur quelconque $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ et sa notation complexe $\underline{X}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}$.

◇ Cherchons l'expression de $\frac{dX(t)}{dt}$:

$$\frac{dX(t)}{dt} = -X_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = X_m \omega \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

◇ Et cherchons la notation complexe de $\frac{dX(t)}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= X_m \omega e^{j(\omega t + \varphi + \pi/2)} = X_m \omega e^{j\pi/2} e^{j(\omega t + \varphi)} \\ &= X_m \omega j e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \underline{X}(t) \end{aligned}$$

◇ Tout se passe comme si nous avions dérivé directement $\underline{X}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}$!

La représentation complexe d'une dérivée est la dérivée de la représentation complexe.

Pour dériver une grandeur sinusoïdale complexe, il suffit de multiplier par $j\omega$.

◇ Nous avons donc $\ddot{\underline{X}}(t) = (j\omega)^2 \underline{X}(t) = -\omega^2 \underline{X}(t)$.

III.3 – Des expressions complexes mais simples

◇ À partir de maintenant, bien que nous continuons à chercher $X_p(t)$, nous allons noter cette solution particulière $x(t)$.

◇ En fait, nous allons chercher $\underline{X}(t)$.

III.3.i – pour l'élongation

◇ Passons l'équation différentielle en notation complexe avec $\cos() \rightarrow e^{j0}$:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = \omega_0^2 a \cos(\omega t) \quad \longrightarrow \quad \ddot{\underline{X}}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{X}}(t) + \omega_0^2 \underline{X}(t) = \omega_0^2 a e^{j\omega t}$$

◇ Avec $\underline{X}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}$; $\dot{\underline{X}}(t) = j\omega \underline{X}$ et $\ddot{\underline{X}}(t) = -\omega^2 \underline{X}(t)$, nous arrivons à :

$$-\omega^2 \underline{X}_m e^{j\omega t} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{X}_m e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{X}_m e^{j\omega t} = \omega_0^2 a e^{j\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right) \underline{X}_m = \omega_0^2 a$$

◇ Et ainsi : $\underline{X}_m = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} \times a$

★ écriture canonique

◇ Introduisons la grandeur $u = \frac{\omega}{\omega_0}$. C'est une grandeur sans dimension proportionnelle à la pulsation ω .

Une grandeur *réduite* est une grandeur adimensionalisée à partir d'une grandeur caractéristique de référence.

◇ En divisant par ω_0^2 au numérateur et au dénominateur, nous obtenons :

$$\underline{X}_m = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}} \times a \quad \rightsquigarrow \quad \underline{X}_m = \frac{1}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}} \times a$$

III.3.ii – pour la vitesse

◇ Rien de plus simple : $\dot{\underline{X}}(t) = j \omega \underline{X}(t)$ donc, en notant $\dot{\underline{X}}(t) = \underline{V}_m e^{j \omega t}$:

$$\underline{V}_m = j \omega \underline{X}_m \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V}_m = \frac{j \omega \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} \times a$$

★ écriture canonique

◇ Notons $V_0 = a \omega_0$ et divisons par ω_0^2 numérateur et dénominateur :

$$\underline{V}_m = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}} \times V_0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V}_m = \frac{j u}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}} \times V_0$$

III.4 – Résonance en élongation

III.4.i – amplitude

◇ Nous allons nous intéresser à l'amplitude réelle $X_m = |\underline{X}_m|$ qui représente le débattement de la masse.

$$X_m = |\underline{X}_m| = \left| \frac{1}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}} \times a \right| = \frac{a}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

◇ Mieux vaut travailler en comportement asymptotique dans un premier temps.

★ comportement qualitatif

◇ Pour trouver le comportement qualitatif de l'amplitude complexe, nous allons rechercher son comportement asymptotique en 0 et en $+\infty$ ainsi que sa valeur pour une valeur particulière.

Pour déterminer le comportement asymptotique d'une fonction, il suffit de garder le ou les termes prédominants.

◇ Procédons par ordre.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Si } \omega \longrightarrow 0 & \text{alors } u \longrightarrow 0 \quad \text{et } \underline{X_m} \sim a \quad \text{donc } \begin{cases} X_m \sim a \longrightarrow a \\ \varphi \longrightarrow 0 \end{cases} \\
 \text{Si } \omega \longrightarrow +\infty & \text{alors } u \longrightarrow +\infty \quad \text{et } \underline{X_m} \sim \frac{a}{-u^2} = -\frac{a}{u^2} \quad \text{donc } \begin{cases} X_m \sim \frac{a}{u^2} \longrightarrow 0 \\ \varphi \longrightarrow \pm\pi \end{cases} \\
 \text{Si } \omega = \omega_0 & \text{alors } u = 1 \quad \text{et } \underline{X_m} = \frac{a}{\frac{j}{Q}} = -j a Q \quad \text{donc } \begin{cases} X_m = Q a \\ \varphi \longrightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}
 \end{array}$$

◇ Cette dernière valeur nous permet de dire que $\varphi \xrightarrow{u \rightarrow \infty} -\pi$.

