

# Mécanique

## Chapitre 4

### Mécanique en référentiel non galiléen

# Mécanique en référentiel non galiléen

Jusqu'à présent, nous avons fait de la mécanique du point dans un référentiel galiléen. Toutefois rien ne dit *a priori* que les référentiels naturels (*ie.* ce par rapport à quoi le mouvement est décrit) soient tous galiléens. En fait, comme nous allons le voir, c'est loin d'être le cas. Nous précisons donc comment se modifient les lois de la mécanique dans le cas de référentiels non galiléens : de manière très simple en rajoutant une ou deux forces *ad hoc*.

Pour ce faire, nous commencerons par le cas où un référentiel est en translation par rapport à un référentiel galiléen puis nous verrons dans un deuxième temps le cas où un référentiel est en rotation pure par rapport à un référentiel galiléen. Ensuite, nous précisons très rapidement ce qui se passe dans le cas général d'un référentiel en mouvement quelconque par rapport à un référentiel galiléen avant de terminer par étudier quelques situations usuelles en référentiels dits terrestres.

## I – Référentiel en translation

### I.1 – Voir dans deux référentiels différents

#### I.1.i – qu'est-ce qu'un référentiel non galiléen ?

- ◇ Nous approfondirons la question plus tard car la réponse est loin d'être triviale tant du point de vue technique que du point de vue « philosophique ».
- ◇ Pour faire court et, forcément, non parfaitement exact, nous dirons qu'un référentiel est non galiléen lorsqu'il bouge par rapport à un autre référentiel galiléen.
- ◇ Par exemple, une voiture bouge par rapport à la route. Si le sol, définissant le référentiel terrestre est considéré comme galiléen, alors un référentiel lié à la voiture sera en général non galiléen.
- ◇ Autre grand exemple classique : le manège. Ce dernier tourne par rapport au sol donc tout référentiel lié à lui est non galiléen.

Ce ne sont pas les choses ou les objets qui sont non galiléens, ce sont les éventuels référentiels qui leur sont liés.

- ◇ Nous pouvons constater aisément qu'il n'est pas toujours facile de boire dans une voiture, de marcher dans un train, de rester debout dans le bus, de marcher droit sur un manège, ...
- ◇ Nous pouvons aussi remarquer qu'il est bien plus facile de marcher dans un wagon d'un train qui démarre que dans un wagon de train Corail lancé à pleine vitesse en campagne.

Tout mouvement dans un référentiel non galiléen peut sembler bizarre et les référentiels non galiléens peuvent être plus ou moins non galiléens.

- ◇ Évitions d'interpréter trop vite ce qui se passe car les glissements de sens sont légion en référentiels non galiléens.

Rien n'*appartient* à un référentiel, personne ni rien n'est *dans* un référentiel, seuls les mouvements se décrivent **par rapport** à tel ou tel référentiel.

- ◇ En fait, c'est là l'aspect « difficile » des référentiels non galiléens : l'interprétation. Comme nous le verrons, étudier le mouvement dans un référentiel galiléen est très facile. Interpréter, dans la plupart des cas, c'est aussi très facile.
- ◇ En revanche, si l'interprétation se fait trop tôt, elle est la plupart du temps fautive car basée sur des lois « intuitives » et l'analyse physique s'en trouve perturbée. Il va donc falloir, là plus qu'ailleurs, faire preuve d'une extrême humilité, poser les questions usuelles et y répondre de manière rigoureuse avant d'écrire la moindre loi le tout **sans essayer d'y inclure déjà la réponse finale**.

### I.1.ii – pourquoi étudier dans un référentiel non galiléen ?

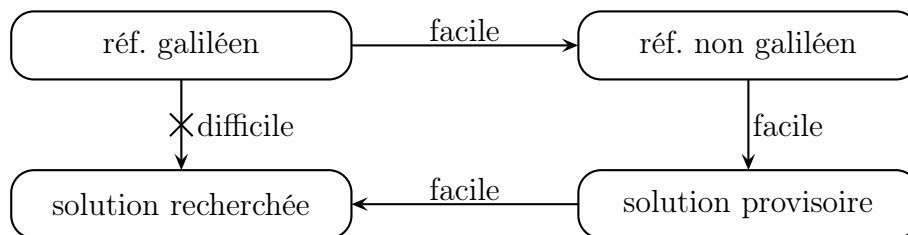
#### ★ la meilleure des raisons

- ◇ C'est une raison physique !
- ◇ Il est utile d'étudier quelque chose par rapport un référentiel non galiléen lorsqu'il s'agit d'un référentiel naturel.
- ◇ Comme nous l'avons dit, lors d'un transport il est plus utile de connaître le mouvement des objets transporté par rapport au camion, au wagon, que de connaître leurs mouvement par rapport au sol.
- ◇ Comme nous le verrons, le référentiel terrestre n'est pas parfaitement galiléen, mais c'est un référentiel naturel : tout le monde se repère par rapport au sol, c'est une évidence même ! Il va donc falloir tenir compte de son côté non galiléen.
- ◇ Toutefois le caractère non galiléen du référentiel terrestre est, comme nous le verrons dans la dernière partie de ce chapitre, humainement insensible. Pour que le caractère non galiléen se fasse sentir, il faut soit des mouvements à l'échelle terrestre (masses d'air), soit des expériences délicates spécialement prévues pour (pendule de FOUCAULT).

Sauf indication contraire et bien que non galiléen, le référentiel terrestre sera considéré comme *suffisamment* galiléen.

#### ★ une autre bonne (?) raison

- ◇ C'est une raison plus technique.
- ◇ Il peut s'avérer que, parfois, les lois soient plus faciles à écrire dans un référentiel non galiléen que dans un référentiel galiléen.
- ◇ La plupart du temps, il s'agira d'écrire des vitesses (comme en SI).

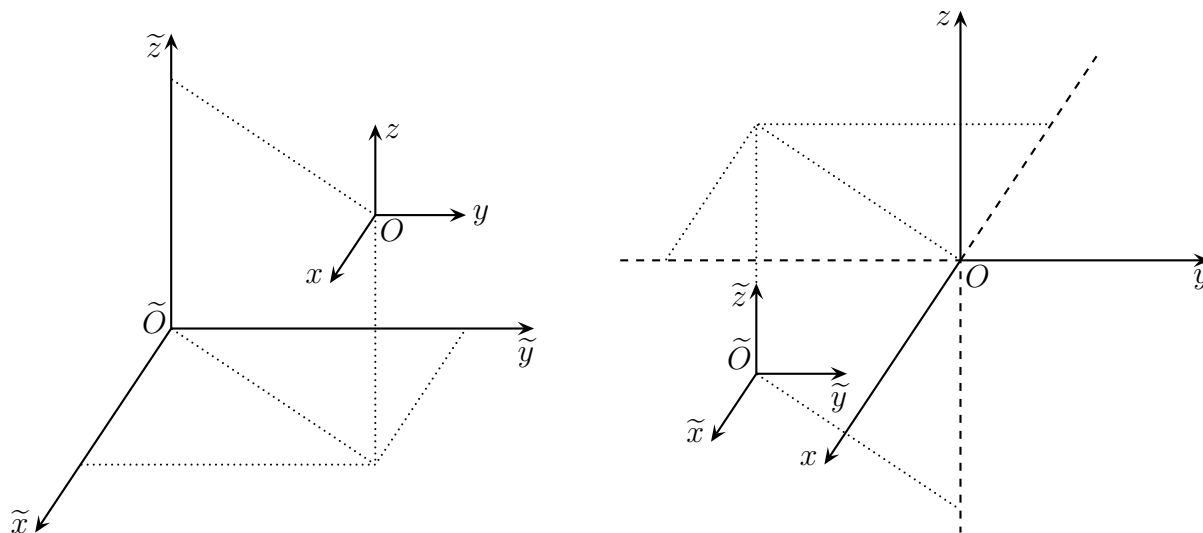


### I.1.iii – décrire deux référentiels en translation

- ◇ Il faut tout d'abord deux référentiels. Notons-les  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$ .

Deux référentiels sont dits *en translation*, lorsque leurs axes ont les mêmes directions, mais que leurs centres sont en mouvement l'un par rapport à l'autre.

- ◇ Représentons-les.



Pour mieux visualiser le mouvement par rapport à un certain référentiel, mieux vaut dessiner ce référentiel au centre du schéma, les axes non inclinés par rapport à la feuille.

Deux référentiels *en translation* sont parfaitement décrits par le mouvement du centre de l'un par rapport au centre de l'autre.

◇ Rappelons que par « mouvement », nous entendons position, vitesse et accélération.

### I.1.iv – objectif

◇ Grâce aux lois de NEWTON, nous savons déjà faire de la mécanique en référentiel galiléen et nous cherchons à faire de la mécanique directement en référentiel non galiléen, c'est plus pratique.

◇ Fixons donc les idées de manière arbitraire :

→  $\tilde{\mathcal{R}}$  sera le référentiel supposé galiléen

→  $\mathcal{R}$  sera le référentiel *a priori* non galiléen.

◇ Nous pouvons donc facilement écrire les lois de la mécanique par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ . En considérant un point matériel soumis à  $\sum \vec{f}$ , nous pouvons écrire :

$$m \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M) = \sum \vec{f}$$

◇ Il faut donc maintenant faire en sorte de transformer cette grandeur de mouvement  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)$  de  $M$  par rapport au référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  en grandeur de mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .

Pour décrire le mouvement d'un point par rapport à un référentiel non galiléen, il est nécessaire de connaître le mouvement de ce référentiel non galiléen par rapport à un référentiel galiléen.

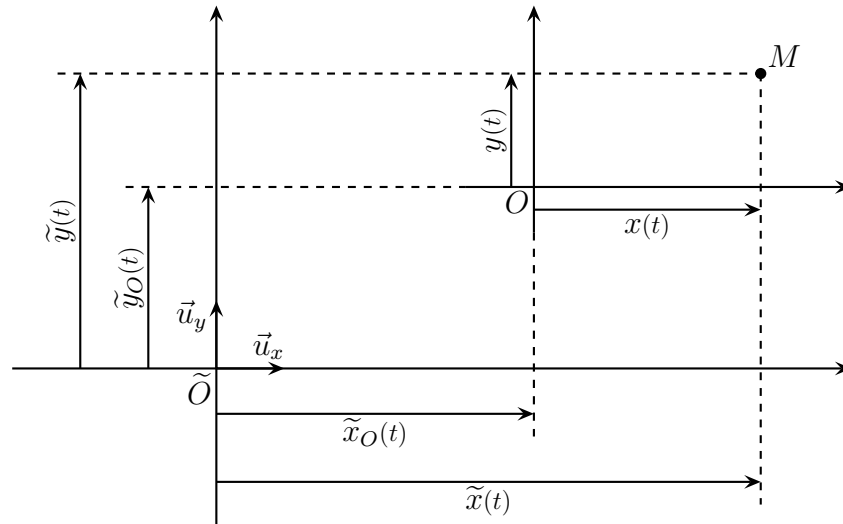
◇ Ici, cela signifie que nous connaissons parfaitement :

$$\vec{OO}(t) ; \quad \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) \quad \text{et} \quad \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t)$$

## I.2 – Des mouvements différents dans les deux référentiels

### I.2.i – bien poser les notations

- ◇ Pour mieux visualiser la situation, nous allons représenter une situation en deux dimensions et généraliser à la 3<sup>e</sup> dimension.



- ◇ Les grandeurs concernant  $O$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  sont :

→ la position :

$$\vec{\tilde{O}O} = \tilde{x}_O(t) \vec{u}_x + \tilde{y}_O(t) \vec{u}_y$$

→ la vitesse :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) = \frac{d\vec{\tilde{O}O}(t)}{dt} = \frac{d\tilde{x}_O(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}_O(t)}{dt} \vec{u}_y$$

→ l'accélération :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) = \frac{d\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t)}{dt} = \frac{d^2\tilde{x}_O(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2\tilde{y}_O(t)}{dt^2} \vec{u}_y$$

- ◇ Les grandeurs concernant  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  sont :

→ la position :

$$\vec{\tilde{O}M} = \tilde{x}(t) \vec{u}_x + \tilde{y}(t) \vec{u}_y$$

→ la vitesse :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \frac{d\vec{\tilde{O}M}(t)}{dt} = \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \vec{u}_y$$

→ l'accélération :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \frac{d\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)}{dt} = \frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2\tilde{y}(t)}{dt^2} \vec{u}_y$$

- ◇ Les grandeurs concernant  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$  sont :

→ la position :

$$\overrightarrow{OM} = x(t) \vec{u}_x + y(t) \vec{u}_y$$

→ la vitesse :

$$\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt} \vec{u}_y$$

→ l'accélération :

$$\vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) = \frac{d\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2y(t)}{dt^2} \vec{u}_y$$

### I.2.ii – relier les positions

◇ Nous cherchons le lien entre le vecteur position dans  $\tilde{\mathcal{R}}$  et celui dans  $\mathcal{R}$ , ie. entre  $\overrightarrow{\tilde{O}M}$  et  $\overrightarrow{OM}$ .

La loi de composition des vecteurs positions s'écrit :

$$\overrightarrow{\tilde{O}M} = \overrightarrow{\tilde{O}O} + \overrightarrow{OM}$$

◇ C'est une simple relation de CHASLES.

◇ Cela se voit sur le schéma :  $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_O(t) + x(t)$  et  $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_O(t) + y(t)$ .

### I.2.iii – relier les vitesses

La loi qui permet de relier les vitesses (resp. les accélérations) d'un point par rapport à deux référentiels différents est appelée *loi de composition des vitesses* (resp. *loi de composition des accélérations*.)

◇ Nous cherchons le lien entre vecteur vitesse dans  $\mathcal{R}$  et celui dans  $\mathcal{R}_0$ , ie. entre  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)$  et  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$ .

La loi de composition des vecteurs vitesses s'écrit :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$$

◇ La démonstration ne pose pas de difficulté :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) &= \frac{d\overrightarrow{\tilde{O}M}}{dt} = \frac{d\tilde{x}(t) \vec{u}_x + d\tilde{y}(t) \vec{u}_y}{dt} = \frac{d(\tilde{x}_O(t) + x(t))}{dt} \vec{u}_x + \frac{d(\tilde{y}_O(t) + y(t))}{dt} \vec{u}_y \\ &= \frac{d\tilde{x}_O(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}_O(t)}{dt} \vec{u}_y + \frac{dy(t)}{dt} \vec{u}_y \\ &= \left( \frac{d\tilde{x}_O(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}_O(t)}{dt} \vec{u}_y \right) + \left( \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt} \vec{u}_y \right) \\ &= \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) \end{aligned}$$

☛ *Remarque* : il a été fondamental de supposer ici que  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  ne dépendaient pas du temps, ie. que les référentiels étaient en translation l'un par rapport à l'autre.

### I·2·iv – relier les accélérations

- ◇ C'est le même principe : nous cherchons le lien entre vecteur accélération dans  $\mathcal{R}$  et celui dans  $\mathcal{R}_0$ , *ie.* entre  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)$  et  $\vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t)$ .

La loi de composition des vecteurs accélération s'écrit :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t)$$

- ◇ La démonstration ne pose pas de difficulté :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) &= \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_{\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\tilde{x}_O(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}_O(t)}{dt} \vec{u}_y \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt} \vec{u}_y \right) \\ &= \left( \frac{d^2\tilde{x}_O(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2\tilde{y}_O(t)}{dt^2} \vec{u}_y \right) + \left( \frac{d^2x(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2y(t)}{dt^2} \vec{u}_y \right) \\ &= \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) \end{aligned}$$

### I·2·v – du mauvais vocabulaire

- ◇ Traditionnellement, les lois de compositions s'écrivent de la manière suivante.

Loi de composition lorsque  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  sont en translation l'un par rapport à l'autre :

- loi de composition des vitesses :  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M) = \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M) + \vec{v}_e(M)$  où  $\vec{v}_e(M) = \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O)$  est appelée la *vitesse d'entraînement*.
- loi de composition des accélérations :  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M) + \vec{a}_e(M)$  où  $\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O)$  est appelée l'*accélération d'entraînement*.

- ◇ Il faut bien comprendre que le vocable « entraînement » est intrinsèquement mauvais car il ne reflète en rien l'entraînement de quelque chose. En effet le référentiel  $\mathcal{R}$  n'entraîne **pas** le point  $M$ .
- ◇ Imaginons un point  $M$  fixe par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , par exemple un élève assis, immobile par rapport au référentiel terrestre.
- ◇ Imaginons un autre référentiel  $\mathcal{R}$  en mouvement par rapport au référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Par exemple le professeur qui marche.
- ◇ Alors l'élève bouge dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et il est difficile de voir en quoi l'élève est entraîné par le référentiel professeur.
- ◇ Ce vocabulaire se comprend lorsque nous l'analysons de la manière suivante.
- ◇ Supposons un point  $M$  **réellement fixé** dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , *ie.* qui se déplace avec  $\mathcal{R}$ . C'est souvent le cas lorsque le référentiel est naturel, *ie.* correspond à quelque chose de concret : une voiture, un train, la Terre, ...
- ◇ Alors, lorsque  $M$  est immobile **par rapport à  $\mathcal{R}$** , sa vitesse par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  se réduit à la vitesse d'entraînement.

La vitesse d'entraînement d'un point  $M$  de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  correspond à la vitesse qu'aurait le point  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  si  $M$  était réellement fixé au référentiel  $\mathcal{R}$ , *ie.* s'il était immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ .

L'accélération d'entraînement d'un point  $M$  de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  correspond à l'accélération qu'aurait le point  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$  si  $M$  était réellement fixé au référentiel  $\mathcal{R}$ , *ie.* s'il était immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ .

- ◇ Le vocabulaire est là, il faut s'y adapter mais il faut y faire attention. Il a été choisi de sorte que **dans certains cas** il porte bien son nom.
- ☛ *Remarque* : nous avons rencontré le même genre de problème en optique avec objet / image, réel / virtuel

### I.2.vi – observation importante

- ◇ Ces lois ont nécessité pour leurs démonstrations :
  - le fait que  $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_O(t) + x(t)$ , ce qui est une relation géométrique
  - la définition des vecteurs vitesse et accélération
  - le fait que  $\vec{u}_x = \vec{C}^{\text{té}}$ , *ie.* que les référentiels étaient en translation
- ◇ En revanche, nous n'avons pas eu besoin d'utiliser le caractère galiléen ou non des référentiels  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$ . En conséquence :

Les lois de composition sont des lois cinématiques indépendantes du caractère galiléen, de nature physique, des référentiels.

## I.3 – Les lois de la mécanique

### I.3.i – le principe fondamental aux forceps

#### ★ énoncé

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ , référentiel non galiléen est tel que :

$$m \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M) = \left( \sum \vec{f} \right) + \vec{f}_{\text{ie}} \quad \text{où}$$

$$\vec{f}_{\text{ie}} = -m \vec{a}_e(M) = -m \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O) \text{ est la force d'inertie d'entraînement.}$$

- ◇ En fait nous pouvons voir que rien n'est fondamentalement changé : le PFD se transforme, nous ne pouvons plus dire « officiellement » que c'est le PFD, mais sa nouvelle écriture est rigoureusement identique à celle déjà connue.
- ◇ La différence entre le PFD usuel et le PFD en référentiel non galiléen, c'est l'ajout d'une force dite d'inertie.
- ◇ Dans la suite, par mauvaise habitude, nous nommerons encore cette loi le PFD.

#### ★ démonstration

- ◇ La démonstration est toute simple. Commençons par écrire le PFD dans le référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  :



$$m \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) = \sum \vec{f}(t)$$

◇ Avec la loi de composition des accélérations, cela donne :

$$m (\vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{a}_e(M,t)) = \sum \vec{f}(t) \quad \rightsquigarrow \quad m \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) = \sum \vec{f}(t) - m \vec{a}_e(M,t)$$

◇ Ce qui est bien le résultat en notant  $\vec{f}_{ie} \stackrel{\text{not}}{=} -m \vec{a}_e(M,t)$ .

### ★ invariance galiléenne des forces

Les forces physiques, celles qui représentent l'interaction entre deux choses sont invariantes par changement de référentiel, même non galiléen.

◇ Ainsi même par rapport à une voiture, la force qu'exerce un ressort s'écrit :

$$\vec{f} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_{\text{sortant}}$$

### I.3.ii – une nouvelle force

#### ★ un nom compréhensible

- ◇ La force s'appelle « force d'inertie » car elle fait intervenir la masse inertielle.
- ◇ Voir la démonstration pour s'en convaincre.

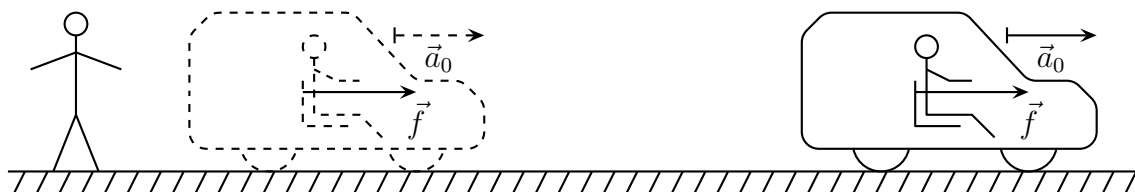
#### ★ ce n'est pas une force physique

- ◇ Elle n'est pas invariante par changement de référentiel car, justement, elle dépend du référentiel dans lequel elle est utilisée car elle fait intervenir  $\vec{a}_{|\mathcal{R}}(O)$ .

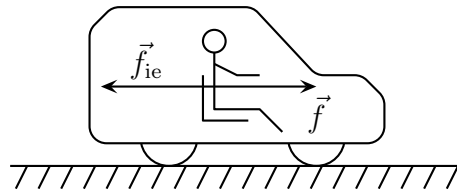
Montrer le film de la bille sur la rigole tournante.

#### ★ pourquoi la ressent-on alors ?

- ◇ Prenons l'exemple d'une voiture qui démarre.
- ◇ Quelqu'un à l'intérieur de la voiture se sent « plaqué contre le siège », comme si quelque chose le tirait en arrière : il traduit cela par une force **vers l'arrière**.
- ◇ En fait, non seulement cette force n'existe pas, mais la seule force que subit le passager est une force **vers l'avant**.
- ◇ Pour cela, prenons l'exemple d'une voiture qui accélère vers l'avant et qui est initialement arrêtée.



