Mécanique

Chapitre 5

Mécanique des systèmes de points

Mécanique des systèmes de points

Les dispositifs réels sont rarement assimilables à un point unique parce qu'ils peuvent se déformer ou parce qu'ils n'ont pas une taille négligeable devant une longueur caractéristique de l'évolution. L'idée pour les étudier est alors de les découper par la pensée en des tous petits morceaux individuels, chacun pouvant alors être assimilé à un point matériel. Le problème devient maintenant bien plus complexe car au lieu d'un point nous nous retrouvons face à un nombre considérable de points matériels pour lesquels il est inenvisageable d'écrire tous les PFD et de les résoudre. Il faut trouver une autre approche. C'est ce que propose ce chapitre.

L'objectif principal de ce chapitre est d'adapter la mécanique du point matériel à l'étude de systèmes constitués de plusieurs points matériels. Pour ce faire nous étudierons tout d'abord ce que nous appelerons le « mouvement d'ensemble » d'un tel système et nous constaterons que cela se rapproche énormément de la mécanique du point que nous connaissons déjà. Après nous étudierons comment décrire et prévoir le mouvement propre d'un système de points : cela nous amènera à introduire une nouvelle notion : le moment cinétique. Enfin nous terminerons par l'approche énergétique des systèmes de points qui, bien que facile, réserve quelques surprises non intuitives.

Dans ce cours, nous nous limiterons à des définitions et des démonstrations concernant des systèmes de *deux* points matériels, toutefois les résultats (et les démonstrations) sont facilement généralisables à N points, même avec N très grand.

I – Mouvement d'ensemble

I·1 – Centre de masse

- Comme nous allons très rapidement le voir, le centre de masse d'un système de points joue un rôle fondamental lors de son étude mécanique.

I·1·*i* – définition

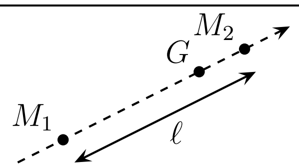
Pour deux points matériels M_1 et M_2 de masse respective m_1 et m_2,
leur *centre de masse* noté G est tel que :

$$m_1\,\overrightarrow{GM_1} + m_2\,\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$$

- Nous pouvons dire aussi « centre d'inertie » (cdi), mais **surtout pas** « centre de gravité » car même si ces deux points sont souvent confondus, ils sont physiquement différents : nous verrons un exemple de situation où ces deux points ne sont pas confondus dans ce chapitre.
- Il s'agit ni plus ni moins que du *barycentre* des masses. Ainsi, lorsque nous devrons le déterminer pour plus que deux points matériels, nous pourrons utiliser toutes les techniques connues sur les asociations de barycentres.

I·1·*ii* – position des points par rapport au centre de masse

- Considérons le système de deux points suivants.



✧ Nous avons alors :

$$\begin{cases} GM_1 + GM_2 = \ell & \text{relation géométrique} \\ -m_1\,GM_1 + m_2\,GM_2 = 0 & \text{projection de la définition du cdm} \end{cases}$$

ce qui donne :

Pour deux points M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 séparés de $\ell(t)$, le centre de masse G est situé entre les deux et est tel que :

$$GM_1(t) = \frac{m_2}{m_1+m_2} \times \ell(t) \qquad \text{et} \qquad GM_2(t) = \frac{m_1}{m_1+m_2} \times \ell(t)$$

Le centre de masse est toujours du côté où le système est le plus massique.

I·1·*iii* – position du centre de masse

✧ Cherchons maintenant le vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction des vecteurs positions $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$.

$$\begin{array}{lll} & m_1\,\overrightarrow{GM_1} + m_2\,\overrightarrow{GM_2} = \vec{0} & \text{définition du cdm} \\ & m_1\,(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_1}) + m_2\,(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_2}) = \vec{0} & \text{Chasles} \\ \text{puis} & m_1\,\overrightarrow{OM_1} + m_2\,\overrightarrow{OM_2} = (m_1+m_2)\,\overrightarrow{OG} & \end{array}$$

Soient deux points matériels M_1 et M_2 de centre de masse G. Alors :

$$\overrightarrow{OG}(t) = \frac{m_1\,\overrightarrow{OM_1}(t) + m_2\,\overrightarrow{OM_2}(t)}{m_1+m_2}$$

✧ Nous pouvons aussi projeter la relation précédente sur les axes $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$.

Soient deux points matériels M_1 et M_2 de centre de masse G. Alors :

$$x_G(t) = \frac{m_1\,x_1(t) + m_2\,x_2(t)}{m_1+m_2} \qquad y_G(t) = \frac{m_1\,y_1(t) + m_2\,y_2(t)}{m_1+m_2} \qquad z_G(t) = \frac{m_1\,z_1(t) + m_2\,z_2(t)}{m_1+m_2}$$

STOP Ces formules ne marchent pas avec les coordonnées cylindro-polaires. Ainsi :

$$r_G(t) \neq \frac{m_1\,r_1(t) + m_2\,r_2(t)}{m_1+m_2} \qquad \text{et} \qquad \theta_G(t) \neq \frac{m_1\,\theta_1(t) + m_2\,\theta_2(t)}{m_1+m_2}$$

I·1·*iv* – mouvement du centre de masse

✧ Dérivons les relations précédentes.

Soient deux points matériels M_1 et M_2 de centre de masse G. Alors :

$$\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G,t) = \frac{m_1\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1,t) + m_2\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2,t)}{m_1 + m_2}$$

✧ Le mouvement de G permet de déterminer certaines caractéristiques du mouvement du système.

Le mouvement du centre de masse d'un système est appelé *mouvement d'ensemble*.

I·2 – Théorème du Centre d'Inertie

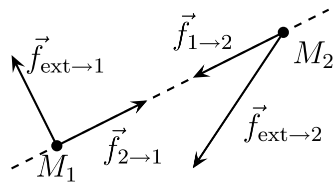
I·2·i – présentation du système

Un *système* est défini arbitrairement et a pour rôle de délimiter ce sur quoi s'appliquent les lois physiques.

Tout ce qui n'est pas dans le système fait partie de l'*extérieur*.

✧ Avant, nous n'avions (quasiment) aucun problème de définition de système puisqu'il n'y avait toujours qu'un seul point matériel. Il en est autrement désormais.

✧ Dans toute la suite, nous allons étudier un système $\mathscr{S}$ constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2. L'étude se fait dans le référentiel $\mathscr{R}$ pas forcément galiléen.



Une force qui s'exerce entre deux points matériels d'un même système est appelée *force intérieure*.

Une force exercée par l'extérieur d'un système sur une partie d'un système est appelée *force extérieure*.

Les forces extérieures incluent éventuellement les forces d'inertie.

✧ Il va de soi que ces caractéristiques ne sont pas intrinsèques aux forces puisqu'elles dépendent du système et donc d'un choix arbitraire : des forces peuvent donc parfois être « extérieures » et des fois « intérieures ».

L'*interaction intérieure* $\vec{f}_{1\leftrightarrow 2}$ est l'ensemble des deux forces intérieures $\vec{f}_{1\to 2}$ et $\vec{f}_{1\to 2}$.

✧ Lorsque nous ferons la liste des forces intérieures, il sera toujours plus rapide de parler des interactions plutôt que des forces : il y en a deux fois moins !

I·2·*ii* – loi

✭ énoncé

Soit un système $\mathscr{S}$ soumis aux forces extérieures $\vec{f}_{\text{ext}\to 1}$ et $\vec{f}_{\text{ext}\to 2}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$ quelconque, alors, en notant G le centre de masse de $\mathscr{S}$:

$$m_{\text{tot}}\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G,t)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{f}_{\text{ext}} \quad \text{avec :}$$

➜ $m_{\text{tot}} \stackrel{\text{not}}{=} m_1 + m_2$ la masse totale du système $\mathscr{S}$
➜ $\sum \vec{f}_{\text{ext}} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{f}_{\text{ext}\to 1} + \vec{f}_{\text{ext}\to 2}$ la résultante des forces extérieures

✭ démonstration

✧ Écrivons d'abord le PFD pour les deux points matériels :

$$\left\{\begin{array}{rcl} m_1\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_1(t)}{\mathrm{d}t} & = & \vec{f}_{\text{ext}\to 1} + \vec{f}_{2\to 1} \\ m_2\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_2(t)}{\mathrm{d}t} & = & \vec{f}_{\text{ext}\to 2} + \vec{f}_{1\to 2} \end{array}\right.$$

✧ Additionnons ces deux relations. Nous obtenons successivement :

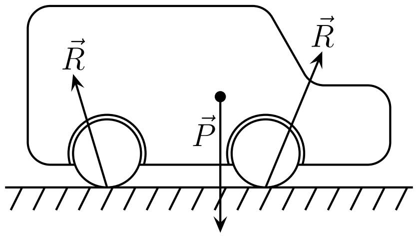
$$\begin{aligned} m_1\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1(t)}{\mathrm{d}t} + m_2\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_2(t)}{\mathrm{d}t} &= \vec{f}_{\text{ext}\to 1} + \vec{f}_{\text{ext}\to 2} + \vec{f}_{2\to 1} + \vec{f}_{1\to 2} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(m_1\,\vec{v}_1(t) + m_2\,\vec{v}_2(t)\big) &= \sum \vec{f}_{\text{ext}} + \vec{0} \qquad \text{3}^{\text{e}} \text{ loi de N}\textsc{ewton} : \vec{f}_{2\to 1} = -\vec{f}_{1\to 2} \\ \frac{\mathrm{d}(m_1+m_2)\,\vec{v}(G,t)}{\mathrm{d}t} &= \sum \vec{f}_{\text{ext}} \end{aligned}$$

I·2·*iii* – lecture

✧ Le TCI ne donne l'évolution que d'**un seul** point matériel, qui plus est fictif : le centre de masse. L'utilisation de cette loi sera donc en général insuffisante pour déterminer l'ensemble de l'évolution du système.

✧ Les interactions intérieures ne peuvent en aucun cas permettre au système d'avancer :
- ➜ souffler sur la voile d'un bateau alors que nous sommes dedans et que nous cherchons à avancer avec le bateau ne peut pas fonctionner : en souflant, nous sommes autant rejetés en arrière que la voile est poussée en avant en recevant le souffle (si, en plus, il n'y a pas de perte entre les deux acteurs) ;
- ➜ quand nous sommes au ski ou sur des patins à roulette, si nous pouvons avancer sans utiliser les cares, c'est grâce aux forces de frottements.

✧ Exemple : ce n'est pas (vraiment) le moteur d'une voiture qui permet à celle-ci de se mettre en marche, mais la force que la route exerce (d'où l'importance considérable de l'état de la route et des pneux). En effet, les forces extérieures qui s'exercent sur la voiture sont le poids $\vec{P}$ et les réactions de la route.



Remarques :
- ➜ comme nous le verrons dans la suite, nous pouvons représenter le poids comme s'exerçant au centre de masse. Ce dernier est évidemment décalé vers l'avant pour une voiture à cause de la présence du moteur.
- ➜ la réaction de la route est résistante sur les roues arrières et motrice sur les roues avant pour une voiture dont les roues motrices sont à l'avant.

✧ Contrairement à ce qui se passera plus tard lorsque nous nous intéresserons au mouvement propre, il n'est pas important, ici, de savoir quel point précis subit la force. Il n'est donc pas fondamental de respecter le « point d'application » même si c'est toujours plus joli (et que cela sera indispensable plus tard).

I·2·*iv* – justification de pratique courantes

✧ Jusqu'à présent, nous avions souvent considéré qu'un objet pouvait être analysé comme un point matériel.

✧ Cela se justifie non pas parce que l'objet est petit par rapport aux dimensions caractéristiques du problème, mais parce qu'en fait le point étudié est le centre de masse de l'objet.

✧ Comme le point d'application n'a aucune importance pour le TCI, nous pouvions faire comme si toutes les forces s'appliquaient en G et comme si l'objet n'était que G.

✧ De cette manière nous pouvions avoir de manière exacte et **sans aucune approximation** le mouvement d'ensemble de l'objet.

I·3 – Le cas particulier du poids

I·3·*i* – deux façons de le voir

✧ Il y aura toujours deux façons de considérer le poids :
- ➜ soit un poids qui s'applique sur chacune des parties
- ➜ soit un poids qui s'applique sur l'ensemble du système

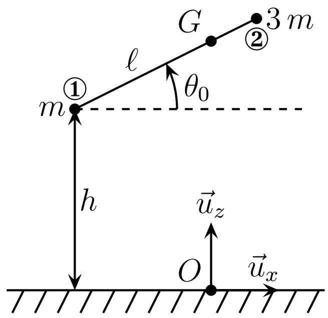
✧ Par exemple pour deux points matériels, nous pouvons, dans la liste des forces :
- ➜ soit écrire les deux poids $\vec{P}_1 = m_1\,\vec{g}$ et $\vec{P}_2 = m_2\,\vec{g}$
- ➜ soit écrire directement la résultante : $\vec{P} = (m_1 + m_2)\,\vec{g}$

✧ Lorsque le système aura visiblement un mouvement d'ensemble vertical, il sera plus logique, plus physique et donc plus facile de considérer le poids total. En revanche lorsque le système aura des parties pour lesquelles le poids ne joue aucun rôle (*ie.* qui ont un mouvement horizontal), il sera plus facile de considérer un poids par morceaux.

I·3·*ii* – chute d'un marteau, 1ère partie

✫ modélisation – analyse

✧ Nous allons modéliser un marteau par une tige sans masse aux extrémités de laquelle sont accrochées deux masses m et $3\,m$.



- Le marteau est lâché sans vitesse initiale l'ensemble à partir de la hauteur h et nous allons chercher à déterminer comment va tomber le marteau.
- Les frottements sont négligés.
- Analyse physique :
  - ➜ globalement, le marteau tombe sous l'effet du poids dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen
  - ➜ comme les conditions initiales et les forces sont contenues dans le plan vertical, le mouvement va être plan, donc il y aura trois degrés de description : $x_G(t)$, $z_G(t)$ et puisqu'en plus de tomber, le marteau peut tourner sur lui-même $\theta(t)$
  - ➜ la chute va dépendre de m (inertie), ℓ (géométrie) g (action), h et θ_0 (conditions initiales).
- Analyse technique :
  - ➜ la chute étant globalement verticale, pour le mouvement d'ensemble, nous allons choisir un repérage cartésien
  - ➜ nous allons privilégier une approche de type « force » (trop de degrés de description)
  - ➜ nous allons travailler sur le système $\mathscr{S}$ consitué de $\{\ m + 3\,m + \text{tige}\}$ de préférence au système $\{\ m + 3\,m\ \}$ de sorte que nous n'ayons pas à nous préoccuper des forces tige $\to m$ car elles deviennent alors des interactions intérieures

✫ mouvement d'ensemble

- Les seules forces **extérieures** qui s'exercent sur le système sont les poids de m et $3\,m$.
- Le TCI pour le système $\mathscr{S}$ s'écrit :

$$4\,m\,\vec{a}_{|\mathscr{R}}(G,t) = m\,\vec{g} + 3\,m\,\vec{g}$$

- Cela donne, en projection sur $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_x$:

$$\ddot{z}_G(t) = -g \qquad \text{et} \qquad \ddot{x}_G(t) = 0$$

- Nous ne connaissons pas exactement la condition initiale sur G mais nous connaissons celles sur M_1 et M_2.
- Nous avons toujours :

$$4\,m\,\vec{v}_G(t) = m\,\vec{v}_1(t) + 3\,m\,\vec{v}_2(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad 4\,m\,\vec{v}_G(0) = m\,\vec{v}_1(0) + 3\,m\vec{v}_2(0) = \vec{0}$$

> Lorsque chaque partie d'un système est immobile à un instant (initial entre autre), alors le centre de masse est aussi immobile à cet instant.

STOP en revanche, quand une ou plusieurs parties bougent, rien n'est sûr. Des fois le centre de masse peut être immobile, des fois il peut bouger.

- Nous avons, en plus, $z_G(0) = h + \dfrac{3}{4}\ell\sin\theta_0$.

✧ Finalement, nous obtenons par intégration $\boxed{z_g(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + h + \dfrac{3}{4}\,\ell\,\sin\theta_0}$ et $\boxed{x_G(t) = 0}$.

✧ Le mouvement d'ensemble, *ie.* le mouvement de G est parfaitement vertical.

✧ Reste à déterminer le mouvement propre, *ie.* la rotation sur lui-même. Nous verrons cela dans la 2e partie.