★ maximum ?

◇ Oui, il va y avoir un maximum : il sera situé au minimum de $D(u) = (1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}$. Or :

$$\frac{dD(u)}{du} = 2(1 - u^2)(-2u) + \frac{2u}{Q} = 2u \left(\frac{1}{Q^2} - 2(1 - u^2) \right)$$

◇ Et ainsi la condition d'extrémalité $\frac{dD(u)}{du} = 0$ donne deux solutions u

◇ La première c'est $u = 0$: il y a une tangente horizontale à l'origine.

◇ La 2^e est telle que $\frac{1}{Q^2} - 2(1 - u_r^2) = 0$ soit $u_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$.

◇ Pour que X_m présente un maximum, il faut que $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$, ie. il faut que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, et alors

$$u_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Il y a *résonance* dès lors que la réponse d'un dispositif est supérieure à l'excitation.

La résonance en élongation n'existe que si Q est assez grand. Quand elle existe, elle n'est pas exactement située à la pulsation propre sauf si $Q \gg 1$.

◇ Pour trouver la valeur maximale de X_m , il suffit de remplacer u_r^2 par son expression :

$$X_{m,\max} = \frac{a}{\sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right)^2 + \frac{1 - \frac{1}{2Q^2}}{Q^2}}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}}}$$

◇ Et donc $X_{m,\max} = \frac{Q a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$.

★ cas $Q \gg 1$

◇ À partir de quelle valeur avons-nous $u_r = 1$ à 1 % près ?

$$1 - \frac{1}{100} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \rightsquigarrow \quad 1 - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{4Q^2}$$

◇ Cette expression sera vérifiée à partir de $4Q^2 = 100$, *ie.* à partir de $Q = 5$.

◇ À partir de quelle valeur avons-nous $X_{m,\max} = Qa$ à 1 % près ?

$$1 + \frac{1}{100} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \rightsquigarrow \quad 1 + \frac{1}{100} = 1 + \frac{1}{8Q^2}$$

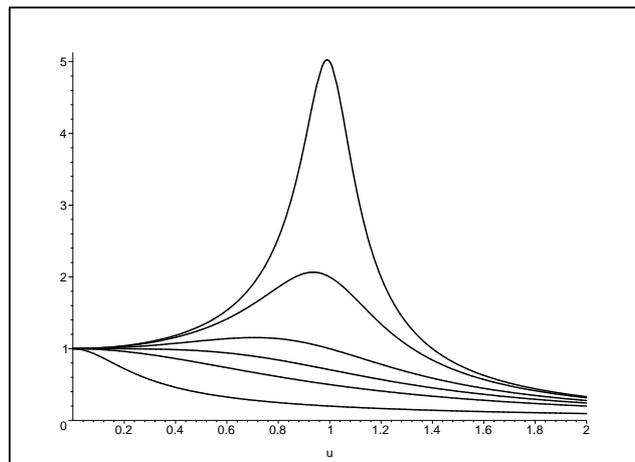
◇ Cette expression sera vérifiée à partir de $8Q^2 = 100$, *ie.* à partir de $Q = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

En ce qui concerne le régime sinusoïdal forcé, nous pouvons dire $Q \gg 1$ dès que $Q > 5$.

★ tracés

◇ Sur le graphique 15, nous avons tracé $X_m(u)$ pour différentes valeurs de Q : 0,2 ; 0,5 ; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1 ; 2 et 5 et avec $a = 1$ U.A..

Graphique 15



La résonance est dite *aigüe* lorsque le pic de résonance est étroit.

III.4.ii – déphasage

◇ Nous cherchons $\varphi = \arg(\underline{X}_m)$ avec $\underline{X}_m = \frac{1}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}} \times a$.

