Mécanique

Chapitre 6

Interaction newtonienne

Interaction newtonienne

Dans ce chapitre nous allons étudier un mouvement particulier qui tient une place importante dans la physique : le mouvement d'un point matériel dans un champ de force newtonien.

Nous verrons d'abord le mouvement d'un point dans un champ de force dit central avant de nous intéresser dans une deuxième partie au cas spécifique de la force newtonienne. Dans les troisième et quatrième partie, nous verrons comment, à partir d'une situation plus réaliste de deux points en interaction newtonienne, nous pouvons retrouver et utiliser les résultats énoncés.

I – Mouvement d'un point dans un champ de force centrale

I·1 – Qu'est-ce que c'est

I·1·*i* – définition

> Une force est dite *centrale* lorsqu'elle passe par un point fixe de l'espace appelé *centre de force*.

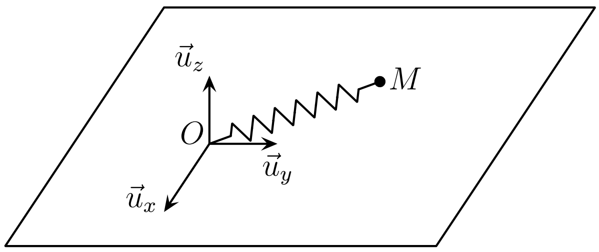
- ✧ En fait il peut s'agir de n'importe quelle force car ce n'est pas sa nature qui importe, mais sa direction géométrique.
- ✧ Remarquons que la définition fait appel à un aspect cinématique important : le point par lequel doit passer la force doit être fixe, donc cela dépend du référentiel !

> Le caractère central d'une force n'est pas intrinsèque mais est relatif au référentiel.

STOP La conséquence est que les résultats que nous allons obtenir dans ce chapitre ne seront pas à généraliser trop rapidement, surtout dans le cas où les référentiels d'étude ne seront pas usuels.

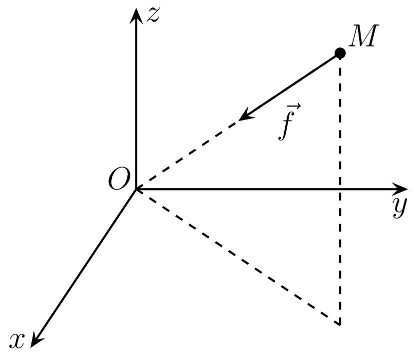
I·1·*ii* – exemples

- ✧ La force que nous étudierons principalement dans ce cadre est la force gravitationnelle.
- ✧ Mais nous pouvons aussi penser à un dispositif tel que celui représenté ci-dessous : une masse posée sur un plan horizontal, reliée à un ressort fixé en O et évoluant sans frottement.



- ✧ Il existe d'autres dispositifs avec des forces centrales, comme le pendule simple avec la tension exercée par le fil.
- ✧ Toutefois l'intérêt de particulariser les dispositifs à force centrale apparaît lorsqu'un point matériel est soumis **uniquement** à une telle force. Cela exclut, dès lors, le pendule simple.

I·1·*iii* – notations, hypothèse



L'intensité de la force centrale subie par un point matériel ne dépend que de la distance entre le point et le centre de force.

◇ Cette hypothèse est naturelle dans le cas d'une interaction physique. Elle ne fait « que » traduire l'isotropie de l'espace, *ie.* le fait qu'il n'y a pas de direction privilégiée de l'espace.

◇ Dans toute la suite, nous supposerons :
- ➜ que le référentiel d'étude $\mathscr{R}$ est galiléen
- ➜ que le point M est soumis soit à une seule force centrale $\vec{f}$, soit à pluiseurs forces dont la résultante est une force centrale

I·2 – Conservation de $\vec{\sigma}$ et ses conséquences

I·2·*i* – TMC

◇ Écrivons le théorème du moment cinétique par rapport à O pour le point M :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$$

◇ Or $\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à $\vec{f}$ de par la nature centrale de la force. Ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O(M)}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\vec{\sigma}_O(M) = \overrightarrow{\mathrm{C^{te}}}}$$

Lorsqu'un point matériel est soumis à une force centrale, son moment cinétique par rapport au centre de force est constant.

✫ moment cinétique nul

◇ Si $\vec{\sigma}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}(M) = \overrightarrow{\mathrm{C^{te}}} = \vec{0}$, alors cela signifie que la vitesse est constamment dirigée suivant $\overrightarrow{OM}$.

Un mouvement tel que le moment cinétique par rapport à un point A fixe soit constamment nul est un mouvement rectiligne dont le support passe par A.

✯ moment cinétique non nul

- Cela signifie que sa quantité de rotation est constante, *ie.* que M va globalement tourner autour du centre de force.
- C'est le cas que nous étudierons dans la suite et nous noterons $\vec{\sigma}_O(M) \stackrel{\text{not}}{=} \vec{\sigma}$.

I·2·*ii* – mouvement plan

- Calculons $\vec{\sigma}_O \cdot \overrightarrow{OM}$:

$$\vec{\sigma}_O \cdot \overrightarrow{OM} = (\underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}}_{\perp \overrightarrow{OM}}) \cdot \overrightarrow{OM} = 0$$

- Nous pouvons donc en conclure que le vecteur position est toujours orthogonal à $\vec{\sigma}_O$.

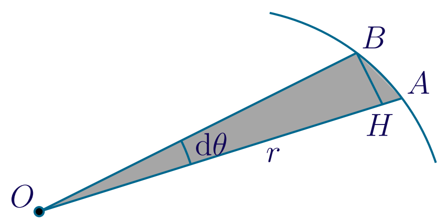
> Lorsqu'un point est soumis à une force centrale, son mouvement est dans un plan qui contient le centre de force.

I·2·*iii* – constante des aires

- Nous avons, par conservation du moment cinétique $\sigma = m\,r^2(t)\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z = \overrightarrow{\text{C}^{\text{te}}}$.

> La *constante des aires* est définie pour un point en mouvement dans un champ de force central et vaut $C \triangleq \dfrac{\sigma}{m} = r^2(t)\,\dot{\theta}(t)$.

- Comme son nom l'indique, la constante des aires est une constante.
- Pourquoi ce nom ? Raisonnons entre t et $t + \mathrm{d}t$.



- À t, le point est en A, à $t + \mathrm{d}t$, le point est en B. Calculons l'aire $\mathrm{d}\mathscr{A}$ balayée par le rayon vecteur OM.
- Il s'agit de l'aire OAB. Cela donne :

$$\mathrm{d}\mathscr{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{OA \times BH}{2} = \frac{r \times r\,\mathrm{d}\theta}{2} = \frac{r^2\,\mathrm{d}\theta}{2}$$

- Ainsi, la vitesse avec laquelle l'aire balayée $\mathscr{A}$ augmente vaut :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{r^2\,\mathrm{d}\theta}{2\,\mathrm{d}t} = \frac{r^2}{2}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\,r^2\,\dot{\theta} = \frac{C}{2}$$

> La *vitesse aréolaire* est la vitesse de balayage du rayon vecteur.

Dans le cas d'un mouvement d'un point dans un champ de force central, la vitesse aréolaire est constante.

✧ Nous sentons poindre la 2e loi de KÉPLER ...

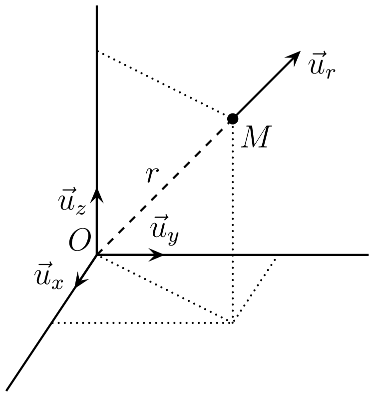
I·3 – Conservation de l'énergie mécanique

I·3·i – une nouvelle base bien utile

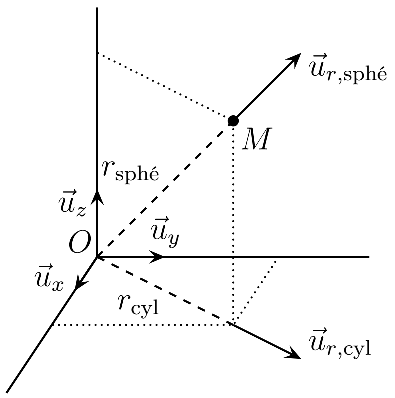
✯ repérage sphérique

✧ Dans la suite, nous aurons besoin de la base sphérique.