I·4 – SHŒMAKER – LEVY 9

✧ Dans cette partie nous allons étudier une situation triplement intéressante :
- ➜ historiquement car l'évènement que nous allons modéliser a focalisé les regards des astronomes de l'époque
- ➜ théoriquement car nous allons mettre en évidence dans cette situation la différence entre centre de masse et centre de gravité
- ➜ physiquement car le phénomène que nous allons voir a une grande influence en astronomie

I·4·*i* – qui c'est ?

✧ Trois astronomes de métier, Eugène et Caroly SHŒMAKER et David LEVY découvrent régulièrement des astéroïdes.

✧ Le 9e qu'ils ont découvert ensemble s'appelle SHŒMAKER – LEVY 9.

✧ Cet astéroïde s'est fragmenté en 21 morceaux avant d'heurter Jupiter en juillet 1994.

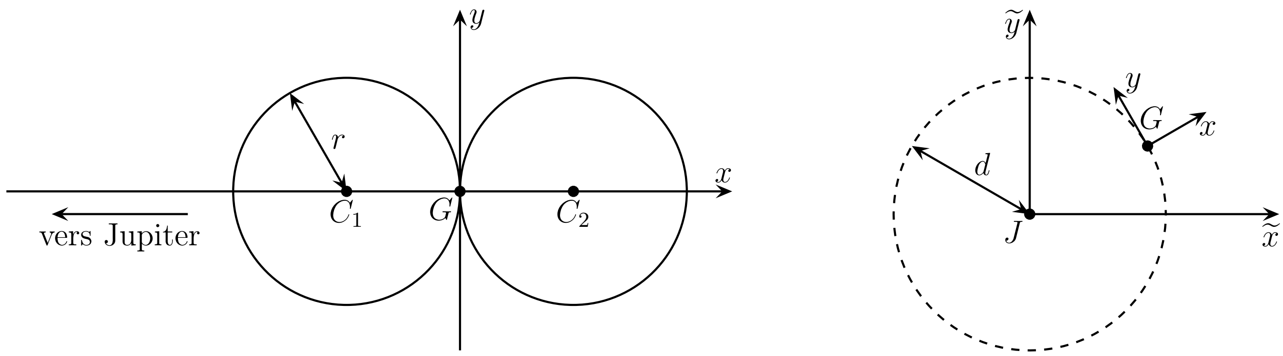
✧ Bien sûr tous les astronomes ont regardé cet impact qui a permis d'en apprendre beaucoup sur la composition de l'atmosphère de Jupiter.

✧ Nous allons proposer un modèle simple permettant d'expliquer pourquoi la comète s'est fragmentée.

I·4·*ii* – limite de ROCHE

✭ modèle

✧ Nous allons modéliser l'astéroïde par deux sphères identiques de rayon r et de masse m accolées. Leur centre de masse G est donc au point de contact entre les deux.



✧ Nous allons supposer que ces deux sphères tournent sur une orbite circulaire autour de Jupiter et que les centres J, C_1 et C_2 sont toujours alignés.

✧ Nous allons essayer de déterminer dans quelle mesure les deux sphères restent accolées. Cela revient à étudier la position d'équilibre de C_2 dans le référentiel non galiléen centré sur G et dont les axes tournent en même temps que l'astéroïde.

✯ analyse

✧ Étant donné la période de révolution de Jupiter (29 ans), nous pouvons largement considérer que le référentiel junocentrique $\widetilde{R}$ est galiléen.

✧ Les deux morceaux d'astéroïde restent accolées car elles s'attirent mutuellement par gravitation : nous ne pouvons donc pas négliger ces forces lors de l'étude.

✧ Les paramètres caractéristiques sont : m (inertie) r (géométrie) G, la constante universelle de gravitation et M_J (action) et enfin d (contrainte)

✧ En ce qui concerne l'approche, étant donné qu'il y a une force de contact inconnue entre les deux qui joue un rôle dans cet équilibre, nous ne pouvons pas utiliser l'approche énergétique.

✧ Mais avant tout chose, il va falloir déterminer précisément les caractéristiques du référentiel non galiléen choisi : mouvement de G et vecteur rotation.

✯ caractéristiques du référentiel non galiléen

✧ Le petit problème de ce référentiel est qu'il n'est ni en translation, ni en rotation pure.

☯ accélération de G

✧ Faisons un TCI !

✧ Les seules forces **extérieures** qui s'exercent sur le système sont les deux attractions gravitationnelles exercées par Jupiter sur C_1 et C_2. Comme ce sont deux sphères, elles se comportent, du point de vue de la gravitation, comme des points matériels situés en leur centre et de masse m. Cela donne :

$$
\begin{aligned}
2\,m\,\vec{a}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(G) &= \vec{f}_{\text{grav},J\to 1} + \vec{f}_{\text{grav},J\to 2} = -G\,\frac{m\,M_J}{(d-r)}\,\vec{u}_x - G\,\frac{m\,M_J}{(d+r)}\,\vec{u}_x \\
&= -G\,\frac{m\,M_J}{d^2\left(1-\dfrac{r}{d}\right)}\,\vec{u}_x - G\,\frac{m\,M_J}{d^2\left(1+\dfrac{r}{d}\right)}\,\vec{u}_x \\
&\overset{\text{DL}}{=} -G\,\frac{m\,M_J}{d^2}\left(1+2\cancel{\frac{r}{d}}\right)\vec{u}_x - G\,\frac{m\,M_J}{d^2}\left(1-2\cancel{\frac{r}{d}}\right)\vec{u}_x \\
&= -G\,\frac{2\,m\,M_J}{d^2}\,\vec{u}_x
\end{aligned}
$$

✧ Et ainsi : $\vec{a}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(G) = -G\,\dfrac{M_J}{d^2}\,\vec{u}_x$.

☯ vecteur rotation

✧ Étant donné la définition du référentiel $\mathscr{R}$, nous pouvons dire que la vitesse de rotation du référentiel n'est autre que la vitesse angulaire de G sur son orbite.

✧ Dans ces conditions, nous pouvons écrire : $\vec{a}_{|\widetilde{\mathscr{R}}} = -d\,\Omega^2\vec{u}_x$, ce qui donne, en identifiant avec le résultat précédent : $\Omega^2 = G\,\dfrac{M_J}{d^3}$.

✯ bilan des forces sur C_2

✧ Dans le référentiel $\mathscr{R}$ non galiléen, les forces subies par C_2 sont :

➜ force à distance : attraction gravitationnelle exercée par Jupiter $\vec{f}_J = -G\,\dfrac{m\,M_J}{(d+r)^2}\,\vec{u}_x$

➜ force à distance : attraction gravitationnelle exercée par C_1 : $\vec{f}_1 = -G\,\dfrac{m\,m}{(2\,r)^2}\,\vec{u}_x$

➜ force de contact : $\vec{T} = T\,\vec{u}_x$
➜ force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{\text{ie}} = -m\,\vec{a}_{\text{e}}$
➜ force d'inertie de Coriolis : nulle car C_2 est à l'équilibre dans $\mathscr{R}$

✧ Il serait inopportun de parler de frottement dans l'espace à moins d'étudier des effets très faible de manière très précise.

✧ L'accélération d'inertie d'entraînement s'écrit $\vec{a}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(G) - \Omega^2\,\overrightarrow{HC_2}$ où H est le projeté de C_2 sur l'axe de $\mathscr{R}$ portant le vecteur rotation. Nous avons donc $H = G$. Ainsi :

$$\vec{a}_{\text{e}} = -G\,\frac{M_J}{d^2}\,\vec{u}_x - \Omega^2\,r\,\vec{u}_x = -G\,\frac{M_J}{d^2}\left(1+\frac{r}{d}\right)\vec{u}_x$$

✯ condition d'équilibre

✧ Écrivons l'équilibre de C_2 dans $\mathscr{R}$ et projetons sur $\vec{u}_x$

$$\vec{f}_J + \vec{f}_1 + \vec{T} + \vec{f}_{\text{ie}} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad -G\,\frac{m\,M_J}{(d+r)^2} - G\,\frac{m^2}{4\,r^2} + G\,\frac{m\,M_J}{d^2}\left(1+\frac{r}{d}\right) + T = 0$$

✧ Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}
T &= G\,m\left(\frac{m}{4\,r^2} + \frac{M_J}{d^2\left(1+\dfrac{r}{d}\right)^2} - \frac{M_J}{d^2}\left(1+\frac{r}{d}\right)\right)\\
&= G\,m\left(\frac{m}{4\,r^2} + \frac{M_J}{d^2}\left(\cancel{1} - 2\,\frac{r}{d}\right) - \frac{M_J}{d^2}\left(\cancel{1}+\frac{r}{d}\right)\right)\\
&= G\,m\left(\frac{m}{4\,r^2} - 3\,r\,\frac{M_J}{d^3}\right)
\end{aligned}$$

✧ Pour que l'équilibre soit possible, il faut $T \geqslant 0$, ce qui nous amène à :

$$\frac{m}{4\,r^2} - 3\,r\,\frac{M_J}{d^3} \geqslant 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{M_J}{d^3} \leqslant \frac{m}{12\,r^3} \quad \rightsquigarrow \quad d^3 \geqslant 12\,r^3\,\frac{M_J}{m}$$

✧ Introduisons les masses volumiques moyennes ρ_J et ρ telles que :

$$M_J = \frac{4}{3}\,\pi\,{R_J}^3 \qquad \text{et} \qquad m = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$$

✧ Il reste $d^3 \geqslant 12\,{R_J}^3\,\dfrac{\rho_J}{\rho}$ puis $\boxed{d \geqslant \left(12\,\dfrac{\rho_J}{\rho}\right)^{1/3} R_J}$

✯ interprétation

✧ Nous pouvons donc affirmer que si l'astéroïde tourne trop près de Jupiter, les deux morceaux ne peuvent rester accolés : l'astéroïde se fragmente.

✧ C'est la limite de Roche en deçà de laquelle les astéroïdes ne peuvent rester en un seul morceau.

✧ En fait, les forces de gravitation qui s'exercent sur C_1 et C_2 sont si différentes que tout se passe comme si C_1 et C_2 étaient séparées : c'est un effet de marée.

✧ Ce phénomène est à l'origine, notamment, des anneaux dans le système solaire.

I·4·*iii* – le terme de l'astéroïde

- Pour Jupiter, nous avons $R_J = 7{,}14.10^7$ m et $\rho_J = 1{,}25.10^3$ kg.m^{-3}.
- Pour l'astéroïde, il peut y avoir plusieurs compositions :
  - pour de la glace $\rho = 0{,}91.10^3$ kg.m^{-3} et $d_{\text{roche}} = 2{,}5\,R_J$
  - pour de la neige peu compacte $\rho = 0{,}5.10^3$ kg.m^{-3} et $d_{\text{roche}} = 3{,}1\,R_J$
- En réalité, la limite pour laquelle l'astéroïde s'est disloquée est $d_{\text{roche}} = 1{,}58\,R_J$.
- Si la limite de roche est plus basse que celle prévue par ce modèle c'est parce que les deux morceaux sont plus difficiles à séparer que ce qui a été modélisé : en fait les forces de cohésion permettent à l'astéroïde de s'approcher plus près de Jupiter.
- Remarquons toutefois que ce modèle fournit une valeur approchée de la réalité de manière très satisfaisante.

I·5 – Interprétation systémique : la quantité de mouvement

I·5·*i* – définition – interprétation

La *quantité de mouvement* par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$ d'un point matériel M de masse m qui possède la vitesse $\vec{v}_{|\mathscr{R}}(t)$ vaut :

$$\vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t) = m\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t)$$

- Comme nous l'avons déjà vu, c'est ce qui est au cœur de la 2[e] loi de Newton.
- La quantité de mouvement représente un peu « l'élan » qu'a un point matériel.

I·5·*ii* – propriétés

✯ propriété naturelle

La quantité de mouvement d'un système est la somme des quantités de mouvement de ses parties :

$$\vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S},t) = \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M_1,t) + \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M_2,t)$$

Une grandeur est dite *extensive* si la valeur qu'elle a pour un système est la somme des valeurs qu'elle a pour chacune de ses parties.

- Il y a de nombreuses grandeurs qui sont si naturellement extensive que nous en oublions de le rappeler. Par exemple pour la masse !

La quantité de mouvement est extensive.

✯ expression simple intuitive non naturelle

La quantité de mouvement d'un système $\mathscr{S}$ par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$ s'écrit :

$$\vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S},t) = m_{\text{tot}}\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G,t) \qquad \text{où :}$$

➜ m_{tot} est la masse totale du système
➜ G est le centre de masse du système

✧ La démonstration est simple :

$$\vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S},t) = \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M_1,t) + \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M_2,t) = m_1\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1,t) + m_2\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2,t) = \big(m_1 + m_2\big)\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G,t)$$

✧ **Pour la quantité de mouvement**, le système est **cinétiquement** équivalent à un système où toute la masse serait concentrée en G.

Voir le système comme étant équivalent à toute la masse concentrée en G ne « fonctionne pas » avec les autres grandeurs cinétiques importantes telle que l'énergie cinétique. Cette équivalence (bien pratique parfois) est donc à manier avec de grandes précautions.

II – Mouvement propre

✧ Maintenant que nous savons prévoir et décrire le mouvement d'ensemble, il faut décrire le mouvement propre, c'est-à-dire le mouvement des différents points par rapport au centre de masse.

II·1 – Un nouveau référentiel pour décrire le mouvement propre

II·1·*i* – le référentiel barycentrique $\mathscr{R}^\star$

> Le *référentiel barycentrique*, noté $\mathscr{R}^\star$ est le référentiel en translation par rapport au référentiel d'étude $\mathscr{R}$ et dont le centre est le centre de masse du système $\mathscr{S}$ étudié.

Le centre de masse G est donc **immobile** dans $\mathscr{R}^\star$.

✧ Comme le référentiel barycentrique est en translation par rapport au référentiel d'étude, nous avons :

> Le vecteur rotation du référentiel barycentrique par rapport au référentiel d'étude est nul : $\vec{\Omega}_{\mathscr{R}^\star/\mathscr{R}} = \vec{0}$.

✧ Il ne pourra donc jamais y avoir de force d'inertie de Coriolis dans un référentiel barycentrique.

> Les grandeurs relatives au référentiel barycentrique $\mathscr{R}^\star$ sont notées avec une astérisque : $\vec{v}^{\,\star}$, $\vec{a}^{\,\star}$, …

II·1·*ii* – lois de compositions avec $\mathscr{R}^\star$

✩ loi de composition des vitesses

✧ Le référentiel barycentrique est en translation par rapport au référentiel d'étude supposé galiléen, donc :

> La loi de composition des vitesses s'écrit, pour le référentiel barycentrique :
> $$\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_i,t) = \vec{v}_{|\mathscr{R}}(G,t) + \vec{v}_{\mathscr{R}^\star}(M_i,t)$$
> ce que nous noterons aussi : $\vec{v}_i(t) = \vec{v}_G(t) + \vec{v}_i^{\,\star}(t)$.

✩ loi de composition des accélérations

✧ De même pour l'accélération :

> La loi de composition des accélérations s'écrit, pour le référentiel barycentrique :
> $$\vec{a}_{|\mathscr{R}}(M_i,t) = \vec{a}_{|\mathscr{R}}(G,t) + \vec{a}_{\mathscr{R}^\star}(M_i,t)$$
> ce que nous noterons aussi : $\vec{a}_i(t) = \vec{a}_G(t) + \vec{a}_i^{\,\star}(t)$.

✫ dérivation dans $\mathscr{R}^\star$ et dans $\mathscr{R}$

✧ Rappelons la formule générale de dérivation dans deux référentiels différents :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\mathscr{R}} = \frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\mathscr{R}^\star} + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}^\star/\mathscr{R}} \wedge \vec{A}(t)$$

> Un vecteur possède la même dérivée par rapport aux référentiel d'étude et barycentrique :
> $$\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\mathscr{R}} = \frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\mathscr{R}^\star} \overset{\text{not}}{=} \frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}$$

II·1·*iii* – quantité de mouvement de $\mathscr{S}$

✫ résultat

> La quantité de mouvement d'un système par rapport à son référentiel barycentrique est nulle :
> $$\vec{p}_{|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S}) = \vec{0}$$

✧ Ce résultat ne signifie ni plus ni moins que globalement le système ne bouge pas par rapport à lui-même. C'est extrêmement logique, mais il fallait quand même le préciser.