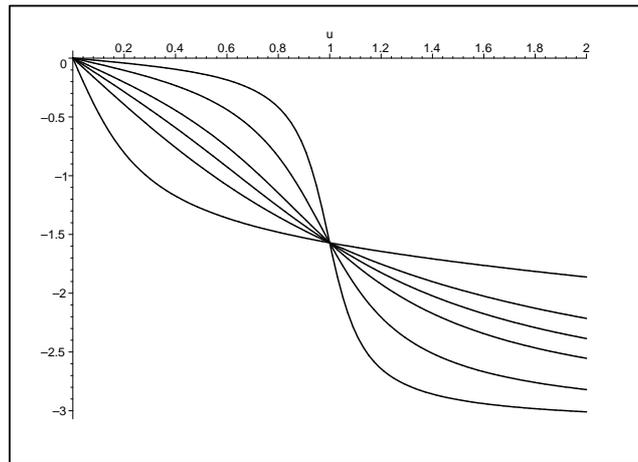
◇ Ne cherchons pas pour l'instant l'expression exacte de φ ; contentons-nous de l'allure qualitative.

◇ Rappelons les résultats trouvés précédemment :

$$\begin{array}{lll} \text{Si } \omega \longrightarrow 0 & \text{alors } u \longrightarrow 0 & \text{et } \varphi \longrightarrow 0 \\ \text{Si } \omega \longrightarrow +\infty & \text{alors } u \longrightarrow +\infty & \text{et } \varphi \longrightarrow \pm\pi \\ \text{Si } \omega \longrightarrow \omega_0 & \text{alors } u \longrightarrow 1 & \text{et } \varphi \longrightarrow -\frac{\pi}{2} \end{array}$$

◇ Cela donne les tracés suivants de $\varphi(u)$ avec les facteurs de qualité $Q : 0,2; 0,5; \frac{1}{\sqrt{2}}; 1; 2$ et 5 .

Graphique 16



◇ Pour trouver qui est qui, pensons au cas limite : $Q = +\infty$. Alors $X_m = \frac{1}{1-u^2} a$ réel donc d'argument 0 ou π . Ainsi : plus le facteur de qualité est élevé, plus la représentation graphique de φ doit coller aux à 0 et π .

III.5 – Résonance en vitesse

III.5.i – amplitude

◇ Nous avons $\underline{V}_m = \frac{j u}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}} \times V_0$ d'où $V_m = \|\underline{V}_m\| = \frac{u}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} \times V_0$.

★ comportement qualitatif

◇ Procédons par ordre

$$\begin{array}{l} \text{Si } \omega \longrightarrow 0 \quad \text{alors } u \longrightarrow 0 \quad \text{et } \underline{V}_m \sim \frac{j u}{1} V_0 = j u V_0 \quad \text{donc } \left\{ \begin{array}{l} V_m \sim u V_0 \longrightarrow 0 \\ \varphi \longrightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \\ \\ \text{Si } \omega \longrightarrow +\infty \quad \text{alors } u \longrightarrow +\infty \quad \text{et } \underline{V}_m \sim \frac{j u}{-u^2} V_0 = -\frac{j}{u} V_0 \quad \text{donc } \left\{ \begin{array}{l} V_m \sim \frac{1}{u} V_0 \longrightarrow 0 \\ \varphi \longrightarrow -\frac{\pi}{2} \end{array} \right. \\ \\ \text{Si } \omega = \omega_0 \quad \text{alors } u = 1 \quad \text{et } \underline{V}_m \sim \frac{j}{j} V_0 = Q V_0 \quad \text{donc } \left\{ \begin{array}{l} V_m = Q V_0 \\ \varphi = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

★ maximum ?

◇ Réécrivons d'abord $V_m : V_m = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{1}{u} - u\right)^2}}$.

◇ Nous pouvons alors constater que V_m est maximal pour $\frac{1}{Q^2} + \left(\frac{1}{u} - u\right)^2$ minimal, *ie.* pour $u_r = 1$.

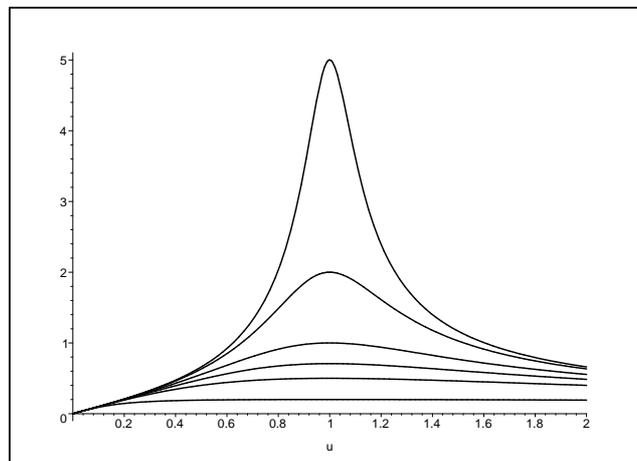
◇ Nous avons alors $V_{m,\max} = Q V_0$

La résonance en vitesse existe toujours et se fait à la pulsation propre.