En repérage sphérique, le rayon vecteur s'écrit $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\,\vec{u}_r$.



il ne faut pas confondre la coordonnée r en cylindro-polaire et la coordonnée r en sphérique. En effet, avec le schéma ci-dessous, nous pouvons voir que $r_{\text{sphé}} = \sqrt{{r_{\text{cyl}}}^2 + z^2}$.



Le repérage sphérique s'utilise lorsqu'un point particulier joue un rôle essentiel dans une situtation.

✯ petit résultat

En notant $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ le vecteur unitaire de la base sphérique, nous avons :

$$\vec{u}_r \cdot \mathrm{d}\vec{u}_r = 0 \qquad \text{ou} \qquad \vec{u}_r \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = 0$$

✧ Démontrons-le. Dérivons la relation ${\vec{u}_r}^2 = \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r = 1$:

$$\vec{u}_r \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{u}_r = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{u}_r \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = 0$$

I·3·*ii* – une évolution obligatoire conservative

✯ résultat préliminaire

Toute force centrale de la forme $\vec{f} = f(r)\,\vec{u}_r$ dérive d'une énergie potentielle.

✧ Montrons que $\delta W = -\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$.
✧ Tout d'abord nous avons $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}(r\,\vec{u}_r) = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\vec{u}_r$ et ainsi :

$$\delta W = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = f(r)\,\vec{u}_r \cdot (\mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\vec{u}_r) = f(r)\,\mathrm{d}r \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{d}E_{\mathrm{p}} \stackrel{?}{=} -f(r)\,\mathrm{d}r$$

✧ Nous avons donc bien une énergie potentielle $E_{\mathrm{p}}(r)$ qui vaut :

$$E_{\mathrm{p}}(r) = -\int f(r)\,\mathrm{d}r$$

✯ conservation de l'énergie

Le mouvement d'un point dans un champ de force central du type $\vec{f} = f(r)\,\vec{u}_r$ est conservatif.

✧ La démonstration est immédiate car le point M n'est soumis qu'à une seule force … conservative.

I·3·*iii* – énergie potentielle effective

✯ objectif

✧ Nous savons que le mouvement est principalement un mouvement de rotation de M autour de O.
✧ Le but va maintenant d'essayer de décrire qualitativement l'évolution de la distance OM.

✯ réécriture de l'énergie mécanique

✧ L'énergie mécanique s'écrit $E_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2 + E_{\mathrm{p}}(r)$.
✧ Or $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ ce qui donne $v^2 = \dot{r}^2 + (r\,\dot{\theta})^2$.
✧ Écrivons la conservation du moment cinétique $\sigma = m\,r^2\,\dot{\theta}$. Cela donne $\dot{\theta} = \dfrac{\sigma}{m\,r^2}$.

✧ Et ainsi :

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,m\,r^2\left(\frac{\sigma}{m\,r^2}\right)^2 + E_\mathrm{p}(t) = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2\,m\,r^2} + E_\mathrm{p}(r)$$

✧ Ce que nous écrirons sous la forme $E_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + E_\mathrm{p,eff}(t)$.

Lors d'un mouvement d'un point matériel dans un champ de force centrale, l'*énergie potentielle effective* vaut :

$$E_\mathrm{p,eff} = \frac{\sigma^2}{2\,m\,r^2} + E_\mathrm{p}(r)$$

L'énergie potentielle effective dépend des conditions initiales.

✧ En effet, contrairement aux énergies potentielles usuelles, une « photo » ne suffit pas pour déterminer explicitement l'énergie potentielle effective. Il faut quelque chose de plus, il faut la connaissance du moment cinétique.

✧ Comme le moment cinétique est constant, autant dire qu'il suffit de connaître les conditions initiales.

✯ interprétation

✧ Ne regarder que l'évolution de la distance OM revient à regarder l'évolution de M dans le référentiel non galiléen en rotation pure à la vitesse $\dot{\theta}(t) \neq \mathrm{C^{te}}$.

✧ Dans ce référentiel, les forces qui s'exercent sont la force centrale et les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

✧ $E_\mathrm{p}(r) = \dfrac{\sigma^2}{2\,m\,r^2}$ est donc l'énergie potentielle associée à la résultante des forces d'inertie. Comme la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas, cette énergie est donc associée à la seule force d'inertie d'entraînement.

Dans le mouvement d'un point dans un champ de force central, l'énergie potentielle effective représente l'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement subie dans le référentiel en rotation où le point n'a qu'un mouvement radial.

STOP l'accélération d'entraînement ne vaut pas ici $\vec{a}_\mathrm{e} = -\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{HM}$ mais $\vec{a}_\mathrm{e} = -\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{HM} + \ddot{\theta}(t)\,\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{HM}$.

✯ résultat collatéral

Lors d'un mouvement dans un champ de force central, la relation de couplage entre les coordonnées $r(t)$ et $\theta(t)$ est la conservation du moment cinétique :

$$r^2 = \frac{\sigma}{m\,\dot{\theta}} \qquad \text{ou} \qquad \dot{\theta} = \frac{\sigma}{m\,r^2}$$

✧ Cette relation permet d'exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de r ou réciproquement.

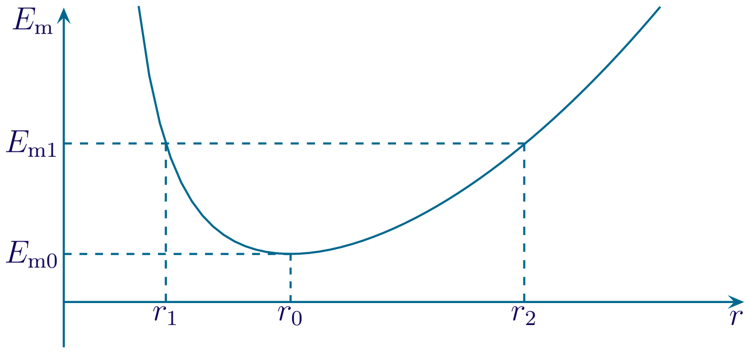
I·3·*iv* – exemple de discussion graphique

✧ Nous avons déjà rencontré ce genre de cas.

✧ Prenons l'exemple présenté au début du chapitre, celui avec le ressort.

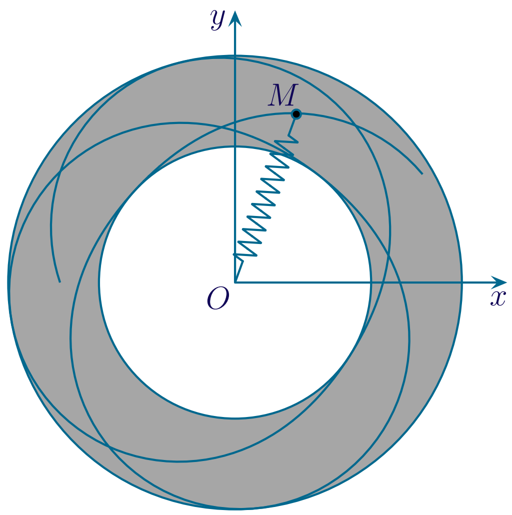
✧ Alors $E_{\rm p} = \dfrac{1}{2}\,k\,(\ell - \ell_0)^2$ et $E_{\rm p,eff} = \dfrac{\sigma^2}{2\,m\,r^2} + \dfrac{1}{2}\,k\,(r-\ell_0)^2$.

✧ Cela donne le graphique ci-dessous.



✧ Pour $E_{\rm m} = E_{\rm m1}$, la trajectoire se situe dans la couronne comprise entre r_1 et r_2.

✧ Si la masse est limité par $r \geqslant r_1$, c'est à cause de la barrière centrifuge que « crée » l'énergie potentielle effective.



✧ Ces trajectoires n'ont *a priori* aucune forme géométrique simple et ne sont pas forcément non plus circulaires.

✧ Lorsque $E_{\rm m} = E_{\rm m0}$, la trajectoire se fait à $r = r_0$, *ie.* est circulaire.

STOP il n'existe pas qu'une seule trajectoire circulaire possible pour ce dispositif, mais bien une seule trajectoire possible pour ce dispositif avec **ce** moment cinétique.