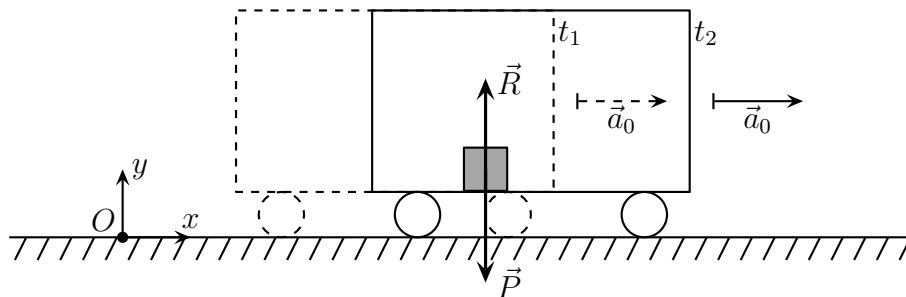
- ◇ Comme le passager « suit » la voiture, il faut qu'il ait la même accélération que la voiture c'est-à-dire  $\vec{a}_0$ .
- ◇ Or, d'après NEWTON qui ne peut mentir, cela implique que le passager subit la force  $\vec{f} = \vec{a}_0/m$ .
- ◇ Cette force ne peut venir que du siège, seul objet en contact avec le passager.
- ◇ Pour simplifier, nous pouvons dire que le siège agit un peu comme un ressort. Ainsi pour qu'il exerce une force vers la droite (ici) il **faudrait** qu'il soit comprimé.
- ◇ Le passager est donc bien plaqué contre le siège mais **parce qu'il** subit de ce dernier une force vers l'avant.
- ◇ Ceci étant le passager interprète la situation de son point de vue : pour lui il est **immobile**. Dans ses conditions, comme il ressent le siège qui le pousse vers l'avant, il *faudrait* qu'une force le pousse vers l'arrière.



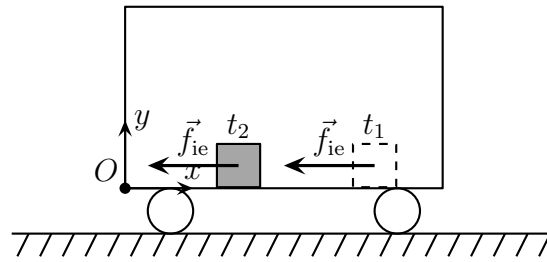
- ◇ C'est cette force vers l'arrière qui est interprétée comme une force d'inertie **bien qu'elle n'existe pas**.
- ◇ En fait tout se passe comme si le passager était « catapulté » par le siège.
- ◇ Remarquons ainsi que sans dossier c'est plus difficile d'accélérer en voiture. De même, sans portière gauche, difficile de tourner à droite sans que le chauffeur ne soit éjecté!

### ★ juste un glaçon

- ◇ Prenons un autre exemple pour montrer que les forces d'inertie n'existent pas, qu'il s'agit que d'une illusion, certes extrêmement pratique, mais d'une simple illusion dangereuse.
- ◇ Imaginons un glaçon dans un wagon, le tout étant initialement immobile.
- ◇ Le wagon se met en mouvement.
- ◇ Comme le glaçon est fondant (et sur un support plastique) tout se passe comme s'il n'y avait pas de frottement : poids et réaction normale se compensent, la résultante des forces sur le glaçon est nulle, son accélération l'est donc aussi.
- ◇ Le glaçon est **immobile** par rapport au sol : le wagon « glisse » sous lui !



- ◇ En revanche, la même situation représentée dans le référentiel du wagon donne lieu à une tout autre interprétation.
- ◇ Comme nous pouvons le voir : au début le glaçon est immobile à l'avant du wagon alors qu'à la fin il fonce de plus en plus vite vers l'arrière. Tout se passe donc comme si une force le poussait vers l'arrière : c'est la force d'inertie.
- ◇ Dans le référentiel du wagon, le glaçon subit une force d'inertie bien qu'il soit en réalité immobile!



- ◇ Quand vous bougez la tête, **tous les objets, choses, personnes, étoiles, maison, ...** subissent des forces d'inertie par rapport à vous. Mais ils n'en sont pas écrasés pour autant !

### I.3.iii – vision énergétique

#### ★ les lois

- ◇ Les questions à se poser sont :
- la force d'inertie d'entraînement est-elle conservative ?
  - peut-on associer une énergie potentielle à une force d'inertie d'entraînement ?

Dans le cas de référentiels en translation, la force d'inertie d'entraînement n'est pas conservative.

- ◇ La raison est simple.
- ◇ Une énergie potentielle, donc la force associée, ne doit dépendre que de l'espace et pas du temps.
- ◇ Or la force d'inertie s'écrit  $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e(t)$  ce qui signifie qu'elle dépend furieusement du temps par l'intermédiaire de l'accélération d'entraînement !
- ◇ Ceci étant, si l'accélération d'entraînement est constante, ...

#### ★ cas particulier d'une force d'inertie constante

Lorsque l'accélération d'entraînement est constante, le travail fourni par la force d'inertie d'entraînement à un point de masse  $m$  qui bouge entre  $A$  et  $B$  s'écrit :

$$W_{AB} = \vec{f}_{ie} \cdot \overrightarrow{AB}$$

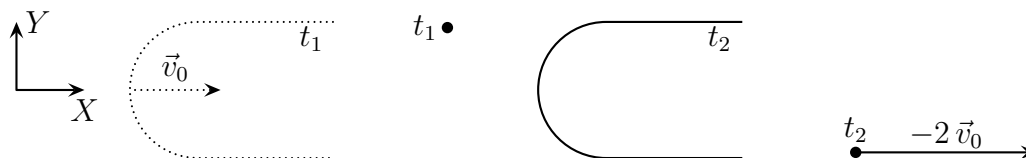
- ◇ Il s'agit en fait d'un cas particulier du travail fourni par une force constante.

#### ★ paradoxe dans un raisonnement énergétique

- ◇ Considérons la situation suivante : une bille de masse  $m$  avance à la vitesse  $\vec{v}_0$  sur un plan horizontal sans frottement.
- ◇ Nous pouvons alors dire que s'il n'y a aucun obstacle, elle conserve une vitesse vectoriellement constante.
- ◇ Mettons un rail courbé sur sa route de sorte que ce rail (sans frottement lui non plus) renvoie la bille dans la direction initiale.
- ◇ Alors une fois rééjectée du rail, la bille aura encore la vitesse  $\vec{v}_0$  et, pour l'ensemble du mouvement, la variation totale d'énergie cinétique sera nulle, ce qui est cohérent avec le fait que  $\Delta E_c = W = 0$ .



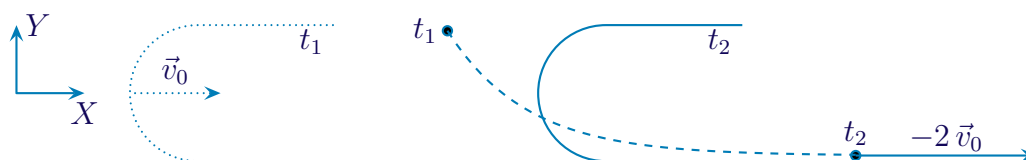
- ◇ Raisononnons dans un référentiel animé de la vitesse  $\vec{v}_0 = \vec{C}^{te}$ .
- ◇ Au début la bille a une vitesse nulle alors qu'après elle a une vitesse de  $-2\vec{v}_0$ .
- ◇ La variation d'énergie cinétique vaut donc cette fois  $\Delta E_c = 2 m v_0^2 \neq 0$ .



- ◇ D'où les questions :
  - quelles sont les forces qui ont travaillé ?
  - pourquoi la variation d'énergie cinétique n'est-elle pas la même ?

Faire réfléchir quelques instant là-dessus.

- ◇ Pour savoir qui a travaillé, procédons par élimination, sachant qu'à la fin il doit en rester une :
  - ce ne sont pas les forces à distance : le poids parce que tout le mouvement est horizontal, la force électromagnétique parce que la bille n'est pas chargée
  - ce ne sont pas les forces d'inertie parce que l'autre référentiel est parfaitement galiléen !
  - ce ne sont pas les forces de frottements parce qu'il n'y en a pas
  - ce sont donc les réactions normales du rail
- ◇ En effet, bien que l'habitude soit grande de dire que les réactions normales ne travaillent pas, cela n'est vrai que lorsque le support est immobile.
- ◇ Ici, pour nous en convaincre, nous pouvons dessiner l'allure de la trajectoire de la bille dans le second référentiel pour constater qu'elle n'est effectivement *a priori* pas tangente au support.



- ◇ Il s'agit en fait ici de ce qu'il est possible d'appeler « l'effet raquette » : c'est **grâce** aux actions *normales* d'un support qu'un objet est mis en mouvement.
- ◇ La réponse à la deuxième question est alors (provisoirement) immédiate : les variations d'énergie dépendent du référentiel dans lequel elles sont calculées.

Les variations d'énergie d'un système ne sont pas des grandeurs intrinsèques.

## I.4 – Les référentiels galiléens

### I.4.i – alors, finalement, c'est quoi ?

- ◇ N'oublions pas qu'au fond, la définition d'un référentiel galiléen est donnée par la première loi de NEWTON : « Il existe des référentiels dits galiléens tels que tout point matériel a une trajectoire rectiligne uniforme si et seulement si la résultante des forces qu'il subit est nulle » ;

◇ Nous pouvons désormais traduire cela par :

Un référentiel est galiléen si le PFD s'écrit sans force d'inertie.

◇ Malgré tout, nous pouvons caractériser assez fortement les référentiels galiléens.

Un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen si et seulement si la translation est rectiligne uniforme.

◇ En effet, supposons  $\tilde{\mathcal{R}}$  galiléen et  $\mathcal{R}$  en translation rectiligne uniforme par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

◇ Dans ces conditions, la vitesse du centre  $O$  de  $\mathcal{R}$  est telle que :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O) = \vec{C}^{\text{te}} \rightsquigarrow \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O) = \vec{0} \rightsquigarrow \vec{f}_{\text{ie}} = \vec{0}$$

◇ Comme les forces d'inerties sont nulles dans  $\mathcal{R}$ , cela prouve bien que ce dernier est galiléen.

◇ Autrement dit, en trouvant *un* référentiel galiléen, nous pouvons en déduire *tous* les autres.

### ★ quel est le premier référentiel galiléen ?

◇ C'est un problème, un vrai de vrai gros problème.

◇ Quand un mouvement par rapport à un référentiel galiléen s'écarte du mouvement prévu par le PFD, il peut s'agir soit d'un caractère non galiléen non pris en compte, soit d'une force inconnue.

◇ Des sondes à la limite du système solaire ne suivent pas exactement la trajectoire prévue et pour l'instant les astronomes en sont à chercher quelles pourraient être les forces oubliées.

## I.4.ii – référentiels usuels

### ★ référentiel de COPERNIC

Le référentiel de COPERNIC est le référentiel centré sur le centre de masse du système solaire et dont les axes pointent vers trois étoiles éloignées.

◇ Deux des axes du référentiel de COPERNIC constituent le plan moyen de l'écliptique.

◇ La grande question est : quelles sont ces étoiles<sup>1</sup> ?

Le référentiel de COPERNIC est postulé galiléen.

◇ Comme ça, plus de problème, nous avons *un* référentiel galiléen.

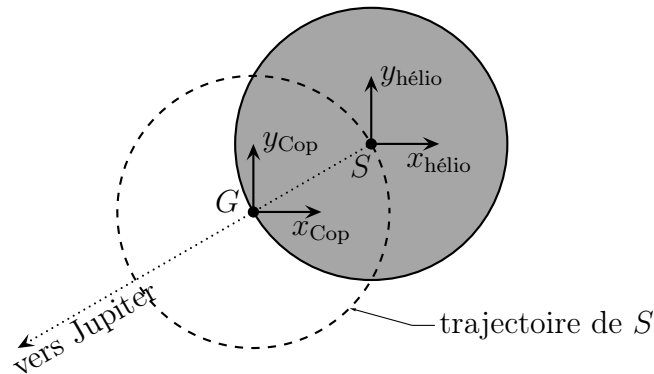
Le référentiel de COPERNIC est adapté à l'étude du système solaire.

### ★ référentiel héliocentrique

Le référentiel héliocentrique est le référentiel centré sur le centre de masse du Soleil et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel de COPERNIC.

1. Si quelqu'un possède cette information, je suis preneur.

- ◇ À cause de la masse de Jupiter, le référentiel de COPERNIC est décallé d'environ un rayon solaire du centre du référentiel héliocentrique.



- ◇ De plus, comme la période de révolution de Jupiter autour du Soleil est d'environ 29 an, nous pouvons dire que le référentiel héliocentrique est en *translation circulaire* par rapport au référentiel de COPERNIC.

Le référentiel héliocentrique n'est pas rigoureusement galiléen mais il est suffisamment galiléen pour quasiment toutes les études.

Le référentiel héliocentrique est adapté à l'étude de corps dans le système solaire sur des durées bien inférieures à la période de Jupiter (29 an).

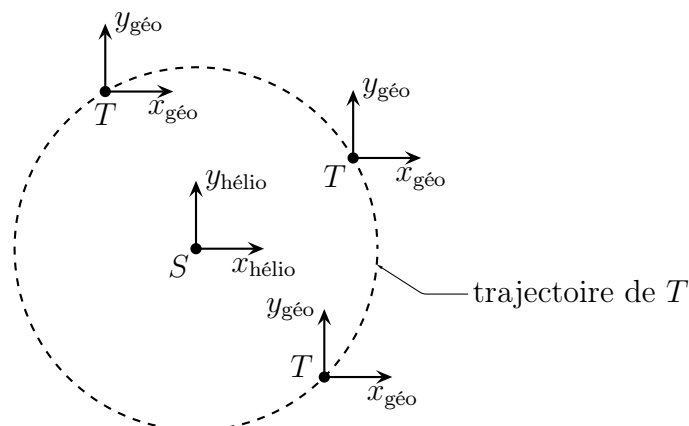
### ★ référentiel géocentrique

Le *référentiel géocentrique* est le référentiel centré sur centre de masse de la Terre et dont les axes restent parallèles à ceux du référentiel de COPERNIC.

Le référentiel terrestre est en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique d'une période d'un an.

⊛ Ne pas confondre translation circulaire et rotation !

- ◇ Ci-dessous est représenté le référentiel terrestre à différents instants (séparés de plusieurs mois !)



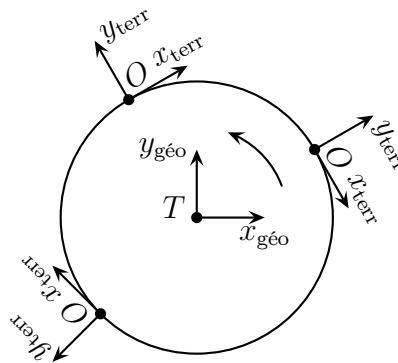
Le référentiel géocentrique est adapté à l'étude de corps céleste sur des durées bien inférieures à 1 an.

### ★ référentiel terrestre

- ◇ Autant il n'y a qu'un référentiel de COPERNIC, un référentiel héliocentrique, un référentiel géocentrique, autant il existe autant de référentiels terrestres que de situations particulières.

Un référentiel est dit *terrestre* s'il est lié la surface de la Terre, *ie.* si son centre et ses axes sont immobiles par rapport à la Terre.

- ◇ Ce n'est ni plus ni moins que le fameux « référentiel lié au laboratoire ».
- ◇ Le centre est souvent au niveau de la surface de la Terre quand l'étude porte sur un dispositif proche de la surface de la Terre. Ainsi, vu de dessus à des instants différents séparés de quelques heures :



- ◇ Le référentiel terrestre n'est pas en translation par rapport au référentiel de COPERNIC, il n'est donc pas galiléen et, en plus, nous ne pouvons pas encore faire de la mécanique dedans car il tourne.

### I.4.iii – pas de non galiléennité excessive

- ◇ Il est tout à fait légitime de parler de référentiel plus ou moins non galiléen car il est possible de chiffrer cette non galiléennité.
- ◇ Pour cela nous allons comparer la norme de la force d'inertie  $\|\vec{f}_{ie}\| = m a_e$  à celle du poids  $\|\vec{P}\| = m g$ , ce qui revient à comparer  $a_e$  et  $g$ .
- ◇ Reste à évaluer  $a_e$ .

### ★ référentiel héliocentrique

- ◇ Regardons ce que cela donne avec le référentiel héliocentrique.
- ◇ La trajectoire de  $O$  est circulaire de rayon  $R = 7,5 \cdot 10^5$  km et de période 29 ans. Cela donne :

$$a(O) = R\omega^2 = R \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \simeq 10^{-8} \text{ m.s}^{-2}$$

- ◇ Autant dire que le référentiel héliocentrique est galiléen. Du moins il l'est au milliardième près!
- ◇ Une autre façon de voir les choses est de dire que si le référentiel héliocentrique n'est pas galiléen, c'est à cause de Jupiter. En conséquence de quoi, supposer le référentiel héliocentrique revient à négliger l'influence de Jupiter. Ce n'est peut-être pas forcément toujours de bon aloi, surtout si Jupiter a eu le temps de se rapprocher de l'objet d'étude.

### ★ référentiel géocentrique

- ◇ Pour le référentiel géocentrique,  $T$  décrit une trajectoire circulaire de rayon  $R = 150.10^9$  m en 1,0 an. Cela donne de même :

$$a(T) = 6.10^{-3} \text{ m.s}^{-2} = 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$$

- ◇ Là, l'approximation référentiel galiléen se fait au millième. C'est une excellente première approximation et nous la ferons systématiquement, sauf précision contraire ou évolution à l'échelle de l'orbite terrestre autour du Soleil.
- ◇ Comme précédemment, pour que le référentiel géocentrique soit parfaitement galiléen il faudrait pouvoir négliger l'influence du Soleil (ou, ce qui revient au même) dire que le Soleil n'existe pas.
- ◇ Or un phénomène bien connu est causé en grande partie par le Soleil : les marées. Cela signifie que pour ces dernières, nous **devons** tenir compte du caractère non galiléen du référentiel géocentrique. Nous y reviendrons à la fin de ce chapitre.

### ★ référentiel terrestre

- ◇ Pour le référentiel terrestre, en prenant  $O$  au niveau de l'équateur, celui-ci décrit une trajectoire circulaire de rayon  $R = 6,4.10^6$  m en 1,0 jour sidéral = 86 164 s. Cela donne :

$$a(O) = R\omega^2 \simeq 10^{-1} \text{ m.s}^{-2} \ll g$$

- ◇ Nous pouvons donc dire que, sauf étude particulière (à l'échelle de la Terre par exemple), le référentiel terrestre est bien galiléen.
- ⊛ bien que nous ne l'ayons pas justifié encore pour un référentiel en rotation, le fait de calculer la force d'inertie d'entraînement de la manière précédente reste juste.

## I.5 – Étudier une situation

- ◇ Il n'y a pour ainsi dire aucune différence avec « avant » et notamment, bien que le référentiel terrestre soit non galiléen, nous allons continuer à le considérer comme tel.

### I.5.i – analyse physique

- ◇ Il faut tout d'abord choisir le référentiel d'étude. Comme nous l'avons dit en introduction ce sera :
- soit un référentiel naturel (voiture, train, manège, ...)
  - soit un référentiel imposé (bâti d'un sismographe, ...)
- ◇ Il faut ensuite bien voir en quoi ce référentiel est galiléen ou non (insistons : *a priori* le référentiel terrestre **est** galiléen).
- ◇ Une fois le référentiel choisi, **il faut s'y tenir et raisonner uniquement par rapport à lui**. Pour cela, il faut **refaire** un schéma comportant les axes de ce référentiel « droits » par rapport à la feuille.
- ◇ La suite est alors usuelle :
- décrire qualitativement le mouvement dans le référentiel,
  - préciser le nombre de degrés de liberté et le nombre de degrés de description
  - repérer si l'évolution est libre, forcée, conservative, ...
  - identifier les paramètres caractéristiques (ou grandeurs pertinentes) du problème



### I-5.ii – analyse technique

- ◇ Aucune différence ici par rapport à une étude dans un référentiel galiléen.
- ◇ Le repérage doit être le plus naturel possible étant donné l'étude qualitative faite avant (et notamment étant donné la trajectoire possible du ou des points matériels).
- ◇ Ensuite il faut choisir une approche : en terme de force ou d'énergie sachant que la force d'inertie d'entraînement n'est *a priori* pas conservative.

### I-5.iii – danger à éviter

- ◇ Le plus difficile dans les problèmes avec changement de référentiels reste l'interprétation.
- ◇ Tant que l'étude se fait dans un et **un seul** référentiel, en général tout va bien.
- ◇ Le problème vient du fait que le réflexe naturel (!) consiste à introduire des forces d'inertie dans les référentiels galiléens.

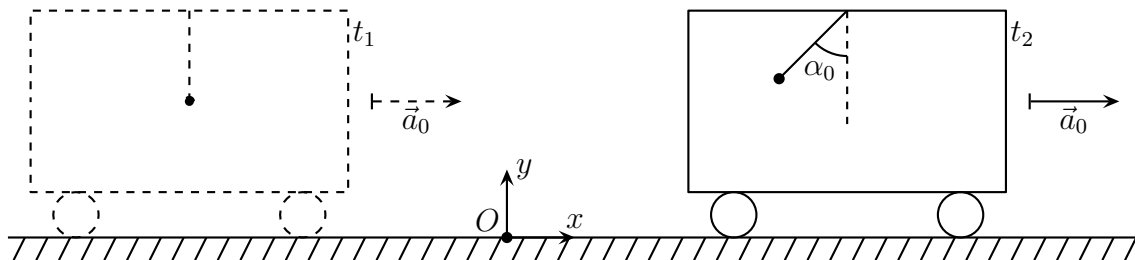
Il n'y a pas de force d'inertie dans les référentiels galiléens.

- ◇ Nous montrerons dans les exemples qui suivent à quel point les interprétations peuvent être piégeuses.
- ◇ En conséquence de quoi il faut se garder de toute interprétation hâtive.