★ tracés

◇ Sur le graphique 17, nous avons tracé $V_m(u)$ avec toujours Q parmi 0,2; 0,5; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1; 2 et 5 et $V_0 = 1$ U.A..

Graphique 17



◇ En regardant la valeur maximale, il est facile de déterminer quelle courbe correspond à quel facteur de qualité.

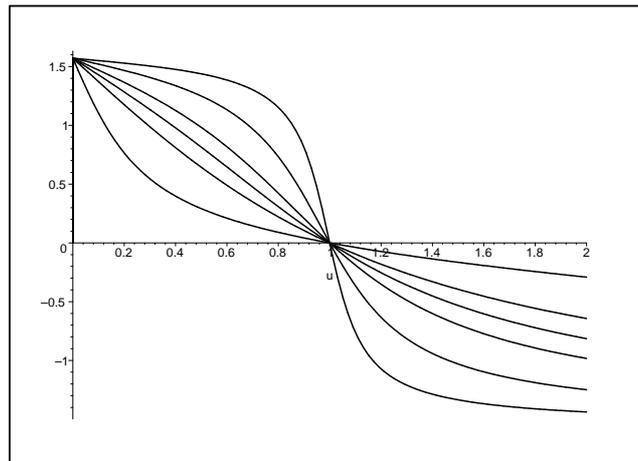
III.5.ii – déphasage

◇ Rappelons les résultats déjà obtenus.

$$\begin{array}{lll} \text{Si } \omega \rightarrow 0 & \text{alors } u \rightarrow 0 & \text{et } \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \text{Si } \omega \rightarrow +\infty & \text{alors } u \rightarrow +\infty & \text{et } \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ \text{Si } \omega = \omega_0 & \text{alors } u = 1 & \text{et } \varphi \rightarrow 0 \end{array}$$

◇ Sur le graphique 18, nous avons tracé $\varphi(u)$ avec toujours Q parmi 0,2; 0,5; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1; 2 et 5.

Graphique 18



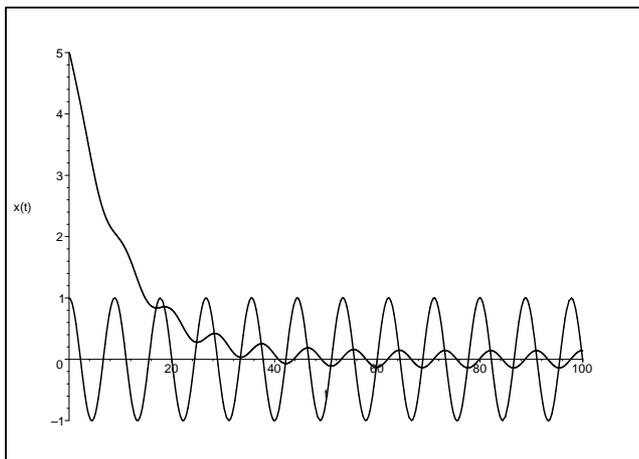
◇ Pour retrouver qui est qui, faisons comme avec l'élongation : étudions le cas $Q = +\infty$. Nous avons alors $V_m = \frac{j u}{1 - u^2} V_0$ qui est toujours un imaginaire pur donc d'argument $\pm \frac{\pi}{2}$. Ainsi, plus le facteur de qualité est élevé, plus la courbe $\varphi(u)$ correspondante doit coller aux valeurs $\pm \frac{\pi}{2}$.

III.6 – Évolution complète

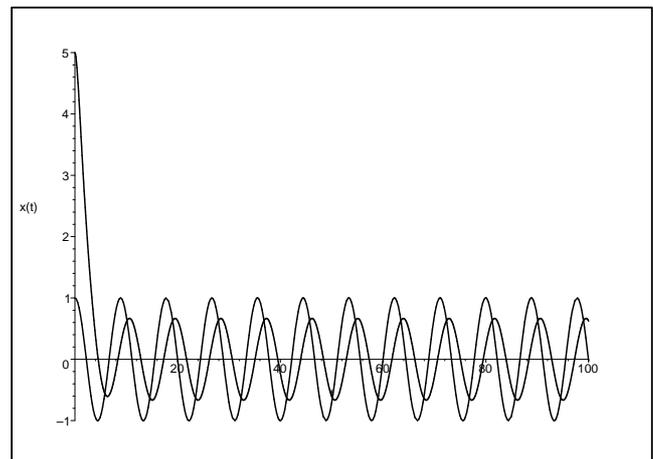
III.6.i – représentation temporelle

◇ Regardons les solutions complètes d'un oscillateur en régime forcé avec comme condition initiales $X(0) = 5$ et $\dot{X}(0) = 0$ et interprétons les courbes obtenues.