✫ démonstration

✧ Utilisons les lois de composition des vitesses :

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S},t) &= \vec{p_1}^\star(t) + \vec{p_2}^\star(t) && \text{extensivité de } \vec{p} \\
&= m_1\,\vec{v_1}^\star(t) + m_2\,\vec{v_2}^\star(t) && \text{définition de } \vec{p_i}^\star \\
&= m_1\left(\vec{v}_1(t) - \vec{v}_G(t)\right) + m_2\left(\vec{v}_2(t) - \vec{v}_G(t)\right) && \text{loi de composition des vitesses} \\
&= m_1\,\vec{v}_1(t) + m_2\,\vec{v}_2(t) - (m_1+m_2)\,\vec{v}_G(t) && \\
&= \vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S},t) - m_{\text{tot}}\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G,t) && \\
&= \vec{0} && \text{expression de } \vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S},t)
\end{aligned}$$

✫ démonstration 2

✧ Utilisons la définition du centre de masse :

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S},t) &= \vec{p}_1^{\,\star}(t) + \vec{p}_2^{\,\star}(t) && \text{extensivité de la quantité de mouvement}\\
&= m_1\,\vec{v}_1^{\,\star}(t) + m_2\,\vec{v}_2^{\,\star}(t) && \text{définition de } \vec{p}_i^{\,\star}(t)\\
&= m_1\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_1}(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\mathscr{R}^\star} + m_2\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_2}(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\mathscr{R}^\star} && \text{définition de } \vec{v}_i^{\,\star}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\,\overrightarrow{GM_1}(t) + m_2\,\overrightarrow{GM_2}(t)\right)\Big|_{\mathscr{R}^\star} && \text{linéarité de la dérivée}
\end{aligned}$$

✧ Et comme, par définition de G, $m_1\,\overrightarrow{GM_1}(t) + m_2\,\overrightarrow{GM_2}(t) = \vec{0}$, nous obtenons : $\vec{p}_{|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S},t) = \vec{0}$.

✯ démonstration 3

✧ La relation $\vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) = m_{\text{tot}}\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G)$ est valable pour n'importe quel référentiel, en particulier $\mathscr{R}^\star$. Ainsi :

$$\vec{p}_{|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S},t) = m_{\text{tot}}\,\vec{v}_{|\mathscr{R}^\star}(G,t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{p}_{|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S}) = \vec{0}$$

✯ et maintenant ?

✧ Comme le système ne peut pas bouger, *ie.* se translater, par rapport au référentiel barycentrique associé, la seule chose que nous pouvons faire maintenant, c'est d'étudier la rotation du système sur lui-même.

✧ C'est ce qui se passe pour la Terre : son mouvement d'ensemble est une translation circulaire autour du Soleil alors que son mouvement propre est une rotation autour d'un axe nord-sud.

II·2 – Théorème du moment cinétique pour un point matériel

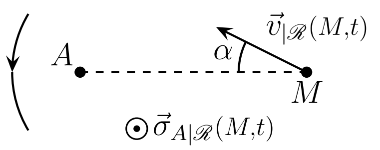
II·2·i – décrire la rotation

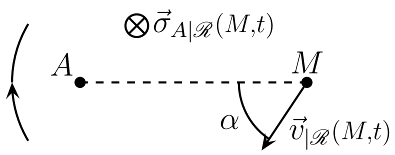
✯ pour un mouvement dans l'espace

> Le *moment cinétique* d'un point M par rapport à un point A dans un référentiel $\mathscr{R}$ vaut :
> $$\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t) \triangleq \overrightarrow{AM}(t) \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t)$$

☯ interprétation

✧ Voyons ce que cela donne sur un exemple. Prenons un point M et un point M animé de la vitesse $\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t)$.





✧ Le moment cinétique est donc :
➜ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$

➜ de norme d'autant plus grande que α est proche de $\dfrac{\pi}{2}$ *ie.* d'une rotation de centre A
➜ dans le sens de la rotation

> Le moment cinétique $\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)$ d'un point M par rapport à un point A dans un référentiel $\mathscr{R}$ caractérise la rotation que M a autour de A :
> ➜ $\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)$ a pour direction l'axe instantané de rotation
> ➜ $\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)$ a pour sens le sens instantané de rotation

✯ pour un mouvement plan autour d'un axe particulier

☯ définition

✧ Lorsqu'un mouvement possède un axe particulier connu, nous pouvons simplifier les expressions du moment cinétique en ne conservant que la projection sur cet axe.

> Le *moment cinétique scalaire* d'un point M par rapport à un axe Δ de vecteur directeur $\vec{u}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$ vaut :
> $\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(M,t) \triangleq \vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t) \cdot \vec{u}$ où :
> A est un point quelconque de Δ.

✧ Étant donné que σ_Δ est défini à partir d'un produit scalaire, il peut être positif ou négatif.

> Le moment cinétique scalaire est une grandeur algébrique.

☯ petite propriété

✧ Nous allons montrer que σ_Δ ne dépend pas du point A considéré.

✧ Pour deux points A et A' nous allons montrer que $\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t) \cdot \vec{u} = \vec{\sigma}_{A'|\mathscr{R}}(M,t) \cdot \vec{u}$:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t) \cdot \vec{u} &= \left(\overrightarrow{AM}(t) \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t)\right) \cdot \vec{u} = \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M}(t) \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t)\right) \cdot \vec{u} \\ &= \left(\overrightarrow{AA'}(t) \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t)\right) \cdot \vec{u} + \left(\overrightarrow{A'M}(t) \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t)\right) \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

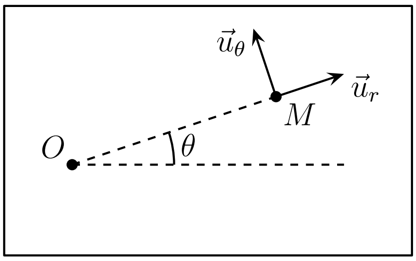
✧ Or $\overrightarrow{AA'}$ est colinéaire à $\vec{u}$ donc le premier terme est nul. Il reste bien le résultat attendu.

✧ L'intérêt de cette relation est que nous pouvons calculer le moment cinétique par rapport à n'importe quel point.

☯ expression

✧ Considérons un mouvement plan autour d'un axe. Tout se passe donc comme si le mouvement se faisait autour d'un point.

✧ Nous allons définir ce point particulier comme le centre du repère et nous allons utiliser les coordonnées cylindro-polaire.



✧ Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{O|\mathscr{R}}(M,t) &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_{\mathscr{R}}(M,t) = r\,\vec{u}_r \wedge (p_r\,\vec{u}_r + p_\theta\,\vec{u}_\theta)\\ &= r\,p_\theta \vec{u}_z \qquad \rightsquigarrow \qquad \sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(M,t) = r\,p_\theta\end{aligned}$$

Un moment ne conserve que la partie utile pour la rotation.

✧ Développons : $\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(M,t) = r\,p_\theta = r^2\,m\,\dot{\theta}$

Pour un mouvement plan, le moment cinétique d'un point s'écrit, avec le repérage naturel :

$$\vec{\sigma}_O(M) = m\,r^2(t)\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z \qquad \text{et} \qquad \sigma_\Delta = m\,r^2(t)\,\dot{\theta}(t)$$

STOP pour éviter toute collusion de notation, il faudra faire attention à la signification du $\vec{u}_z$ et en particulier, il ne faudra pas oublier que le $\vec{u}_z$ est orthogonal au mouvement !

Le moment cinétique par rapport à un pint représente la quantité de rotation autour de ce point.

II·2·*ii* – lois régissant la rotation

✭ énoncés

◕ pour un mouvement dans l'espace

Soit M un point matériel soumis à $\sum \vec{f}$ dans $\mathscr{R}$ un référentiel quelconque. Alors pour tout point A fixe par rapport à $\mathscr{R}$, nous pouvons écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}) \qquad \text{où :}$$

➜ $\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)$ est le moment cinétique de M par rapport à A

➜ $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$ est le moment de la force $\vec{f}$ par rapport à A.

Le moment d'une force s'exprime en N.m.

✧ Bien qu'un moment soit homogène à une énergie, nous l'exprimerons en N.m et pas en J.

pour un mouvement plan

Soit M un point matériel soumis à $\sum \vec{f}$ dans $\mathscr{R}$ un référentiel quelconque. Alors pour tout axe Δ fixe par rapport à $\mathscr{R}$, nous pouvons écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(M,t)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_{\Delta}(\vec{f}) \qquad \text{où :}$$

- ➜ $\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(M,t)$ est le moment cinétique scalaire de M par rapport à A
- ➜ $\mathscr{M}_{\Delta}(\vec{f})$ est le moment scalaire de la force $\vec{f}$ par rapport à A.

✯ démonstration

✧ Dérivons le moment cinétique.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t)\right) && \text{par définition de } \vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t) \\
&= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t) + \overrightarrow{AM} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t)}{\mathrm{d}t} && \text{dérivée d'un produit} \\
&= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t) + \overrightarrow{AM} \wedge \left(\sum \vec{f}\right) && \textsc{Chasles} + \text{PFD} \\
&= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AO}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t) + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AO}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t)(\cdots) \\
&\qquad (\cdots) + \sum \left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}\right) && \text{linéarité du produit vectoriel}
\end{aligned}$$

puisque A est fixe, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{\mathrm{C}^{\text{te}}}$ et donc :

$$\begin{aligned}
&= \vec{0} + \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t) \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t) + \sum \vec{\mathscr{M}}_{A|\mathscr{R}}(\vec{f}) && \text{définition de } \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t) \text{ et } \vec{\mathscr{M}}_{A|\mathscr{R}}(\vec{f}) \\
&= \vec{0} + \sum \vec{\mathscr{M}}_{A|\mathscr{R}}(\vec{f}) && \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t) \text{ et } \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t) \text{ colinéaires}
\end{aligned}$$

✧ La version scalaire n'est autre que la version vectorielle multipliée scalairement par le vecteur constant $\vec{u}$.

✯ lecture

✧ Dans le TMC, il est fondamental que le point A soit fixe. Dans ces condition, vu qu'il joue le rôle particulier de point autour duquel M tourne, nous allons quasi systématiquement le choisir comme centre du référentiel.

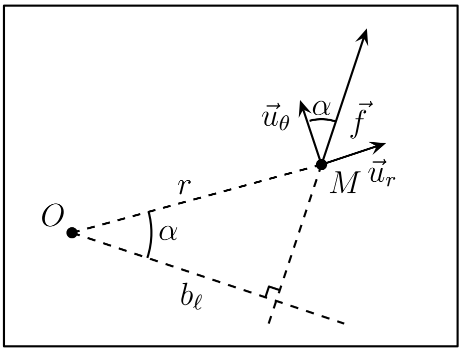
✧ Le TMC nous permet donc d'étudier ce qui tourne :
- ➜ le moment cinétique décrit l'état de rotation d'un point matériel par rapport à un point A
- ➜ le moment d'une force est d'autant plus grand que la force est capable de faire tourner

✧ L'effet de levier est directement lié au moment d'une force : il est d'autant plus facile de tourner quelque chose que la force s'exerce loin de l'axe de rotation.

✯ calcul de moments scalaires

moment scalaire de force

- De même que pour le moment cinétique scalaire, nous avons $\mathscr{M}_\Delta(\vec{f}) = \vec{\mathscr{M}}_\Delta(\vec{f}) \cdot \vec{u}$ avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire de l'axe de rotation.
- Nous savons donc déjà que $\mathscr{M}_\Delta(\vec{f}) = r\, f_\theta$ où r est la distance du point qui subit la force à l'axe de rotation et f_θ la composante de la force susceptible de faire tourner.
- Schématisons la situation.



- Nous avons donc :

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{f}) = r\, f_\theta = r\, f\, \sin\alpha = (r\, \sin\alpha)\, f = b_\ell\, f$$

> La *droite d'action* d'une force est la droite colinéaire à la force passant par le point qui la subit.

> Le *bras de levier* d'une force par rapport à un axe de rotation Δ est la distance la plus courte entre sa droite d'action et l'axe Δ.

> Le moment scalaire d'une force par rapport à un axe Δ s'écrit :
>
> $\mathscr{M}_\Delta(\vec{f}) = \pm f\, b_\ell$ où :
>
> ➜ le signe dépend de la convention d'orientation de la rotation
> ➜ f est la norme de la force
> ➜ b_ℓ est le bras de levier de la force

- Le bras de levier représente donc l'effet qu'est capable d'avoir une force au niveau de la rotation.

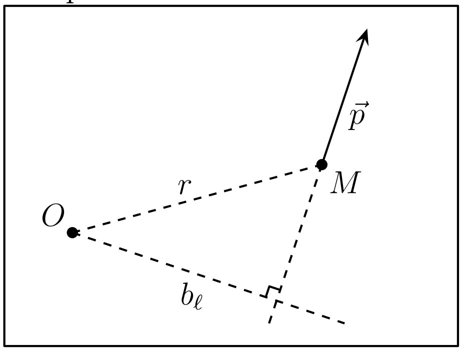
moment cinétique scalaire

- Puisqu'à partir du moment exercé par une force $\vec{\mathscr{M}}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$ nous en avons déduit $f = \pm f\, b_\ell$, par analogie avec le moment cinétique $\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}$, nous pouvons en déduire que :

Le moment cinétique scalaire par rapport à un axe Δ s'écrit :

$$\sigma_\Delta = \pm p\, b_\ell = \pm m\, v\, b_\ell \qquad \text{où :}$$

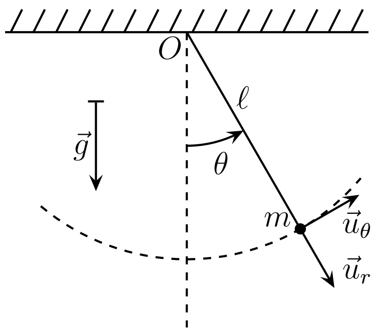
➜ le signe dépend de la convention d'orientation de la rotation
➜ $p = m\, v$ est la norme de la quantité de mouvement
➜ b_ℓ est le bras de levier de la quantité de mouvement



II·2·*iii* – exemple du pendule simple

✯ dispositif – analyse

✧ Rappelons le dispositif et ne négligeons pas les frottements pour une fois.



✧ Nous savons que le mouvement est plan et que le point M a un mouvement circulaire, donc il n'y a qu'un degré de description $\theta(t)$. Les résultats devront dépendre de m, ℓ et g.

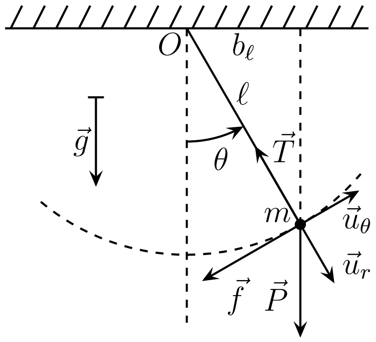
✧ Comme il y a une rotation, nous allons utiliser les coordonnées cylindro-polaire et le TMC.

✯ équation vérifiée par le mouvement

☯ scalairement

✧ La liste des forces qui s'exercent sont :

➜ force à distance : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$
➜ force de contact : les frottements $\vec{f} = -\lambda\,\vec{v}$
➜ force de contact : la force exercée par le fil : $\vec{T} = -T\,\vec{u}_{\text{sortant}}$



✧ Le TCM scalaire s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\Delta}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathscr{M}_\Delta(\vec{f}) + \mathscr{M}_\Delta(\vec{T})$$

✧ Le moment cinétique donne :

$$\sigma = +\ell\, m\, v_\theta = \ell\,\ell\, m\,\dot{\theta}(t)$$

✧ Le moment de la force exercée par le fil est nul car la droite d'action de cette force rencontre l'axe de rotation.

✧ Le moment scalaire du poids vaut :

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = \pm P\ b_\ell = -m\,g\,\ell\,\sin\theta$$

✧ Le signe se trouve dans un cas particulier : quand $\theta > 0$ nous pouvons constater que le moment est négatif. De même lorsque $\theta < 0$ le moment est positif.

✧ Le moment scalaire de la force de frottement vaut :

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = \pm f\,\ell = -\lambda\,\ell\,\dot{\theta}\,\ell$$

✧ Là aussi le signe se trouve dans un cas particulier : quand $\dot{\theta} > 0$ nous pouvons constater que le moment est négatif.