I·4 – Une solution exacte mais inconnue

✧ Dans ce problème, nous avons deux degrés de liberté $r(t)$ et $\theta(t)$, ainsi que deux lois, les conservations du moment cinétique. Il est donc soluble.

✧ Ce qu'il y a de particulier, c'est qu'ici les solutions sont calculables sans passer par des équations différentielles.

I·4·i – t en fonction de r

✧ Partons de l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + E_{\mathrm{p,eff}}(r) \qquad \rightsquigarrow \qquad \dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left(E_{\mathrm{m}} - E_{\mathrm{p,eff}}(r)\right)$$

✧ Nous avons ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E_{\mathrm{m}} - E_{\mathrm{p,eff}}(r)\right)} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E_{\mathrm{m}} - E_{\mathrm{p,eff}}(r)\right)}}$$

✧ Et en intégrant :

$$t_2 - t_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E_{\mathrm{m}} - E_{\mathrm{p,eff}}(r)\right)}}$$

✧ Certes ce n'est pas une solution analytique, il faut passer par un calcul d'intégrale en général numérique, mais au moins cela permet de ne pas résoudre d'équation différentielle.

✧ Notons aussi que nous obtenons $t(r)$ et non $r(t)$.

I·4·*ii* – θ en fonction de r

✧ Le principe est le même en utilisant la conservation du moment cinétique.

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \dot{\theta} \times \frac{1}{\dot{r}} = \frac{\sigma}{m\,r^2} \times \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E_{\mathrm{m}} - E_{\mathrm{p,eff}}(r)\right)}}$$

✧ Ce qui donne :

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\sigma}{m\,r^2} \times \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E_{\mathrm{m}} - E_{\mathrm{p,eff}}(r)\right)}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \theta_2 - \theta_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma}{m\,r^2} \times \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E_{\mathrm{m}} - E_{\mathrm{p,eff}}(r)\right)}}$$

II – Mouvement d'un point dans un champ de force newtonien

II·1 – Qu'est-ce que c'est ?

II·1·*i* – écriture en terme de force

Une force centrale est dite *newtonienne* lorsqu'elle peut s'écrire sous la forme $\vec{f} = -\dfrac{k}{r^2}\,\vec{u}_r$ avec k une constante.

La force gravitationnelle est une force newtonienne avec $k = G\,m_1\,m_2$.

✧ Nous verrons plus tard que l'interaction électrostatique est aussi une force newtonienne.

Pour une force newtonienne qui s'écrit $\vec{f} = -\dfrac{k}{r^2}\,\vec{u}_r$:
➜ si $k > 0$ alors la force est attractive
➜ si $k < 0$ alors la force est répulsive

II·1·*ii* – énergie potentielle associée

✧ Reprenons la démonstration faite dans le cas d'une force centrale.

$$\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{k}{r^2}\,\vec{u}_r\cdot(\mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\vec{u}_r) = -\frac{k}{r^2}\,\mathrm{d}r \overset{?}{=} -\mathrm{d}E_\mathrm{p}$$

✧ Et ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = \frac{k}{r^2} \qquad \leadsto \qquad E_\mathrm{p}(r) = -\frac{k}{r} + \mathrm{C^{te}}$$

✧ Et avec la convention usuelle $E_\mathrm{p} = 0$ quand $\vec{f} = \vec{0}$, nous trouvons …

L'énergie potentielle associée à la force newtonienne $\vec{f} = -\dfrac{k}{r^2}\,\vec{u}_r$ s'écrit $E_\mathrm{p}(r) = -\dfrac{k}{r}$.

II·1·*iii* – intérêt

✧ Le problème des forces newtoniennes est historiquement important.
✧ En effet, c'est en expliquant théoriquement le mouvement des astres, *ie.* en justifiant les lois expérimentales de KÉPLER, que NEWTON a imposé la théorie … newtonienne.
✧ D'un point de vue pratique, ces forces et les résultats qui en découlent sont intéressants car ils sont connus de manière exacte pour le cas idéal.
✧ Pour les cas réels, ceux s'écartant toujours de l'idéalité, la connaissance de résultats exacts permet de simplifier la recherche de solutions par exemple en utilisant la méthode des perturbations (cf.

l'exemple du pendule simple non linéaire) ou la méthode de résolution par ordre successifs (cf. l'exemple de la déviation vers l'est).

II·2 – Vision géométrique des trajectoires

II·2·*i* – c'est une conique

La trajectoire d'un point matériel dans un champ de force newtonien est une conique dont le centre de force est l'un des foyers.

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\,\cos(\theta - \theta_0)} \qquad \text{où :}$$

➜ p est le paramètre de la conique
➜ e est l'excentricité de la conique
➜ θ_0 est la direction de l'axe des foyers de la conique

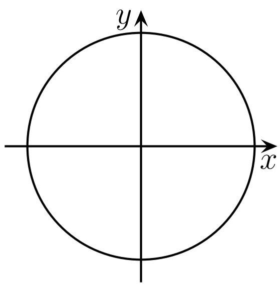
✧ Remarquons tout d'abord que nous n'avons pas le mouvement $r(t)$ et $\theta(t)$ du point matériel mais uniquement sa trajectoire.
✧ p, e ont un caractère physique fort et dépendent donc des conditions *physiques* et ce au contraire de θ_0 qui ne dépend que du repérage choisi et qui n'a pas de valeur physique intrinsèque.
✧ Dans le cas où nous avons le choix, nous nous arrangerons pour avoir $\theta_0 = 0$, *ie.* pour mettre l'axe des foyers sur l'axe (Ox) du repère.

II·2·*ii* – les différents types

✫ le cercle

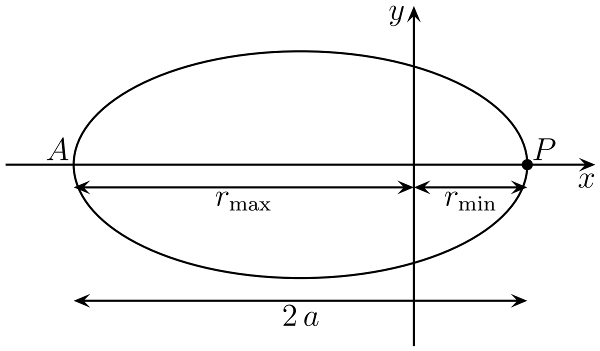
Le cercle est une conique d'excentricité nulle, *ie.* $e = 0$.

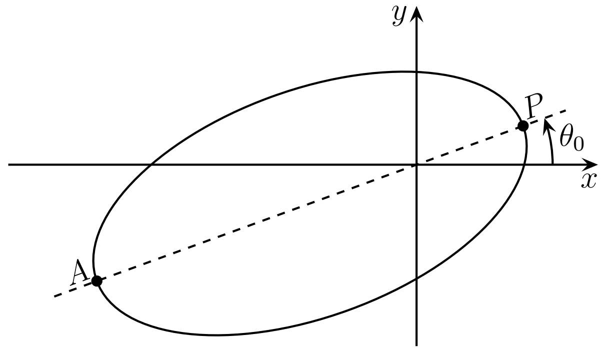
✧ Nous avons alors $r(\theta) = p = \text{C}^{\text{te}}$.



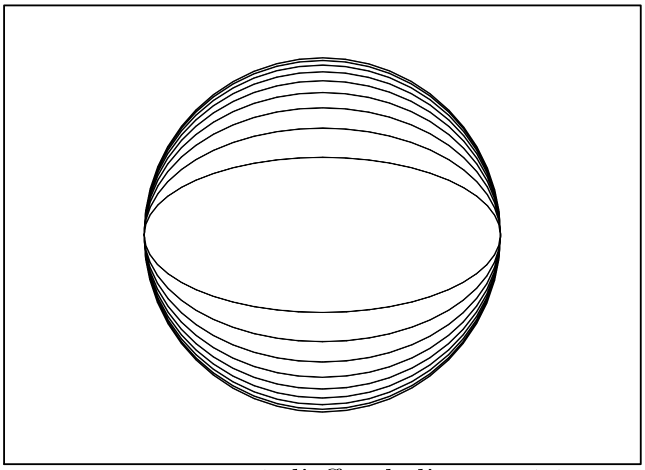
✫ l'ellipse

L'ellipse est une conique d'excentricité e telle que $0 < e < 1$.