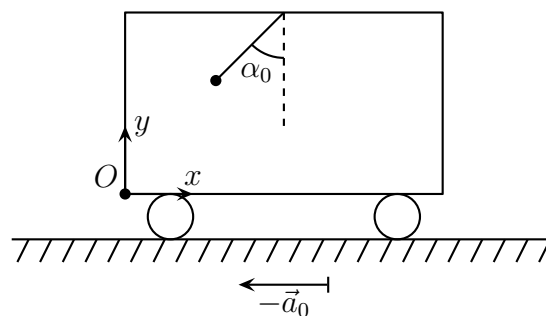
## I-6 – Pendule simple dans un train

### I-6.i – description – analyse

- ◇ Considérons un wagon au plafond duquel est accroché un pendule simple.
- ◇ Ce wagon accélère avec une accélération constante  $\vec{a}_0$ .
- ◇ Avec quel angle  $\alpha_0$  par rapport à la vertical va se stabiliser le pendule ?

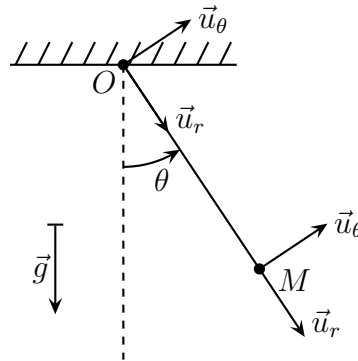


- ◇ Étant donné que le pendule est accroché au wagon, mieux vaut prendre ce dernier pour référentiel ... non galiléen.
- ◇ Commençons par redessiner la situation dans ce référentiel.



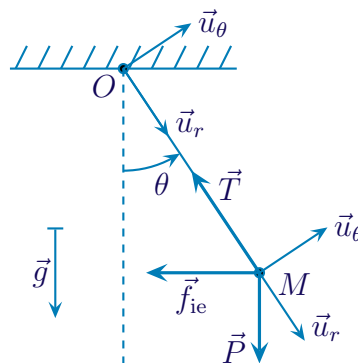
- ◇ Pour l'analyse physique :
  - il y a trois degrés de liberté mais en admettant que le fil soit tendu, il n'en reste que 2

- toutes les forces étant coplanaires à la vitesse initiale (nulle) le mouvement sera plan : il ne reste qu'un degré de description, la trajectoire sera circulaire
  - les grandeurs pertinentes :  $m$  pour la masse,  $\ell$  pour la géométrie,  $g$  pour l'action de la pesanteur,  $a_0$  pour l'action de la force d'inertie d'entraînement.
- ◇ Analyse technique :
- le repérage cylindro-polaire va de soi
  - ici, comme nous ne connaissons pas d'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement et bien que le mouvement soit libre, nous allons utiliser une approche en terme de forces
- ◇ Nous pouvons donc représenter la situation *physique* avec le schéma ci-dessous.



### I-6.ii – équation du mouvement dans $\mathcal{R}$

- ◇ Listons les forces qui s'exercent sur le système  $\{ m \}$  dans le référentiel *non galiléen* lié au wagon :
- force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = m g (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$
  - force de contact :
    - la tension exercée par le fil  $\vec{T} = -T \vec{u}_{\text{sortant}} = -T \vec{u}_r$
    - les frottements sont négligés
  - la force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_0 = m a_0 (-\sin \theta \vec{u}_r - \cos \theta \vec{u}_\theta)$



- ◇ Le « PFD » s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} &= m \vec{a} \\ &= m (-\ell \dot{\theta}^2(t) \vec{u}_r + \ell \ddot{\theta}(t) \vec{u}_\theta) \end{aligned}$$

- ◇ Et en projection sur  $\vec{u}_\theta$  (de manière à nous débarrasser de  $T$  inconnu) nous obtenons :

$$-m g \sin \theta + 0 - m a_0 \cos \theta = m \ell \ddot{\theta} \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) + \frac{a_0}{\ell} \cos \theta(t) = 0$$

◇ La position d'équilibre *par rapport au wagon* impose donc :

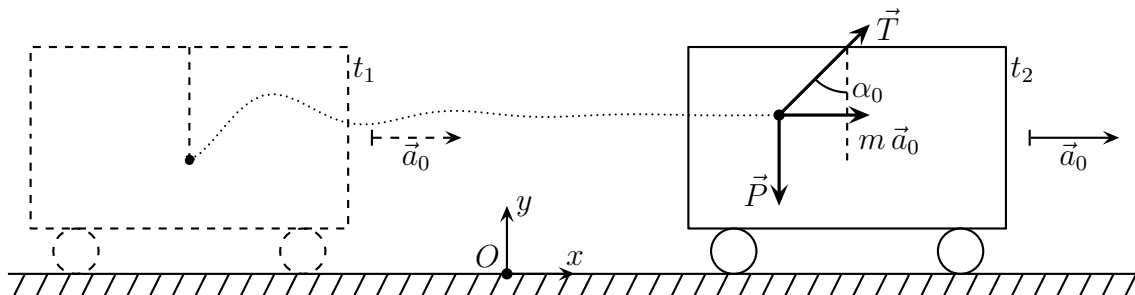
$$\ddot{\theta}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{g}{\ell} \sin \alpha_0 + \frac{a_0}{\ell} \cos \alpha_0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \tan \alpha_0 = -\frac{a_0}{g}$$

◇ Interprétation du résultat :

- $\alpha_0 < 0$ , ce qui est intuitif compte tenu de la force d'inertie
- la masse  $m$  n'intervient pas, ce qui est normal car les masses du poids et de la force d'inertie se simplifient
- la longueur  $\ell$  n'intervient pas! Nous aurions pu le deviner *a priori* avec une analyse dimensionnelle. Comme les grandeurs pertinentes sont  $m$ ,  $\ell$ ,  $g$  et  $a_0$ , la seule manière de fabriquer une grandeur sans dimension (comme  $\alpha_0$ ) est d'utiliser le rapport  $\frac{g}{a_0}$  (ou n'importe laquelle de ses puissances) donc sans utiliser  $\ell$ .

### I.6.iii – vision dans $\tilde{\mathcal{R}}$ de l'équilibre dans $\mathcal{R}$

◇ Dans le référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  le pendule n'est certainement pas à l'équilibre! En fait, comme il est attaché au wagon, si ce dernier a une accélération  $\vec{a}_0$  alors le pendule immobile *par rapport au wagon* doit aussi avoir une accélération  $\vec{a}_0$ .

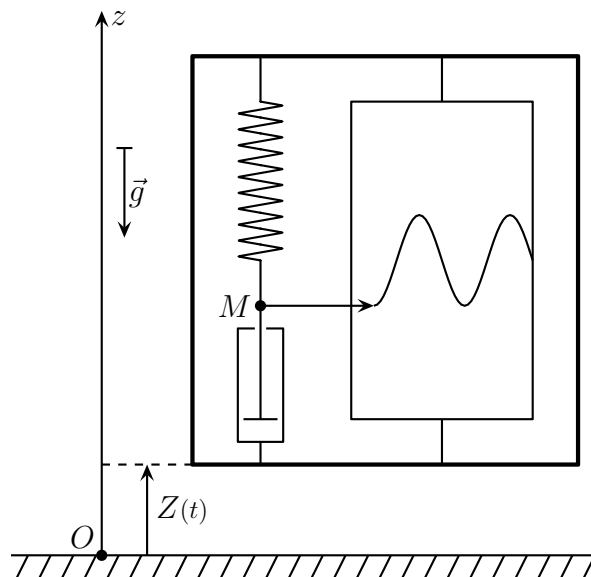


- ◇ Il faut aussi remarquer que, pour que le pendule se stabilise par rapport au wagon, des forces de frottement sont nécessaires!
- ◇ Les avoir négligées changent sans aucun doute l'équation d'évolution (et le fait que le pendule se stabilise) mais ne change pas la position d'équilibre, pourvu que les forces de frottement soient nulle lorsque  $\theta = C^{te}$ !

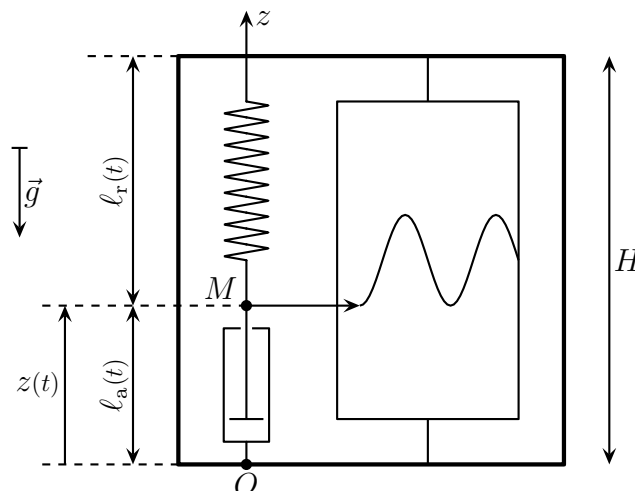
## I.7 – Sismographe

### I.7.i – description – analyse

- ◇ Un sismographe est constitué d'une boîte rigide dans laquelle le mouvement un stylet enregistre le mouvement qu'il a par rapport à la boîte. Le stylet est relié à un ressort et un amortisseur.
- ◇ La boîte est mise en mouvement vertical par rapport au référentiel terrestre considéré comme galiléen. La cote de la boîte est notée  $Z(t)$ .



- ◇ Étant donné que le mouvement intéressant est le mouvement du stylet *par rapport à la boîte*, nous allons tout naturellement choisir cette dernière comme référentiel.
- ◇ Redessinons la situation dans le référentiel de la boîte : cette dernière est donc immobile.



- ◇ Analyse physique :
  - la masse est mise en mouvement par les forces d'inertie : elle va osciller et être amortie, c'est un oscillateur mécanique « tout simple »
  - nous n'allons considérer ici qu'un seul degré de description à savoir le mouvement vertical de la masse
  - étant donnée l'excitation, le régime ici n'est pas libre mais forcé
  - les grandeurs pertinentes sont  $m$  pour la masse,  $H$  pour la géométrie,  $k$ ,  $\ell_0$  pour le ressort,  $h$  pour l'amortisseur,  $g$  pour la pesanteur,  $\ddot{Z}(t)$  pour les forces d'inertie.
- ◇ Analyse technique :
  - le repérage va à peu près de soi : l'origine est prise sur l'axe du mouvement avec un repérage ascendant
  - nous allons utiliser l'approche en terme de force étant donné que le mouvement n'est pas conservatif

### I.7.ii – équation du mouvement

- ◇ La liste des forces qui s'exercent sur  $\{ m \}$  dans le référentiel de la boîte est :
  - force à distance : le poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$

→ force de contact :

→ la force exercée par le ressort :  $\vec{f}_{\text{ressort}} = -k(\ell_r(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{sort, res}} = -k(\ell_r(t) - \ell_0) (-\vec{u}_z)$

→ la force exercée par l'amortisseur :  $\vec{f}_{\text{amort}} = -h \frac{d\ell_a(t)}{dt} \vec{u}_{\text{sort, am}} = -h \frac{d\ell_a(t)}{dt} \vec{u}_z$

→ les autres forces de frottement (air, ...) sont négligées

→ la force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{\text{ie}} = -m \vec{a}_{|\mathcal{F}}(O) = -m \ddot{Z}(t) \vec{u}_z$

◇ Le « PFD » s'écrit donc :

$$\vec{P} + \vec{f}_{\text{ressort}} + \vec{f}_{\text{amort}} + \vec{f}_{\text{ie}} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad -m g \vec{u}_z + k(\ell_r(t) - \ell_0) \vec{u}_z - h \frac{d\ell_a(t)}{dt} \vec{u}_z - m \ddot{Z}(t) \vec{u}_z = m \ddot{z}(t)$$

◇ Nous voulons une équation en  $z(t)$  donc nous allons devoir « éliminer »  $\ell_r(t)$  et  $\ell_a(t)$ .

◇ Géométriquement, nous avons :

$$\ell_r(t) = H - z(t) \quad \text{et} \quad \ell_a(t) = z(t)$$

◇ Nous obtenons ainsi en projection sur  $\vec{u}_z$  :

$$-m g + k(H - z(t) - \ell_0) - h \frac{dz(t)}{dt} - m \ddot{Z}(t) = m \frac{d^2 z(t)}{dt^2}$$

◇ Et en réarrangeant les termes :

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dz(t)}{dt} + \frac{k}{m} z(t) = -\ddot{Z}(t) + \frac{k}{m} (H - \ell_0) - g$$

### I.7.iii – lecture

◇ L'équation différentielle obtenue est bien homogène (ouf!)

◇ Nous pouvons constater que, sous forme canonique, les trois coefficients de  $z(t)$ ,  $\frac{dz(t)}{dt}$  et  $\frac{d^2 z(t)}{dt^2}$  sont de même signe : la solution ne diverge pas, c'est rassurant.

◇ Du côté des sources (le second membre) :

→ il y a un terme d'excitation  $-\ddot{Z}(t)$

→ il y a un terme correspondant à la position d'équilibre dont nous pouvons voir qu'elle est d'autant plus basse que  $H$  est petit,  $\ell_0$  est grand ou  $g$  est grand, normal quoi!

◇ Enfin, l'équation obtenue est une équation **linéaire** ce qui signifie que pour la résoudre, nous allons pouvoir décomposer l'excitation en ses différentes harmoniques et résoudre morceau par morceau en RSF.

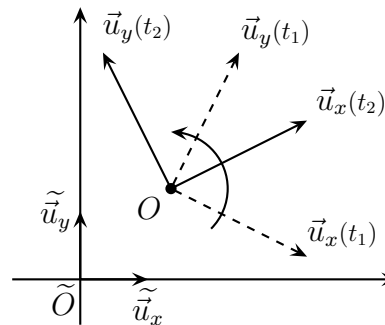
## II – Référentiel en rotation pure et uniforme

### II.1 – Définir deux référentiels en rotation pure

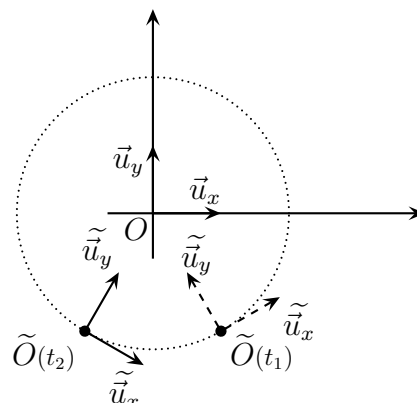
#### II.1.i – c'est tout simple

Un référentiel  $\mathcal{R}$  est en *rotation pure* par rapport à un autre référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  lorsque le centre du premier est immobile par rapport au deuxième.

- ◇ Des exemples :
  - un référentiel lié à un manège qui tourne par rapport au référentiel terrestre
  - un référentiel terrestre centré sur l'axe de rotation de la Terre qui tourne par rapport au référentiel géocentrique
- ◇ Un référentiel terrestre centré sur la surface de la Terre voit son centre effectuer une rotation dans le référentiel géocentrique : il n'est donc pas en rotation *pure*.
- ◇ Voilà comment cela se représente.



- ◇ Attention, si un référentiel  $\mathcal{R}$  est en rotation pure par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , le référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  n'est pas forcément en rotation pure par rapport à  $\mathcal{R}$ .
- ◇ Refaisons le schéma précédent par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .



Deux référentiels sont en rotation pure l'un par rapport à l'autre si leurs centres sont confondus.

- ◇ Dans la suite, nous prendrons toujours  $O = \tilde{O}$  car :
  - c'est plus facile techniquement
  - c'est plus naturel : si le point  $O$ , centre de la rotation du référentiel  $\mathcal{R}$ , est immobile par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , c'est qu'il est physiquement et intrinsèquement particulier (pensez au centre de rotation d'un manège) et mérite donc d'être particularisé en étant *aussi* le centre de  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

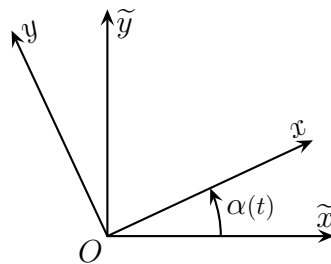
- ◇ De même pour l'axe de rotation qui constitue un axe physiquement privilégié, nous allons techniquement le privilégier.

Lorsque la rotation se fait autour d'un axe unique, cet axe est choisi comme l'un des axes du repère.

- ◇ La plupart du temps ce sera l'axe  $\vec{u}_z$ .

### II.1.ii – rotation uniforme

- ◇ Étant donné que nous avons choisi d'étudier deux référentiels de mêmes centres  $\tilde{O}$  et  $O$ , la seule chose qui reste à faire pour les décrire entièrement c'est de préciser l'angle  $\alpha(t)$  entre les deux.



Pour deux référentiels en rotation pure, la seule connaissance de l'angle  $\alpha(t)$  entre les deux permet de décrire entièrement le mouvement de l'un par rapport à l'autre.

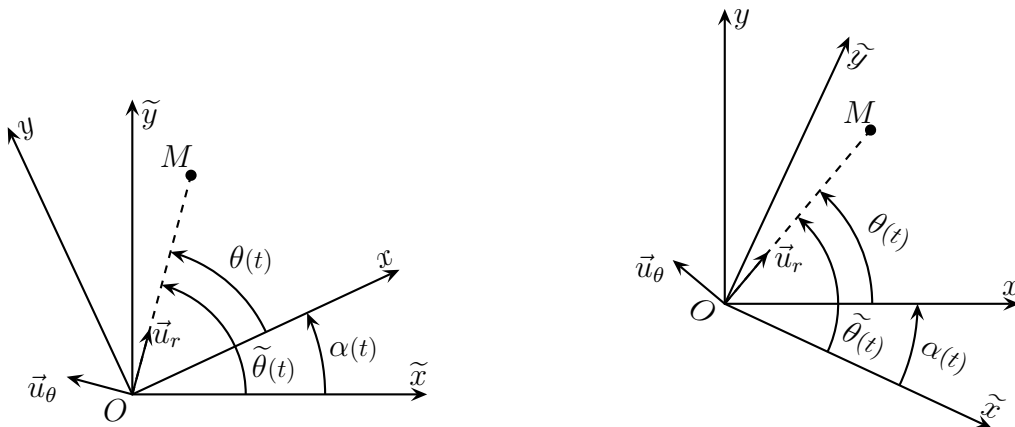
Deux référentiels sont en *rotation uniforme* si la vitesse angulaire de rotation de l'un par rapport à l'autre est constante.

- ◇ Dans cette partie, nous étudierons donc le cas où  $\dot{\alpha}(t) = C^{\text{te}}$ , ce que nous noterons  $\omega \stackrel{\text{not}}{=} \dot{\alpha}(t)$ .

## II.2 – Description du mouvement dans les deux référentiels

### II.2.i – poser les notations

- ◇ Cette fois, et contrairement au cas où les deux référentiels étaient en translation, nous n'avons pas à décrire le mouvement de  $O$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ . En revanche, il va falloir décrire le mouvement de  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$ .
- ◇ Comment décrire la position de  $M$  par rapport aux deux référentiels  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  ?
- ◇ Étant donné qu'il est question de *rotation*, il semble plus naturel de choisir une description cylindro-polaire.
- ◇ Faisons un schéma, ou plutôt deux, histoire de mieux voir : un dans le référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$  et un dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .



◇ L'avantage c'est que les **vecteurs** décrivant le mouvement dans  $\tilde{\mathcal{R}}$  et dans  $\mathcal{R}$  sont les mêmes, à savoir  $(\vec{u}_r(t), \vec{u}_\theta(t), \vec{u}_z)$ . Ce sont, certes, des vecteurs fonction du temps, mais au moins ce sont les mêmes.

◇ Il va falloir, en revanche faire très attention à la manière dont nous allons les dériver.

◇ Description du mouvement de  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Les coordonnées sont  $(r(t), \tilde{\theta}(t), z(t))$ .

→ vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}_r(t) + z(t) \vec{u}_z$$

→ vecteur vitesse :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \dot{r}(t) \vec{u}_r(t) + r(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z$$

→ vecteur accélération :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M, t) = \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\tilde{\theta}}^2(t) \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2\dot{r}(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) + r(t) \ddot{\tilde{\theta}}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z$$

◇ Description du mouvement de  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Les coordonnées sont  $(r(t), \theta(t), z(t))$ .

→ vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \vec{u}_r(t) + z(t) \vec{u}_z$$

→ vecteur vitesse :

$$\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M, t) = \dot{r}(t) \vec{u}_r(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z$$

→ vecteur accélération :

$$\vec{a}_{|\mathcal{R}}(M, t) = \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t) \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2\dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z$$

◇ Pour la position, il n'y a rien à faire, le vecteur position est le même :

$$r(t) \vec{u}_r + z(t) \vec{u}_z = r(t) \vec{u}_r + z(t) \vec{u}_z$$

## II.2.ii – vitesse

◇ Écrivons la vitesse de  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  et remplaçons  $\dot{\tilde{\theta}}(t)$  par  $\dot{\tilde{\theta}}(t) = \dot{\theta}(t) + \dot{\alpha}(t)$ . N'oublions pas que  $\dot{\alpha}(t) \stackrel{\text{not}}{=} \omega = C^{\text{te}}$ .



$$\begin{aligned}
\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) &= \dot{r}(t) \vec{u}_r(t) + r(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z \\
&= \dot{r}(t) \vec{u}_r(t) + r(t) \left( \dot{\theta}(t) + \omega \right) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z \\
&= \dot{r}(t) \vec{u}_r(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t) \vec{u}_z + r(t) \omega \vec{u}_\theta(t) \\
&= \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) + r(t) \omega \vec{u}_\theta(t)
\end{aligned}$$

◇ Nous pouvons constater, sans trop de surprise que :

- les deux vitesses  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)$  et  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  sont bien différentes, conformément au fait que les vitesses sont des grandeurs relatives
- la différence entre les deux vitesses  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)$  et  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  est  $r(t) \omega \vec{u}_\theta(t)$ , *ie.* dépend du mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$

◇ Mais nous pouvons aussi constater, avec un peu plus de surprise que, contrairement au cas où les référentiels étaient en translation, la différence entre les deux vitesses  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)$  et  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  dépend aussi de  $r(t)$  et  $\vec{u}_\theta(t)$ , *ie.* de la **position** de  $M$ .

## II.2.iii – accélération

◇ Partons de l'expression de l'accélération de  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  et, comme pour la vitesse, remplaçons  $\tilde{\theta}(t)$  par  $\theta(t) + \alpha(t)$ . N'oublions pas que  $\dot{\alpha}(t) = \omega = \text{C}^{\text{te}}$ .