✧ En regroupant :

$$\frac{\mathrm{d}m\,\ell^2\,\dot{\theta}(t)}{\mathrm{d}t} = -m\,g\,\ell\,\sin\theta(t) - \lambda\,\ell^2\,\dot{\theta}(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\,\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{\ell}\,\sin\theta(t) = 0$$

◕ vectoriellement

✧ Écrivons simplement tout vectoriellement :

➜ $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v} = \ell\,\vec{u}_r \wedge m\,(\ell\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta) = m\,\ell^2\,\dot{\theta}\,\vec{u}_z$

➜ $\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \ell\,\vec{u}_r \wedge m\,g\,(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta) = -m\,g\,\ell\sin\theta\,\vec{u}_z$

➜ $\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \ell\,\vec{u}_r \wedge (-\lambda\,\ell\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta) = -\lambda\,\ell^2\,\dot{\theta}\,\vec{u}_z$

➜ $\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \ell\,\vec{u}_r \wedge (-T\,\vec{u}_\theta) = \vec{0}$

✧ Et ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t^2} = \vec{\mathscr{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathscr{M}}_O(\vec{f}) + \vec{\mathscr{M}}_O(\vec{T}) \qquad \rightsquigarrow \qquad m\,\ell^2\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_z = -m\,g\,\ell\sin\theta\,\vec{u}_z - \lambda\,\ell^2\,\dot{\theta}\,\vec{u}_z + 0$$

✧ Nous obtenons bien la même chose une fois l'équation projetée sur $\vec{u}_z$ et simplifiée.

II·2·*iv* – morale

- Entre le PFD et le TMC, que choisir ?
  - ➜ le TMC est *a priori* inutile pour déterminer l'évolution d'**un** (et d'un seul) point matériel car la projection du PFD sur $\vec{u}_\theta$ fait aussi bien
  - ➜ le TMC ne s'occupe que de la rotation alors que le PFD donne aussi des lois « inutiles » comme la projection sur $\vec{u}_r$
- Entre la version scalaire et la version vectorielle ?
  - ➜ la version vectorielle permet de ne pas réfléchir aux signes des moments, mais il faut projeter des vecteurs
  - ➜ la version scalaire est plus physique en introduisant le bras de levier mais oblige à réfléchir aux signes de chaque moment (cinétique et surtout ceux exercés par les forces)

II·3 – Pour un système de points

II·3·*i* – loi

✯ énoncé

Le moment cinétique est une grandeur extensive.

Soit un système $\mathscr{S}$ étudié dans le référentiel $\mathscr{R}$ quelconque et A un point fixe de $\mathscr{R}$, alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}_{\text{ext}}) \quad \text{où :}$$

- ➜ $\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(\mathscr{S})$ est le moment cinétique du système $\mathscr{S}$ par rapport à A dans $\mathscr{R}$
- ➜ $\sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}_{\text{ext}}) \overset{\text{not}}{=} \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{f}_{\text{ext}\to 1} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{f}_{\text{ext}\to 2}$ est le moment total exercé par les forces extérieures.

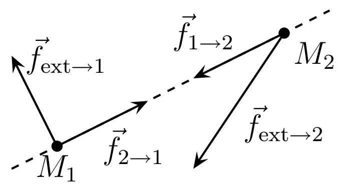
Soit un système $\mathscr{S}$ étudié dans le référentiel $\mathscr{R}$ quelconque et Δ un axe fixe de $\mathscr{R}$, alors :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{f}_{\text{ext}}) \quad \text{où :}$$

- ➜ $\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(\mathscr{S})$ est le moment cinétique scalaire du système $\mathscr{S}$ par rapport à A dans $\mathscr{R}$
- ➜ $\sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{f}_{\text{ext}})$ est le moment scalaire total exercé par les forces extérieures.

✯ démonstration

- Rappelons la situation.



- Écrivons d'abord le TMC pour les deux points matériels :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M_1)}{\mathrm{d}t} & = & \overrightarrow{AM_1}\wedge\vec{f}_{\text{ext}\to 1}+\overrightarrow{AM_1}\wedge\vec{f}_{2\to 1}\\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M_2)}{\mathrm{d}t} & = & \overrightarrow{AM_2}\wedge\vec{f}_{\text{ext}\to 2}+\overrightarrow{AM_2}\wedge\vec{f}_{1\to 2}\end{array}\right.$$

✧ Additionnons les deux relations et manipulons :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M_1)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M_2)}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{AM_1}\wedge\vec{f}_{\text{ext}\to 1}+\overrightarrow{AM_2}\wedge\vec{f}_{\text{ext}\to 2}+\overrightarrow{AM_1}\wedge\vec{f}_{2\to 1}+\overrightarrow{AM_2}\wedge\vec{f}_{1\to 2}$$

✧ Avec la 3e loi de Newton $\vec{f}_{1\to 2}=-\vec{f}_{2\to 1}$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M_1)+\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M_2)\right)&=\sum\vec{M}_A(\vec{f}_{\text{ext}})+\overrightarrow{AM_1}\wedge\vec{f}_{2\to 1}-\overrightarrow{AM_2}\wedge\vec{f}_{2\to 1}\\&=\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}_{\text{ext}})+(\underbrace{\overrightarrow{AM_1}-\overrightarrow{AM_2}}_{\overrightarrow{M_2M_1}})\wedge\vec{f}_{2\to 1}\end{aligned}$$

✧ Et avec le 2e aspect de la 3e loi de Newton $\vec{f}_{1\leftrightarrow 2}/\!/\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t}=\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}_{\text{ext}})+\vec{0}$$

II·3·*ii* – lecture

✧ Tout d'abord, et contrairement au TCI, le point qui subit la force, le « point d'application » a une importance considérable dans cette loi : il **faut** correctement placer les forces sur le schéma sans quoi nous risquons de nous tromper dans son application.

✧ Comme pour le TCI, les interactions intérieures ne permettent pas de modifier le moment cinétique d'un système. Le moment cinétique ne doit pas être confondu avec la vitesse de rotation : à moment cinétique constant, lorsque deux points se rapprochent en tournant l'un autour de l'autre, la vitesse de rotation augmente (tout comme la patineuse tourne plus vite sur elle-même lorsque rapproche les bras de son corps). En revanche, une fois isolé (comme par exemple lors d'une chute libre sur une courte distance – de l'ordre de quelques mètres –), un système ne peut se mettre globalement à tourner s'il n'a pas commencer à le faire au début ! Les accrobaties en voltige se jouent donc en grande partie à l'impulsion !

✧ Contrairement au TCI, il est important et même fondamental de connaître la position des points qui subissent les forces extérieures.

II·3·*iii* – liaison et moment d'axe

✧ Comment traduire en terme de moment les liaisons de rotation (pivot ou pivot-glissant) ?

✫ rotation sans frottement

> Lorsqu'un objet tourne sans frottement autour d'un axe, l'axe exerce un moment nul sur cet objet.

✧ C'est tout à fait normal : sans frottement, l'axe n'a aucune influence sur la rotation. Il faut donc que ces actions n'interviennent pas dans le TMC, *ie.* que leur moment soit nul.

✯ rotation avec frottements

Lorsqu'un objet tourne avec frottement autour d'un axe à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, l'axe exerce sur cet objet un moment de la forme :

➜ frottements fluides : $\vec{\Gamma} = -\lambda\,\vec{\Omega}$

➜ frottements solides :
  - ➜ $\|\vec{\Gamma}\| = \Gamma_0 = \mathrm{C^{te}}$ et $\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Omega} < 0$ lorsque $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$
  - ➜ $\|\vec{\Gamma}\| \leqslant \Gamma_0$ lorsque $\vec{\Omega} = \vec{0}$

✧ Là aussi la forme est tout ce qu'il y a de plus normal :
- ➜ une grandeur constante pour des frottements de type solide lorsque l'objet tourne, une grandeur proportionnelle à la vitesse angulaire pour des frottements fluides
- ➜ un moment de frottement qui s'oppose à la rotation : quand $\Omega > 0$, $\Gamma < 0$ et donc la vitesse angulaire diminue

✯ rotation motrice

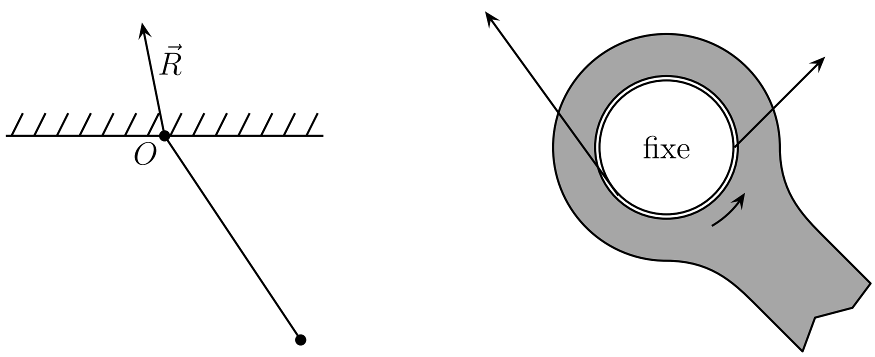
Lorsqu'un objet est entraîné par à un moteur à tourner autour d'un axe à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, l'axe exerce sur cet objet un moment de la forme :

$$\|\vec{\Gamma}_{\mathrm{m}}\| = \Gamma_{\mathrm{m}} = \mathrm{C^{te}} \qquad \text{avec} \qquad \vec{\Gamma}\cdot\vec{\Omega} > 0$$

✧ Interprétation analogue à la précédente : lorsque $\Omega > 0$, $\Gamma > 0$ et Ω a tendance à augmenter. C'est bien l'effet d'un moteur.

✯ attention à l'interprétation

✧ Il faut faire attention au moment exercé par un axe. En effet, il est possible de se faire piéger par la représentation.



✧ Sur le premier schéma, nous pourrions croire que le moment exercé par l'axe en O est nulle car le point d'application de la réaction $\vec{R}$ est en O, ce qui implique $\vec{\mathscr{M}}_0(\vec{R}) = \overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} = \vec{0}$.

✧ En réalité, le premier schéma n'est qu'un schéma et simplifie la liaison entre l'objet et l'axe.

✧ En regardant de plus près, nous pouvons voir que les réactions d'axes n'ont pas de raison d'avoir un moment nul car elles ne s'exercent pas en un point infiniment fin au centre de l'axe.

Dans le cas d'une liaison d'axe, il ne faut pas déterminer le moment exercé par l'axe en s'aidant du schéma mais de manière physique, suivant la nature de la liaison.

II·3·*iv* – cas particulier du poids – point d'application

✯ point d'application du poids

✧ Calculons la résultante des moments des poids de M_1 et M_2 :

$$\begin{aligned}\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{P}) &= \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{P}_1) + \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{P}_2) = \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\,\vec{g} + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\,\vec{g} \\ &= (m_1\,\overrightarrow{AM_1} + m_2\,\overrightarrow{AM_2}) \wedge \vec{g} = m_{\text{tot}}\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{g} \quad \leadsto \quad \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{P}) = \overrightarrow{AG} \wedge m_{\text{tot}}\,\vec{g}\end{aligned}$$

✧ Tout se passe, du point de vue de la rotation, comme si le poids total de l'ensemble du système s'exerçait en G.

Le *point d'application* C d'un ensemble de forces $\vec{f_i}$ est le point virtuel où la résultante des forces doit s'exercer pour avoir le même effet rotatoire que la résultante des moments de chaque force :

$$\sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f_i}) = \sum \left(\overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{f_i}\right) \triangleq \overrightarrow{AC} \wedge \left(\sum \vec{f_i}\right)$$

✧ Il ne faut pas s'offusquer du caractère « virtuel » du point d'application. En effet ce point n'existe pas plus que le centre de masse, point virtuel s'il en est (il n'y a qu'à songer au centre de masse d'un cerceau pour s'en persuader.)

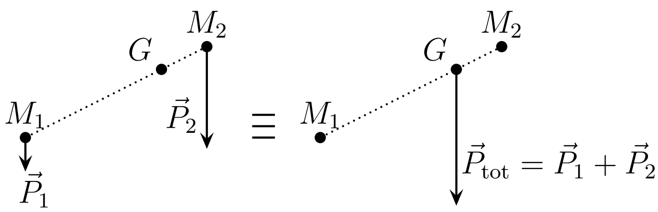
le point d'application est en général défini pour un ensemble de forces de même nature (point d'application du poids, des forces de pression, ...)

Le point d'application du poids est confondu avec le centre de masse G.

nous avons bien dit « du poids » et pas « de l'interaction gravitationnelle ».

✯ interprétation

✧ Avec la relation ci-dessus, nous constatons donc que, pour calculer le moment de l'ensemble des poids qui s'exercent sur le système, nous pouvons « simplement » calculer le moment du poids total en considérant qu'il s'exerce en G.



lors du calcul du moment des poids, nous pourrons donc choisir :
- ➜ soit de calculer les deux moments des deux poids de M_1 et M_2

➜ soit de calculer le moment du poids total qui s'exerce en G

✧ Les deux approches sont rigoureusement équivalentes du point de vue de la physique (nous venons de le montrer). Lorsque le système aura un mouvement d'ensemble, la 2e approche sera plus naturelle et donc facilitera l'étude. En revanche lorsque le système aura plusieurs parties relativement indépendantes, la première approche conduira à des relations plus simples.

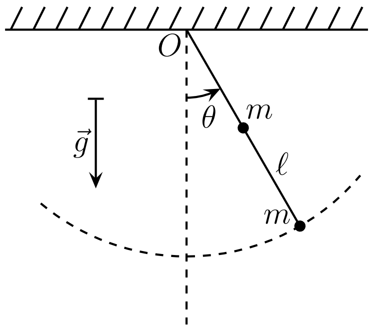
✯ une conclusion à ne pas généraliser

✧ Si nous pouvons définir le point d'application pour n'importe quel type de force, il ne faut pas généraliser le fait que le point d'application soit toujours G !

II·3·v – pendule rigide lesté

✯ dispositif – analyse

✧ Considérons une tige sans masse de longueur ℓ sur laquelle sont fixées deux masses m à $\dfrac{\ell}{2}$ et à ℓ.



✧ Analyse physique :

➜ le pendule va osciller, entraîné entre autre par son poids

➜ le mouvement est plan et à un degré de description, le mouvement circulaire

➜ les phénomènes vont dépendre de m, ℓ, g

✧ Analyse technique :

➜ c'est un mouvement circulaire donc coordonnées cylindro-polaire

➜ avec un mouvement conservatif, tout nous incite à une approche énergétique. Faisons plutôt pour nous entraîner une approche en terme de forces, *ie.* avec le TMC puisqu'il s'agit d'un mouvement de rotation

✯ équation d'évolution

✧ Quel système choisir ?

➜ en réduisant le système à { m }, nous devrons parler de la force que la tige exerce sur m, or il s'agit d'une force de laison rigide dont nous ne connaissons strictement rien

➜ agrandissons le système à { m + tige + m }, il s'agit alors d'un système de nombreux points (ceux qui constituent la tige) mais dont deux seulement possèdent une masse

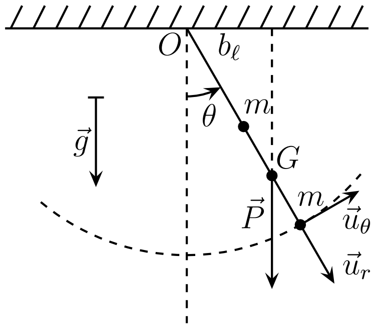
✧ Les forces *extérieures* agissant sur le système sont :

➜ force à distance : les poids s'exerçant sur les deux masses

➜ force de contact : les frottements sont négligés

➜ force de contact : l'action de l'axe $\vec{R}$

✧ Comme le pendule a un mouvement d'ensemble, introduisons le centre de masse.



✧ Nous n'avons pas besoin de parler des forces qui permettent de tenir les masses m sur la tige car ce sont des interactions intérieures.

✧ Le TMC s'écrit donc :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\Delta(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathscr{M}_\Delta(\vec{R})$$

✧ Comme la masse de la tige est nulle, son moment cinétique l'est aussi et donc :

$$\sigma_\Delta(\mathscr{S}) = \sigma_\Delta(M_1) + \sigma_\Delta(M_2) + \sigma_\Delta(\text{tige}) = \left(\frac{\ell}{2}\right) m\,\frac{\ell}{2}\,\dot\theta(t) + \ell\,m\,\ell\,\dot\theta(t) + 0 \qquad \leadsto \qquad \frac{\mathrm{d}\sigma_\Delta(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = \frac{5}{4}\,m\,\ell^2\,\ddot\theta(t)$$

✧ De plus $\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = \pm\,(2\,m)\,g\,b_\ell = -2\,m\,g\,\dfrac{3}{4}\,\ell\,\sin\theta = -\dfrac{3}{2}\,m\,g\,\ell\,\sin\theta$

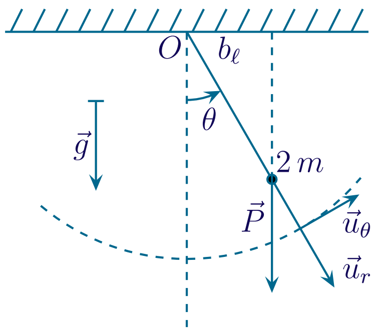
✧ Enfin le moment de la réaction d'axe est nulle, ce qui donne $\mathscr{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ et donc :

$$\frac{5}{4}\,m\,\ell^2\,\ddot\theta(t) = -\frac{3}{2}\,m\,g\,\ell\,\sin\theta(t) \qquad \leadsto \qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{6}{5}\,\frac{g}{\ell}\,\sin\theta(t) = 0$$

✯ un dispositif non équivalent

✧ Et si nous avions concentré toute la masse en G ?