Graphique 1



✧ Sur les exemples précédents, nous pouvons voir l'effet de l'excentricité sur la géométrie d'une ellipse. Les 9 ellipses ont pour excentricité 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; … ; 0,9.

Plus l'excentricité est faible, plus l'ellipse ressemble à un cercle.

Sur une trajectoire elliptique, le point le plus éloigné de l'astre au centre de force est appelé l'*apoastre*, le point le plus proche est le *périastre*.

Pour un mouvement autour du Soleil, les points remarquables sur une trajectoire elliptique sont l'*aphélie* et le *périhélie*.

Pour un mouvement autour de la Terre, les points remarquables sur une trajectoire elliptique sont l'*apogée* et le *périgée*.

✧ Géométriquement, nous pouvons voir que :

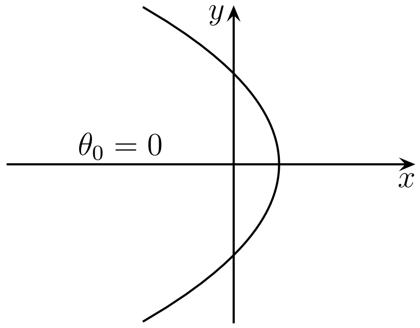
$$r_{\max} = \frac{p}{1-e}\ ; \qquad r_{\min} = \frac{p}{1+e}\ ; \qquad r_{\max} + r_{\min} = 2\,a$$

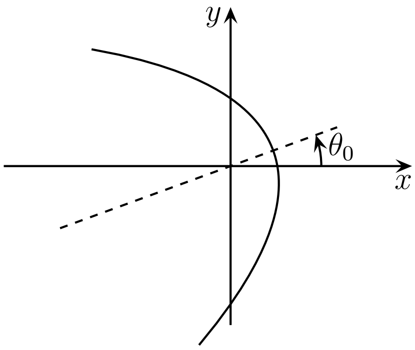
Le demi-grand axe a de l'ellipse caractérise une ellipse de manière plus naturelle.

✧ C'est pourquoi nous exprimerons certaines lois en fonction de a et non de p et e.

✯ la parabole

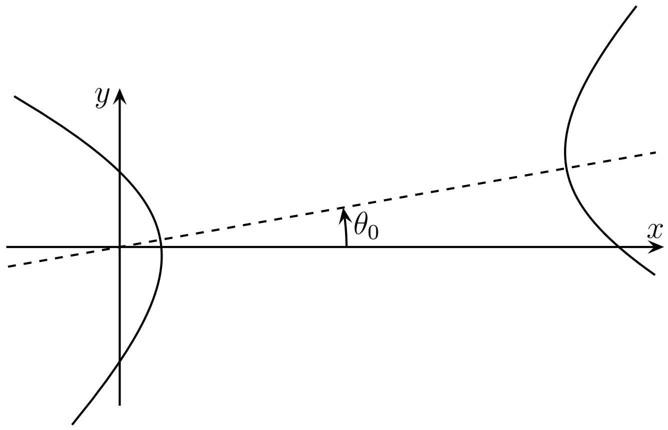
La parabole est une conique d'excentricité $e = 1$.





✯ l'hyperbole

L'hyperbole est une conique d'excentricité $e > 1$.

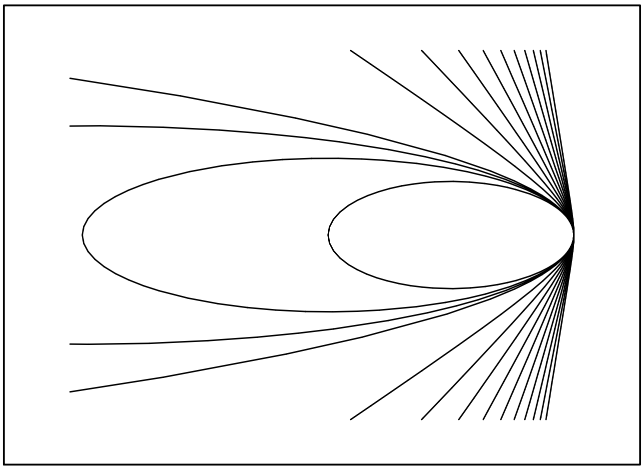


✧ Avec $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\,\cos\theta}$, pour que $r(\theta)$ reste positif, il faut :

$$-\theta_{\text{lim}} \leqslant \theta \leqslant \theta_{\text{lim}} \qquad \text{où} \qquad \theta_{\text{lim}} = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$$

L'hyperbole possède deux asymptotes.

Graphique 2



◇ Sur le graphique précédent, les coniques ont pour excentricité : 0,9 ; 0,95 ; 0,975 ; 1 ; 1,2 ; 1,4 ; 1,7 ; 2,1 ; 2,5 ; 3 ; 3,6 ; 4,3 ; 5,2 ; 6,2.

> Plus l'excentricité est elevée, plus les arcs d'hyperbole ressemblent à des droites.

✯ nature des forces

◇ Rappelons tout d'abord que l'accélération est dirigée vers l'intérieur de la concavité (toujours) et (ici) en direction du centre de force.

◇ Ainsi, pour le cercle, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole nous voyons que le centre de force peut être à l'intérieur de la concavité, ce qui correspond à une force attractive.

> La trajectoire d'un point matériel dans un champ de force newtonien attractif peut être n'importe quel type de conique.

◇ La seule trajectoire présentant un centre de force à l'extérieur de la cavité est l'hyperbole.

> La trajectoire d'un point matériel dans un champ de force newtonien répulsif ne peut être qu'hyperbolique.

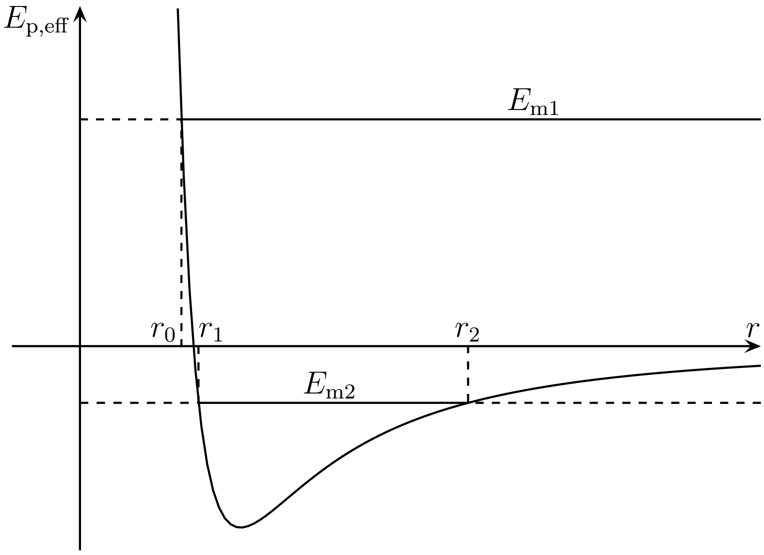
◇ D'un autre côté, étant donné que nous nous limiterons dans ce chapitre à la force gravitationnelle qui est attractive, nous aurons toujours à déterminer la nature de la conique.

II·3 – Approche énergétique

II·3·i – représentation de l'énergie potentielle effective

◇ Nous avons :

$$E_{\text{p,eff}} = \frac{\sigma^2}{2\,m\,r^2} + E_{\text{p}}(r) = \frac{\sigma^2}{2\,m\,r^2} - \frac{k}{r}$$



✧ Nous pouvons voir que suivant la valeur de l'énergie mécanique, il est possible d'avoir des états lié ou des états de diffusion.

II·3·*ii* – états de diffusion

✧ Les états de diffusions sont tels que $E_{\text{m}} \geqslant 0$.

> L'énergie mécanique d'un point matériel dans un champ de force newtonien :
> ➜ est nulle sur une trajectoire parabolique
> ➜ est strictement positive sur une trajectoire hyperbolique

> Un point matériel infiniment éloigné du centre de force :
> ➜ a une vitesse nulle sur une trajectoire parabolique
> ➜ a une vitesse non nulle sur une trajectoire hyperbolique

II·3·*iii* – états liés

✧ Réécrivons l'énergie mécanique sous sa forme usuelle.