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) &= \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\tilde{\theta}}^2(t) \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2\dot{r}(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) + r(t) \ddot{\tilde{\theta}}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \\
&= \left( \ddot{r}(t) - r(t) \left( \dot{\theta}(t) + \omega \right)^2 \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2\dot{r}(t) \left( \dot{\theta}(t) + \omega \right) + r(t) \left( \ddot{\theta}(t) + 0 \right) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \\
&= \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t) - r(t) \omega^2 - 2r(t) \dot{\theta}(t) \omega \right) \vec{u}_r(t) \cdots \\
&\quad \cdots + \left( 2\dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + 2\dot{r}(t) \omega + r(t) \ddot{\theta}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \\
&= \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t) \right) \vec{u}_r(t) + \left( 2\dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t) \right) \vec{u}_\theta(t) + \ddot{z}(t) \vec{u}_z \cdots \\
&\quad \cdots - r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t) - 2r(t) \dot{\theta}(t) \omega \vec{u}_r(t) + 2\dot{r}(t) \omega \vec{u}_\theta \\
&= \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) - r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t) + 2\omega \left( -r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_r(t) + \dot{r}(t) \vec{u}_\theta \right)
\end{aligned}$$

◇ Nous pouvons faire les mêmes constatations que pour la vitesse :

- les accélérations par rapport aux deux référentiels sont différentes
- la différence dépend de  $\omega$  donc du mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$

◇ La différence entre les deux accélérations se sépare en deux termes de nature physique différente :

- le premier terme  $-r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t)$  dépend de  $\omega$  mais aussi de la **position** de  $M$ , comme pour la vitesse
- le second terme  $-2\omega \left( r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_r(t) + \dot{r}(t) \vec{u}_\theta \right)$  dépend aussi de  $\omega$  mais surtout dépend de la **vitesse de  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$** . C'est un terme assez étrange en fait.

## II.2·iv – écriture intrinsèque

### ★ objectif

- ◇ Dans ce paragraphe, nous allons chercher une écriture des lois de composition qui ne dépend pas de la manière de repérer le point  $M$ .
- ◇ En effet nous avons repéré  $M$  avec les coordonnées cylindro-polaires car la vision simultanée par rapport aux deux référentiels faisaient apparaître une rotation naturelle. Mais, plus tard, lorsque nous nous contenterons d'étudier la situation dans un seul des deux référentiels,  $\mathcal{R}$ , l'aspect « rotation » ne sera peut-être plus naturelle et nous utiliserons alors parfois les coordonnées cartésiennes.
- ◇ Nous voulons donc écrire les lois de composition en fonction de  $\overrightarrow{OM}(t)$ ,  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t)$ ,  $\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  et du mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ .
- ◇ Dans la partie précédente, le mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrivait simplement de manière intrinsèque avec le mouvement de  $O$  :  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t)$  et  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t)$ .
- ◇ Sauf que maintenant, le mouvement est une rotation. Il faut donc d'abord chercher à décrire de manière intrinsèque la rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

### ★ décrire la rotation

- ◇ Pour décrire la rotation, il faut plusieurs choses :
  - la position de l'axe de rotation (ou l'axe instantané s'il change à chaque instant)
  - la direction de l'axe de rotation
  - le sens de la rotation
  - la vitesse angulaire de rotation
- ◇ Comme nous nous limitons au cas où  $\mathcal{R}$  est en rotation pure par rapport  $\tilde{\mathcal{R}}$ , nous n'avons pas besoin de préciser la position de l'axe de rotation : nous savons déjà qu'il passe par  $O$ .
- ◇ Il ne reste plus qu'à définir les trois autres caractéristiques. Nous le ferons par un vecteur qui est appelé taux de rotation en SI.

Le *vecteur rotation*  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  caractérise la rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Il est tel que :

- sa direction soit celle de l'axe de rotation
- son sens est donné par la règle de la main droite
- sa norme est la vitesse angulaire  $\Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$  et donc  $[\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}] = [\omega] = \text{rad.s}^{-1}$ .

- ◇ Pour nous, le vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  sera quasiment toujours porté par  $\vec{u}_z$ .

RÈGLE DE LA MAIN DROITE

En fermant légèrement la main (comme pour tenir un bâton) et en tenant le pouce en l'air, les doigts indique le sens de rotation et le pouce le sens du vecteur correspondant à cette rotation.

Montrer ce qu'il en est avec un vecteur de rotation du type  
 $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} = \Omega \vec{u}_z$ .

### ★ interlude produit vectoriel

- ◇ Car nous allons en avoir bien besoin !

Lorsque  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ , alors :

- $\vec{c}$  est orthogonal à  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , ie.  $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$  et  $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$
- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  forment un trièdre direct
- $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\vec{a}, \vec{b})$

Propriétés de base :

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$  si et seulement si  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont colinéaires.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

Avec les vecteurs d'une base orthonormée directe,  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  ou  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , nous avons :

$$\begin{cases} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z \\ \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x \\ \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_r \\ \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_\theta \end{cases}$$

Pour déterminer les composantes, nous avons :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

### ★ réécrire la loi de composition des vitesses

◇ Nous avons pour l'instant  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) + r(t) \omega \vec{u}_\theta(t)$ .

◇ Nous savons que  $\vec{\Omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\tilde{\mathcal{R}}} = \omega \vec{u}_z$ .

◇ Il y a du  $r(t)$  associé avec du  $\vec{u}_\theta$ , seul un produit vectoriel peut faire ça. Alors calculons  $\vec{\Omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM}$  :

$$\vec{\Omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega \vec{u}_z \wedge (r(t) \vec{u}_r + z(t) \vec{u}_z) = \omega r(t) \vec{u}_\theta$$

La loi de composition des vitesses s'écrit entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{\Omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

### ★ réécrire la loi de composition des accélérations

◇ Nous avons pour l'instant  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) - r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t) + 2\omega \left( -r(t) \dot{\theta}(t) \vec{u}_r(t) + \dot{r}(t) \vec{u}_\theta \right)$ .

◇ Cherchons chaque terme séparément.

◇ Le premier terme  $-r(t) \omega^2 \vec{u}_r(t)$  associe  $r(t)$  et  $\vec{u}_r$  : c'est presque le vecteur position. Sans le  $z(t) \vec{u}_z$ . Nous allons donc l'écrire  $-\omega^2 \overrightarrow{HM}$  où  $H$  est le projeté de  $M$  sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation.

◇ Le second terme s'écrit  $2\omega \left( -r(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_r(t) + \dot{r}(t)\vec{u}_\theta \right)$ . Calculons  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) &= \omega \vec{u}_z \wedge \left( \dot{r}(t)\vec{u}_r + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta(t) + \dot{z}(t)\vec{u}_z \right) \\ &= \omega \dot{r}(t)\vec{u}_\theta - \omega r(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_r + \vec{0}\end{aligned}$$

La loi de composition des accélérations s'écrit entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) - \omega^2 \overrightarrow{HM} + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) \quad \text{où :}$$

$H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$ .

⊞ la projection de  $H$  se fait sur l'axe de  $\mathcal{R}$  **portant** le vecteur rotation, **pas** sur l'axe de rotation physique. Si le centre  $O$  n'est pas choisi sur l'axe de rotation, attention à la casse ! Ceci dit, si  $O$  n'est pas choisi sur l'axe de rotation réel,  $\mathcal{R}$  n'est plus en rotation pure ...

## II.2.v – écriture traditionnelle

◇ Cela permettra de faire (un peu) d'interprétation.

### ★ lois de composition

La loi de composition des vitesses entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) &= \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{v}_e(M,t) \quad \text{où :} \\ \vec{v}_e(M,t) &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \text{ est la vitesse d'entraînement.}\end{aligned}$$

La loi de composition des accélérations entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{a}_e(M,t) + \vec{a}_c(M,t) \quad \text{où :}$$

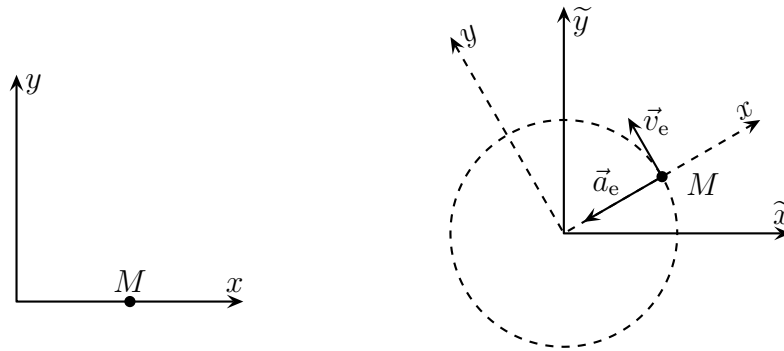
- $\vec{a}_e(M,t) = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$  avec  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation est l'accélération d'entraînement
- $\vec{a}_c(M,t) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  est l'accélération de CORIOLIS, appelée aussi accélération complémentaire.

### ★ vitesse et accélération d'entraînement

◇ L'interprétation est la même que pour les référentiels en translation.

La vitesse et l'accélération d'entraînement sont la vitesse et l'accélération qu'aurait  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  si  $M$  était fixe par rapport à  $\mathcal{R}$ .

- ◇ Regardons ce qu'il en est pour un cas simple :  $M$  est immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ . Dans ces conditions  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{v}_e(M,t)$  et  $\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{a}_e(M,t)$ .



- ◇ Nous pouvons constater que l'accélération d'entraînement correspond à l'accélération radiale du mouvement circulaire uniforme qu'a  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

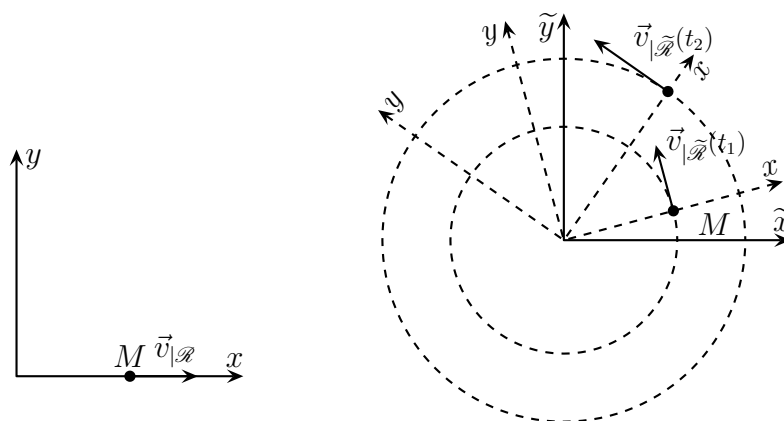
Lorsque  $\mathcal{R}$  est en rotation pure et uniforme par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , l'accélération d'entraînement est dirigée vers l'axe de rotation, *ie.* elle est *centripète*.

### ★ accélération de CORIOLIS

- ◇ C'est un terme plus difficile à interpréter de manière générale. Étudions plutôt deux exemples mettant en avant les effets de l'accélération de CORIOLIS suivant que la vitesse est suivant  $\vec{u}_r$  ou suivant  $\vec{u}_\theta$ .
- ◇ N'oublions pas qu'il s'agit d'un terme qui doit s'interpréter par rapport au référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

### 🕒 vitesse suivant $\vec{u}_r$ par rapport à $\mathcal{R}$

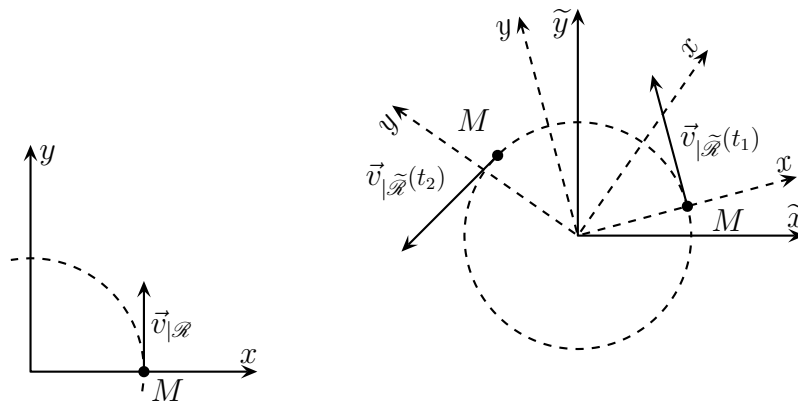
- ◇ Dessinons les deux situations, dans  $\mathcal{R}$  puis dans  $\tilde{\mathcal{R}}$ .  $t_1$  est un instant avant que  $M$  ne se mette en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$  et  $t_2$  un instant une fois  $M$  réimmobilisé.



- ◇ Nous pouvons constater que  $\|\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(t_2)\| > \|\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(t_1)\|$ . L'accélération de CORIOLIS est l'accélération qui a permis l'augmentation de la vitesse tangentielle.

### 🕒 vitesse suivant $\vec{u}_\theta$ par rapport à $\mathcal{R}$

- ◇ Dessinons les deux situations, dans  $\mathcal{R}$  puis dans  $\tilde{\mathcal{R}}$ .



- ◇ Nous pouvons constater que  $\|\vec{v}_{\tilde{\mathcal{R}}}(t_2)\| > \|\vec{v}_{\tilde{\mathcal{R}}}(t_1)\|$ . L'accélération de CORIOLIS aide l'accélération d'entraînement à faire tourner le point  $M$ .

## II.3 – Les lois de la mécanique

### II.3.i – le PFD change mais ne change pas

Soit  $M$  un point matériel étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors nous avons :

$$m \vec{a}_{|\mathcal{R}} = \sum \vec{f} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} \quad \text{où :}$$

- $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e(M, t)$  est la *force d'inertie d'entraînement*
- $\vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c(M, t)$  est la *force d'inertie de CORIOLIS*

### II.3.ii – la force d'inertie d'entraînement

- ◇ La force d'inertie d'entraînement s'écrit  $\vec{f}_{ie} = +m \omega^2 \overrightarrow{HM}$  où  $H$  est le projeté sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation.
- ◇ Cette force est orthogonale à l'axe

La force d'inertie est centrifuge.

- ◇ C'est un peu ce qui est appelé la force centrifuge. Le problème c'est que le terme « force centrifuge » est souvent utilisé pour expliquer des phénomènes dans des référentiels *galiléens* où **cette force n'existe pas**.
- ◇ Par exemple pour le panier à essorer la salade. Un panier tourne (vite) et de l'eau est éjectée. Mais ce n'est pas la force centrifuge qui l'éjecte puisque, par rapport au référentiel galiléen dans lequel nous pouvons voir tourner le panier à salade, cette force n'existe pas.
- ◇ Dans le référentiel galiléen, s'il fallait que les gouttes d'eau restent sur les feuilles, alors elles auraient une trajectoire circulaire uniforme et la salade devraient exercer sur elles des forces intenses (proportionnelles à  $\omega^2$ ). Or l'eau glisse un peu sur les feuilles et les forces mises en jeu ne peuvent pas être aussi intenses. Donc les gouttes d'eau ne tournent pas avec la salade, elles vont tout droit.
- ◇ Regardons ce qui se passe vraiment dans le référentiel par rapport au référentiel non galiléen.

Montrer la vidéo de la bille

- ◇ Là, oui, il y a la force centrifuge.

### II.3.iii – la force d'inertie de CORIOLIS

- ◇ Tout comme l'accélération de CORIOLIS, la force d'inertie d'entraînement est plus difficile à interpréter dans le cas général.
- ◇ Nous nous contenterons de l'interpréter au cas par cas.

### II.3.iv – aspect énergétique des forces d'inertie

- ◇ Nous pourrions faire les mêmes démonstrations que celles faites dans le cours sur l'énergétique et nous trouverions les théorèmes suivants.

#### THÉORÈME DE LA PUISSANCE CINÉTIQUE

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors :

$$\frac{dE_c(t)}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{ic}) \quad \text{où :}$$

- $E_c(t) = \frac{1}{2} m v_{|\mathcal{R}}^2(M,t)$  est l'énergie cinétique par rapport à  $\mathcal{R}$
- $\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}$  est la puissance fournie par  $\vec{f}$  dans  $\mathcal{R}$
- $\mathcal{P}(\vec{f}_{ie})$  et  $\mathcal{P}(\vec{f}_{ic})$  sont les puissances fournies par les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS

#### THÉORÈME DE LA PUISSANCE MÉCANIQUE

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors :

$$\frac{dE_m(t)}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{nc}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{ic}) \quad \text{où :}$$

- $E_m(t) = E_m + E_p$  est l'énergie mécanique par rapport à  $\mathcal{R}$
- $\mathcal{P}(\vec{f}_{nc}) = \vec{f}_{nc} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}$  est la puissance fournie par les forces non conservatives.
- $\mathcal{P}(\vec{f}_{ie})$  et  $\mathcal{P}(\vec{f}_{ic})$  sont les puissances fournies par les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS

#### THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors entre deux points de sa trajectoire, nous pouvons écrire :

$$\Delta E_c(t) = \sum W(\vec{f}) + W(\vec{f}_{ie}) + W(\vec{f}_{ic}) \quad \text{où :}$$

- $E_c(t) = \frac{1}{2} m v_{|\mathcal{R}}^2(M,t)$  est l'énergie cinétique par rapport à  $\mathcal{R}$
- $W(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}$  est le travail fourni par  $\vec{f}$  dans  $\mathcal{R}$
- $W(\vec{f}_{ie})$  et  $W(\vec{f}_{ic})$  sont les travaux fournis par les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS

## THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

Soit  $M$  un point matériel de masse  $m$  étudié par rapport à un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  et soumis à  $\sum \vec{f}$ . Alors entre deux points de sa trajectoire :

$$E_m(t) = \sum W(\vec{f}_{nc}) + W(\vec{f}_{ie}) + W(\vec{f}_{ic}) \quad \text{où :}$$

- $E_m(t) = E_c + E_p$  est l'énergie mécanique par rapport à  $\mathcal{R}$
- $W(\vec{f}_{nc})$  est le travail fourni par une force non conservative  $\vec{f}_{nc}$
- $W(\vec{f}_{ie})$  et  $W(\vec{f}_{ic})$  sont les travaux fournis par les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS

◇ Comme nous nous intéressons aux forces d'inertie, ces considérations énergétiques se font dans le référentiel tournant  $\mathcal{R}$ .

## ★ la force d'inertie de CORIOLIS

La force d'inertie de CORIOLIS ne travaille jamais.

◇ En d'autres termes la force d'inertie de CORIOLIS ne fait que dévier les points matériels.

◇ Calculons le travail élémentaire qu'elle fournit à  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$\delta W_{ic} = \vec{f}_{ic} \cdot d\vec{r} = -2m (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)) \cdot \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) dt = 0$$

◇ C'est à redire de manière systématique.

## ★ la force d'inertie d'entraînement

La force d'inertie d'entraînement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  en rotation pure et uniforme par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  est conservative et son énergie potentielle vaut :

$$E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m \omega^2 H M^2 \quad \text{où :}$$

- $\omega$  est la vitesse de rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$
- $H$  est le projeté de  $M$  sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur de rotation.

## 🌀 démonstration

◇ Cherchons s'il existe une énergie potentielle telle que  $\delta W_{ie} = -dE_p$ .

$$\begin{cases} \vec{f}_{ie} = +m \omega^2 r \vec{u}_r \\ d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z \end{cases} \rightsquigarrow \delta W = \vec{f}_{ie} \cdot d\vec{r} = +m \omega^2 r dr \stackrel{?}{=} -dE_p$$

◇ Ainsi :  $\frac{dE_p}{dr} = -m \omega^2 r$  donne  $E_p = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + C^{te}$  et avec la convention usuelle (énergie potentielle nulle lorsque la force est nulle), nous trouvons bien le résultat énoncé.

## 🌀 interprétation

◇ L'énergie d'autant plus faible que la distance à l'axe est grande et nous savons qu'un point est « attiré » vers les zones où l'énergie est faible.



- ◇ En conséquence : l'énergie associée à la force d'inertie d'entraînement traduit bien le fait que cette force est centrifuge.

## II.4 – Référentiels galiléens

### II.4.i – une condition identique

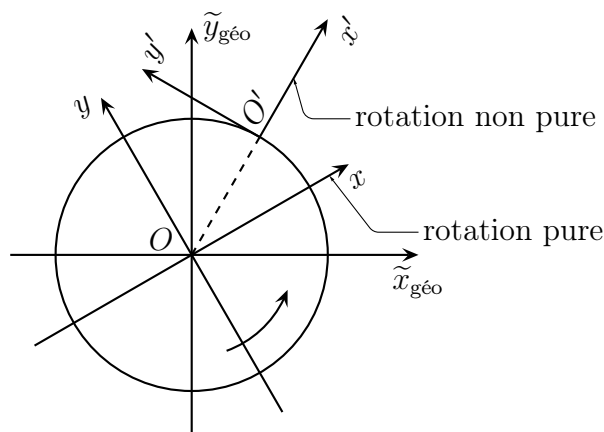
- ◇ Nous pouvons constater que dès lors que  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \neq \vec{0}$ , il existe des forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS.

Un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen ne peut pas être galiléen.

Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de COPERNIC.

### II.4.ii – le référentiel terrestre

- ◇ Considérons les référentiels héliocentrique et géocentrique galiléens.  
 ◇ Alors pour que le référentiel terrestre soit en rotation pure par rapport au référentiel géocentrique, il faut le centrer sur l'axe.



Le référentiel terrestre n'est en rotation pure par rapport au référentiel géocentrique que s'il est centré sur l'axe de rotation de la Terre.

- ◇ La force d'inertie d'entraînement s'écrit alors :

$$\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_{ie} \quad \text{avec} \quad \vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

- ◇ Numériquement cela donne :

$$\|\vec{a}_e\| \simeq \left( \frac{2\pi}{86\,164} \right)^2 \times 6,4 \times 10^6 \simeq 10^{-1} \text{ m.s}^{-2}$$

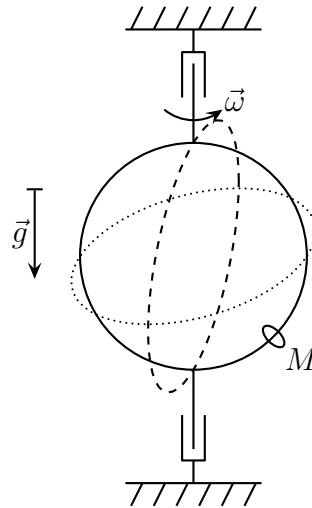
- ◇ Ce résultat montre bien que  $\|\vec{a}_e\| \ll \|\vec{g}\|$  donc que le référentiel terrestre peut légitimement être considéré galiléen.