✧ Alors nous aurions eu



✧ Il s'agit d'un pendule rigide usuel dont l'équation d'évolution aurait été :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\dfrac{3}{4}\,\ell}\,\sin\theta(t) = 0 \qquad \leadsto \qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4\,g}{3\,\ell}\,\sin\theta(t) = 0$$

✧ Comme nous pouvons le voir l'équation est différente !

✧ La raison est que le système équivalent proposé l'est effectivement pour la translation mais pas pour la rotation. Or ici le système $\{\ m + m + \text{tige}\ \}$ tourne sur lui-même !

II·4 – Théorème du moment cinétique dans $\mathscr{R}^\star$

II·4·*i* – approche systémique de la rotation – théorème de Kœnig

✯ un résultat particulier dans $\mathscr{R}^\star$

énoncé

✧ Le moment cinétique d'un système dans le référentiel barycentrique est indépendant du point par rapport auquel il est calculé. Ainsi, quels que soient les points A et B :

$$\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S}) = \vec{\sigma}_{B|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S})$$

démonstration

✧ Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S}) &= \vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}^\star}(M_1) + \vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}^\star}(M_2) && \text{extensivité de } \vec{\sigma} \\
&= \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\,\vec{v}_1^\star + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\,\vec{v}_2^\star && \text{définition de } \vec{\sigma}_i^\star \\
&= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_1}) \wedge m_1\,\vec{v}_1^\star + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_2}) \wedge m_2\,\vec{v}_2^\star && \text{Chasles} \\
&= \overrightarrow{AB} \wedge (m_1\,\vec{v}_1^\star + m_2\,\vec{v}_2^\star) + \overrightarrow{BM_1} \wedge m_1\,\vec{v}_1^\star + \overrightarrow{BM_2} \wedge m_2\,\vec{v}_2^\star && \text{regroupement} \\
&= \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S}) + \vec{\sigma}_{B|\mathscr{R}^\star}(M_1) + \vec{\sigma}_{B|\mathscr{R}^\star}(M_2) && \text{définitions} \\
&= \vec{0} + \vec{\sigma}_{B|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S}) && \text{car } \vec{p}^\star = \vec{0}
\end{aligned}$$

✧ Pour ces raisons, nous noterons, quel que soit le point A : $\vec{\sigma}^\star \stackrel{\text{not}}{=} \vec{\sigma}_A^\star$.

✯ $\vec{\sigma}_G$ et $\vec{\sigma}_G^\star$, plus qu'un point en commun

énoncé

✧ Pour un système de points, nous avons :

$$\vec{\sigma}_{G|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) = \vec{\sigma}_{G|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S})$$

démonstration

✧ Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_{G|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) &= \vec{\sigma}_{G|\mathscr{R}}(M_1) + \vec{\sigma}_{G|\mathscr{R}}(M_2) && \text{extensivité de } \vec{\sigma} \\
&= \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\,\vec{v}_1 + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\,\vec{v}_2 && \text{définition de } \vec{\sigma}_G(M_i) \\
&= \overrightarrow{AG} \wedge m_1\,(\vec{v}_G + \vec{v}_1^\star) + \overrightarrow{AG} \wedge m_2\,(\vec{v}_G + \vec{v}_1^\star) && \text{loi de composition des vitesses} \\
&= (m_1\,\overrightarrow{GM_1} + m_2\,\overrightarrow{GM_2}) \wedge \vec{v}_G + \overrightarrow{GM_1} \wedge \vec{v}_1^\star + \overrightarrow{GM_2} \wedge \vec{v}_2^\star && \text{regroupement} \\
&= \vec{0} \wedge \vec{v}_G + \vec{\sigma}_1^\star + \vec{\sigma}_2^\star && \text{définitions} \\
&= \vec{\sigma}_{G|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S})
\end{aligned}$$

✯ un premier théorème de Kœnig

énoncé

> Soit un système $\mathscr{S}$ étudié dans un référentiel $\mathscr{R}$, nous pouvons écrire pour tout point A :
> $$\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) + \vec{\sigma}_{|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S})$$

✧ Ce théorème permet de calculer autrement qu'avec l'extensivité le moment cinétique total d'un système de point. Il n'est jamais ni indispensable ni obligatoire mais se révèle parfois fort utile pour faciliter les calculs.

démonstration

✧ Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) &= \vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M_1) + \vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M_2) && \text{extensivité de } \vec{\sigma} \\
&= \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\,\vec{v}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\,\vec{v}_2 && \text{définition de } \vec{\sigma}_G(M_i) \\
&= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM_1}) \wedge m_1\,\vec{v}_1 + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM_2}) \wedge m_2\,\vec{v}_1 && \text{Chasles} \\
&= \overrightarrow{AG} \wedge (m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2) + \overrightarrow{GM_1} \wedge \vec{v}_1 + \overrightarrow{GM_2} \wedge \vec{v}_2 && \text{regroupement} \\
&= \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) + \vec{\sigma}_{G|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) && \text{définitions} \\
&= \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) + \vec{\sigma}_{G|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S}) && \text{propriétés vues précédemment}
\end{aligned}$$

lecture

✧ Comme annoncé plus haut, pour le moment cinétique :

> Un système de point ne se comporte pas comme un point unique en G où toute la masse serait concentrée.

✧ Si tel était le cas nous aurions $\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S})$, ce qui est **faux** dans le cas général.

II·4·*ii* – théorème du moment cinétique barycentrique

✯ énoncé

> Soit un système $\mathscr{S}$ étudié dans son référentiel barycentrique $\mathscr{R}^\star$ associé, alors :
> $$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}^\star(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{f}_{\text{ext}}) \quad \text{où :}$$
> ➜ $\vec{\sigma}^\star(\mathscr{S})$ est le moment cinétique du système $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{R}^\star$
> ➜ $\sum \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{f}_{\text{ext}})$ est le moment des forces extérieures par rapport à G qui s'appliquent dans le référentiel $\mathscr{R}$

✧ En d'autres termes, il ne **faut pas** compter les forces d'inerties due au caractère non galiléen du référentiel barycentrique. En revanche, si $\mathscr{R}$ est non galiléen, il faut compter les forces d'inertie liées au mouvement de $\mathscr{R}$ par rapport à un référentiel galiléen $\widetilde{\mathscr{R}}$.

✯ démonstration

✧ Considérons un point A quelconque fixe dans $\mathscr{R}$ et écrivons le TMC par rapport à A :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}) \qquad \text{où} \qquad \vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) + \vec{\sigma}^\star \quad \text{et} \quad \sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}) = \sum (\overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{f}_i)$$

✧ Calculons chaque terme séparément.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) + \vec{\sigma}^\star\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AG}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) + \overrightarrow{AG} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}^\star}{\mathrm{d}t} \\
&= \vec{v}_{|\mathscr{R}}(G) \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) + \overrightarrow{AG} \wedge \left(\sum \vec{f}_i\right) + \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}^\star}{\mathrm{d}t} \\
&= \vec{0} + \overrightarrow{AG} \wedge \left(\sum \vec{f}_i\right) + \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}^\star}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

✧ Car $\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G)$ et $\vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) = m_{\text{tot}}\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G)$ sont colinéaires.
✧ L'autre terme maintenant :

$$\begin{aligned}
\sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}_i) &= \sum \left(\overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{f}_i\right) = \sum \left((\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM_i}) \wedge \vec{f}_i\right) \\
&= \sum \left(\overrightarrow{AG} \wedge \vec{f}_i\right) + \sum \left(\overrightarrow{GM_i} \wedge \vec{f}_i\right) = \overrightarrow{AG} \wedge \left(\sum \vec{f}_i\right) + \sum \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{f}_i)
\end{aligned}$$

✧ En rassemblant :

$$\cancel{\overrightarrow{AG} \wedge \left(\sum \vec{f}_i\right)} + \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}^\star}{\mathrm{d}t} = \cancel{\overrightarrow{AG} \wedge \left(\sum \vec{f}_i\right)} + \sum \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{f}_i) \qquad \leadsto \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}^\star}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{f}_i)$$

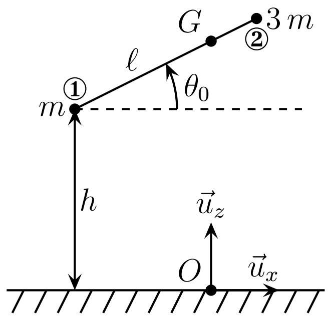
✯ interprétation

✧ En fait l'interprétation est très naturelle : le mouvement propre (caractérisé par $\vec{\sigma}^\star$) n'est influencé que par les forces extérieures $\sum \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{f}_i)$ et non par lui-même puisque nous ne devons pas compter les forces d'inertie liées au caractère non galiléen du référentiel barycentrique.

II·4·*iii* – chute d'un marteau, fin

✯ rappels

✧ Le modèle utilisé était le suivant.

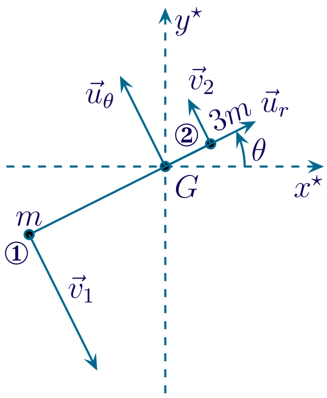


✧ Nous avions déjà trouvé :

$$z_G(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + h + \frac{3}{4}\,\ell\,\sin\theta_0 \qquad \text{et} \qquad x_G(t) = 0$$

✯ mouvement propre

✧ Pour faire l'étude dans $\mathscr{R}^\star$, il vaut mieux refaire un schéma dans le repère définissant $\mathscr{R}^\star$.



✧ Dans ce référentiel, les masses M_1 et M_2 ont des trajectoires circulaires (pas forcément uniformes), ce qui permet d'avoir directement, en adaptant la formule « $\vec{\sigma} = m\,r^2\,\dot{\theta}\,\vec{u}_z$ » :

$$\vec{\sigma}_{|\mathscr{R}^\star}(M_1) = m\left(\frac{3}{4}\,\ell\right)^2\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z^{\,\star} \qquad \text{et} \qquad \vec{\sigma}_{|\mathscr{R}^\star}(M_2) = 3\,m\left(\frac{1}{4}\,\ell\right)^2\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z^{\,\star}$$

✧ Ce qui donne :

$$\vec{\sigma}_{|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S}) = \vec{\sigma}_{|\mathscr{R}^\star}(M_1) + \vec{\sigma}_{|\mathscr{R}^\star}(M_2) = \frac{9}{16}\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z^{\,\star} + \frac{3}{16}\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z^{\,\star} = \frac{3}{4}\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z^{\,\star}$$

✧ De plus nous savons que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}^{\,\star}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{f}_{\text{ext}}) = \overrightarrow{GG} \wedge 4\,m\,\vec{g} = \vec{0}$$

✧ Nous en déduisons $\vec{\sigma}^{\,\star} = \overrightarrow{\mathrm{C^{te}}}$ ou encore $\dot{\theta}(t) = \mathrm{C^{te}}$. Reste à déterminer la constante.

✧ À tout instant nous avons, d'après la loi de composition des vitesses, $\vec{v}_1^{\,\star}(t) = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_G(t)$. Cette relation utilisée à l'instant particulier initial donne $\vec{v}_1^{\,\star}(0) = \vec{v}_1(0) - \vec{v}_G(0) = \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}$ et nous obtenons ainsi $\dot{\theta}(t) = 0$.

✧ Finalement $\boxed{\theta(t) = \mathrm{C^{te}} = \theta_0}$.

✯ conclusion

✧ Contrairement à ce que l'intuition pourrait suggérer, le marteau ne tourne pas en tombant : son inclinaison reste tout le temps identique. Comme nous le savons depuis l'étude de la chute libre, chaque point matériel chute avec la même vitesse. C'est aussi le cas ici : les masses m et $3\,m$ tombent de conserve, la tige ne servant « à rien ».

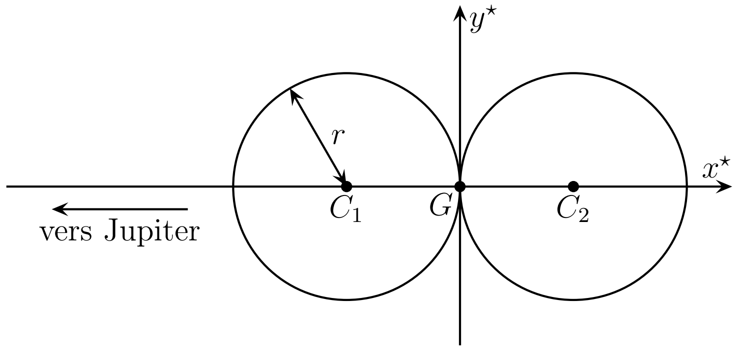
Le poids ne permet pas d'influencer la rotation propre.

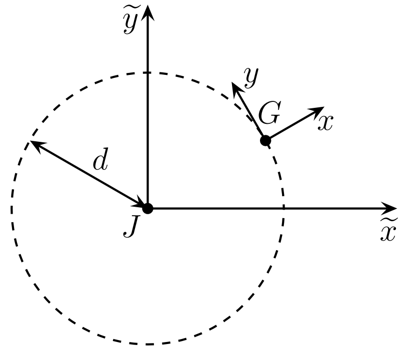
✧ Pour espérer une rotation du marteau, il faut inclure les forces de frottements. Celles-ci, verticales vers le haut (opposées à la vitesse de chute) s'exerce à peu près uniformément sur toute la tige (car elles sont proportionnelles à la surface). Nous comprenons donc qu'elles appuient (cf. schéma précédent) plus « à gauche » qu'« à droite » du centre de masse. Elles ont donc tendance à faire tourner la tige dans le sens horaire, *ie.* à faire que la masse $3\,m$ tombe en premier.

II·4·*iv* – stabiliser Shœmaker – Levy 9

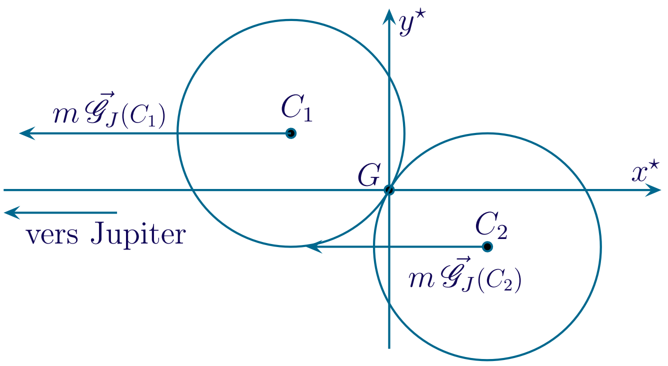
✯ modélisation

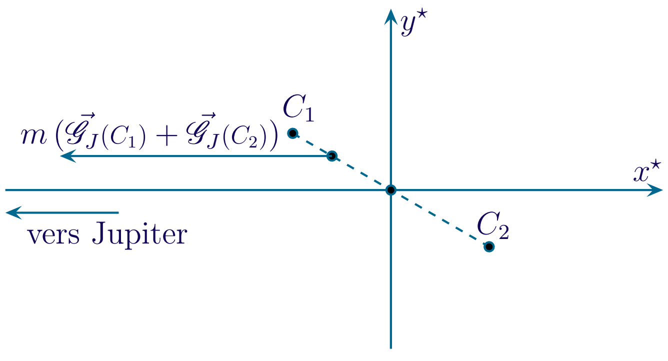
✧ Nous avons modélisé la comète par deux sphères accolées qui tournaient de conserve.





✧ Imaginons que la rotation propre ne soit pas totalement synchrone avec le mouvement circulaire autour de Jupiter et analysons les forces en présence.