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{k}{r} = \text{C}^{\text{te}}$$

✧ Or, sur une trajectoire circulaire $r = \text{C}^{\text{te}}$.

> Un point matériel dans un champ de force newtonien et sur une trajectoire circulaire a un mouvement uniforme.

> Un point matériel dans un champ de force newtonien et sur une trajectoire elliptique ou circulaire a une énergie mécanique strictement négative.

✯ expression de l'énergie sur une trajectoire elliptique

> L'énergie mécanique d'un point matériel dans un champ de force newtonien et dans un état lié s'écrit $E_{\mathrm{m}} = -\dfrac{k}{2\,a}$ où a est le demi grand-axe de la trajectoire.

- C'est une loi très utile car elle permet de déterminer l'énergie totale du point matériel rien qu'en connaissant sa trajectoire.
- Pour le démontrer, repartons de l'énergie mécanique $E_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \dfrac{\sigma^2}{2\,m\,r^2} - \dfrac{k}{r}$.
- Pour une ellipse, état lié, il existe de valeurs r_1 et r_2 de r telles que $\dot{r}$: ce sont les valeurs maximale et minimale du rayon.
- Pour ces deux points, **et uniquement pour ces deux points**, l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{\sigma^2}{2\,m\,r^2} - \frac{k}{r} \quad \rightsquigarrow \quad r^2\,E_{\mathrm{m}} + k\,r - \frac{\sigma^2}{2\,m} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad r^2 + \frac{k}{E_{\mathrm{m}}}\,r - \frac{\sigma^2}{2\,E_{\mathrm{m}}\,m} = 0$$

- Il s'agit d'un trinôme dont les solutions sont r_1 et r_2, nous avons donc $r^2 - (r_1 + r_2)\,r + r_1\,r_2 = 0$ ce qui donne, en identifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 + r_2 = -\dfrac{k}{E_{\mathrm{m}}} \\ r_1\,r_2 = -\dfrac{\sigma^2}{2\,m\,E_{\mathrm{m}}} \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} E_{\mathrm{m}} = -\dfrac{k}{r_1 + r_2} = -\dfrac{k}{2\,a} \\ E_{\mathrm{m}} = -\dfrac{\sigma^2}{2\,m\,r_1\,r_2} \end{array}\right.$$

- Nous pouvons aller plus loin en écrivant, grâce à l'expression de la trajectoire, r_1 et r_2 en fonction de p et e :

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 = \dfrac{p}{1+e} \\ r_2 = \dfrac{p}{1-e} \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} r_1 + r_2 = \dfrac{2\,p}{1-e^2} \\ r_1\,r_2 = \dfrac{p^2}{1-e^2} \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} E_{\mathrm{m}} = -\dfrac{k}{2\,p}\,(1-e^2) \\ E_{\mathrm{m}} = -\dfrac{\sigma^2}{2\,m\,p^2}\,(1-e^2) \end{array}\right.$$

- Comme nous le verrons, la dernière expression de l'énergie mécanique est en fait valable quelle que soit l'excentricité.

✯ répartition moyenne des énergies pour un mouvement circulaire

- Supposons qu'un point ait une trajectoire circulaire de rayon r dans un champ de forces newtonien, déterminons la valeur moyenne de son énergie cinétique et potentielle.
- Commençons par l'énergie potentielle. Nous avons immédiatement : $E_{\mathrm{p}} = -\dfrac{k}{r} = \mathrm{C^{te}} = \langle E_{\mathrm{p}} \rangle$
- Pour l'énergie cinétique, nous savons déjà que le mouvement est uniforme donc $\langle E_{\mathrm{c}} \rangle = E_{\mathrm{c}}$.
- Écrivons le PFD au point matériel :

$$m\,\vec{a}(t) = -\frac{k}{r^2}\,\vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad m\left(-\frac{v^2}{r}\,\vec{u}_r + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_\theta\right) = -\frac{k}{r^2}\,\vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -m\,\dfrac{v^2}{r} = -\dfrac{k}{r^2} \\ m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \end{array}\right.$$

✧ De $m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$ nous retrouvons que le mouvement est uniforme.

✧ La projection sur $\vec{u}_r$ donne :

$$m\,\frac{v^2}{r}=\frac{k}{r^2} \quad\leadsto\quad \frac{1}{2}\,m\,v^2=\frac{1}{2}\times\frac{k}{r}=-\frac{E_\mathrm{p}}{2}$$

✧ Finalement, nous trouvons $\boxed{E_\mathrm{c}=-\dfrac{E_\mathrm{p}}{2}}$ et $\boxed{E_\mathrm{m}=\dfrac{E_\mathrm{p}}{2}=-E_\mathrm{c}}$.

✯ généralisation

✧ Nous admettrons la généralisation à un mouvement elliptique.

> Pour un point matériel en mouvement dans un champ de forces newtonien, nous pouvons écrire, pour un état lié :
> $$\langle E_\mathrm{c}\rangle=-\frac{\langle E_\mathrm{p}\rangle}{2} \qquad \text{et} \qquad E_\mathrm{m}=\frac{\langle E_\mathrm{p}\rangle}{2}=-\langle E_\mathrm{c}\rangle$$

Remarques :
- ➜ l'expression trouvée ci-dessus de l'énergie mécanique du point matériel sur la trajectoire circulaire $E_\mathrm{m}=\dfrac{E_\mathrm{p}}{2}=-\dfrac{k}{2\,r}$ est bien compatible avec l'expression de l'énergie mécanique d'un point matériel sur une trajectoire elliptique
- ➜ la démonstration plus générale du résultat a été fait dans un exercice intitulé « théorème du Viriel » du TD n°2

II·4 – Les lois de KÉPLER

II·4·*i* – rappel historique

✧ Les lois de KÉPLER concerne le système solaire.

✧ Ces lois ont été trouvées au début du XVII^e siècle (1608 et 1618) et ont été trouvées sans calculatrice et sans aucune théorie sous jacente puisque les lois de NEWTON datent de fin XVII^e siècle (1687).

II·4·*ii* – première loi

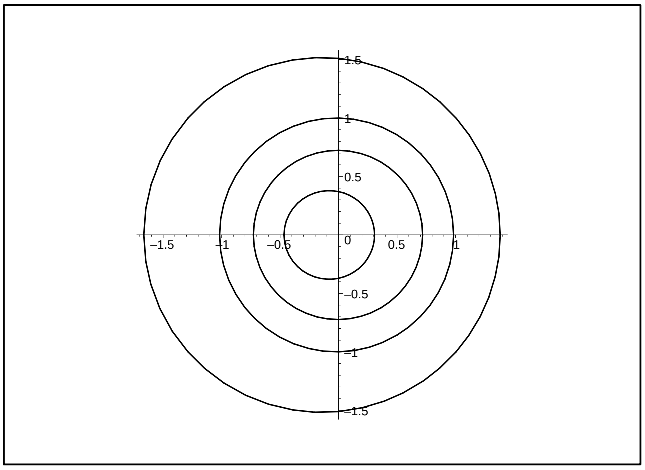
> Les planètes tournent sur une trajectoire plane elliptique dont le Soleil occupe l'un des foyers.

✧ C'est une description géométrique des trajectoires.

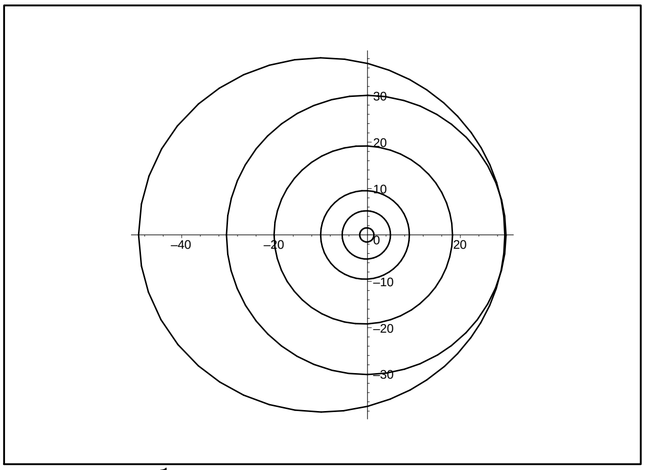
✧ Nous avons déjà admis ce résultat et nous le démontrerons dans la partie suivante.