## II.5 – Tour de manège pour une bille

◇ Repensons à la vidéo de la bille et essayons d'étudier et de décrire la position d'équilibre.

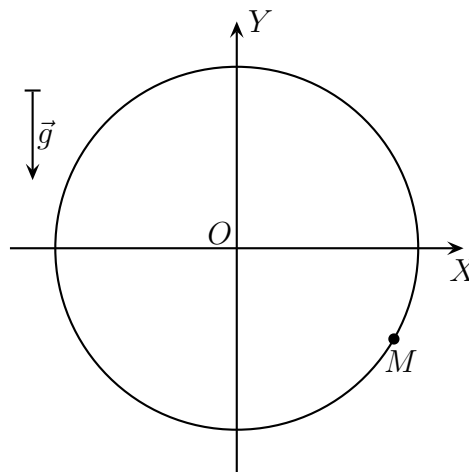
### II.5.i – description – analyse

◇ Considérons un cercle dans un plan vertical sur lequel une perle peut se déplacer sans frottement. Le cercle est mis en rotation autour de son diamètre vertical à la vitesse angulaire  $\omega = C^{\text{te}}$  par un moteur (non représenté).



◇ L'expérience montre que la perle se stabilise à une certaine hauteur. Laquelle ?

◇ Étant donné que le cerceau a un mouvement contraint et que la bille se déplace sur lui, nous allons le choisir comme référentiel. La situation est désormais la suivante :



◇ Analyse physique :

- la perle  $M$  va avoir tendance à s'éloigner de l'axe grâce à la force d'inertie, mais en s'éloignant elle monte et ce mouvement sera contrarié par la pesanteur : un point d'équilibre peut effectivement être atteint
- le mouvement de la perle est circulaire, il n'y a ici qu'un seul degré de liberté donc un seul degré de description
- le mouvement est libre et puisqu'il n'y a pas de frottement et que la force d'inertie est conservative, le mouvement est globalement conservatif
- les grandeurs pertinentes :  $m$  pour la masse,  $R$  pour la géométrie,  $\omega$  pour la force d'inertie et  $g$  pour la pesanteur

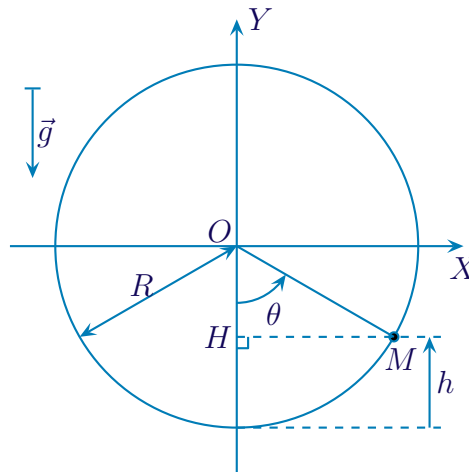
◇ Analyse technique, elle est immédiate :

- le mouvement circulaire impose un repérage cylindro-polaire
- un mouvement à un degré de description libre et conservatif nous incite plus que fortement à utiliser une méthode énergétique

## II-5-ii – position d'équilibre

### ★ existence

◇ Pour trouver la position d'équilibre, nous devons chercher les valeurs  $\theta_{\text{eq}}$  tels que  $\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_{\text{eq}}) = 0$ .



◇ Les forces qui s'exercent sur la perle sont :

- force à distance : le poids dont l'énergie potentielle s'écrit  $E_{p,\text{pes}} = m g h = m g R (1 - \cos \theta)$
- force de contact :
  - la réaction normale du support qui ne travaille pas puisque le support est immobile
  - les frottements (solide et fluide) sont négligés
- force d'inertie :
  - la force d'inertie d'entraînement est associée à l'énergie potentielle

$$E_{p,\text{ie}} = -\frac{1}{2} m \omega^2 H M^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \sin^2 \theta$$

→ la force d'inertie de CORIOLIS ne travaille pas

◇ L'énergie potentielle totale s'écrit donc :

$$E_p = E_{p,p} + E_{p,\text{ie}} = m g R (1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \sin^2 \theta$$

◇ Et ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{d\theta}(\theta) &= +m g R \sin \theta - m \omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta \\ &= m R \sin \theta (g - \omega^2 R \cos \theta) \end{aligned}$$

◇ Nous voyons donc qu'il y a deux positions d'équilibre possibles :

$$\theta_{\text{eq},1} = 0 \quad \text{et} \quad \cos \theta_{\text{eq},2} = \frac{g}{R \omega^2}$$

◇ La deuxième position d'équilibre n'existe que pour  $R \omega^2 > g$ , i.e. que si les forces d'inertie sont suffisamment grandes.

★ **stabilité**

◇ Pour qu'une position d'équilibre soit stable, il faut que  $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{\text{eq}}) > 0$ .

◇ Calculons d'abord  $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta)$  :

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta) = +m g R \cos \theta - m \omega^2 R^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = +m g R \cos \theta - m \omega^2 R^2 (2 \cos^2 \theta - 1)$$

◇ Pour  $\theta_{\text{eq},1} = 0$  cela donne :

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{\text{eq},1}) = +m g R - m \omega^2 R^2 = m R (g - R \omega^2)$$

◇ Nous avons donc :  $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{\text{eq},1}) > 0$  pour  $g > R \omega^2$ , *ie.* la position d'équilibre  $\theta_{\text{eq},1} = 0$  est stable si et seulement si la position d'équilibre  $\theta_{\text{eq},2}$  n'existe pas.

◇ Pour  $\theta_{\text{eq},2}$  cela donne :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta_{\text{eq},1}) &= +m g R \frac{g}{R \omega^2} - m \omega^2 R^2 \left( 2 \frac{g^2}{R^2 \omega^4} - 1 \right) \\ &= -\frac{m g^2}{\omega^2} + m \omega^2 R^2 = \frac{m}{\omega^2} (R^2 \omega^4 - g^2) \end{aligned}$$

◇ Finalement la position d'équilibre  $\theta_{\text{eq},2}$  est stable si  $R^2 \omega^4 > g^2$  autrement dit elle est stable dès lors qu'elle existe.

★ **interprétation finale**

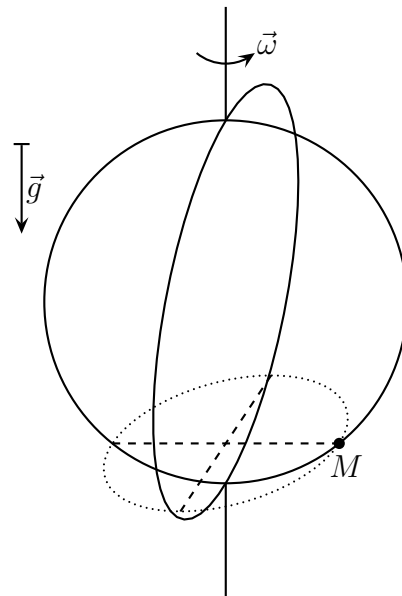
◇ La position  $\theta_{\text{eq},1} = 0$  est naturelle : c'est celle qui existerait avec  $\omega = 0$ . Il est donc cohérent de la retrouver pour  $\omega \rightarrow 0$ .

◇ Plus  $\omega$  est grand, plus  $\cos \theta_{\text{eq},2}$  est petit et à la limite  $\theta_{\text{eq},2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$  ce qui est là aussi cohérent : plus  $\omega$  est grand, plus les forces d'inertie sont grande et plus la tendance « éloignement de l'axe » prend le dessus sur la pesanteur.

II.5.iii – vision de l'« équilibre » par rapport au référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$ ★ **vision en terme de forces**

◇ Considérons la position d'équilibre de  $M$  par rapport au cerceau, *ie.* considérons que  $\theta = \theta_{\text{eq}} = \text{C}^{\text{te}}$ .

◇ Alors la trajectoire de  $M$  dans  $\tilde{\mathcal{R}}$  est circulaire de rayon  $HM = R \sin \theta_{\text{eq}}$ .



◇ Le PFD appliqué à  $M$  dans  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$m \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M) = \vec{P} + \vec{R}_N \quad \rightsquigarrow \quad -m (R \sin \theta_{\text{éq}}) \omega^2 \vec{u}_r = \vec{P} + \vec{R}_N$$

◇ Et en passant le terme d'accélération de l'autre côté du signe égal, nous retrouvons l'écriture de l'équilibre dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié au cerceau :

$$\underbrace{m (R \sin \theta_{\text{éq}}) \omega^2 \vec{u}_r}_{\vec{f}_{\text{ie}}} + \vec{P} + \vec{R}_N = \vec{0}$$

### ★ vision en termes énergétiques

◇ Nous raisonnons toujours dans le référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

◇ Imaginons le cerceau en train de tourner. La perle est initialement immobile en position basse, monte sur le cerceau et se stabilise à sa position finale.

◇ Le TEC s'écrit alors :

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) = -\Delta E_{p,p} + W(\vec{R}_N)$$

◇ Or :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m \left( R \sin \theta_{\text{éq}} \times \omega \right)^2 - 0 > 0 ; \quad -\Delta E_{p,p} = -m g h < 0 \quad \text{et} \quad W(\vec{R}_N) \stackrel{?}{=} 0$$

◇ Cela semble impossible . . . Et même rajouter les forces de frottements ne ferait qu'empirer le problème parce que  $W_{\text{frott}} < 0$  !

◇ La solution de ce « paradoxe » est simple : c'est parce que dans ce référentiel le support (le cerceau) n'est pas immobile, en conséquence de quoi le travail fourni par  $\vec{R}_N$  n'est pas *a priori* nul.

◇ Nous voyons là un exemple flagrant montrant que le travail fourni par une force est une grandeur *relative*.

## II-6 – Lanceur de ball-trap

### II-6.i – description – analyse

- ◇ Un lanceur de ball-trap est un dispositif qui, à l'aide d'un simple ressort, permet d'envoyer des pigeons d'argile de 50 à 100 m.



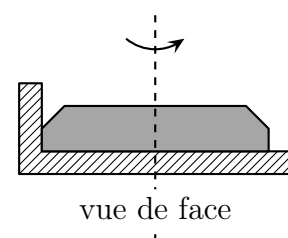
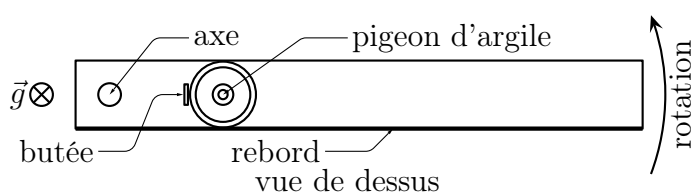
- ◇ Un pigeon d'argile est un simple disque.



- ◇ Nous allons étudier pourquoi la rotation du bras permet d'éjecter le disque.

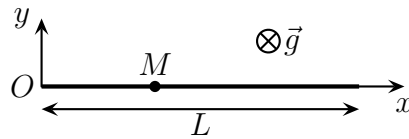
#### ★ simplification

- ◇ Nous allons simplifier le problème :
- nous allons considérer que le lanceur tourne dans un plan horizontal
  - nous allons supposer que la rotation du bras se fait à vitesse angulaire constante
- ◇ Bien sûr ces deux simplifications sont fausses, mais elles ne changent pas la phénoménologie du dispositif, *ie.* son aspect qualitatif.
- ◇ Nous pouvons donc dessiner le lanceur de la manière suivante.



## ★ analyses

- ◇ Comme il y a une rotation du bras et que le lanceur est astreint à se déplacer uniquement le long de celui-ci, nous allons étudier l'ensemble dans le référentiel *non galiléen* lié au lanceur.
- ◇ Commençons par dessiner le *schéma* de la situation.



## ◇ Analyse physique :

- le pigeon  $M$  va être mis en mouvement par la force d'inertie vers l'extérieur du bras du lanceur
- le mouvement est à un seul degré de liberté donc de description
- le mouvement est, ici, libre et conservatif car la force d'inertie dans un référentiel en rotation uniforme est associée à une énergie potentielle
- les paramètres pertinents sont :  $m$  pour la masse,  $L$  pour la géométrie,  $\omega$  pour la force d'inertie et  $x_0$  pour les conditions initiales. Le poids ne jouant aucun rôle,  $g$  n'interviendra pas.

## ◇ Analyse technique :

- le repérage est immédiat
- un mouvement à un seul degré de description et conservatif : l'approche énergétique est plus appropriée

## II.6.ii – mouvement

- ◇ Pour l'exemple, nous allons faire les deux approches, même si nous savons d'avance que l'approche énergétique sera plus efficace.

## ★ approche en terme de force

- ◇ Dans le référentiel lié au lanceur, les forces qui s'exercent sur  $\{ \}$  sont :

- force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_z$
- forces de contact :
  - l'action normale du support :  $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_{\text{sort}} = R_N \vec{u}_z$
  - les frottements avec le support et l'air sont négligés
- les forces d'inertie :
  - la force d'inertie d'entraînement s'écrit :  $\vec{f}_{ie} = +m \omega^2 \overrightarrow{HM} = +m \omega^2 x(t) \vec{u}_x$
  - la force d'inertie de CORIOLIS :

$$\vec{f}_{ic} = -2 m \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2 m \omega \vec{u}_z \wedge \dot{x}(t) \vec{u}_x = -2 m \omega \dot{x}(t) \vec{u}_y$$

- ◇ Le « PFD » s'écrit donc :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m \vec{a}$$

- ◇ Cela donne, en projection sur  $\vec{u}_x$  :

$$0 + 0 + m \omega^2 x(t) + 0 = m \ddot{x} \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{x}(t) - \omega^2 x(t) = 0$$

- ◇ La présence du signe «  $-$  » nous rassure sur le fait que  $x(t)$  va diverger, *ie.* que le pigeon d'argile va se diriger vers l'extrémité.

### ★ approche énergétique

- ◇ Comme il s'agit de trouver l'équation différentielle vérifiée par le mouvement, nous allons utiliser un TPM plutôt qu'un TEM.
- ◇ Ce dernier s'écrit :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc} \quad \text{avec} \quad E_m = E_c + E_p \quad \text{où} \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)$$

- ◇ L'énergie potentielle se réduit à l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement car la pesanteur n'intervient pas (mouvement horizontal) ainsi :

$$E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m \omega^2 H M^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 x^2(t)$$

- ◇ De plus  $\mathcal{P}_{nc} = 0$  car il n'y a pas de frottement et que le support est immobile et aussi parce que la force d'inertie de CORIOLIS ne travaille pas.
- ◇ Il reste donc :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2(t)$$

- ◇ Ce qui donne, en simplifiant par la solution  $\dot{x}(t) = 0$  non intéressante correspondant à l'équilibre dans le référentiel lié au lanceur :

$$m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) - m\omega^2 \dot{x}(t)x(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{x}(t) - \omega^2 x(t) = 0$$

- ◇ Nous retrouvons bien la même équation qu'avec l'approche en terme de forces et ce de manière moins compliquée.

### ★ résolution

- ◇ La solution générale est du type :

$$x(t) = \cosh(\omega t) + B \sinh(\omega t)$$

- ◇ Les conditions initiales  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$  donnent rapidement :

$$x(t) = x_0 \cosh(\omega t)$$

- ◇  $x(t)$  diverge, c'est rassurant.

- ◇ L'extrémité du lanceur est atteinte à  $t_f$  tel que :

$$x(t_f) = L \quad \rightsquigarrow \quad x_0 \cosh(\omega t_f) = L \quad \rightsquigarrow \quad t_f = \frac{1}{\omega} \operatorname{argch} \frac{L}{x_0}$$

### ★ petit paradoxe

- ◇ Projettons le PFD sur  $\vec{u}_y$  :

$$0 - 2m\omega \dot{x}(t) \vec{u}_y = 0$$

- ◇ Cela semble impossible. Et pourtant NEWTON ne saurait mentir !

- ◇ La raison en fait est que la réaction normale au support est **normale** au support : si celui-ci a pour but de guider suivant  $\vec{u}_x$  cela implique qu'il faut le contraindre en  $\vec{u}_z$  **et**  $\vec{u}_y$ .

- ◇ Autrement dit, la réaction normale devrait s'écrire :



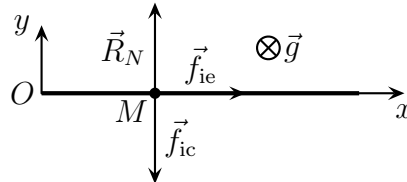
$$\vec{R}_N = R_{N,y} \vec{u}_y + R_{N,z} \vec{u}_z$$

- ◇ D'ailleurs nous pouvons voir sur le premier schéma « vue de face » un rebord, rebord qui va, justement exercer la force dirigée suivant  $\vec{u}_y$  ...

### II.6.iii – interprétation

★ dans  $\mathcal{R}$

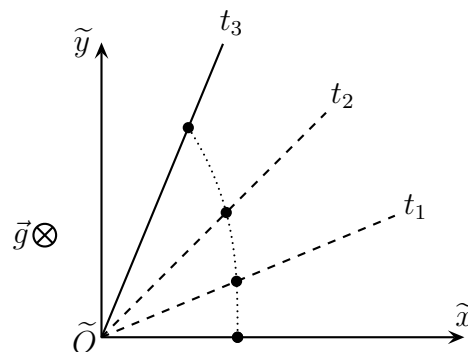
- ◇ Représentons la situation dans  $\mathcal{R}$ .



- ◇ Dans ce référentiel, la force d'inertie de CORIOLIS permet de contraindre le pigeon d'argile à rester sur le lanceur.

★ dans  $\tilde{\mathcal{R}}$

- ◇ Avec un support qui bouge, nous ne devons plus être étonné du fait que  $\vec{R}_N$  travaille et apporte de l'énergie.  
 ◇ De plus, comme  $\vec{R}_N$  tourne, puisqu'elle reste normale à la direction du lanceur, cela permet à la trajectoire d'être incurvée.



## III – Référentiel en mouvement quelconque

### III.1 – Dériver dans deux référentiels différents

#### III.1.i – notation de la dérivée

- ◇ Une difficulté de notation va venir du fait que les vecteurs peuvent parfois être considérés comme constants et parfois être considérés comme variables. Ainsi :

vecteurs	par rapport à $\tilde{\mathcal{R}}$	par rapport à $\mathcal{R}$
$(\tilde{u}_x, \tilde{u}_y)$	constants	variables
$(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$	variables	constants

- ◇ Cela ne représente pas vraiment une difficulté pour ces vecteurs puisqu'il suffit de mettre  $\vec{u}_x(t)$  ou  $\tilde{u}_x$ . En revanche, pour d'autres vecteurs tels que  $\vec{OM}(t)$ , il faut savoir quels vecteurs sont considérés comme constants et quels vecteurs sont considérés comme variables.

La dérivée d'un vecteur quelconque  $\vec{A}(t)$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  se note  $\frac{d\vec{A}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$ .

- ⊛ il n'y a aucune ambiguïté en ce qui concerne les grandeurs scalaires :  $\frac{dx(t)}{dt}$  restera le même que le vecteur  $\vec{u}_x$  soit considéré comme constant ou non.

#### III.1.ii – loi

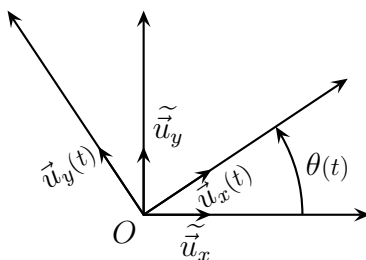
##### ★ énoncé

Soient  $\mathcal{R}$  en rotation par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$ , alors, pour tout vecteur

$$\vec{A}(t) : \quad \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{A}(t)$$

##### ★ petite vérification

- ◇ Vérifions simplement que cette formule fonction pour dériver  $\vec{u}_x(t)$  et  $\vec{u}_y(t)$  par rapport au référentiel  $\tilde{\mathcal{R}}$ .
- ◇ Faisons un schéma.



- ◇ Imaginons un point  $M$  fixe par rapport à l'axe  $(Ox)$ . Alors, pour ce point repéré en coordonnées cylindro-polaire par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , nous avons  $\vec{u}_r = \vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y = \vec{u}_\theta$ .
- ◇ Dans ces conditions, nous savons aussitôt que :

$$\frac{d\vec{u}_x(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{d\vec{u}_r(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta = \dot{\theta}(t) \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_y(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{d\vec{u}_\theta(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = -\dot{\theta}(t) \vec{u}_r = -\dot{\theta}(t) \vec{u}_x$$

- ◇ Nous pouvons aussi calculer :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{u}_x = \dot{\theta}(t) \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x(t) = \dot{\theta}(t) \vec{u}_y(t) = \frac{d\vec{u}_x(t)}{dt} \\ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{u}_y = \dot{\theta}(t) \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y(t) = -\dot{\theta}(t) \vec{u}_x(t) = \frac{d\vec{u}_y(t)}{dt} \end{cases}$$

Les dérivées par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  des vecteurs définissant  $\mathcal{R}$  s'écrivent :

$$\frac{d\vec{u}_x(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{u}_x(t) \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_y(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{u}_y(t)$$

où  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$  est le vecteur rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ .

- ◇ Par linéarité de la décomposition d'un vecteur sur les vecteurs de base ainsi que par linéarité du produit vectorielle, nous pouvons en déduire que cette relation est vraie pour tous les vecteurs.

### ★ cas particulier du vecteur rotation

Soient un référentiel  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , alors :

$$\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$$

## III.2 – Loi de composition des vitesses

### III.2.i – loi

- ◇ Dérivons le vecteur position  $\vec{OM}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  d'une part et utilisons la formule de la dérivée dans deux référentiels différents d'autre part.
- ◇ Cela donne :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) &= \frac{d\vec{OM}(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{d(\vec{OO} + \vec{OM})}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{d\vec{OO}}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} + \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} \\ &= \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{OM} \end{aligned}$$

La loi de composition des vitesses s'écrit entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{v}_e(M,t) \quad \text{où :}$$

$$\vec{v}_e(M,t) = \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \text{ est la vitesse d'entraînement.}$$

### ★ interprétation

- ◇ La vitesse d'entraînement est là aussi la vitesse qu'aurait le point  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'il était immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ .

Le *point coïncidant* est le point immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}$  qui coïncide à un instant précis avec le point  $M$  étudié.