✧ Ici, le référentiel barycentrique est bien aligné avec $\mathscr{R}$ qui est non galiléen : $\mathscr{R}^\star$ est donc en rotation par rapport au référentiel $\widetilde{\mathscr{R}}$.

✧ Nous pouvons facilement voir que le bras de levier est le même pour les deux forces de gravitation s'exerçant sur C_1 et C_2. En revanche, comme C_1 est plus proche que C_2 le moment est plus intense. L'ensemble des forces de gravitation permet donc de ramener dans l'axe (Gx) les deux sphères.

✧ Nous voyons donc que les forces de gravitation, contrairement au poids, permettent de faire tourner un objet. En fait tout se passe comme si la gravitation s'exerçait en un point C situé entre C_1 et C_2 mais un peu plus près de C_1.

Le *centre de gravité* est le point d'application des forces de gravitation.

✧ Pour que le centre de gravité soit différent du centre de masse, il faut faire appel à des termes de marée, *ie.* cela concerne des objets étendus dans un champ de gravitation non uniforme.

III – Aspect énergétique

III·1 – Théorème de l'énergie cinétique

III·1·*i* – loi

✯ énoncé

> Soit un système $\mathscr{S}$ étudié dans un référentiel $\mathscr{R}$ quelconque :
>
> $$\dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}|\mathscr{R}}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}_{\mathrm{ext}} + \sum \mathscr{P}_{\mathrm{int}} \quad \text{où :}$$
>
> ➜ $\sum \mathscr{P}_{\mathrm{ext}} = \vec{f}_{\mathrm{ext}\to 1} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) + \vec{f}_{\mathrm{ext}\to 2} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2)$ est la puissance fournie par les forces extérieures à l'ensemble des points matériels ;
> ➜ $\sum \mathscr{P}_{\mathrm{int}} = \vec{f}_{2\to 1} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) + \vec{f}_{1\to 2} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2)$ est la puissance fournie par les interactions intérieures.

✯ démonstration

✧ Il suffit de sommer les deux TPC appliqués à M_1 et M_2 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}|\mathscr{R}}(M_1)}{\mathrm{d}t} & = & \vec{f}_{\mathrm{ext}\to 1} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) + \vec{f}_{2\to 1} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) \\ \dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}|\mathscr{R}}(M_2)}{\mathrm{d}t} & = & \vec{f}_{\mathrm{ext}\to 2} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2) + \vec{f}_{1\to 2} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2) \end{array}\right.$$

III·1·*ii* – lecture

✧ L'**énorme** différence avec les théorèmes qui précèdent (TCI et TMC) c'est qu'ici, pour les théorèmes énergétiques, il **faut** prendre en compte les interactions intérieures. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum \mathscr{P}_{\mathrm{int}} &= \vec{f}_{1\to 2} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2) + \vec{f}_{2\to 1} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) = \vec{f}_{1\to 2} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2) - \vec{f}_{1\to 2} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) \\ &= \vec{f}_{1\to 2} \cdot \left(\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2) - \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1)\right) = \vec{f}_{1\to 2} \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t}\right) \\ &= \vec{f}_{1\to 2} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_1M_2}}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

✧ Ce dernier terme n'étant pas nul *a priori*.
✧ Ce théorème énergétique permet d'expliquer la différence de comportement bien connue entre une 2CV et une Ferrari au démarrage : la puissance intérieure à la Ferrari étant plus grande que celle de la 2CV, la dérivée de son énergie cinétique sera plus grande, *ie.* son énergie cinétique augmentera plus vite, *ie.* elle accélère « plus ». Insistons : si tant est que la force que la route peut exercer sur elle le lui permette (route non verglacée, pneus adaptés).

III·1·*iii* – le calcul de W_{int} se fait dans n'importe quel référentiel

✯ résultat

> Le calcul des travaux fournis par les interactions intérieures est indépendant du référentiel dans lequel ils sont calculés.

✯ démonstration

✧ Nous allons montrer que $\mathscr{P}_{\text{int}} = \widetilde{\mathscr{P}}_{\text{int}}$ avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \widetilde{\mathscr{P}}_{\text{int}} & = & \widetilde{\vec{f}}_{1\to 2}\cdot\left(\vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(M_2) - \vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(M_1)\right) \\ \mathscr{P}_{\text{int}} & = & \vec{f}_{1\to 2}\cdot\left(\vec{v}_{\mathscr{R}}(M_2) - \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1)\right) \end{array}\right.$$

☯ au niveau des forces

✧ L'invariance galiléenne des forces donne $\vec{f}_{1\to 2} = \widetilde{\vec{f}}_{1\to 2}$: l'interaction entre M_1 et M_2 est la même quel que soit le référentiel envisagé.

✧ Rappelons que les seules forces à être non invariantes par changement de référentiel sont les forces d'inertie qui ne sont pas des interactions intérieures.

✧ Nous savons donc maintenant que $\widetilde{\mathscr{P}}_{\text{int}} = \vec{f}_{1\to 2}\cdot\left(\vec{v}_{\widetilde{\mathscr{R}}}(M_2) - \vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(M_1)\right)$.

☯ au niveau des vitesses

✧ La loi de composition des vitesses donne :

$$\vec{v}_{\widetilde{\mathscr{R}}}(M_2) = \vec{v}_{|\mathscr{R}}(O) + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}}\wedge\overrightarrow{OM_2} + \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2)$$
$$\vec{v}_{\widetilde{\mathscr{R}}}(M_1) = \vec{v}_{|\mathscr{R}}(O) + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}}\wedge\overrightarrow{OM_1} + \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1)$$

✧ En soustrayant les deux relations précédentes, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\widetilde{\mathscr{R}}}(M_2) - \vec{v}_{\widetilde{\mathscr{R}}}(M_1) &= \vec{0} + \vec{\Omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}}\wedge\left(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}\right) + \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2) - \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) \\ &= \vec{\Omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}}\wedge\overrightarrow{M_1M_2} + \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2) - \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1)\end{aligned}$$

✧ Et ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{f}_{1\to 2}\cdot\left(\vec{v}_{\widetilde{\mathscr{R}}}(M_2) - \vec{v}_{\widetilde{\mathscr{R}}}(M_1)\right) &= \underbrace{\vec{f}_{1\to 2}}_{/\!/\,\overrightarrow{M_1M_2}}\cdot\underbrace{\left(\vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}}\wedge\overrightarrow{M_1M_2}\right)}_{\perp\,\overrightarrow{M_1M_2}} + \vec{f}_{1\to 2}\cdot\left(\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2) - \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1)\right) \\ &= 0 + \vec{f}_{1\to 2}\cdot\left(\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2) - \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1)\right)\end{aligned}$$

✧ Et le résultat.

✯ conséquence pratique

✧ Pour déterminer des travaux fournis par des interactions intérieures, nous pourrons nous placer dans n'importe quel référentiel, même si ce n'est pas celui correspondant à l'étude, même si ce référentiel est très « non galiléen ».

STOP nous ne pouvons nous placer dans n'importe quel référentiel **uniquement** pour calculer des travaux fournis par une **interaction intérieure** ! Nous ne pouvons pas le faire ni pour calculer le travail fourni par une seule force intérieure comme par exemple $W_{12} = \displaystyle\int \vec{f}_{1\to 2} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2$ (mais ce cas n'aurait aucun intérêt car il faudrait toujours calculer W_{21}) ni pour calculer le travail fourni par une force extérieure.

✯ conséquence fondamentale

L'énergie fournie par une interaction intérieure est une grandeur intrinsèque.

✧ C'est donc quelque chose que nous pouvons interpréter physiquement.

✧ Nous devons nous méfier des interprétation énergétique où seul un des acteur de l'interaction est en jeu.

III·1·*iv* – $\mathscr{P}_{\text{int}}$ pour un solide

✯ un résultat à connaître

Un système de deux points matériel est dit *solide* lorsque la distance entre ses deux points est constante : $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \mathrm{C^{te}}$.

☕ *Remarque* : pour un système de plus que deux points matériels, il faut que la distance entre chaque paire de points soit constante.

✧ En fait un solide n'est ni plus ni moins qu'un système indéformable dont la seule possibilité est de se translater et de tourner sur lui-même.

STOP une association de deux solides n'est pas un solide ! À partir du moment où il y a déformation, nous ne pouvons plus parler de solide.

Pour un système solide la puissance des interactions intérieure est nulle, *ie.*

$$\sum \mathscr{P}_{\text{int}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum W_{\text{int}} = 0$$

✯ démonstration

✧ Nous avons successivement :

$$
\begin{aligned}
\sum \mathscr{P}_{\text{int}} &= \vec{f}_{1\to 2}\cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_1M_2}}{\mathrm{d}t} && \text{relation précédente}\\
&= \lambda(t)\,\overrightarrow{M_1M_2}\cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_1M_2}}{\mathrm{d}t} && \text{3}^{\text{e}}\text{ loi de Newton}\\
&= \lambda(t)\times \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_1M_2}^2}{\mathrm{d}t} &&\\
&= \lambda(t)\times \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{dC^{te}}}{\mathrm{d}t} && \text{définition du solide}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

✧ Le travail fourni par les interactions intérieures étant la somme des travaux élémentaires, il ne peut qu'être nul aussi :

$$W_{\text{int}} = \int \delta W_{\text{int}} = \int \mathscr{P}_{\text{int}}(t)\,\mathrm{d}t = \int 0\,\mathrm{d}t = 0$$

Un solide ne dissipe ni ne crée d'énergie.

III·2 – Théorème de l'énergie mécanique

III·2·*i* – une écriture sans surprise

✯ théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel $\mathscr{R}$ quelconque, pour un système $\mathscr{S}$ dont le point M_1 évolue sur la trajectoire A_1B_1 pendant que M_2 évolue sur A_2B_2, nous avons

$$\Delta E_{\mathrm{m}|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) = \sum W_{\text{nc,ext}} + \sum W_{\text{nc,int}} \quad \text{où :}$$

➜ $E_{\mathrm{m}|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) = E_{\mathrm{c}|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) + E_{\mathrm{p,ext}}(\mathscr{S}) + E_{\mathrm{p,int}}(\mathscr{S})$ est l'énergie mécanique du système ;
➜ $E_{\mathrm{p,ext}}(\mathscr{S})$ est l'énergie potentielle associée aux forces extérieures ;
➜ $E_{\mathrm{p,int}}(\mathscr{S})$ est l'énergie potentielle interne associée aux interactions intérieures ;
➜ $\displaystyle\sum W_{\text{nc,ext}} = \int_{A_1}^{B_1} \vec{f}_{\text{ext}\to 1}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1 + \int_{A_2}^{B_2} \vec{f}_{\text{ext}\to 2}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2$ est le travail fourni par les forces extérieures non conservatives ;
➜ $\displaystyle\sum W_{\text{nc,int}} = \int_{A_1}^{B_1} \vec{f}_{2\to 1}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1 + \int_{A_2}^{B_2} \vec{f}_{1\to 2}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2$ est le travail fourni par les interactions intérieures non conservatives.

✯ démonstration

✧ Partons du TEC pour un système et tant pour les forces extérieures que pour les interactions intérieures, écrivons les travaux fournis en séparant ceux fournis par des forces conservatives et ceux fournis par des forces non conservatives :

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{c,ext}} + W_{\text{nc,exnt}} \qquad \text{et} \qquad W_{\text{int}} = W_{\text{c,int}} + W_{\text{nc,int}}$$

✧ Ensuite nous avons, par définition de l'énergie potentielle :

$$W_{\text{c,ext}} = -\Delta E_{\text{p,ext}} \qquad \text{et} \qquad W_{\text{c,int}} = -\Delta E_{\text{p,int}}$$

✧ En regroupant les énergies potentielles avec l'énergie cinétique, nous arrivons bien au TEM.

✯ théorème de la puissance mécanique

Dans un référentiel $\mathscr{R}$ quelconque, pour un système $\mathscr{S}$, nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}|\mathscr{R}}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}_{\text{nc,ext}} + \sum \mathscr{P}_{\text{nc,int}} \quad \text{où :}$$

➜ $\sum \mathscr{P}_{\text{nc,ext}} = \vec{f}_{\text{ext}\to 1} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) + \vec{f}_{\text{ext}\to 2} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2)$ est la puissance fournie par les forces extérieures non conservatives ;
➜ $\sum \mathscr{P}_{\text{nc,int}} = \vec{f}_{2\to 1} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) + \vec{f}_{1\to 2} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2)$ est la puissance fournie par les interactions intérieures non conservatives.

✯ démonstration

✧ Il suffit de dériver par rapport au temps le TEM.

✯ utilisation

✧ Comme pour la mécanique du point, dans la « philosophie » de ces théorèmes, le TEM est plus destiné à faire trouver une vitesse car il s'agit d'un loi globale (c'est un bilan énergétique) alors que le TPM a davantage vocation à établir une équation différentielle régissant l'évolution du système car c'est une loi locale (« locale » au sens temporel : elle établit une relation à t et uniquement t).
✧ L'utilisation de ces deux théorèmes, pour des systèmes, n'est pas forcément simple, elle est même plutôt complexe :
- ➜ définir le système ;
- ➜ faire la liste **complète** des forces extérieures et des interactions intérieures ;
- ➜ exprimer les éventuelles énergies potentielles ;
- ➜ justifier le travail nul des interactions intérieures.

✧ En utilisant ces théorèmes avec méthode, nous constaterons toutefois qu'ils se révèlent **faciles** d'utilisation et même, pour les systèmes à un seul degré de description, extrêment puissants et rapides !

III·2·*ii* – cas particulier du poids

✧ Comme le poids s'exerce en M_1 et en M_2, l'énergie potentielle associée vaut, en prenant le repérage idoine :

$$\begin{aligned} E_{\text{pp}}(\mathscr{S}) &= E_{\text{pp}}(M_1) + E_{\text{pp}}(M_2) = m_1\,g\,h_1 + m_2\,g\,h_2 \\ &= g\,(m_1\,z_1 + m_2\,z_2) = m_{\text{tot}}\,g\,z_G \\ &= m_{\text{tot}}\,g\,h_G \end{aligned}$$

Pour le poids, tant du point de vue des forces que du point de vue énergétique, tout se passe comme si le système était concentré en G.

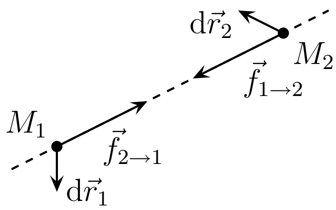
✧ Comme précédemment, nous aurons le choix entre une vision systémique (la masse est concentrée en G) et une vision particulaire (point par point).

III·2·*iii* – déterminer rapidement une $E_{\text{p,int}}$

✯ le problème et sa solution

✧ Il faut trouver une énergie potentielle $E_{\text{p,int}}$ telle que :

$$\delta W_{\text{int}} = \vec{f}_{2\to1}(r)\cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{f}_{1\to2}(r)\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2 = -\mathrm{d}E_{\text{p,int}} \qquad \text{avec} \qquad r = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$$



✧ Les intégrations résultantes de la relation précédente n'étant pas, en général, aisées, nous allons utiliser la propriété selon laquel le travail des interactions intérieures peut se faire dans n'importe quel référentiel. Ici nous allons choisir le référentiel $\mathscr{R}$ tel que :
- ➜ M_1 soit l'origine de $\mathscr{R}$;
- ➜ M_1M_2 définisse l'axe $\vec{u}_x$.