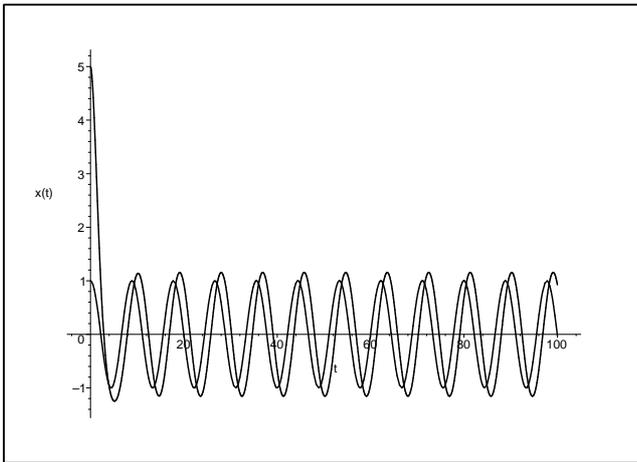
Graphique 19



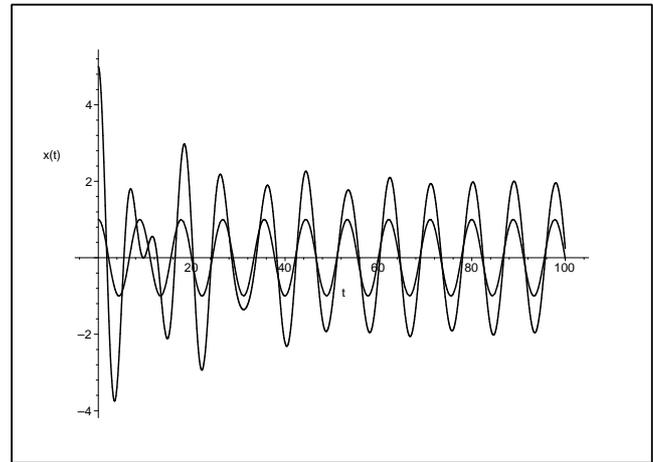
Graphique 20



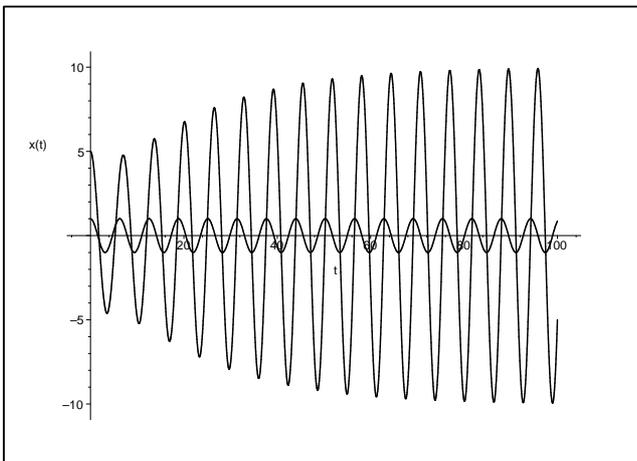
Graphique 21



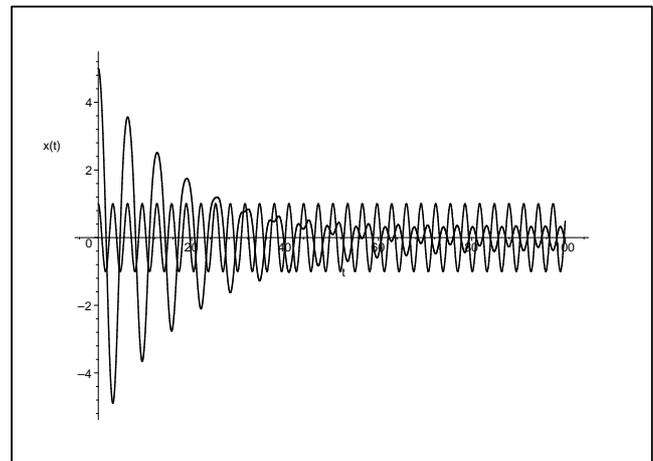
Graphique 22



Graphique 23



Graphique 24



◇ Les caractéristiques sont les suivantes :

- sur le graphique 19, nous avons $u = 1/\sqrt{2}$ et $Q = 0,1$
- sur le graphique 20, nous avons $u = 1/\sqrt{2}$ et $Q = 0,5$
- sur le graphique 21, nous avons $u = 1/\sqrt{2}$ et $Q = 1$ (c'est la pulsation de résonance pour ce facteur de qualité)
- sur le graphique 21, nous avons $u = 1/\sqrt{2}$ et $Q = 10$
- sur le graphique 22, nous avons $u = 1$ et $Q = 10$
- sur le graphique 23, nous avons $u = 2$ et $Q = 10$

◇ Nous pouvons aisément voir sur chaque graphique les parties en régime transitoire et les parties en régime permanent où les oscillations se font à la même pulsation que l'excitation.