- ◇ Chaque point coïncidant est immobile, mais à chaque instant le point coïncidant change, ce n'est pas le même.
- ◇ Le point coïncidant est donc un point immobile qui change à chaque instant de place ...
- ◇ Il serait plus exact de parler **des** points coïncidants de sorte de ne pas provoquer de crash intellectuel, mais la tradition parle elle **du** point coïncidant.

Faire l'exemple de l'élève coïncidant.

## III-2-ii – retrouver les cas particuliers

### ★ translation

- ◇ Si le référentiel  $\mathcal{R}$  est en translation par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , alors  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} = \vec{0}$  et la vitesse d'entraînement se réduit à  $\vec{v}_e(M,t) = \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t)$ .
- ◇ Nous retrouvons bien ce que nous savions des référentiels en translation.

### ★ rotation pure et uniforme

- ◇ Si le référentiel  $\mathcal{R}$  est en rotation pure par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , alors  $\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) = \vec{0}$  et la vitesse d'entraînement se réduit à  $\vec{v}_e(M,t) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM}(t)$ .
- ◇ Nous retrouvons bien ce que nous savions des référentiels en rotation pure.

## III-3 – Loi de composition des accélérations

### III-3-i – loi

- ◇ Dérivons la vitesse.

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) &= \frac{d}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} \left( \vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \\
&= \frac{d\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} + \frac{d\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} + \frac{d(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM})}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} \\
&= \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \left( \frac{d\vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) \right) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} \right) \\
&= \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} \dots \\
&\quad \dots + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \\
&= \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \left( \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \right) + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)
\end{aligned}$$

La loi de composition des vitesses s'écrit entre  $\tilde{\mathcal{R}}$  et  $\mathcal{R}$  en rotation de vecteur rotation  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$\vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}}(M,t) + \vec{a}_e(M,t) + \vec{a}_c(M,t) \quad \text{où :}$$

- $\vec{a}_e(M,t) = \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \left( \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \right)$  est l'accélération d'entraînement
- $\vec{a}_c(M,t) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$  est l'accélération de CORIOLIS

### ★ interprétation

- ◇ Le premier point qui frappe c'est le fait que l'écriture est bien plus lourde ! D'une certaine manière c'est normal : plus les lois sont générales, plus leurs écritures sont complexes.
- ◇ Dans la lourdeur de cette loi, nous pouvons constater la présence d'un terme que nous pouvons appeler « accélération d'entraînement » puisque c'est celle qu'*aurait* le point  $M$  considéré s'il est était immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ .
- ◇ Mais nous pouvons aussi voir la présence d'un autre terme à la phénoménologie bien particulière : c'est l'accélération de CORIOLIS qui dépend non seulement du mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  mais aussi et surtout de la vitesse de  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$  !

### III.3.ii – retrouver les cas particuliers

#### ★ translation

- ◇ Le cas de la translation s'écrit se traduit par  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} = \vec{0}$ .
- ◇ Dans ces conditions, nous trouvons tout de suite :

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O) \quad \text{et} \quad \vec{a}_c = \vec{0}$$

- ◇ Il s'agit bien là des résultats que nous connaissions.

### ★ rotation pure uniforme

◇ Quand  $\mathcal{R}$  est en rotation pure uniforme par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$ , cela se traduit par :

$$\vec{v}_{|\tilde{\mathcal{R}}}(O,t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} = \vec{C}^{\text{te}}$$

◇ Dans ces conditions, l'accélération de CORIOLIS s'écrit bien  $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$ .

◇ Et l'accélération d'entraînement donne, quant à elle :

$$\begin{aligned} \vec{a}_e &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \left( \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \right) = \omega \vec{u}_z \wedge (\omega \vec{u}_z \wedge (r \vec{u}_r + z \vec{u}_z)) \\ &= \omega \vec{u}_z \wedge (\omega r \vec{u}_\theta + \vec{0}) = -\omega^2 r \vec{u}_r = -\omega^2 \overrightarrow{HM} \end{aligned}$$

### III.3.iii – bilan

◇ Il faut clairement éviter les référentiels en rotation non pure et pour cela, dès que c'est possible, il faut choisir le centre du référentiel d'étude (le non galiléen) sur l'axe physique de rotation.

◇ Dans le cas où un tel choix ne serait vraiment pas judicieux et que le référentiel est en rotation non pure, il est recommandé de déterminer  $\vec{a}_e$  (et parfois  $\vec{v}_e$ ) grâce à leurs interprétations : c'est la vitesse qu'*aurait* le point  $M$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  si il était fixe par rapport à  $\mathcal{R}$ .

## III.4 – Propriétés des vecteurs rotation

### III.4.i – première loi

#### ★ énoncé

◇ La loi est très intuitive!

Si le vecteur rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\tilde{\mathcal{R}}$  est  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$ , alors le le vecteur rotation de  $\tilde{\mathcal{R}}$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est :

$$\vec{\Omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}} = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$$

◇ Autrement dit deux référentiels tournent en sens opposés l'un par rapport à l'autre

#### ★ démonstration

◇ La démonstration est fort simple. Partons de la loi générale :

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{A}(t)$$

◇ Passons le dernier terme de l'autre côté du signe « = ». Cela donne :

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} - \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{A}(t)$$

◇ Et nous obtenons le résultat en identifiant avec :

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\tilde{\mathcal{R}}} - \vec{\Omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}} \wedge \vec{A}(t)$$

### III.4.ii – composition des rotations

#### ★ énoncé

◇ Là aussi la loi est intuitive.

Soient trois référentiels  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$ . En notant  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}$  (resp.  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3}$ ) le vecteur de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_2$  (resp. le vecteur rotation de  $\mathcal{R}_2$  par rapport à  $\mathcal{R}_3$ ), alors le vecteur rotation de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_3$  est :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_3} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3}$$

◇ C'est une sorte de relation de CHASLES des vecteurs rotation.

#### ★ démonstration

◇ Utilisons deux fois successivement la loi de dérivée dans deux référentiels différents :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_3} &= \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3} \wedge \vec{A}(t) \\ &= \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} \wedge \vec{A}(t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3} \wedge \vec{A}(t) \\ &= \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_1} + \left( \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3} \right) \wedge \vec{A}(t) \end{aligned}$$

◇ Et nous obtenons le résultat en identifiant avec :

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_3} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_3} \wedge \vec{A}(t)$$

## IV – Mécanique en référentiels terrestres

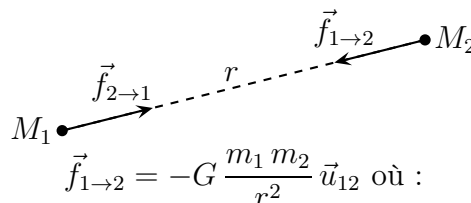
◇ Dans cette partie nous allons préciser quels effets peut avoir le fait que les référentiels liés à la Terre (les référentiels terrestre et géocentriques) sont non galiléens.

### IV.1 – Interaction gravitationnelle

#### IV.1.i – lois

##### ★ en terme de force

Deux points  $M_1$  et  $M_2$  de masse  $m_1$  et  $m_2$  s'attirent et exercent une force l'un sur l'autre telle que



- $G$  est la constante universelle de gravitation
- $r$  est la distance entre les deux masses
- $\vec{u}_{12}$  est le vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2.

La *masse grave* caractérise la capacité d'un corps à attirer et à être attiré par l'interaction gravitationnelle.

##### ★ en terme de champ

Un *champ* est une zone de l'espace dans laquelle il est possible de définir en chacun des points soit une grandeur vectorielle (champ de vecteurs ou champ vectoriel) soit une grandeur scalaire (champ scalaire).

Le *champ de gravitation* créé par un point  $P$  de masse  $m$  en un point  $M$  a pour expression :

$$\vec{\mathcal{G}}_P(M) = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}_{PM} \quad \text{où :}$$

- $G$  est la constante universelle de gravitation
- $r$  est la distance  $PM$
- $\vec{u}_{PM}$  est le vecteur unitaire dirigé de  $P$  vers  $M$ .

Dimensionnellement parlant :  $[\vec{\mathcal{G}}] = (\text{m}).(\text{s})^{-2} \equiv \text{accélération}$



Le point  $M_2$  de masse  $m_2$  est attiré par le point  $M_1$  de masse  $M_1$  selon l'expression :

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \vec{\mathcal{G}}_1(M_2) \quad \text{où :}$$

$\vec{\mathcal{G}}_1(M_2)$  est le champ de gravitation créé par le point 1 au point où se trouve  $M_2$ .

Le champ de gravitation a une étendue infinie.

◇ Dans les films quand nous entendons « Ça y est capitaine! Nous sommes sortis du champ de gravitation de la planète. » c'est *stricto sensu* complètement absurde. Cela dit, nous verrons dans un chapitre ultérieur que nous pourrions lui donner une certaine signification.

### ★ vision énergétique

La force gravitationnelle subie par un point  $M_2$  de la part de  $M_1$  est conservative et son énergie potentielle s'écrit :

$$E_{p,\text{grav}} = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad \text{où}$$

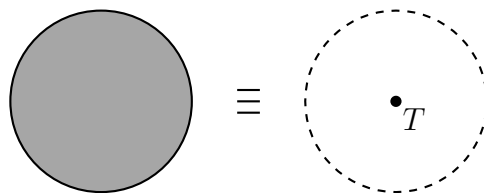
→  $G$  est la constante universelle de gravitation

→  $r$  est la distance  $PM$

◇ Nous ferons la démonstration plus tard car elle repose sur l'utilisation du repérage sphérique ... que nous n'avons pas encore vu.

### IV.1.ii – cas des astres

Les corps à symétrie sphérique se comporte, **du point de vue de la gravitation**, comme un point matériel situé en leurs centres et de masse leurs masses totales.



◇ Nous le montrerons plus tard.

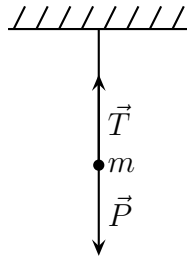
◇ Cela signifie que tant pour les forces subies que pour les forces exercées, nous pouvons remplacer un corps à symétrie sphérique par un point unique : ce n'est pas une approximation! Ce qui est une approximation, c'est de dire que tel ou tel astre est à symétrie sphérique.

◇ Il est bien évident que cela ne concerne que les forces de gravitation et que si sur un schéma la Terre est représentée ponctuelle, nous ne sous-entendons pas qu'elle est considérée comme ponctuelle : un objet posé sur sa surface restera à sa surface et ne se dirigera pas vers le centre de la Terre.

## IV.2 – Le poids

## IV.2.i – définition

Soit  $M$  un point matériel attaché à un fil idéal et immobile par rapport au référentiel terrestre. Alors le fil exerce une force opposée au *poids* du point matériel.



Dans ces conditions, la direction du fil est *verticale*.

En notant  $m$  la masse d'un point matériel et  $\vec{P}$  son poids, alors l'*accélération de pesanteur*  $\vec{g}$  vaut :

$$\vec{P} \triangleq m\vec{g}$$

◇ Il est tout à fait possible de parler du *champ de pesanteur* étant donné que nous pouvons définir  $\vec{g}$  dans toute une zone de l'espace (en général à la surface de la Terre).

## IV.2.ii – direction du fil à plomb

◇ Nous étudions donc le point matériel  $M$  d'un pendule simple immobile dans le référentiel terrestre considéré comme non galiléen.

◇ Les forces qui s'exercent sont donc :

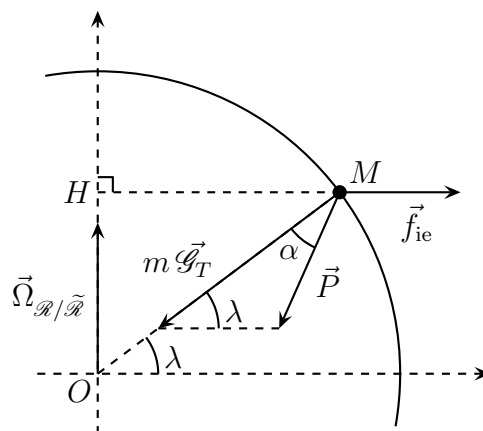
→ force à distance : l'interaction gravitationnelle exercée par la Terre  $\vec{f}_{\text{grav}} = m\vec{\mathcal{G}}_T(M)$

→ force de contact : le fil

→ force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{\text{ie}} = +m\omega^2 \overrightarrow{HM}$

→ force d'inertie de CORIOLIS : nulle car le point  $M$  est à l'équilibre

◇ À l'échelle de la Terre, le point  $M$  est véritablement à la surface de la Terre. Cela donne le schéma suivant où  $\lambda$  est la latitude du point considéré.



◇  $\mathcal{R}$  est le référentiel terrestre et  $\tilde{\mathcal{R}}$  est le référentiel géocentrique considéré comme galiléen.

◇ La somme de  $m\vec{\mathcal{G}}_T(M)$  et de  $\vec{f}_{\text{ie}}$  donne, par définition,  $\vec{P}$ .

◇ Ainsi, dans le triangle formé par les trois vecteurs, nous avons :

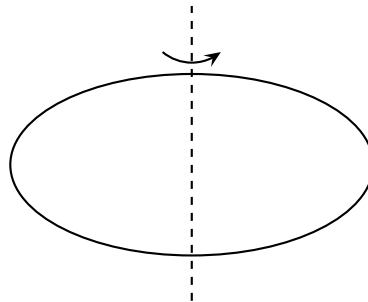
$$\frac{\sin \lambda}{m g} = \frac{\sin \alpha}{f_{ie}} \quad \rightsquigarrow \quad \sin \alpha = \frac{\omega^2 (HM) \sin \lambda}{g} = \frac{\omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda}{g} = \frac{\omega^2 R_T \sin(2 \lambda)}{2 g}$$

- ◇ Numériquement :  $\sin \alpha = \alpha \simeq 10^{-2} \text{ rad} = 0,5^\circ$ .
- ◇ Cela signifie qu, à nos latitude, **tout** est penché de  $0,5^\circ$  non pas par rapport à la verticale, mais par rapport à la direction qui pointe vers le centre de la Terre. En faisant un trou **parfaitement vertical**, nous n'arriverions pas au centre de la Terre.

### IV.2.iii – d'autres causes de variation

#### ★ causes globales

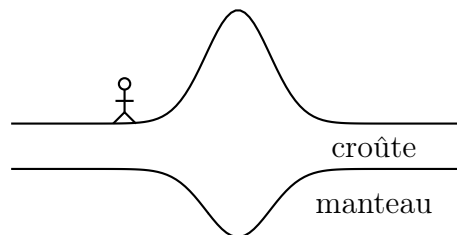
- ◇ La Terre est légèrement aplatie aux pôles.



- ◇ La différence entre les deux diamètres est de l'ordre de 40 km.

#### ★ causes locale

- ◇ La structure locale de la croûte terrestre peut aussi influencer le champ de pesanteur.
- ◇ Par exemple une montagne : sa racine s'enfonce aussi un peu dans le manteau, de manière analogue à un navire. La croûte étant moins dense que le manteau, le bonhomme « sent » un déficit d'attraction sur la droite donc tout se passe comme si la gauche l'attirait un peu plus.



### IV.2.iv – que faire avec le poids désormais ?

- ◇ Même si le poids ne se limite pas rigoureusement à l'attraction terrestre, nous allons continuer à le considérer comme une force à distance et ce, de manière systématique.

Que le référentiel terrestre soit considéré ou non comme galiléen nous prendrons toujours en compte le poids subi par un point matériel.

- ◇ Dans le poids est compté la contribution de la force d'inertie d'entraînement due au caractère non galiléen du référentiel terrestre.

⊛ c'est bien la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre qui est incluse dans le poids. Pour d'autres référentiels, il **faudra** compter la force d'inertie d'entraînement.

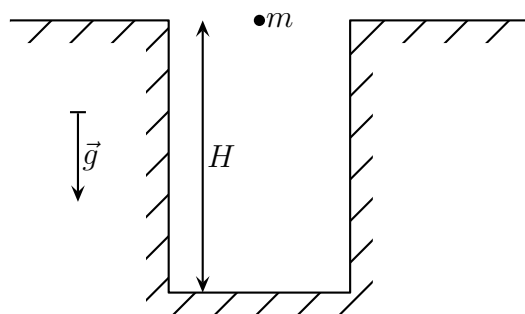
Il n'y a pas de force d'inertie d'entraînement dans le référentiel terrestre et uniquement dans le référentiel terrestre.

## IV·3 – Déviation vers l'est

### IV·3·i – situation – analyse

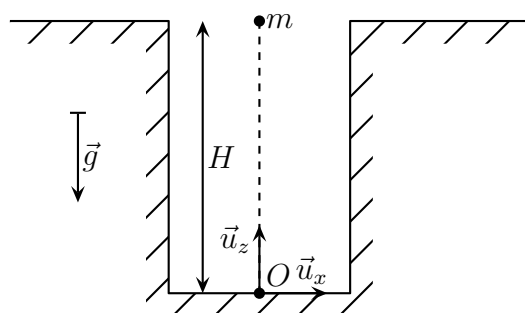
#### ★ expérience

- ◇ Considérons un petit objet de masse  $m$  lâché sans vitesse initial dans un puit de hauteur  $H$ .
- ◇ Nous allons étudier ce qui se passe de manière précise, *ie.* en tenant compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre.



#### ★ analyse

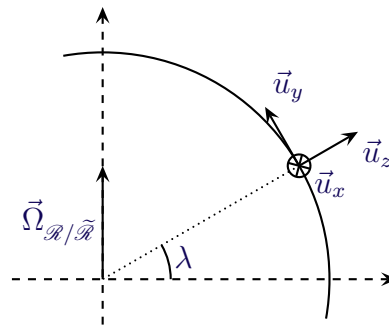
- ◇ Déjà le petit objet tombe vers le bas, c'est le mouvement principal : l'influence du caractère non galiléen sera minime.
- ◇ Nous avons tendance à dire que le mouvement devrait être plan, voire rectiligne avec une vitesse initiale nulle, sauf que là la force de CORIOLIS change la donne puisque cette force est orthogonale à la trajectoire.
- ◇ Finalement le mouvement est à 3 degrés de description  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ .
- ◇ Les grandeurs influençant le mouvement seront :  $m$ ,  $g$ ,  $\omega$  (vitesse de rotation terrestre)
- ◇ Nous allons repérer la position de  $M$  avec des coordonnées cartésiennes :  $\vec{u}_z$  sera vertical,  $\vec{u}_x$  vers l'est et  $\vec{u}_y$  vers le nord.



### IV·3·ii – équation régissant le mouvement

- ◇ Liste des forces s'exerçant sur le point  $M$  dans le référentiel terrestre :
  - force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_z$
  - force de contact : aucune, nous négligeons les frottements avec l'air
  - force d'inertie d'entraînement : déjà compté dans le poids
  - force d'inertie de CORIOLIS :  $\vec{f}_{ic} = -2 m \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathcal{R}}(M,t)$

◇ Cherchons les composantes de  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$  dans le repère choisi.



◇ Nous trouvons  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} = \omega (\cos \lambda \vec{u}_y + \sin \lambda \vec{u}_z)$  et ainsi :

$$\vec{f}_{ic} = -2m \vec{\Omega}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v} = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = -2m \begin{pmatrix} \Omega \dot{z}(t) \cos \lambda - \Omega \dot{y}(t) \sin \lambda \\ \Omega \dot{x}(t) \sin \lambda \\ -\Omega \dot{x}(t) \cos \lambda \end{pmatrix}$$

◇ Nous pouvons ainsi écrire le PFD et le projeter sur les trois axes.

$$\vec{P} + \vec{f}_{ic} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} m \ddot{x}(t) = -2m \Omega \dot{z}(t) \cos \lambda + 2m \Omega \dot{y}(t) \sin \lambda \\ m \ddot{y}(t) = -2m \Omega \dot{x}(t) \sin \lambda \\ m \ddot{z}(t) = -mg + 2m \Omega \dot{x}(t) \cos \lambda \end{cases}$$

◇ Nous pouvons constater que la résolution exacte risque de poser quelques difficultés car les équations différentielles sont couplées.

◇ D'un autre côté, nous savons qu'en première approximation le mouvement est celui d'une chute libre et que la différence est uniquement dû au terme perturbatoire qu'est la force d'inertie de CORIOLIS.

◇ C'est typiquement le genre de situation pour lequel nous pouvons utiliser la méthode de résolution par ordre successif.

### IV.3.iii – résolution à l'ordre 0

◇ Résolvons d'abord le cas où il n'y a pas de force d'inertie de CORIOLIS.

◇ Il s'agit de la chute libre sans frottement et sans vitesse initiale, ce qui donne, compte tenu des conditions initiales :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -gt \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = H - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

◇ Pas de surprise.

### IV.3.iv – résolution à l'ordre 1

#### ★ nouvelles équations horaires

◇ La méthode de résolution par ordre successif consiste à injecter une solution approchée dans un terme perturbatif et de rechercher la nouvelle solution.

- ◇ Nous devons donc remplacer les expressions de  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  et  $\dot{z}(t)$  dans les équations différentielles initiales. Cela donne :

$$\begin{cases} m \ddot{x}(t) = +2 m \Omega g t \cos \lambda \\ m \ddot{y}(t) = 0 \\ m \ddot{z}(t) = -m g \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = +\Omega g t^2 \cos \lambda + 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -g t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x(t) = +\frac{1}{3} \Omega g t^3 \cos \lambda \\ y(t) = 0 \\ z(t) = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

- ◇ Nous pouvons voir qu'il y a désormais un mouvement sur  $\vec{u}_x$ , *ie.* dans la direction est-ouest.

### ★ écart à l'impact

- ◇ Cherchons de combien s'est écarté l'objet par rapport à sa verticale initiale à l'instant de l'impact.  
 ◇ L'impact est défini par  $z(t_0) = 0$ , ce qui donne :

$$H - \frac{1}{2} g t_0^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

◇ Et donc  $x(t_0) = \frac{1}{3} g \Omega \cos \lambda \left( \frac{2h}{g} \right)^{3/2}$ .