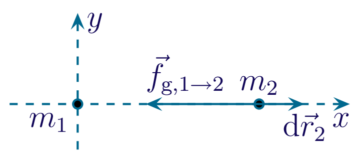
✧ Dans ces conditions, les mouvements de M_1 et M_2 sont simples :
- ➜ M_1 est immobile
- ➜ M_2 a une trajectoire rectiligne

✧ Nous avons alors $r = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = \|\vec{r}_2\| = r_2 \overset{\text{not}}{=} x$, le calcul se réduit à :

$$-\mathrm{d}E_{\text{p,int}} = f_{1\to2}(x)\,\mathrm{d}x$$

✯ expression de $E_{\text{p,grav}}$

✧ Nous avons successivement :



$$\mathrm{d}E_{\text{p,grav}} = -\delta W_{\text{int}} = -\vec{f}_{\text{g},1\to2}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2 = +G\,\frac{m_1\,m_2}{x^2}\,\vec{u}_x\cdot\mathrm{d}x\,\vec{u}_x = G\,\frac{m_1\,m_2}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

✧ Et ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{p,grav}}}{\mathrm{d}x} = G\,\frac{m_1\,m_2}{x^2} \qquad \rightsquigarrow \qquad E_{\text{p,grav}} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{x} + \mathrm{C^{te}}$$

✧ La constante est choisie de manière conventionelle : l'énergie potentielle est posée nulle lorsque la force est nulle. Ici la force est nulle à l'infini, il faut donc $E_{\text{p,grav}}(\infty) = 0$ ce qui donne ici, en reprenant $r = x$:

> L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle interne à un système de deux points de masses m_1 et m_2 séparés de r s'écrit :
> $$E_{\text{p,grav,int}} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r}$$

✯ l'énergie potentielle interne n'est pas additive

✧ Lorsque nous considèrons deux points matériels en interaction gravitationnelle :
- ➜ en étudiant le système $\mathscr{S}_1 = \{M_1\}$, l'énergie potentielle associée à la force gravitationnelle subie par M_1 (qui est ici une force extérieure) vaut $E_{\text{p,1}} = -G\,\dfrac{m_1\,m_2}{r}$;
- ➜ en étudiant le système $\mathscr{S}_2 = \{M_2\}$, l'énergie potentielle associée à la force gravitationnelle subie par M_2 (qui est ici une force extérieure) vaut $E_{\text{p,2}} = -G\,\dfrac{m_1\,m_2}{r}$;
- ➜ en étudiant le système $\mathscr{S} = \{M_1 + M_2\}$, l'énergie potentielle associée à l'interaction gravitationnelle **interne** vaut : $E_{\text{p,grav,int}} = -G\,\dfrac{m_1\,m_2}{r}$.

✧ Nous constatons donc que l'énergie potentielle **interne** n'est pas additive, contrairement à l'énergie potentielle associée aux forces extérieures.

STOP il est d'autant plus important de parler d'*interaction intérieure* plutôt que de forces intérieures. En effet, en comptant les forces intérieures, il peut être tentant de compter deux fois l'énergie potentielle (une fois pour chaque force), alors qu'en parlant d'interaction, nous avons tendance à ne lui associer qu'une seule énergie potentielle.

✧ Le paradoxe se lève aisément en constatant qu'en fait les expressions des énergies potentielles associées à $\mathscr{S}_1 = \{M_1\}$ et $\mathscr{S}_2 = \{M_2\}$ sont fausses car elles dépendent de la position de l'autre point, *ie.* du temps. Et comme une énergie potentielle ne doit pas dépendre du temps, cette expression est non valide . . . à moins que l'autre point ne soit fixe.

✯ expression de $E_{\text{p,int}}$ pour un ressort

✧ Le ressort est constitué d'une infinité de points, il n'est donc pas évident de calculer l'énergie potentielle associée. Toutefois nous admettrons et nous retiendrons le résultat suivant :

> Lorsqu'un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0 est inclus dans un système, il contient l'énergie potentielle interne :
> $$E_{\text{p,int,él}} = \frac{1}{2}\,k\,(\ell - \ell_0)^2$$

✧ La grande différence est que maintenant il est possible d'envisager des ressorts dont les deux extrémités bougent.

III·2·*iv* – une utilisation bien moins difficile que prévue

✧ Nous allons voir un certain nombre de cas pour lesquels le calcul de W_{int} est aisé.

✧ Rappelons tout d'abord que $\mathscr{P}_{\text{int}} = \vec{f}_{1\to 2} \cdot \left(\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2) - \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1)\right)$.

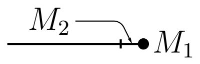
✯ cas d'une interaction intérieure à distance

✧ Il ne peut s'agir que de l'interaction gravitationnelle ou de l'interaction coulombienne que nous verrons plus tard. Dans les deux cas, elles dérivent d'une énergie potentielle interne.

> Pour une interaction intérieur à distance, nous pouvons écrire :
> $$W_{\text{int}} = -\Delta E_{\text{p,int}}$$

✯ cas d'une interaction intérieure de contact entre deux points liés

✧ Il s'agit, par exemple, d'une masse attachée à une extrémité d'un fil, d'un ressort …



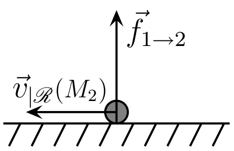
✧ La masse et l'extrémité du fil sont toujours au même point.
✧ Nous avons donc à tout instant $\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) = \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2)$ et ainsi : $\mathscr{P}_{\text{int}} = 0$.

> L'interaction entre deux points rigidement liés fournit une puissance nulle.

Remarque : pour espérer $\mathscr{P}_{\text{int}} \neq 0$, il faut qu'il y ait du *glissement*.
✧ Nous pouvons retrouver ce résultat en considérant que dans un tel cas, les points M_1 et M_2 constituent un solide.

✯ cas d'une interaction intérieure de contact sans frottement

✧ Regardons de près ce qu'il se passe au niveau du contact. Plaçons nous dans le référentiel où M_1 est immobile.



✧ Étant donné que le contact se fait sans frottement, nous avons $\vec{f}_{1\to 2} \perp \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2)$ et ainsi $\mathscr{P}_{\text{int}} = 0$.

✯ conclusion à retenir et à utiliser directement

> Toute liaison interne qui est :
> ➜ avec frottement sans glissement ;
> ➜ avec glissement sans frottement ;
> fournit une puissance nulle au système dans lequel elle est.

> Les glissements sans frottement et les engrenages ne dissipent ni n'apportent d'énergie.

✯ et la voiture qui démarre ?

✧ Nous avons dit que la voiture avançait grâce à $\mathscr{P}_{\text{int}}$ dont nous savons qu'elle est fournie par le moteur. Sauf que dans le moteur, il n'y a que des pièces solides dont nous voulons diminuer les frottements. Cela donnerait donc des liaisons soit avec frottement sans glissement (courroie de transmission) soit des liaison avec glissement sans frottement. Dans les deux cas, nous tendons vers $\mathscr{P}_{\text{int}} = 0$ …

✧ Pour expliquer ce paradoxe, il faut admettre qu'il n'existe pas **que** des pièces solides dans le moteur, il existe aussi des parties élastiques : le mélange gazeux { air, carburant }. Ce mélange gazeux va se détendre (comme un ressort comprimé qu'on libère) lorsqu'il brûle. C'est de lui que vient, au fond, l'énergie !

III·3 – Étudier un système de points

III·3·*i* – analyse physique

✧ Lors de l'analyse physique, nous devons, comme précédemment :

- ➜ imaginer l'évolution temporelle du dispositif (*ie.* le voir bouger)
- ➜ déterminer le nombre de degrés de description
- ➜ repérer si l'évolution est conservative, libre, ...
- ➜ déterminer les grandeurs caractéristiques de l'évolution

✧ En fait cela ne change pas tellement de l'analyse physique lorsqu'il n'y a qu'un point matériel.

III·3·*ii* – analyse technique

✧ En plus du repérage, nous devons dans cette analyse choisir le système à étudier :

- ➜ pour déterminer des grandeurs globale, il est plus facile d'étudier un système naturel qui rassemble l'ensemble du dispositif
- ➜ pour déterminer des grandeurs locale, il est souvent utile de décomposer le système en sous-système

✧ Une fois le choix du système effectué, il faut décider de la vision que nous aurons du système :

- ➜ plutôt une vision systémique lorsque le système voit toutes ses parties évoluer de conserve (ce qui est toujours le cas lorsque le système est un solide)
- ➜ plutôt une vision particulaire lorsque le système possède des parties aux évolutions sensiblement différentes

III·3·*iii* – vision systémique de l'énergie cinétique – théorème de Kœnig

✯ énoncé

Pour tout système $\mathscr{S}$ étudié dans un référentiel $\mathscr{R}$, nous pouvons écrire :

$$E_{\text{c}|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) = \frac{1}{2}\, m_{\text{tot}}\, v_{|\mathscr{R}}{}^2(G) + E_{\text{c}|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S})$$

✯ démonstration

✧ Nous avons successivement :

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{c}|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) &= E_{\mathrm{c}|\mathscr{R}}(M_1) + E_{\mathrm{c}|\mathscr{R}}(M_2) && \text{extensivité de } E_{\mathrm{c}} \\
&= \frac{1}{2}\,m_1\,{v_{|\mathscr{R}}}^2(M_1) + \frac{1}{2}\,m_2\,{v_{|\mathscr{R}}}^2(M_2) && \text{définition de } E_{\mathrm{c}} \\
&= \frac{1}{2}\,m_1\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1)\cdot\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) + \frac{1}{2}\,m_2\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2)\cdot\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2) \\
&= \frac{1}{2}\,m_1\left(\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G) + \vec{v}_{|\mathscr{R}^\star}(M_1)\right)^2 + \frac{1}{2}\,m_2\left(\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G) + \vec{v}_{|\mathscr{R}^\star}(M_2)\right)^2 && \text{loi de composition} \\
&= \frac{1}{2}\,m_1\,{v_{|\mathscr{R}^\star}}^2(M_1) + \frac{1}{2}\,m_1\,{v_{|\mathscr{R}}}^2(G) + m_1\,\vec{v}_{|\mathscr{R}^\star}(M_1)\cdot\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G) + \cdots \\
&\qquad + \frac{1}{2}\,m_2\,{v_{|\mathscr{R}^\star}}^2(M_2) + \frac{1}{2}\,m_2\,{v_{|\mathscr{R}}}^2(G) + m_2\,\vec{v}_{|\mathscr{R}^\star}(M_2)\cdot\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G) \\
&= \frac{1}{2}\,m_1\,{v_{|\mathscr{R}}}^2(G) + \frac{1}{2}\,m_2\,{v_{|\mathscr{R}}}^2(G) + \frac{1}{2}\,m_1\,v_{|\mathscr{R}^\star}(M_1) + \frac{1}{2}\,m_2\,v_{|\mathscr{R}^\star}(M_2) + \cdots \\
&\qquad + \underbrace{\left(m_1\,\vec{v}_{|\mathscr{R}^\star}(M_1) + m_2\,\vec{v}_{|\mathscr{R}^\star}(Mm_2)\right)}_{\vec{p}_{|\mathscr{R}^\star}=\vec{0}}\cdot\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G) && \text{regroupement} \\
&= \frac{1}{2}\,(m_1+m_2)\,{v_{|\mathscr{R}}}^2(G) + E_{\mathrm{c}|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S})
\end{aligned}
$$

✯ lecture

✧ Pour l'énergie cinétique, comme pour le moment cinétique, nous ne pouvons pas considérer que le système est assimilable à un point unique en G où serait concentrée toute la masse.

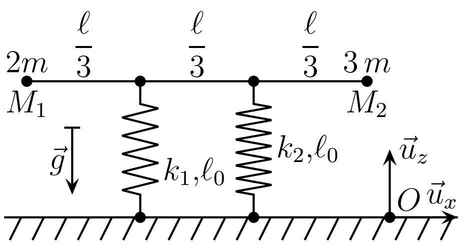
III·4 – Exemples

III·4·i – tige soutenue par des ressorts

✯ dispositif – analyse

✧ Deux masses $2\,m$ et $3\,m$ sont attachées aux extrémités d'une tige sans masse de longueur ℓ, elle-même soutenue par par deux ressorts de même longueur naturelle ℓ_0 et de constantes de raideur différentes k_1 et k_2 au tiers et au deux tiers de sa longueur (cf. schéma).

✧ Les mouvements sont suffisamment petits pour que nous puissions considérer les ressorts verticaux.



✧ Analyse physique :

- ➜ l'ensemble { m_1, m_2, tige } constitue un solide
- ➜ il va osciller dans un plan vertical en tournant sur lui-même : c'est un dispositif à deux degrés de description
- ➜ l'ensemble de l'évolution est libre et conservative
- ➜ les grandeurs pertinentes sont m, ℓ, g, k_1, k_2, ℓ_0.

✧ Analyse technique :

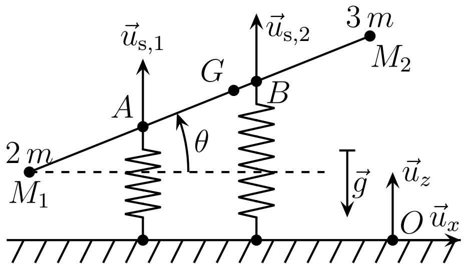
➜ ici nous allons étudier la translation et le mouvement propre de manière séparée

➜ comme le dispositif fait naturellement apparaître un solide, nous allons utiliser une vision systémique et noter $\mathscr{S}$ le système $\{ m_1, m_2, \text{tige} \}$

✯ éléments cinétiques de $\mathscr{S}$

✧ La position du centre de masse est telle que :

$$M_1G = \frac{3\,m}{3\,m+2\,m}\,M_1M_2 = \frac{3}{5}\,\ell$$



✧ En notant A et B les points de fixations des ressorts 1 et 2, nous avons :

$$AG = M_1G - M_1A = \frac{3}{5}\,\ell - \frac{1}{3}\,\ell = \frac{4}{15}\ell \qquad \text{et} \qquad BG = M_2G - M_2B = \frac{2}{5}\,\ell - \frac{1}{3}\,\ell = \frac{1}{15}\ell$$

✧ Cela permet d'arriver à (en utilisant $\sin\theta = \theta$ car les mouvements sont petits) :

$$z_1(t) = z_G(t) - \frac{3}{5}\,\ell\,\theta(t) \qquad z_2(t) = z_G(t) + \frac{2}{5}\,\ell\,\theta(t)$$

$$z_A(t) = z_G(t) - \frac{4}{15}\,\ell\,\theta(t) \qquad z_B(t) = z_G(t) + \frac{1}{15}\,\ell\,\theta(t)$$

✯ mouvement d'ensemble

✧ Le TCI appliqué à $\mathscr{S}$ donne :

$$5\,m\,\vec{a}_G(t) = 5\,m\,\vec{g} - k_1\,(\ell_1(t)-\ell_0)\,\vec{u}_{s,1} - k_2\,(\ell_2(t)-\ell_0)\,\vec{u}_{s,1}$$

$$5\,m\,\ddot{z}_G(t) = -5\,m\,g - k_1\,(\ell_1(t)-\ell_0)\times(+1) - k_2\,(\ell_2(t)-\ell_0)\times(+1) \qquad \text{projection sur } \vec{u}_z$$

$$= -5\,m\,g - k_1\,(z_A(t)-\ell_0) - k_2\,(z_B(t)-\ell_0) \qquad \text{relations géométriques}$$

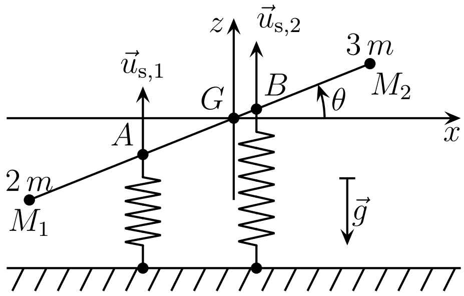
$$= -5\,m\,g - k_1\left(z_G(t) - \frac{4}{15}\,\ell\,\theta(t) - \ell_0\right) - k_2\left(z_G(t) + \frac{1}{15}\,\ell\,\theta(t) - \ell_0\right)$$

$$5\,m\,\ddot{z}_G(t) = -(k_1+k_2)\,z_G(t) + \frac{4\,k_1\ell - k_2\,\ell}{15}\theta(t) - 5\,m\,g + \ell_0\,(k_1+k_2)$$

✧ Nous aboutissons à une équation différentielle qui n'est pas soluble directement car elle concerne les deux grandeurs $z_G(t)$ et $\theta(t)$.