✧ Les trajectoires des planètes sont représentées sur les graphiques suivants.

Graphique 3



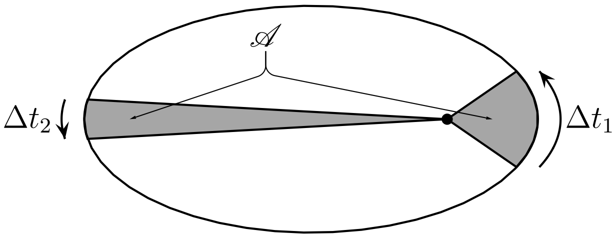
Graphique 4



- La Terre possède une trajectoire elliptique d'excentricité $e \simeq \dfrac{1}{60}$.
- Le demi-petit axe d'une ellipse vaut $b = a\sqrt{1-e^2}$ et ainsi l'écart relatif entre demi-grand axe et demi-petit axe d'une ellipse vaut $\dfrac{a-b}{a} = 1-\sqrt{1-e^2} = \dfrac{e^2}{2} \simeq \dfrac{1}{7000}$!
- En revanche la trajectoire est sensiblement décentrée (il faut bien regarder sur le tracé, mais cela se voit).
- La non circularité de la trajectoire terrestre n'est pas due à la forme mais au décalage entre son centre géométrique et son centre de force.

II·4·*iii* – deuxième loi

Le rayon vecteur d'une planète balaye des surfaces égales en des durées égales.



$\Delta t_1 = \Delta t_2$

- C'est une visions dynamique du mouvement sur chaque trajectoire : c'est un invariant par trajectoire.
- Nous avons déjà démontré cette loi puisqu'en fait ce n'est que la restriction au système solaire de la constante de la vitesse aréolaire pour un mouvement dans un champ de force central.

II·4·*iv* – troisième loi

- C'est une vision globale de toutes les trajectoires : c'est un invariant du système solaire

Dans le système solaire, le carré de la période d'une astre est proportionnel au cube du demi grand axe de sa trajectoire elliptique.

- Autrement dit $T^2 = \alpha\, a^3$, avec α une grandeur ne dépendant pas de la planète ni de sa trajectoire.
- Cette loi concerne tous les astres tournant autour du soleil avec une trajectoire elliptique : planètes (évidemment) mais aussi comètes et astéroïdes.

- Supposons que la grandeur soit invariante, déterminons son expression. Pour cela considérons la trajectoire elliptique la plus simple : la trajectoire circulaire.
- En projetant le PFD appliqué à une planète de masse m, nous trouvons :

$$-m\,\frac{v^2}{r} = -G\,\frac{m\,M_S}{r^2} \qquad \rightsquigarrow \qquad v^2 = \frac{G\,M_S}{r} \qquad \rightsquigarrow \qquad v = \sqrt{\frac{G\,M_S}{r}}$$

- Comme le mouvement est uniforme (c'est une trajectoire circulaire), nous pouvons écrire la période T de révolution sous la forme :

$$T = \frac{2\,\pi\,r}{v} = 2\,\pi\,r\,\sqrt{\frac{r}{G\,M_S}} \qquad \rightsquigarrow \qquad T^2 = \frac{4\,\pi^2}{G\,M_S}\,r^3$$

- Ce qui prouve bien que le carré de la période est proportionnel au cube du demi grand-axe.
- *Remarque* : La démonstration dans un cas général de la 3e loi de KÉPLER est faite au paragraphe IV·4·*ii* de la page 29.

II·5 – Aborder un problème de mécanique spatiale

II·5·*i* – l'analyse physique

- La première chose à faire est de déterminer dans la mesure du possible la nature de la trajectoire, notamment à partir de considérations physiques.
- Le mouvement sera la plupart du temps libre et conservatif, sauf dans deux cas plus ou moins fréquents :
  - ➜ avec une fusée capable de produire de l'énergie pour modifier sa trajectoire
  - ➜ dans le cas d'un problème à trois corps où l'étude se fait dans un référentiel où la force n'est plus centrale
- Les grandeurs caractéristiques du problème seront les conditions initiales ainsi que quelques points particuliers de la trajectoire.

II·5·*ii* – l'analyse technique

- En ce qui concerne le repérage, s'il n'est pas imposé, il faut le prendre tel que le centre de force soit au centre du référentiel. Et si ce n'est pas possible parce que le centre de force bouge dans le référentiel d'étude, alors il faut changer de référentiel pour pouvoir appliquer les résultats de ce chapitre.
- Les lois à utiliser sont d'abord les deux lois de conservation : conservation de l'énergie et conservation du moment cinétique.
- L'écriture complète de la trajectoire doit venir en dernier lieu et uniquement lorsque nous allons rechercher des caractéristiques précises du mouvement sur l'ensembe de la trajectoire.

II·6 – Exemples

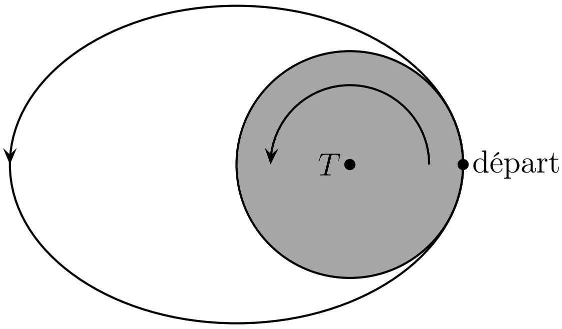
II·6·*i* – vitesse de satellisation

> La *vitesse de satellisation* est la vitesse minimale à communiquer à un satellite par rapport au référentiel géocentrique au niveau de la surface de la Terre pour qu'il puisse être satellisé.

- Une fois le satellite satellisé, nous connaissons un point de sa trajectoire : un point à la distance R_T du centre de la Terre.

✧ Sur cette trajectoire, l'énergie est constante. Donc si la vitesse est la plus faible possible en ce point, cela signifie que l'énergie doit être la plus faible possible permettant une telle trajectoire.

✧ Or l'énergie sur une trajectoire elliptique vaut $E_{\text{m}} = -\dfrac{k}{2\,a}$. Pour que E_{m} soit le plus petit possible, il faut a le plus petit possible.



✧ De toutes les trajectoires possible, c'est la trajectoire circulaire de rayon R_T qui correspond aux critères recherchés.

✧ Sur cette trajectoire, nous avons au point de départ :

$$E_{\text{m}} = -\frac{k}{2\,R_T} = \frac{1}{2}\,m\,{v_{\text{sat}}}^2 - \frac{k}{R_T} \quad \text{où} \quad k = G\,m\,M_T \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{1}{2}\,{v_{\text{sat}}}^2 = \frac{G\,M_T}{2\,R_T}$$

✧ En négligeant la différence entre champ de pesanteur et champ gravitationnel, nous pouvons écrire $g_0 = \dfrac{G\,M_T}{{R_T}^2}$, ce qui donne :

$${v_{\text{sat}}}^2 = g_0\,R_T \qquad \rightsquigarrow \qquad v_{\text{sat}} = \sqrt{g_0\,R_T} = 7{,}9 \text{ km.s}^{-1}$$

Pour la Terre, l'intensité du champ de pesanteur se réduit, en première approximation, à l'intensité du champ de gravitation à sa surface :

$$g = \frac{G\,M_T}{{R_T}^2}$$

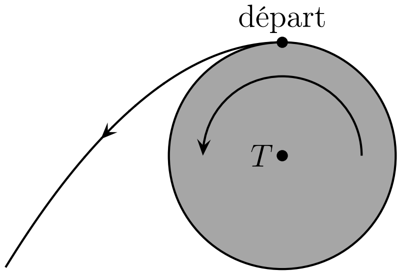
✧ Nous utiliserons de manière quasi-sytématique cette relation pour « remplacer » $G\,M_T$ par des grandeurs aux valeurs mieux connues $g\,{R_T}^2$.

II·6·*ii* – vitesse de libération

La *vitesse de satellisation* est la vitesse minimale à communiquer à un satellite par rapport au référentiel géocentrique au niveau de la surface de la Terre pour qu'il puisse s'éloigner à l'infini de la Terre.

✧ Au niveau de la surface de la Terre, si la vitesse est minimale, alors l'énergie l'est aussi.