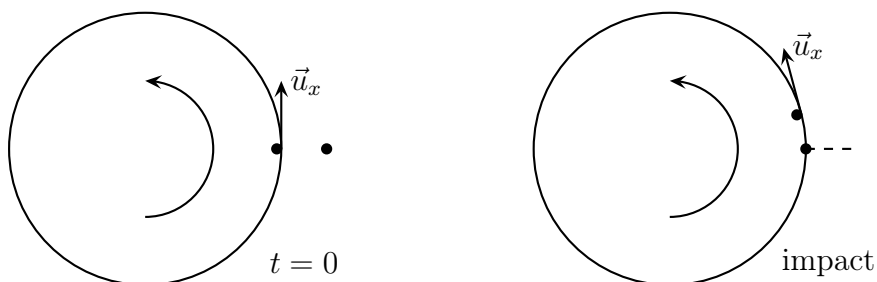
- ◇ Numériquement :  $x(t_0) = 1,4$  cm pour  $H = 100$  m.  
 ◇ L'écart n'est pas grand, mais peut commencer à devenir mesurable dans des conditions contrôlées, surtout au niveau de la nullité de la vitesse initiale.  
 ◇ Cet écart se situe vers l'est  $x(t_0) > 0$  quel que soit l'hémisphère (la déviation est en  $\cos \lambda$ ) et la déviation sera d'autant plus grande que le lancé aura lieu près de l'équateur.

### ★ ordres supérieurs

- ◇ Nous pourrions réinjecter la solution trouvée précédemment dans l'expression initiale de la force d'inertie de CORIOLIS.  
 ◇ Nous aurions alors une solution à l'ordre 2 que nous pourrions réinjecter ...  
 ◇ Dans des cas non pathologiques, cette méthode converge vers la bonne solution.

## IV.3.v – interprétation dans le référentiel géocentrique

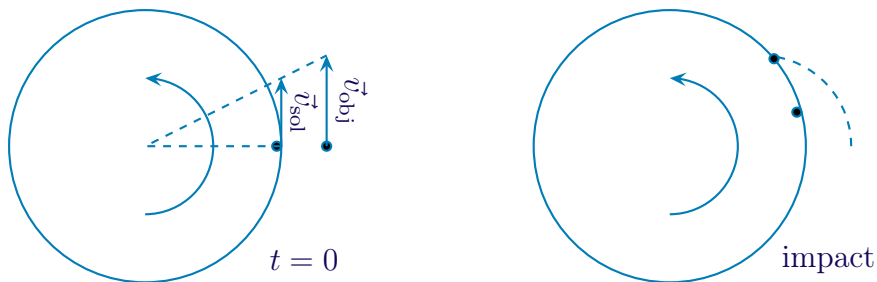
- ◇ Interprétons cette déviation dans un cas simple, celui où l'expérience se fait à l'équateur de manière à maximiser l'effet non galiléen.  
 ◇ Représentons la situation vue de dessus dans ce référentiel.



- ◇ L'objet est lâché sans vitesse initiale, il tombe tombe verticalement.  
 ◇ Pendant ce temps là, la Terre tourne « en dessous » de l'objet. L'objet devrait alors tomber « en arrière » de sa verticale, *ie.* vers l'ouest ... or il s'agit d'une déviation vers l'est !

### ★ la bonne interprétation

- ◇ L'erreur vient du fait que l'objet n'est **pas** lancé sans vitesse initiale dans le référentiel géocentrique. Il est lancé avec une vitesse plus importante que le sol qu'il surplombe.



- ◇ Comme rien ne vient freiner l'objet dans sa course **en avant vers l'est**, il avance plus vite que le sol en dessous et tombe donc avec de l'avance sur sa verticale. Il s'agit bien d'une déviation vers l'est.

## IV.4 – Le pendule de FOUCAULT

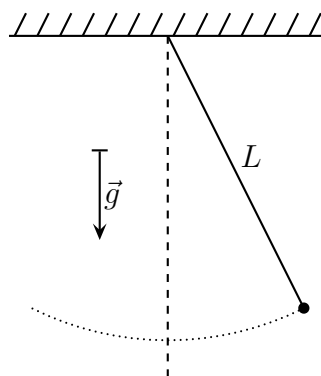
### IV.4.i – situation

#### ★ présentation historique

- ◇ Il s'agit d'une expérience réalisée par FOUCAULT afin de mettre en évidence la rotation de la Terre.
- ◇ Cette expérience a été réalisée au Panthéon en 1831.
- ◇ Il s'agit d'un pendule simple, mais de longueur 67 m et écarté de la position au repos de  $a = 4,0$  m. La masse fait  $m = 27$  kg.

#### ★ analyse

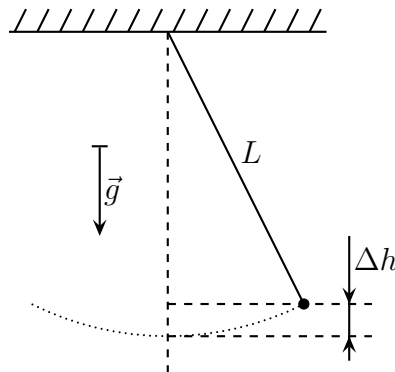
- ◇ La situation du pendule simple est bien connue. Schématisons-la.



- ◇ Le référentiel terrestre **n'est pas** considéré comme galiléen.
- ◇ Le pendule va osciller *a priori* à peu près à la pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$  mais à cause des forces d'inertie, il n'est plus possible de dire que les oscillations vont être planes. Les oscillations auront donc deux degrés de liberté.
- ◇ Les oscillations vont dépendre *a priori* de  $m$ ,  $g$ ,  $\Omega$  (vitesse de rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique),  $\lambda$  (latitude du lieu où l'expérience est faite),  $a$  (condition initiale).

### ★ première approximation

◇ Regardons l'évolution de la cote de la masse.



◇ Au maximum, nous avons :

$$\Delta h = L - \sqrt{L^2 - a^2} = 12 \text{ cm} \ll L$$

◇ Nous pouvons donc considérer que le mouvement est **plan** et se fait dans le plan  $(Oxy)$  où  $O$  est la position au repos de la masse.

### IV.4.ii – équation d'évolution

◇ Ici nous ne pouvons pas utiliser une approche énergétique à cause de la force d'inertie de CORIOLIS qui dévie le point  $M$  mais sans contrainte de trajectoire.

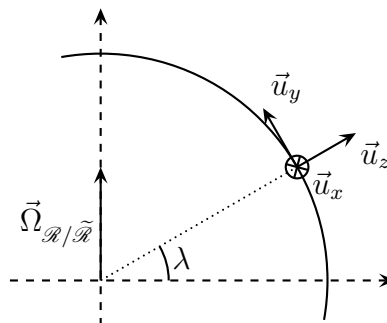
◇ Faisons la liste des forces qui s'exercent :

- force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g}$
- force de contact : la tension exercée par le fil  $\vec{T}$
- force de contact : frottements négligés
- force d'inertie d'entraînement : compté dans le poids car il s'agit du référentiel terrestre
- force d'inertie de CORIOLIS :  $\vec{f}_{ic} = -2 m \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}}(M,t)$

◇ Reprenons le repérage utilisé pour la déviation vers l'est :

- $\vec{u}_z$  vers le haut
- $\vec{u}_y$  vers le nord
- $\vec{u}_x$  vers l'est

### ★ force d'inertie de CORIOLIS



◇ Nous trouvons  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\tilde{\mathcal{R}}} = \Omega (\cos \lambda \vec{u}_y + \sin \lambda \vec{u}_z)$  et ainsi, en tenant compte du fait que le mouvement est plan :



$$\vec{f}_{ic} = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = -2m \begin{pmatrix} -\Omega \dot{y}(t) \sin \lambda \\ \Omega \dot{x}(t) \sin \lambda \\ -\Omega \dot{x}(t) \cos \lambda \end{pmatrix}$$

★ tension exercée par le fil

🕒 sur l'axe vertical

◇ Projétons d'abord le PFD sur  $\vec{u}_z$  :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ic} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad -mg + T_z + 2m\Omega \dot{x}(t) \cos \lambda = 0$$

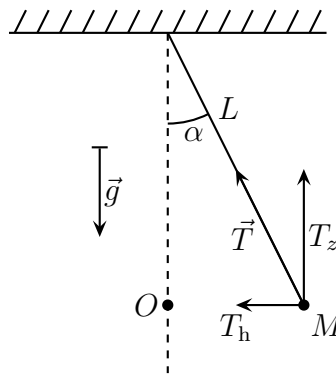
◇ Avec  $\dot{x}(t) \equiv L\omega_0$ , nous avons :

$$\frac{f_{ic}}{P} \sim \frac{2\mathcal{M}\Omega \dot{x} \cos \lambda}{\mathcal{M}g} \sim 2 \times \frac{2\pi}{86400} \times 4 \times \sqrt{\frac{10}{67}} \times 1 \times \frac{1}{10} \simeq 10^{-5} \ll 1$$

◇ Nous pouvons donc négliger sur l'axe  $\vec{u}_z$  la force d'inertie de CORIOLIS devant le poids. Il reste :  
 $T_z = mg$ .

🕒 dans le plan horizontal

◇ Représentons la situation. Attention, nous ne savons pas où sont *a priori* les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ , c'est pourquoi nous noterons la composante horizontale  $T_h$ .



◇ L'angle  $\alpha$  étant faible (au pire  $\alpha = \frac{4}{67} = 6.10^{-2} \text{ rad} \ll 1$ ) nous pouvons écrire :

$$\alpha = \tan \alpha = \frac{T_h}{T_z} = \frac{OM}{L} \quad \rightsquigarrow \quad T_h = \frac{OM}{L} mg$$

◇ Vectoriellement, cela donne, en notant  $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$  :

$$\vec{T}_h = -\frac{mg}{L} \vec{OM} = -m\omega_0^2 \vec{OM} = -m\omega_0^2 (x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y)$$

🕒 bilan

◇ Finalement, nous pouvons constater que la tension exercée par le fil permet de réaliser un oscillateur harmonique de longueur naturelle nulle!

### ★ équations différentielles régissant le mouvement

◇ Il n'y a plus qu'à projeter le PFD sur les axes  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ic} = m \vec{a} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} m \ddot{x}(t) = -m \omega_0^2 x(t) + 2 m \Omega (\sin \lambda) \dot{y}(t) \\ m \ddot{y}(t) = -m \omega_0^2 y(t) - 2 m \Omega (\sin \lambda) \dot{x}(t) \end{cases}$$

◇ Et en notant  $\omega \stackrel{\text{not}}{=} \Omega \sin \lambda$  :  $\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) + 2 \omega \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\omega_0^2 y(t) - 2 \omega \dot{x}(t) \end{cases}$

◇ Maintenant, il va falloir résoudre cela avec une méthode particulière étant donné qu'il s'agit d'un système d'équations différentielles couplées.

### IV.4.iii – équations horaires

#### ★ changement de fonction complexe inconnue

◇ Pour résoudre ce style de système d'équations différentielles couplées, l'idée est d'utiliser une *fonction complexe inconnue*.

◇ Ici nous allons introduire la fonction complexe inconnue  $\underline{u}(t) = x(t) + j y(t)$  de telle sorte que

$$\operatorname{Re}(\underline{u}(t)) = x(t) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\underline{u}(t)) = y(t)$$

◇ Il ne s'agit **pas** ici de la notation complexe que nous avons déjà rencontrée car ici la partie imaginaire a une signification contrairement au régime sinusoïdal forcé.

◇ C'est une méthode que nous aurons l'occasion de revoir.

#### 🌀 nouvelle équation

◇ Nous avons :

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{u}}(t) &= \ddot{x}(t) + j \ddot{y}(t) = -\omega_0^2 x(t) + 2 \omega \dot{y}(t) - j \omega_0^2 y(t) - 2 j \omega \dot{x}(t) \\ &= -\omega_0^2 (x(t) + j y(t)) - 2 j \omega (x(t) + j y(t)) \end{aligned}$$

◇ Ce qui donne  $\ddot{\underline{u}}(t) + 2 j \omega \dot{\underline{u}}(t) + \omega_0^2 \underline{u}(t) = 0$ .

◇ Nous avons maintenant une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, nous savons résoudre.

#### 🌀 solution

◇ Commençons par calculer le discriminant de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + 2 j \omega r + \omega_0^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \Delta = -4 \omega^2 - 4 \omega_0^2$$

◇ En faisant une approximation au premier ordre (ce que nous faisons depuis le début en fait), cela donne  $\Delta = -4 \omega_0^2 = (2 j \omega_0)^2$  car  $\omega_0 \gg \omega$ .

◇ Les solutions de l'équation caractéristiques sont donc :

$$\underline{r}_1 = \frac{-2 j + 2 j \omega_0}{2} = j (\omega_0 - \omega) \quad \text{et} \quad \underline{r}_2 = \frac{-2 j - 2 j \omega_0}{2} = -j (\omega_0 + \omega)$$

◇ La solution s'écrit donc  $\underline{u}(t) = A \exp(j (\omega_0 - \omega) t) + B \exp(-j (\omega_0 + \omega) t)$ .

◇ Regardons ce qu'il en est des conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = a & \text{et} & y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 & \text{et} & \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \underline{u}(0) = a \\ \underline{\dot{u}}(0) = 0 \end{cases}$$

◇ Nous avons ainsi :  $\underline{u}(0) = a = A + B$  et :

$$\dot{\underline{u}}(t) = j(\omega_0 - \omega) A \exp(j(\omega_0 - \omega)t) - j(\omega_0 + \omega) B \exp(-j(\omega_0 + \omega)t) \rightsquigarrow 0 = j(\omega_0 - \omega) A - j(\omega_0 + \omega) B$$

◇ Ainsi :

$$\begin{cases} A + B = a \\ (\omega_0 - \omega) A - (\omega_0 + \omega) B = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A = a \frac{\omega_0 + \omega}{2\omega_0} \\ B = a \frac{\omega_0 - \omega}{2\omega_0} \end{cases}$$

◇ Cela donne :

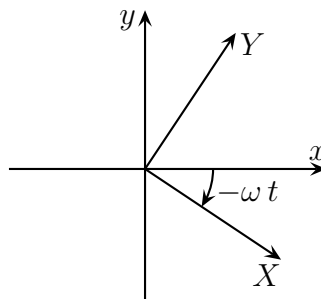
$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= a e^{-j\omega t} \left( \frac{\omega_0 + \omega}{2\omega_0} e^{j\omega_0 t} + \frac{\omega_0 - \omega}{2\omega_0} e^{-j\omega_0 t} \right) \\ &= a e^{-j\omega t} \left( \frac{\omega_0 + \omega + \omega_0 - \omega}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t) + j \frac{\omega_0 + \omega - \omega_0 + \omega}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) \\ &= a e^{-j\omega t} \left( \cos(\omega_0 t) + j \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) \end{aligned}$$

◇ La solution est trouvée! Reste à l'interpréter!

★ **changer de repérage**

🌀 **une nouvelle façon de changer de repère**

◇ Considérons le repère tournant  $(OXY)$  à la vitesse angulaire  $-\omega$  autour de  $(Oz)$ .



◇ Au lieu de chercher  $X(t)$  et  $Y(t)$  en fonction de  $x(t)$  et  $y(t)$ , nous allons chercher  $\underline{U}(t)$  en fonction de  $\underline{u}(t)$ .

◇ Nous allons montrer que  $\underline{U}(t) = \underline{u}(t) e^{j\omega t}$ .

◇ Il suffit de le vérifier pour les vecteurs de base  $\vec{u}_X$  et  $\vec{u}_Y$ , la linéarité fera le reste.

◇ Pour le vecteur  $\vec{u}_X$  :  $\vec{u}_X = \cos(\omega t) \vec{u}_x - \sin(\omega t) \vec{u}_y$ . Ainsi :

$$\begin{cases} \underline{U}(\vec{u}_X) = 1 \\ \underline{u}(\vec{u}_X) = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) = e^{-j\omega t} \end{cases} \rightsquigarrow \underline{U}(\vec{u}_X) = \underline{u}(\vec{u}_X) e^{j\omega t}$$

◇ Pour le vecteur  $\vec{u}_Y$  :  $\vec{u}_Y = \sin(\omega t) \vec{u}_x + \cos(\omega t) \vec{u}_y$ . Ainsi :

$$\begin{cases} \underline{U}(\vec{u}_X) = j \\ \underline{u}(\vec{u}_X) = \sin(\omega t) + j \cos(\omega t) = j(\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) = j e^{-j\omega t} \end{cases} \rightsquigarrow \underline{U}(\vec{u}_Y) = \underline{u}(\vec{u}_Y) e^{j\omega t}$$

◇ Ça marche ! Cela devient très simple de changer de repère.

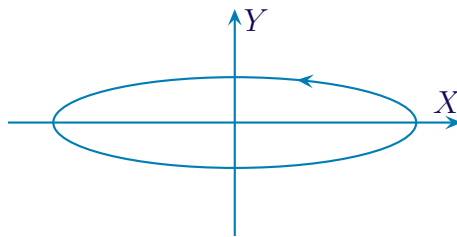
### 🌀 tout ça pour ça

◇ Ainsi dans le repère  $(OXY)$  nous avons  $\underline{U}(t) = a \left( \cos(\omega_0 t) + j \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right)$ .

◇ Cela donne :

$$X(t) = \Re(\underline{U}(t)) = a \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad Y(t) = \Re(\underline{U}(t)) = a \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

◇ Il s'agit d'une ellipse très aplatie d'axes  $a$  et  $a \frac{\omega}{\omega_0} \ll a$ .



### 🌀 finalement

◇ La trajectoire du point  $M$  est une ellipse très aplatie tournant avec une vitesse angulaire  $\omega = \Omega \sin \lambda$  autour de l'axe  $(Oz)$ .

◇ Dans l'hémisphère sud, nous aurions  $\omega = \Omega \sin \lambda < 0$ , *ie.* les oscillations tourneraient dans le sens direct et non dans le sens horaire.

## IV.4.iv – visuellement

### ★ pour l'expérience réelle

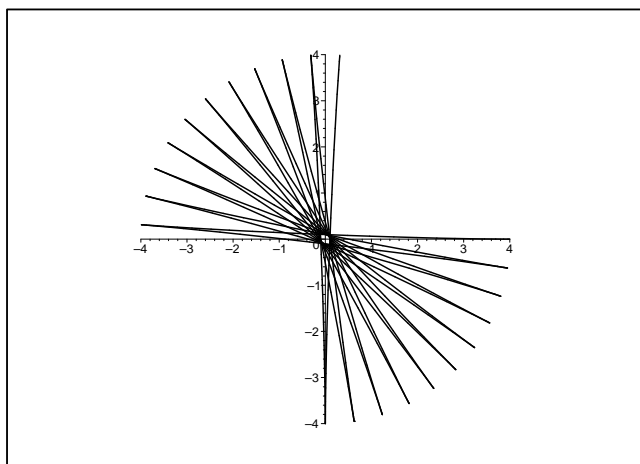
### 🌀 allure de la trajectoire

◇ Sur les deux graphiques ci-dessous, nous pouvons voir la trajectoire du pendule dans le référentiel terrestre :

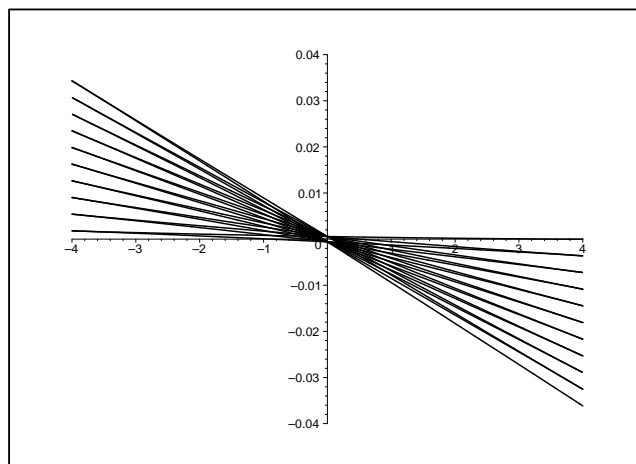
→ le premier graphique donne juste l'allure

→ le deuxième graphique respecte les valeurs de l'expérience historique

Graphique 1



Graphique 2



- ◇ Bien que cela n'y ressemble pas, il s'agit bien d'ellipses tournant dans le sens horaire (dans l'hémisphère nord).

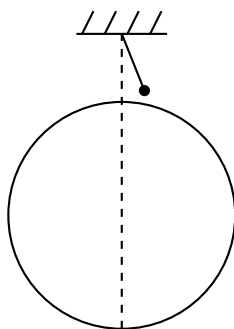
### 🕒 numériquement

- ◇ Posons-nous la question : au bout d'un aller retour du pendule, de combien s'est-il déplacé par rapport à sa position initiale ?
- ◇ L'aller retour se fait au bout de la période propre  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .
- ◇ Pendant cette durée là, l'axe des oscillation a tourné de  $\theta = \omega T_0$ .
- ◇ Cela donne, pour  $\lambda = 49^\circ$ , un écart de  $\delta = a\theta = 3,6$  mm : c'est visible !
- ◇ Pour que le pendule fasse un tour, il faut  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,14 \cdot 10^5$  s  $\simeq$  32 heures.
- ◇ Dans l'expérience historique, le pendule oscille quelques heures avant de s'arrêter.

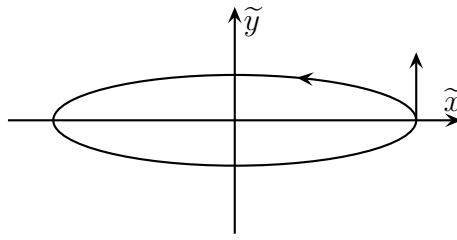
### ★ une illustration du mouvement du pendule

#### 🕒 vision au pôle nord

- ◇ Tout comme pour la déviation vers l'est que nous avons interprétée à l'équateur, ici pour maximiser l'effet, plaçons l'expérience au pôle nord.



- ◇ En lâchant le pendule sans vitesse initiale par rapport au référentiel terrestre, cela lui donne une vitesse initiale très faible suivant  $\vec{u}_y$  par rapport au référentiel géocentrique.
- ◇ Dans ces conditions, le pendule réalise une ellipse très aplatie dans le référentiel géocentrique.



- ◇ La Terre tournant en dessous du pendule, tout se passe comme si le pendule tournait dans l'autre sens.
- ◇ L'interprétation à une latitude quelconque est plus difficile. Il faut penser que tout cet effet vient du  $\Omega \sin \lambda$ , *ie.* du fait que le référentiel tourne autour de  $\vec{u}_z$ . Dans ces conditions, la masse étant à l'instant initial écartée vers l'est, elle se voit projetée légèrement vers le nord, ce que confirme les tracés réalisés.

### 🕒 expérience de bureau

- ◇ Regardons l'expérience filmée de manière à voir ce mouvement si particulier.

Montrer le film sur l'expérience du pendule de FOUCAULT.