✫ mouvement dans $\mathscr{R}^\star$

TMCB



✧ Il s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}^{\,\star}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{f}_{\text{ext}}) = \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{P}) + \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{T}_1) + \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{T}_2)$$

expression de $\vec{\sigma}^\star$

✧ Comme dans $\mathscr{R}^\star$ les mouvements de M_1 et M_2 sont circulaires, en adaptant la formule $\vec{\sigma} = m\,r^2\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z$, nous obtenons directement :

$$\left.\begin{aligned} \vec{\sigma}_1^{\,\star} &= m_1\,(GM_1)^2\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z^{\,\star} = 2\,m\left(\frac{2}{3}\,\ell\right)^2\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z^{\,\star} \\ \vec{\sigma}_2^{\,\star} &= m_2\,(GM_2)^2\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z^{\,\star} = 3\,m\left(\frac{1}{3}\,\ell\right)^2\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z^{\,\star} \end{aligned}\right\} \quad\rightsquigarrow\quad \vec{\sigma}^{\,\star} = \frac{6}{5}\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z^{\,\star}$$

✧ Remarquons que $\vec{u}_z^{\,\star} = -\vec{u}_y$.

expression des moments des forces

✧ Nous avons tout d'abord :

$$\vec{\mathscr{M}}_G(\vec{P}) = \overrightarrow{GG} \wedge \vec{P}_{\text{tot}} = \vec{0}$$

✧ Nous avons ensuite :

$$\begin{aligned} \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{T}_1) = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{T}_1 &= \frac{4}{15}\,\ell\,(-\underbrace{\cos\theta}_{=1}\,\vec{u}_x - \underbrace{\sin\theta}_{=\theta}\,\vec{u}_z) \wedge -k_1\,(\ell_1(t) - \ell_0)\,\vec{u}_z \\ &= \frac{4}{15}\,k_1\,\ell\,(\ell_1(t) - \ell_0)\,\vec{u}_z^{\,\star} = \frac{4}{15}\,k_1\,\ell\left(z_G(t) - \frac{4}{15}\,\ell\,\theta(t) - \ell_0\right)\vec{u}_z^{\,\star} \end{aligned}$$

✧ Et de même :

$$\vec{\mathscr{M}}_G(\vec{T}_2) = \overrightarrow{GB} \wedge \vec{T}_2 = \frac{1}{15}\,\ell\,(\underbrace{\cos\theta}_{=1}\,\vec{u}_x + \underbrace{\sin\theta}_{=\theta}\,\vec{u}_z) \wedge -k_2\,(\ell_2(t) - \ell_0)\,\vec{u}_z$$
$$= -\frac{1}{15}\,k_2\,\ell\,(\ell_2(t) - \ell_0)\,\vec{u}_z^{\,\star} = -\frac{1}{15}\,k_2\,\ell\,\left(z_G(t) + \frac{1}{15}\,\ell\,\theta(t) - \ell_0\right)\,\vec{u}_z^{\,\star}$$

rassemblement

✧ En projetant le TMC sur $\vec{u}_z^{\,\star}$ nous obtenons successivement :

$$\frac{6}{5}\,m\,\ell^2\,\ddot{\theta}(t) = \frac{4}{15}\,k_1\,\ell\,\left(z_G(t) - \frac{4}{15}\,\ell\,\theta(t) - \ell_0\right) - \frac{1}{15}\,k_2\,\ell\,\left(z_G(t) + \frac{1}{15}\,\ell\,\theta(t) - \ell_0\right)$$
$$= -\left[\left(\frac{4}{15}\right)^2 k_1\,\ell^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 k_2\,\ell^2\right] \times \theta(t) + \frac{4\,k_1\,\ell - k_2\,\ell}{15} \times z_G(t) - \frac{4\,k_1\,\ell - k_2\,\ell}{15} \times \ell_0$$
$$= -\frac{16\,k_1\,\ell^2 + k_2\,\ell^2}{225} \times \theta(t) + (z_G(t) - \ell_0) \times \frac{4\,k_1 \ell - k_2\,\ell}{15}$$

✯ condition d'équilibre horizontal

✧ Cherchons la condition pour laquelle $\theta_{\text{éq}} = 0$.

✧ En reprenant l'équation provenant du TCI, nous trouvons : $z_{G,\text{éq}} = \ell_0 - \dfrac{5\,m\,g}{k_1 + k_2}$.

✧ L'autre équation conduit, pour l'équilibre à :

$$0 = 0 + (\underbrace{z_{G,\text{éq}} - \ell_0}_{\neq 0}) \times \frac{4\,k_1\,\ell - k_2\,\ell}{15} \qquad \leadsto \qquad \boxed{k_2 = 4\,k_1}$$

✯ découplage

✧ Avec la condition précédente, les deux équations différentielles trouvées s'écrivent respectivement :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5\,m\,\ddot{z}_G(t) & = & -(k_1 + k_2)\,z_G(t) - 5\,m\,g + \ell_0\,(k_1 + k_2) \\ \dfrac{6}{5}\,m\,\ell^2\,\ddot{\theta}(t) & = & -\dfrac{16\,k_1\,\ell^2 + k_2\,\ell^2}{225} \times \theta(t) \end{array}\right.$$

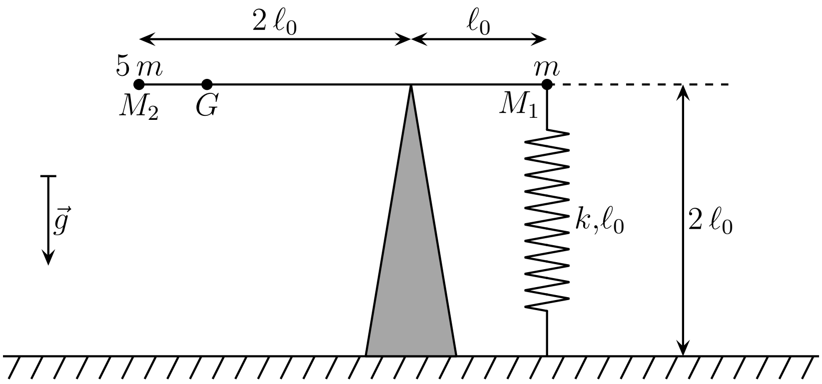
✧ Nous constatons alors que les deux degrés de description sont découplés et oscillent indépendamment l'un de l'autre.

✧ Cet exemple correspond à une modélisation simple de la suspension d'une voiture.

III·4·*ii* – balance à ressort

✯ dispositif – analyse

✧ Considérons le dispositif suivant.



✧ Les deux masses m et $5\,m$ sont reliées par une tige rigide et sans masse. L'ensemble peut tourner sans frottement au niveau du support. Le ressort est idéal.

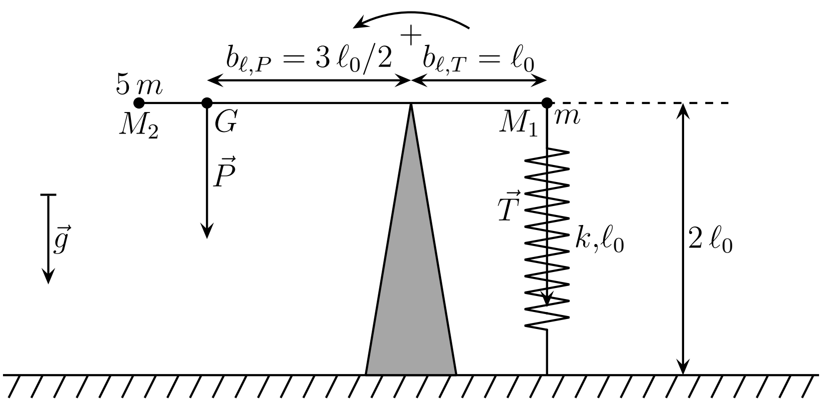
✧ Analyse physique :
- ➜ il s'agit d'un système de plusieurs points matériel
- ➜ il n'y a qu'un degré de description, l'angle que forme la tige avec l'horizontal
- ➜ l'évolution est libre et conservative
- ➜ les grandeurs pertinentes sont de m, ℓ_0, g et k.

✧ Analyse technique :
- ➜ le mouvement principal est un mouvement de rotation autour de O, nous allons donc utiliser un repérage de type cylindro-polaire
- ➜ de plus comme l'ensemble se déplace de conserve, nous allons utiliser une approche systémique et nous allons noter $\mathscr{S}$ le système $\{\ m + 5\,m + \text{tige}\ \}$
- ➜ le centre de masse G est à $\dfrac{\ell_0}{6}$ de M_2.

✯ condition d'équilibre horizontal

✧ Étant donné que le mouvement est conservatif et à un dégré de description, nous devrions utiliser l'approche énergétique. Mais nous allons utiliser l'approche en terme de forces, ou plutôt de moment, pour changer.

> Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la somme des moments qui s'exercent sur un système soit nulle.



✧ Les forces extérieures qui s'exercent sur le dispositif sont :
- ➜ force à distance : le poids total qui s'exerce en G ; $\vec{P} = 6\,m\,\vec{g}$
- ➜ force de contact : l'action exercée par le ressort en M_1 ; $\vec{T} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_{\text{s}}$
- ➜ force de contact : la réaction d'axe

✧ Algébrisons le sens de rotation et représentons les forces qui s'exercent.

✧ Le moment exercé par le poids s'écrit :

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = \pm P\,b_{\ell,P} = +6\,m\,g\,\frac{3}{2}\,\ell_0 = 9\,m\,g\,\ell_0$$

✧ Le moment exercé par la force exercée par le ressort s'écrit :

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{T}) = \pm T\,d_{\ell,T} = -k\,(2\,\ell_0 - \ell_0)\,\ell_0 = -k\,{\ell_0}^2$$

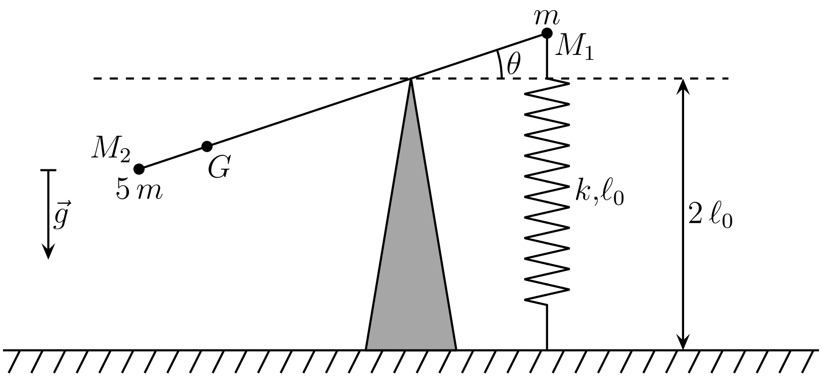
✧ Comme la réaction d'axe exerce un moment nul (pas de frottement) nous avons :

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathscr{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathscr{M}_\Delta(\vec{T}) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 9\,m\,g\,\ell_0 - k\,{\ell_0}^2 + 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{k\,\ell_0 = 9\,m\,g}$$

✧ Nous pouvons constater que la tension exercée par le ressort doit compenser bien plus que le poids. Cela est dû à l'effet des moments : plus une force s'exerce loin, plus elle a d'effet. Ici le poids s'exerce « plus loin » de l'axe que la force exercée par le ressort, son effet est donc plus important.

✯ petites oscillations

✧ Supposons la relation précédente vérifiée et cherchons la pulsation des petites oscillations.



✧ Dans cette partie, nous allons utiliser une approche énergétique sur $\mathscr{S}$. Faisons le bilan des forces extérieures et des interactions intérieures :
- ➜ force à distance : le poids, conservatif $E_{\text{pp}} = m_{\text{tot}}\,g\,h_G$
- ➜ force de contact : la force exercée par le ressort, conservatif $E_{\text{p,él}} = \dfrac{1}{2}\,k\,(\ell - \ell_0)^2$
- ➜ force de contact : l'action de l'axe de travail nul car sans frottement
- ➜ interaction intérieure :
  - ➜ $\vec{f}_{M_1\leftrightarrow\text{tige}}$ ne travaille pas car la liaison est rigide
  - ➜ $\vec{f}_{M_2\leftrightarrow\text{tige}}$ ne travaille pas car la liaison est rigide
  - ➜ $\vec{f}_{\text{tige}\leftrightarrow\text{tige}}$ car la tige est un solide

✧ Nous pouvons écrire $E_{\text{m}}(\mathscr{S}) = \text{C}^{\text{te}}$.

énergie potentielle

- Il n'y a pas d'énergie potentielle interne donc l'énergie potentielle se réduit à $E_{\text{p,tot}} = E_{\text{pp}} + E_{\text{p,él}}$.
- En notant la référence de l'énergie potentielle au niveau du point d'attache horizontal, nous avons :

$$z_G(t) = -\frac{3}{2}\,\ell_0\,\theta \qquad \rightsquigarrow \qquad E_{\text{pp}} = m_{\text{tot}}\,g\,z_G(t) = -6\,m\,g\,\frac{3}{2}\,\ell_0\,\theta(t) = -9\,m\,g\,\ell_0\,\theta(t)$$

- En ce qui concerne l'énergie potentielle élastique, nous avons :

$$\ell(t) = 2\,\ell_0 + \ell_0\,\theta(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad E_{\text{p,él}} = \frac{1}{2}\,k\,(\ell-\ell_0)^2 = \frac{1}{2}\,k\,(2\,\ell_0 + \ell_0\,\theta(t) - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}\,k\,{\ell_0}^2\,(1+\theta(t))^2$$

énergie cinétique

- Ici les mouvements de M_1 et M_2 sont simples à décrire dans $\mathscr{R}$ nous n'avons donc pas avantage à utiliser la vision systémique et le théorème de Kœnig.
- Comme les points M_1 et M_2 ont des mouvements circulaires dans le référentiel d'étude, nous pouvons écrire directement :

$$\begin{aligned} E_{\text{c}}(\mathscr{S}) E_{\text{c1}} + E_{\text{c2}} &= \frac{1}{2}\,m\,(\ell_0\,\dot\theta)^2 + \frac{1}{2}\,5\,m\,(2\,\ell_0\,\dot\theta)^2 \\ &= \frac{21}{2}\,m\,{\ell_0}^2\,\dot\theta^2 \end{aligned}$$

rassemblement

- Nous avons :

$$E_{\text{c}|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) + E_{\text{p,tot}} = \frac{21}{2}\,m\,{\ell_0}^2\,\dot\theta^2(t) - 9\,m\,g\,\ell_0\,\theta(t) + \frac{1}{2}\,k\,{\ell_0}^2\,(1+\theta(t))^2$$

- En dérivant par rapport au temps, nous trouvons $\dfrac{\mathrm{d}E_{\text{m}|\mathscr{R}}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = 0$, ce qui donne :

$$\frac{21}{2}\,m\,{\ell_0}^2\,2\,\dot\theta(t)\,\ddot\theta(t) - 9\,m\,g\,\ell_0\,\dot\theta(t) + \frac{1}{2}\,k\,{\ell_0}^2\,2\,\dot\theta(t)\,(1+\theta(t)) = 0$$

- En simplifiant par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre $\dot\theta(t) = 0$, nous obtenons :

$$21\,m\,{\ell_0}^2\,\ddot\theta(t) - 9\,m\,g\,\ell_0 + k\,{\ell_0}^2\,(1+\theta(t)) = 0$$

- La condition d'équilibre horizontal fait que $-9\,m\,g\,\ell_0 + k\,{\ell_0}^2 = 0$, et il reste :

$$21\,m\,{\ell_0}^2\,\ddot\theta(t) + k\,{\ell_0}^2\,\theta(t) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{21\,m}\,\theta(t) = 0$$

- Il s'agit bien d'oscillation de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{21\,m}}$.
- Bien que cela analytiquement invisible, la pulsation des oscillations dépend bien de g par l'intermédiaire de la condition d'équilibre : $k\,\ell_0 = 9\,m\,g$. En d'autre termes, le même dispositif sur une planète différente nécessiterait un réglage différents en engendrant, ainsi, des oscillations de pulsation différentes.

Mécanique des systèmes de points

Au niveau du cours

✯ Les définitions

✧ Sont à savoir :
- ➜ système de points, extérieur, centre de masse, centre d'inertie
- ➜ moment cinétique par rapport à un point, moment d'une force par rapport à un point
- ➜ moments scalaires, bras de levier
- ➜ interaction intérieure
- ➜ point d'application

✯ Les grandeurs

✧ Connaître la dimension d'un moment de force ainsi que son unité.

✯ Les lois

✧ Connaître :
- ➜ le théorème du centre d'inertie
- ➜ le théorème du moment cinétique, le théorème scalaire du moment cinétique, le théorème du moment cinétique barycentrique
- ➜ les théorèmes énergétiques
- ➜ les théorèmes de KOENIG

✯ la phénoménologie

✧ Connaître :
- ➜ savoir interpréter le mouvement d'un système en tant que mouvement d'ensemble et mouvement propre
- ➜ les effets des interactions intérieures sur le mouvement d'un système

Au niveau de l'analyse

✯ Analyse physique

✧ Il faut savoir repérer si un dispositif est à évolution conservative, forcée, …

✯ Analyse technique

✧ Il faut savoir :
- ➜ faire la différence entre une approche systémique et une approche particulaire
- ➜ savoir choisir entre une approche systémique et une approche particulaire

Au niveau des savoir-faire

✯ petits gestes

✧ Il faut savoir :
- ➜ savoir placer rapidement un centre de masse

- ➜ calculer rapidement le moment scalaire exercée par une force grâce au bras de levier
- ➜ montrer rapidement que l'évolution d'un système est conservatif

Table des matières