◇ Sur les 4 premiers nous pouvons voir l'influence du facteur de qualité :

- pour un oscillateur en régime aperiodique, la durée pour atteindre le RP est long
- pour un oscillateur en régime critique, la durée pour atteindre le RP est très court
- pour un oscillateur avec $Q = 1$, il peut y avoir résonance, même si elle est faible
- pour un oscillateur avec $Q = 10$, il peut y avoir amplification, même si la pulsation d'excitation n'est pas à la résonance

◇ Pour les trois dernière évolutions, nous pouvons voir l'influence de la pulsation d'excitation :

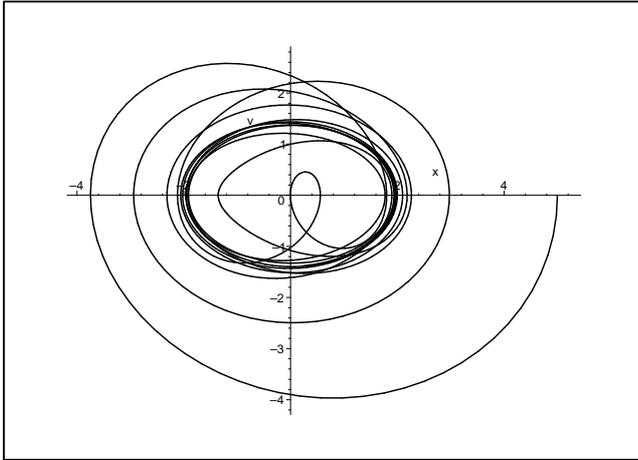
- il peut y avoir amplification même si l'oscillateur n'est pas excité à sa pulsation propre
- à la résonance, l'amplification des oscillations est maximale
- même avec un oscillateur à facteur de qualité très élevé, il n'y a pas toujours amplification des oscillations

◇ Dans les trois cas, le régime permanent est long à arriver.

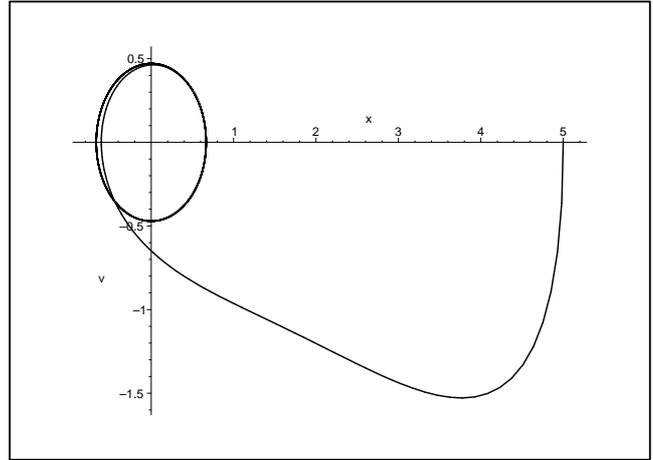
III.6.ii – des trajectoires qui se coupent dans le plan de phase

◇ Représentons les évolutions précédentes dans le plan de phase et cherchons qui est qui.