✧ Et la trajectoire permettant un éloignement infini et d'énergie la plus faible possible est la trajectoire parabolique.



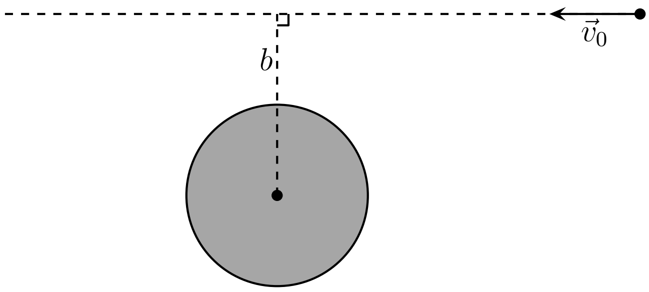
✧ Sur cette trajectoire, l'énergie totale est nulle, en particulier au point de départ.

$$0 = \frac{1}{2}\,m\,{v_{\text{lib}}}^2 - \frac{G\,m\,M_T}{R_T} \qquad \text{où} \qquad G\,M_T = g_0\,{R_T}^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad v_{\text{lib}} = \sqrt{2\,g_0\,R_T} = 11{,}2\ \text{km.s}^{-1}$$

✧ Cette vitesse est à peine 40 % supérieure à celle de satellisation. Autrement dit, entre un satellite à peine en orbite et un satellite perdu, il y a 40 % de marge. Il faut bien viser !

II·6·*iii* – distance minimale d'approche

✧ Considérons la situation suivante.
✧ Une météorite arrive en direction de la Terre avec un paramètre d'impact b, *ie.* passerait à la distance b du centre de la Terre si elle n'était pas déviée. Sachant que sa vitesse à l'infini est v_0, à quelle distance passera-t-elle de la Terre ?



✧ Analyse physique :
➜ Ici il s'agit bien d'un point matériel dans un champ de forces central newtonien car nous nous plaçons dans le référentiel géocentrique
➜ Vu que la météorite a une vitesse non nulle à une distance infinie de la Terre, la trajectoire sera hyperbolique
➜ les grandeurs pertinentes vont être m (inertie de la comète), b (géométrie), G, M_T (action la Terre) et v_0 (condition initiale).

✧ Analyse technique : nous connaissons un point de la trajectoire avec sa vitesse, nous connaissons donc toute la trajectoire. Seule la distance au centre de force est intéressant, nous n'allons donc pas poser de repère précisément, mais utiliser une vision radiale.

✧ L'énergie mécanique s'écrit :

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,m\,(r\,\dot{\theta})^2 - \frac{G\,m\,M_T}{r} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2\,m\,r^2} - \frac{G\,m\,M_T}{r}$$

✧ Au point de distance minimale, nous avons donc :

$$E_{\text{m}} = \frac{\sigma^2}{2\,m\,{r_{\text{min}}}^2} - \frac{G\,m\,M_T}{r_{\text{min}}}$$

✧ Or, avec les conditions initiales, nous trouvons :

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\, m\, {v_0}^2 \qquad \text{et} \qquad \sigma = m\, b\, v_0$$

✧ Nous arrivons ainsi à l'équation :

$$\frac{1}{2}\, m\, {v_0}^2 = \frac{m\, b^2\, {v_0}^2}{2\, {r_\mathrm{min}}^2} - \frac{G\, m\, M_T}{r_\mathrm{min}} \qquad \rightsquigarrow \qquad {v_0}^2\, {r_\mathrm{min}}^2 + 2\, G\, M_T\, r_\mathrm{min} - b^2\, {v_0}^2$$

✧ C'est une équation du second degré de discriminant $4\, G^2\, {M_T}^2 + 4\, {v_0}^4\, b^2 > 0$. En ne gardant que la solution positive, nous trouvons :

$$r_\mathrm{min} = \frac{-G\, M_T + \sqrt{G^2\, {M_T}^2 + {v_0}^4\, b^2}}{{v_0}^2}$$

☕ *Remarque* : en notant r_0 le rayon de la trajectoire circulaire sur laquelle la vitesse serait v_0, la distance minimale d'approche s'écrit en fait $r_\mathrm{min} = \sqrt{b^2 + {r_0}^2} - r_0$.

III – Résolution spécifique du problème de KÉPLER

III·1 – Le problème de KÉPLER

✧ Dans cette partie, nous allons déterminer la trajectoire d'un point matériel dans un champ de forces newtonien, *ie.* obéissant au PFD :

$$m\,\vec{a}(t) = -\frac{k}{r^2(t)}\,\vec{u}_r$$

✧ Historiquement, le problème était complètement inverse : il s'agissait de trouver ce qui pouvait faire que les trajectoire étaient elliptiques.

III·2 – Utiliser une autre conservation

III·2·*i* – il s'agit d'un autre vecteur . . .

✧ Nous savons déjà que le mouvement est plan. Dans ces conditions $\vec{u}_r = -\dfrac{1}{\dot\theta}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta$, ce qui permet de réécrire le PFD sous la forme :

$$m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = +\frac{k}{r^2(t)\,\dot\theta(t)}\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = +\frac{k}{\sigma}\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta(t)}{\mathrm{d}t}$$

✧ En intégrant, cela donne :

$$\vec{v}(t) = \frac{k}{\sigma}\,\vec{u}_\theta(t) + \vec{w} \qquad \text{où} \qquad \vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{C^{te}}}$$

✧ Nous obtenons ainsi un vecteur constant : $\vec{w} = \vec{v}(t) - \dfrac{k}{\sigma}\,\vec{u}_\theta(t)$.

III·2·*ii* – . . . qui en définit deux autres . . .

✧ Le vecteur excentricité $\vec{h}$ est défini par :

$$\vec{h} \triangleq \frac{\sigma}{k}\,\vec{w} \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{h} = \frac{\sigma}{k}\,\vec{v}(t) - \vec{u}_\theta(t) = \overrightarrow{\mathrm{C^{te}}}$$

✧ Le vecteur de RUNGE – LENZ est défini par :

$$\vec{R} \triangleq \vec{w}\wedge\vec{\sigma} \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{R} = \vec{v}\wedge\vec{\sigma} - k\,\vec{u}_r = \overrightarrow{\mathrm{C^{te}}}$$

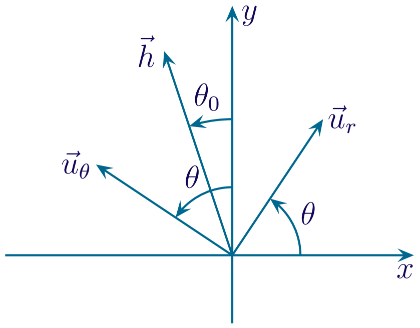
✧ Remarquons que ces deux vecteurs sont dans le plan de la trajectoire.

III·2·*iii* – . . . et fournit l'équation de la trajectoire

✧ Calculons le produit scalaire $\vec{h}\cdot\vec{u}_\theta$ de deux manières.
✧ Tout d'abord en prenant l'expression de $\vec{h}$:

$$\vec{h}\cdot\vec{u}_\theta = \frac{\sigma}{k}\,v_\theta - 1 \quad \text{avec} \quad v_\theta = r\,\dot\theta = \frac{\sigma}{m\,r} \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{h}\cdot\vec{u}_\theta = \frac{\sigma^2}{m\,r\,k} - 1$$

✧ Représentons ensuite la situation dans le plan (Oxy).



✧ Nous avons donc, en notant $e = \|\vec{h}\|$:

$$\vec{h}\cdot\vec{u}_\theta = \|\vec{h}\|\,\|\vec{u}_\theta\|\,\cos(\vec{h},\vec{u}_\theta) = e\,\cos(\theta-\theta_0)$$

✧ En regroupant :

$$e\,\cos(\theta-\theta_0) = \frac{\sigma^2}{m\,r\,k} - 1 \quad\rightsquigarrow\quad 1 + e\,\cos(\theta-\theta_0) = \frac{\sigma^2}{m\,r\,k} \quad\rightsquigarrow\quad r = \frac{\dfrac{\sigma^2}{m\,k}}{1+e\,\cos(\theta-\theta_0)}$$

✧ Nous trouvons le résultat attendu : $r(\theta) = \dfrac{p}{1+e\,\cos(\theta-\theta_0)}$ avec $\boxed{p = \dfrac{\sigma^2}{m\,k}}$

III·3 – Avec les formules de Binet

III·3·*i* – ce n'est qu'un changement de variable

✧ Pour résoudre le problème, nous allons le changer.