- ◇ Nous nettement voir sur ce film les points de rebroussement du pendule.

## IV.5 – Les marées

- ◇ Nous allons maintenant étudier plus en détail les effets du caractère non galiléen du référentiel géocentrique.

### IV.5.i – le terme de marée

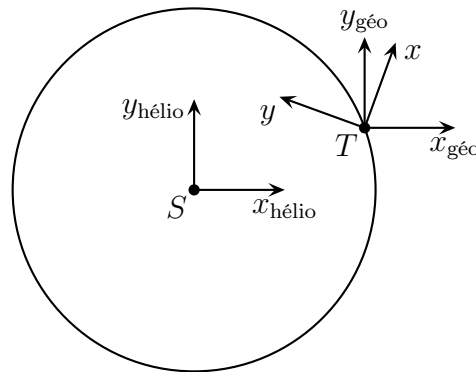
#### ★ origine

- ◇ Nous allons chercher les forces subies par un point matériel **immobile** dans le référentiel terrestre en ne supposant plus que le référentiel géocentrique soit galiléen.
- ◇ Pour que le référentiel géocentrique soit non galiléen, il faut qu'il n'ait plus une trajectoire rectiligne uniforme par rapport au référentiel héliocentrique.
- ◇ Posons-nous la question ? Qui est à l'origine d'un mouvement non rectiligne uniforme ? Le Soleil.
- ◇ Nous allons donc prendre en compte l'effet du Soleil et de l'autre astre le plus proche : la Lune.

#### ★ situation – analyse

- ◇ Considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  suspendu à un fil idéal et immobile dans le référentiel terrestre, non galiléen.
- ◇ Quelles sont les forces qui s'exercent sur le point  $M$  ?
  - force à distance : l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre  $\vec{f}_{g,T} = m \vec{\mathcal{G}}_T(M)$
  - force à distance : l'attraction gravitationnelle exercée par la Lune  $\vec{f}_{g,L} = m \vec{\mathcal{G}}_L(M)$
  - force à distance : l'attraction gravitationnelle exercée par le Soleil  $\vec{f}_{g,S} = m \vec{\mathcal{G}}_S(M)$
  - force de contact : la tension exercée par le fil  $\vec{T}$
  - force de contact : les frottements sont nuls car le point est immobile
  - force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{ie}$
  - force d'inertie de CORIOLIS : nulle car le point est à l'équilibre.

- ◇ Représentons le mouvement du référentiel terrestre par rapport au référentiel héliocentrique que nous allons considérer comme galiléen en notant  $T$  le centre de la Terre



- ◇ Nous pouvons constater que le référentiel terrestre n'est ni en rotation pure ni en translation par rapport au référentiel héliocentrique. Nous allons donc utiliser la loi de composition générale :

$$\vec{a}_e(M,t) = \vec{a}_{|\mathcal{R}_{\text{hélio}}}(T,t) - \Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_{\text{hélio}}}^2 \overrightarrow{HM}$$

où  $H$  est le projeté sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant la rotation.

### IV.5.ii – champ de marée

#### ★ expression vectorielle

#### 🕒 le poids

- ◇ Remarquons d'abord que  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_{\text{hélio}}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_{\text{géo}}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{\text{géo}}/\mathcal{R}_{\text{hélio}}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_{\text{géo}}}$ .
- ◇ Nous pouvons donc écrire l'équilibre sous la forme :

$$\vec{0} = \vec{T} + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) - \Omega^2 \overrightarrow{HM} + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) - m \vec{a}_{|\mathcal{R}_{\text{hélio}}}(T,t)$$

- ◇ Comme  $H$  est le projeté sur l'axe de  $\mathcal{R}$  portant le vecteur rotation, alors  $H$  est le projeté sur l'axe de rotation de la Terre et ainsi nous reconnaissons l'expression du poids :  $\vec{P} = m \vec{\mathcal{G}}_T(M) - \Omega^2 \overrightarrow{HM}$ .

#### 🕒 le terme de marée

- ◇ Quelle est l'accélération de la Terre par rapport au référentiel héliocentrique ?
- ◇ Faisons un PFD sur la Terre. Cela ne pose pas de soucis étant donné que nous allons la considérer comme sphérique et que dans ces conditions, elle se comporte comme un point matériel du point de vue de la gravitation.
- ◇ Les seules forces qui s'exercent sont les attractions gravitationnelles exercées par la Lune et le Soleil :

$$m_T \vec{a}_{|\mathcal{R}_{\text{hélio}}}(T,t) = m_T \vec{\mathcal{G}}_L(T) + m_T \vec{\mathcal{G}}_S(T) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{a}_{|\mathcal{R}_{\text{hélio}}}(T,t) = \vec{\mathcal{G}}_L(T) + \vec{\mathcal{G}}_S(T)$$

- ◇ Et ainsi pour le point  $M$  immobile à la surface de la Terre :

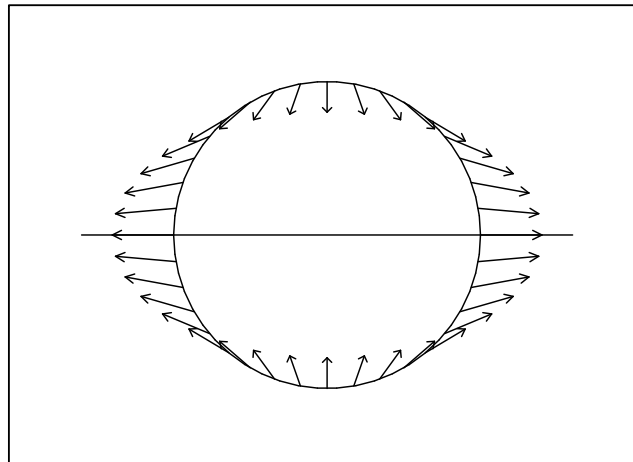
$$\vec{0} = \vec{T} + \vec{P} + m \left( \vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(T) \right) + m \left( \vec{\mathcal{G}}_S(M) - \vec{\mathcal{G}}_S(T) \right)$$

- ◇ Le terme  $\vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(T)$  représente le champ de marée créé par la Lune sur la Terre.

### ★ représentation graphique

- ◇ Sur le graphique ci-dessous, nous avons représenté le champ de marée à la surface de Terre créé par un astre dans la direction horizontale.

Graphique 3



- ◇ Les accélérations résultantes valent, pour un astre :

→ dans la direction de l'astre :  $\frac{2 G M_{\text{astre}} R_T}{d_{\text{astre}}^3}$

→ dans la direction orthogonale à l'astre :  $\frac{G M_{\text{astre}} R_T}{d_{\text{astre}}^3}$  soit deux fois moins

- ◇ Nous pouvons constater que deux points opposés sur la Terre subissent les mêmes marées : il y a deux marées par jour.

### IV·5·iii – la Lune et le Soleil

#### ★ contributions

- ◇ Nous avons :

$R_T = 6,36 \cdot 10^6 \text{ m}$	$M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	$M_L = 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m.kg}^{-2}$	$d_S = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$	$d_L = 3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$

- ◇ Nous trouvons :

$$\frac{2 G M_S R_T}{d_S^3} = 5,06 \cdot 10^{-7} \text{ m.s}^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{2 G M_L R_T}{d_L^3} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$$

La lune a un effet deux fois plus important que celui du Soleil sur les marées.

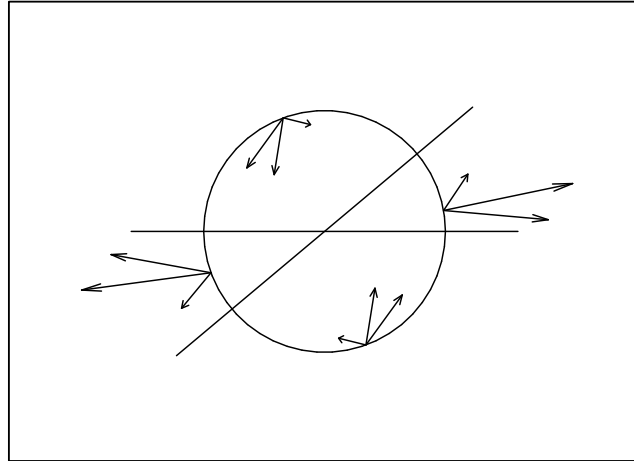
- ◇ D'un autre côté, étant donné les accélérations mises en jeu, nous pouvons largement négliger les effets de marée en première approximation.

#### ★ mortes eaux et vives eaux

- ◇ Regardons ce qui se passe lorsque nous tenons compte des deux astres.

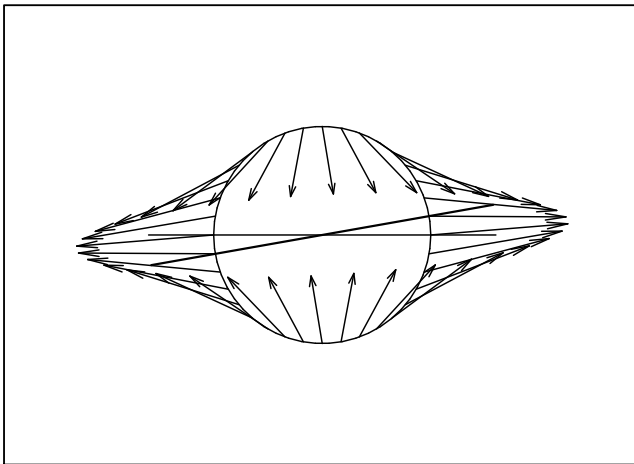


Graphique 4

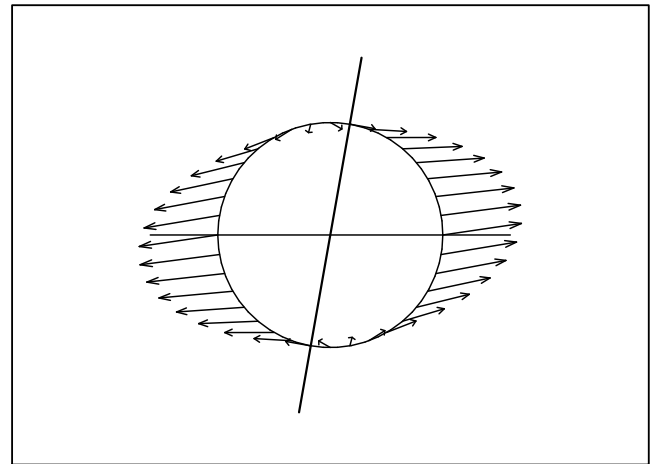


- ◇ Lorsque le Soleil, la Lune et la Terre sont alignés, nous pouvons voir que les effets s'ajoutent. Les marées sont plus importantes, ce sont les *vives eaux*.
- ◇ En revanche, lorsque le Soleil, la Lune et la Terre sont en quadrature, les effets se retranchent. Les marées sont faibles, ce sont les *mortes eaux*.

Graphique 5



Graphique 6



### ★ un phénomène plus complexe

- ◇ Nous n'avons ici fait qu'effleurer le phénomène des marées.
- ◇ Dans le TD, nous pouvons trouver l'explication du phénomène qui fait que les deux marées quotidiennes peuvent être très différentes l'une de l'autre.
- ◇ De plus nous n'avons pas du tout tenu compte de l'aspect dynamique des marées. Nous avons considéré des points immobile or il faut du temps pour que la mer monte ou descende, ce qui peut fortement influencer l'effet de marée.

# Mécanique en référentiel non galiléen

## Au niveau du cours

### ★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
  - référentiels en translation, en rotation, en rotation pure, en rotation pure et uniforme
  - vecteur rotation
  - lois de composition
  - référentiels de COPERNIC, héliocentrique, géocentrique, terrestre
  - le poids

### ★ Les grandeurs

- ◇ Connaître :
  - l'unité et la dimension des vecteurs rotations
  - l'ordre de grandeur des vecteurs rotation des référentiels usuels

### ★ Les lois

- ◇ Connaître :
  - les lois de composition des vitesses et des accélérations pour deux référentiels en translation (écriture intrinsèque)
  - les lois de composition des vitesses et des accélérations pour deux référentiels en rotation pure (écriture intrinsèque)
  - les expressions des forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS
  - l'influence énergétique des forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS

### ★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
  - l'effet d'une force d'inertie d'entraînement (dans le cas de référentiels en translation ou en rotation uniforme)
  - l'influence de la force d'inertie de CORIOLIS sur un mouvement en référentiel terrestre

## Au niveau de l'analyse

### ★ Analyse physique

- ◇ Il faut savoir repérer si un référentiel est galiléen ou pas.

### ★ Analyse technique

- ◇ Il faut savoir :
  - savoir choisir entre l'approche en terme de forces ou en terme énergétique lors d'une étude en référentiel non galiléen

## Au niveau des savoir-faire

### ★ outils mathématiques

◇ Savoir manipuler le produit vectoriel.

### ★ petits gestes

◇ Il faut savoir schématiser une situation dans plusieurs référentiels différents.

### ★ exercices classiques

- ◇ Savoir refaire :
- le pendule uniformément accéléré
  - la bille sur un manège
  - la déviation vers l'est

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Référentiel en translation</b>	<b>1</b>
I-1	Voir dans deux référentiels différents . . . . .	1
I-1 <i>·i</i>	qu'est-ce qu'un référentiel non galiléen ? . . . . .	1
I-1 <i>·ii</i>	pourquoi étudier dans un référentiel non galiléen ? . . . . .	2
	la meilleure des raisons . . . . .	2
	une autre bonne (?) raison . . . . .	2
I-1 <i>·iii</i>	décrire deux référentiels en translation . . . . .	2
I-1 <i>·iv</i>	objectif . . . . .	3
I-2	Des mouvements différents dans les deux référentiels . . . . .	4
I-2 <i>·i</i>	bien poser les notations . . . . .	4
I-2 <i>·ii</i>	relier les positions . . . . .	5
I-2 <i>·iii</i>	relier les vitesses . . . . .	5
I-2 <i>·iv</i>	relier les accélérations . . . . .	6
I-2 <i>·v</i>	du mauvais vocabulaire . . . . .	6
I-2 <i>·vi</i>	observation importante . . . . .	7
I-3	Les lois de la mécanique . . . . .	7
I-3 <i>·i</i>	le principe fondamental aux forceps . . . . .	7
	énoncé . . . . .	7
	démonstration . . . . .	7
	invariance galiléenne des forces . . . . .	8
I-3 <i>·ii</i>	une nouvelle force . . . . .	8
	un nom compréhensible . . . . .	8
	ce n'est pas une force physique . . . . .	8
	pourquoi la ressent-on alors ? . . . . .	8
	juste un glaçon . . . . .	9
I-3 <i>·iii</i>	vision énergétique . . . . .	10
	les lois . . . . .	10
	cas particulier d'une force d'inertie constante . . . . .	10
	paradoxe dans un raisonnement énergétique . . . . .	10
I-4	Les référentiels galiléens . . . . .	11
I-4 <i>·i</i>	alors, finalement, c'est quoi ? . . . . .	11
	quel est le premier référentiel galiléen ? . . . . .	12
I-4 <i>·ii</i>	référentiels usuels . . . . .	12
	référentiel de COPERNIC . . . . .	12
	référentiel héliocentrique . . . . .	12
	référentiel géocentrique . . . . .	13
	référentiel terrestre . . . . .	14
I-4 <i>·iii</i>	pas de non galiléennité excessive . . . . .	14
	référentiel héliocentrique . . . . .	14
	référentiel géocentrique . . . . .	15
	référentiel terrestre . . . . .	15
I-5	Étudier une situation . . . . .	15
I-5 <i>·i</i>	analyse physique . . . . .	15
I-5 <i>·ii</i>	analyse technique . . . . .	16
I-5 <i>·iii</i>	danger à éviter . . . . .	16
I-6	Pendule simple dans un train . . . . .	16
I-6 <i>·i</i>	description – analyse . . . . .	16
I-6 <i>·ii</i>	équation du mouvement dans $\mathcal{R}$ . . . . .	17

I.6.iii	vision dans $\tilde{\mathcal{R}}$ de l'équilibre dans $\mathcal{R}$ . . . . .	18
I.7	Sismographe . . . . .	18
I.7.i	description – analyse . . . . .	18
I.7.ii	équation du mouvement . . . . .	19
I.7.iii	lecture . . . . .	20
<b>II</b>	<b>Référentiel en rotation pure et uniforme</b>	<b>21</b>
II.1	Définir deux référentiels en rotation pure . . . . .	21
II.1.i	c'est tout simple . . . . .	21
II.1.ii	rotation uniforme . . . . .	22
II.2	Description du mouvement dans les deux référentiels . . . . .	22
II.2.i	poser les notations . . . . .	22
II.2.ii	vitesse . . . . .	23
II.2.iii	accélération . . . . .	24
II.2.iv	écriture intrinsèque . . . . .	25
	objectif . . . . .	25
	décrire la rotation . . . . .	25
	interlude produit vectoriel . . . . .	25
	réécrire la loi de composition des vitesses . . . . .	26
	réécrire la loi de composition des accélérations . . . . .	26
II.2.v	écriture traditionnelle . . . . .	27
	lois de composition . . . . .	27
	vitesse et accélération d'entraînement . . . . .	27
	accélération de CORIOLIS . . . . .	28
II.3	Les lois de la mécanique . . . . .	29
II.3.i	le PFD change mais ne change pas . . . . .	29
II.3.ii	la force d'inertie d'entraînement . . . . .	29
II.3.iii	la force d'inertie de CORIOLIS . . . . .	30
II.3.iv	aspect énergétique des forces d'inertie . . . . .	30
	la force d'inertie de CORIOLIS . . . . .	31
	la force d'inertie d'entraînement . . . . .	31
II.4	Référentiels galiléens . . . . .	32
II.4.i	une condition identique . . . . .	32
II.4.ii	le référentiel terrestre . . . . .	32
II.5	Tour de manège pour une bille . . . . .	33
II.5.i	description – analyse . . . . .	33
II.5.ii	position d'équilibre . . . . .	34
	existence . . . . .	34
	stabilité . . . . .	35
	interprétation finale . . . . .	35
II.5.iii	vision de l'« équilibre » par rapport au référentiel $\tilde{\mathcal{R}}$ . . . . .	35
	vision en terme de forces . . . . .	35
	vision en termes énergétiques . . . . .	36
II.6	Lanceur de ball-trap . . . . .	37
II.6.i	description – analyse . . . . .	37
	simplification . . . . .	37
	analyses . . . . .	38
II.6.ii	mouvement . . . . .	38
	approche en terme de force . . . . .	38
	approche énergétique . . . . .	39

	résolution . . . . .	39
	petit paradoxe . . . . .	39
II.6.iii	interprétation . . . . .	40
	dans $\mathcal{R}$ . . . . .	40
	dans $\tilde{\mathcal{R}}$ . . . . .	40
<b>III</b>	<b>Référentiel en mouvement quelconque</b>	<b>41</b>
III.1	Dériver dans deux référentiels différents . . . . .	41
III.1.i	notation de la dérivée . . . . .	41
III.1.ii	loi . . . . .	41
	énoncé . . . . .	41
	petite vérification . . . . .	41
	cas particulier du vecteur rotation . . . . .	42
III.2	Loi de composition des vitesses . . . . .	42
III.2.i	loi . . . . .	42
	interprétation . . . . .	43
III.2.ii	retrouver les cas particuliers . . . . .	43
	translation . . . . .	43
	rotation pure et uniforme . . . . .	43
III.3	Loi de composition des accélérations . . . . .	43
III.3.i	loi . . . . .	43
	interprétation . . . . .	44
III.3.ii	retrouver les cas particuliers . . . . .	44
	translation . . . . .	44
	rotation pure uniforme . . . . .	45
III.3.iii	bilan . . . . .	45
III.4	Propriétés des vecteurs rotation . . . . .	45
III.4.i	première loi . . . . .	45
	énoncé . . . . .	45
	démonstration . . . . .	45
III.4.ii	composition des rotations . . . . .	46
	énoncé . . . . .	46
	démonstration . . . . .	46
<b>IV</b>	<b>Mécanique en référentiels terrestres</b>	<b>47</b>
IV.1	Interaction gravitationnelle . . . . .	47
IV.1.i	lois . . . . .	47
	en terme de force . . . . .	47
	en terme de champ . . . . .	47
	vision énergétique . . . . .	48
IV.1.ii	cas des astres . . . . .	48
IV.2	Le poids . . . . .	48
IV.2.i	définition . . . . .	49
IV.2.ii	direction du fil à plomb . . . . .	49
IV.2.iii	d'autres causes de variation . . . . .	50
	causes globales . . . . .	50
	causes locale . . . . .	50
IV.2.iv	que faire avec le poids désormais ? . . . . .	50
IV.3	Déviations vers l'est . . . . .	51
IV.3.i	situation – analyse . . . . .	51

	expérience . . . . .	51
	analyse . . . . .	51
IV·3·ii	équation régissant le mouvement . . . . .	51
IV·3·iii	résolution à l'ordre 0 . . . . .	52
IV·3·iv	résolution à l'ordre 1 . . . . .	52
	nouvelles équations horaires . . . . .	52
	écart à l'impact . . . . .	53
	ordres supérieurs . . . . .	53
IV·3·v	interprétation dans le référentiel géocentrique . . . . .	53
	la bonne interprétation . . . . .	54
IV·4	Le pendule de FOUCAULT . . . . .	54
IV·4·i	situation . . . . .	54
	présentation historique . . . . .	54
	analyse . . . . .	54
	première approximation . . . . .	55
IV·4·ii	équation d'évolution . . . . .	55
	force d'inertie de CORIOLIS . . . . .	55
	tension exercée par le fil . . . . .	56
	équations différentielles régissant le mouvement . . . . .	57
IV·4·iii	équations horaires . . . . .	57
	changement de fonction complexe inconnue . . . . .	57
	changer de repérage . . . . .	58
IV·4·iv	visuellement . . . . .	59
	pour l'expérience réelle . . . . .	59
	une illustration du mouvement du pendule . . . . .	60
IV·5	Les marées . . . . .	61
IV·5·i	le terme de marée . . . . .	61
	origine . . . . .	61
	situation – analyse . . . . .	61
IV·5·ii	champ de marée . . . . .	62
	expression vectorielle . . . . .	62
	représentation graphique . . . . .	63
IV·5·iii	la Lune et le Soleil . . . . .	63
	contributions . . . . .	63
	mortes eaux et vives eaux . . . . .	63
	un phénomène plus complexe . . . . .	64