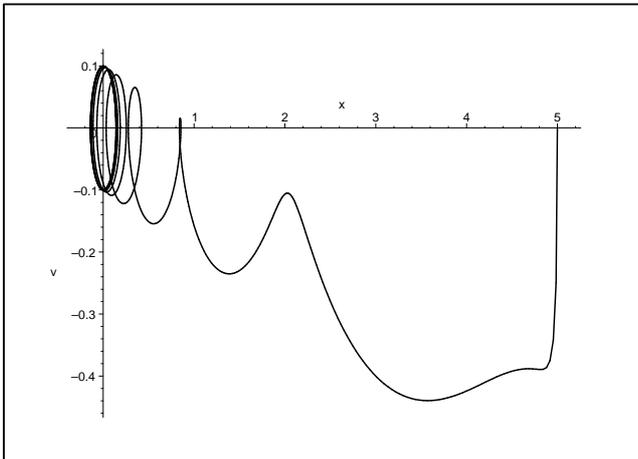
Graphique 25



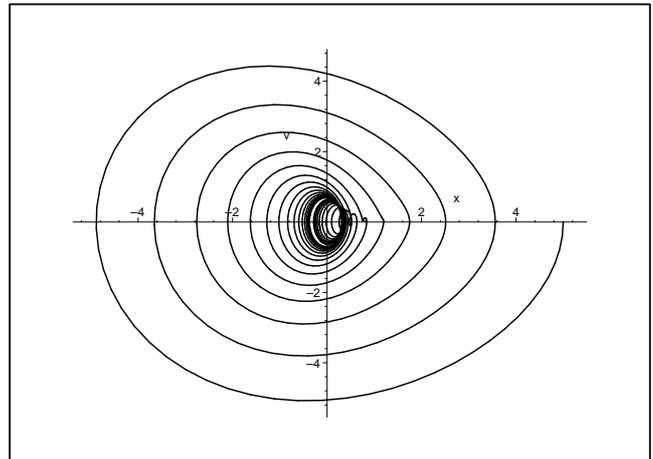
Graphique 26



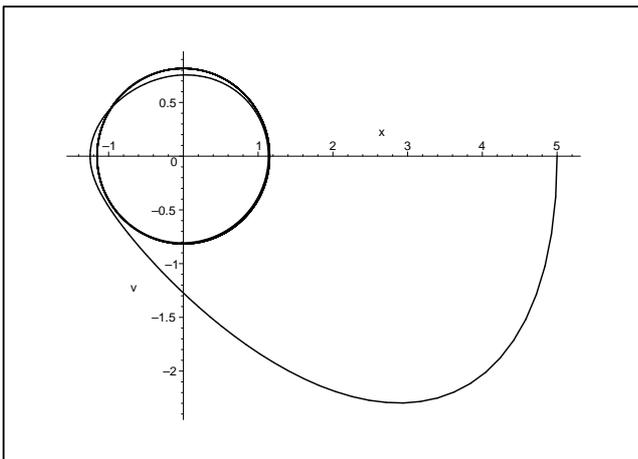
Graphique 27



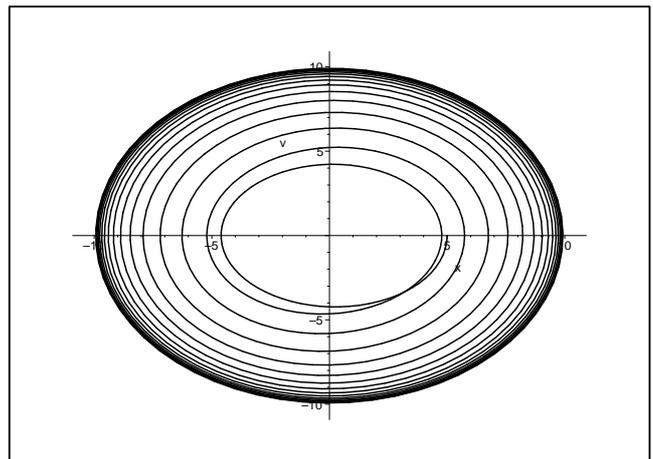
Graphique 28



Graphique 29



Graphique 30



◇ Nous pouvons tout d'abord remarquer qu'il s'agit bien d'évolution en régime forcé : la trajectoire dans le plan de phase se coupe elle-même.

◇ Le plus simple, c'est le graphique 27 qui n'oscille pas avant de tendre vers son cycle limite. Il correspond à l'évolution en régime aperiodique 19.

◇ Ensuite les évolutions 26 et 29 tendent quasiment à la première oscillation vers leurs cycles limite : elles correspondent donc aux graphiques 20 et 21. Pour voir qui est qui précisément, comme il n'y a pas de notion précise de temps dans les plans de phase, regardons les cycles limites et notamment

l'amplitude des oscillations. Elle est inférieure à 1 pour le graphique 26, il y a donc atténuation, il s'agit de l'évolution 20. Donc le graphique 29 correspond à l'évolution 21.

- ◇ Pour départager les évolutions 25, 28 et 30 (qui font beaucoup d'oscillation avant d'arriver à leur cycle limite, ce qui confirme le fait que le facteur de qualité soit élevé), regardons les cycles limites :
- pour l'évolution 25, le cycle limite est d'amplitude presque 2 : il y a une faible amplification donc cela correspond à l'évolution du graphique 22.
 - pour l'évolution 28, le cycle limite est d'amplitude inférieure à 1 : il y a une atténuation donc cela correspond à l'évolution du graphique 24
 - pour l'évolution 30, le cycle limite est d'amplitude environ 10 : il y a une forte amplification donc cela correspond à l'évolution du graphique 23

Oscillateur harmonique

Au niveau du cours

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - grandeur sinusoïdale, amplitude, phase instantanée, phase à l'origine, pulsation
 - notation complexe, amplitude complexe
 - résonance

★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
 - la phénoménologie d'une évolution en régime forcé d'un oscillateur harmonique amorti
 - la phénoménologie de la réponse en élongation d'un oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal
 - la phénoménologie de la réponse en vitesse d'un oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal

Au niveau de l'analyse

★ Analyse technique

- ◇ Il faut savoir associer la notation complexe aux régimes sinusoïdaux forcés.

Au niveau des savoir-faire

★ outils mathématiques

- ◇ Connaître parfaitement :
 - comment passer une grandeur réelle en notation complexe
 - comment passer une équation différentielle réelle en notation complexe
 - la manipulation des nombres complexes (module, argument, ...)

★ petits gestes

- ◇ Savoir dériver en notation complexe.

★ exercices classiques

- ◇ Savoir refaire :
 - tout sur l'élongation complexe (recherche de résonance, ...)
 - tout sur la vitesse complexe (recherche de résonance, ...)
 - retrouver l'équation différentielle régissant l'évolution d'un oscillateur harmonique amorti à partir d'un montage mécanique

Table des matières

I	Oscillateur harmonique amorti en régime libre	1
I-1	Oscillateur harmonique ?	1
I-2	Modélisation mécanique	1
I-2 <i>·i</i>	montage	1
I-2 <i>·ii</i>	phénoménologie et caractéristique d'un amortisseur	2
I-2 <i>·iii</i>	équation différentielle régissant l'évolution	3
	position d'équilibre	3
	écart à l'équilibre	4
	écriture canonique	4
I-3	Cas sans frottement	4
I-3 <i>·i</i>	équation horaire	4
I-3 <i>·ii</i>	représentation dans le plan de phase	5
I-3 <i>·iii</i>	aspect énergétique	5
	valeur moyenne de l'énergie cinétique	5
	valeur moyenne de l'énergie potentielle	6
	résultat et interprétation	6
I-4	Oscillations avec frottements	6
I-4 <i>·i</i>	pour une évolution connue	6
I-4 <i>·ii</i>	vue dans le plan de phase	7
I-5	Analogie avec le circuit R,L,C série	8
II	Oscillations non linéaires	8
II-1	Pendule simple rigide	9
II-1 <i>·i</i>	encore lui !	9
II-1 <i>·ii</i>	évolution au premier ordre	9
II-1 <i>·iii</i>	apparition d'harmoniques	9
	une nouvelle équation différentielle	9
	idée de base	10
	c'est une nouvelle solution	10
	conséquences de $A = 0$	11
	conséquences de $B = 0$	11
	conséquences de $C = 0$	11
	comparaison avec des résultats numériques	11
II-2	Oscillateur de VAN DER POL	12
II-2 <i>·i</i>	équation d'évolution	12
II-2 <i>·ii</i>	résolution « avec les mains »	12
II-2 <i>·iii</i>	évolutions dans le plan de phase	13
III	Oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé	14
III-1	Modélisation mécanique	14
III-1 <i>·i</i>	montage	14
III-1 <i>·ii</i>	équation différentielle régissant l'évolution	15
	équation différentielle en $X(t)$	16
III-1 <i>·iii</i>	phénoménologie et premiers pas vers la solution	16
	phénoménologie	16
	trouver la solution particulière	16
III-2	Un puissant outil : la notation complexe	17
III-2 <i>·i</i>	une grandeur sinusoïdale	17

III·2·ii	... peut se représenter par une grandeur complexe ...	17
III·2·iii	... pour être facilement dérivée	17
III·3	Des expressions complexes mais simples	18
III·3·i	pour l'élongation	18
	écriture canonique	18
III·3·ii	pour la vitesse	19
	écriture canonique	19
III·4	Résonance en élongation	19
III·4·i	amplitude	19
	comportement qualitatif	19
	maximum?	20
	cas $Q \gg 1$	21
	tracés	21
III·4·ii	déphasage	21
III·5	Résonance en vitesse	22
III·5·i	amplitude	22
	comportement qualitatif	22
	maximum?	22
	tracés	23
III·5·ii	déphasage	23
III·6	Évolution complète	24
III·6·i	représentation temporelle	24
III·6·ii	des trajectoires qui se coupent dans le plan de phase	26