✧ Au lieu d'essayer de trouver $r(t)$, nous allons chercher $u(\theta)$ où $u = \dfrac{1}{r}$.

✧ Nous allons donc réécrire les lois physiques en fonction de u.

III·3·*ii* – expression de la vitesse

✧ Dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$, nous avons $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$.

✧ Réécrivons $\dot{r}$ en tenant compte du fait que $u = \dfrac{1}{r}$ et $r = \dfrac{1}{u}$:

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \dot{\theta}\times\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\times\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\dot{\theta}\,\frac{1}{u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\dot{\theta}\,r^2\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\sigma}{m}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

✧ Réécrivons $r\,\dot{\theta}$:

$$r\,\dot{\theta} = \frac{\sigma}{m\,r} = \frac{\sigma}{m}\,u$$

✧ Finalement, la vitesse s'écrit, en variables de Binet : $\boxed{\vec{v} = \dfrac{\sigma}{m}\left(-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\,\vec{u}_r + u\,\vec{u}_\theta\right)}$.

III·3·*iii* – expression de l'accélération

✧ Pour l'accélération, seule la composante sur $\vec{u}_r$ nous intéresse car nous savons déjà, par le PFD, que la composante sur $\vec{u}_\theta$ est nulle.
✧ Nous avons ainsi $\vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r$.
✧ Calculons d'abord $\ddot{r}$:

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{\sigma}{m}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\frac{\sigma}{m}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\frac{\sigma}{m} \times \frac{\sigma}{m\,r^2} \times \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{\sigma^2}{m^2}\,u^2\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$$

✧ Puis calculons $-r\,\dot{\theta}^2$:

$$-r\,\dot{\theta}^2 = -\frac{1}{u}\left(\frac{\sigma}{m\,r^2}\right) = -\frac{1}{u}\,\frac{\sigma^2\,u^4}{m^2} - \frac{\sigma^2}{m^2}\,u^3$$

✧ Finalement : $\boxed{\vec{a} = -\frac{\sigma^2}{m^2}\,u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)\,\vec{u}_r}$.

III·3·*iv* – l'équation du mouvement est simplifiée ...

✯ avec l'accélération de BINET

✧ Maintenant le PFD s'écrit :

$$m\,\vec{a} = -\frac{k}{r^2}\,\vec{u}_r \quad\rightsquigarrow\quad -m\,\frac{\sigma^2}{m^2}\,\cancel{u^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)\,\vec{u}_r = -k\,\cancel{u^2}\,\vec{u}_r \quad\rightsquigarrow\quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} + u(\theta) = \frac{k\,m}{\sigma^2}}$$

✯ avec seulement la vitesse

✧ Partons de l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - k\,u \quad\rightsquigarrow\quad E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\,m\,\frac{\sigma^2}{m^2}\left(\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2\right) - k\,u$$

✧ Comme l'énergie est constante, $\dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\theta} = 0$, ce qui donne :

$$\frac{\sigma^2}{m}\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} + u \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) + k\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = 0$$

✧ En simplifiant par la solution inintéressante $\dfrac{\mathrm{d}u(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 0$ correspondant à une trajectoire circulaire, nous obtenons :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} + u(\theta) = \frac{k\,m}{\sigma^2}}$$

III·3·*v* – ... et maintenant soluble

✧ Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, dont la solution est :

$$u(\theta) = +\frac{k\,m}{\sigma^2} + \alpha\,\cos(\theta-\theta_0) \qquad \text{où} \qquad \alpha \text{ et } \theta_0 \text{ des constantes d'intégration}$$

✧ En isolant r, cela donne

$$u = \frac{1}{r} \quad \rightsquigarrow \quad r = \frac{1}{\dfrac{k\,m}{\sigma^2} + \alpha\,\cos(\theta-\theta_0)} = \frac{\dfrac{\sigma^2}{m\,k}}{1+\alpha\,\dfrac{\sigma^2}{m\,k}\,\cos(\theta-\theta_0)}$$

✧ Nous retrouvons aussi une conique de trajectoire $r(\theta) = \dfrac{p}{1+e\,\cos(\theta-\theta_0)}$ avec $p = \dfrac{\sigma^2}{m\,k}$.

III·3·*vi* – expression de l'énergie totale

✧ En variables de Binet, l'énergie s'écrit :

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{\sigma^2}{2\,m}\left(\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2\right) + k\,u$$

✧ Calculons chacun des trois termes compte tenu du fait que $u(\theta) = \dfrac{1+e\,\cos(\theta-\theta_0)}{p}$ avec $p = \dfrac{\sigma^2}{m\,k}$.

✧ Nous obtenons ainsi :

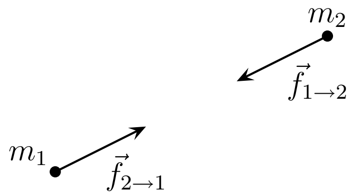
$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{m}} &= \frac{p\,k}{2}\left(\frac{e^2\,\sin^2(\theta-\theta_0)}{p^2} + \frac{1+2\,e\,\cos(\theta-\theta_0)+e^2\,\cos^2(\theta-\theta_0)}{p^2}\right) - \frac{k}{p}\Big(1+e\,\cos(\theta-\theta_0)\Big)\\
&= \frac{k}{2\,p}\Big(e^2+1+2\,e\,\cos(\theta-\theta_0)\Big) - \frac{k}{2\,p}\Big(2+2\,e\,\cos(\theta-\theta_0)\Big)\\
&= \frac{k}{2\,p}\,(e^2-1) = \frac{m\,k^2}{2\,\sigma^2}\,(e^2-1)
\end{aligned}$$

✧ Nous venons ainsi de démontrer ce que nous avons appris :
- ➜ si la trajectoire est elliptique, $e<1$ et $E_{\mathrm{m}}<0$
- ➜ si la trajectoire est parabolique, $e=1$ et $E_{\mathrm{m}}=0$
- ➜ si la trajectoire est hyperbolique, $e>1$ et $E_{\mathrm{m}}>0$

IV – En fait il s'agit d'un problème à deux corps

IV·1 – Situation étudiée

✧ Considérons deux points matériels en interaction en évolution dans un référentiel $\mathscr{R}_0$ galiléen.



✧ Supposons que ces points matériels ne soient soumis à aucune force extérieure.

Un système est dit *isolé* lorsqu'aucune force extérieure ne s'exerce.

Un système est dit *pseudo-isolé* lorsque la résultante des forces extérieures est nulle.

IV·2 – Équation d'évolution

IV·2·*i* – un référentiel barycentrique particulier

✧ Écrivons le TCI dans le référentiel $\mathscr{R}_0$:

$$m_{\text{tot}} \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{|\mathscr{R}_0}(G)}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{v}_{|\mathscr{R}_0}(G) = \overrightarrow{\mathrm{C}^{\text{te}}}$$

Le référentiel barycentrique associé à un système isolé est galiléen.

✧ Dans la suite, nous étudierons dans le référentiel *galiléen* barycentrique que nous noterons $\mathscr{R}$.

IV·2·*ii* – première apparition de la particule fictive

✧ Écrivons les PFD sur les deux points matériels m_1 et m_2 :

$$\left\{\begin{aligned} & m_1 \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{GM_1}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{f}_{2\to 1}(r) \\ & m_2 \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{GM_2}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{f}_{1\to 2}(r) \end{aligned}\right. \qquad \rightsquigarrow \qquad \left\{\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{GM_1}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{m_1}\,\vec{f}_{1\to 2}(r) \\ & \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{GM_2}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{m_2}\,\vec{f}_{1\to 2}(r) \end{aligned}\right.$$

✧ En soustrayant, cela donne :

$$\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1})}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)\vec{f}_{1\to 2}(r) \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M_1M_2}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{m_1+m_2}{m_1\,m_2}\,\vec{f}_{1\to 2}(r)$$

✧ Et ainsi $\dfrac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}\,\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M_1M_2}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{f}_{1\to 2}(r)$.

✧ Or $r = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|$.

✧ Introduisons une particule fictive M telle que $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$ et de masse $\mu = \dfrac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}$. Alors l'équation d'évolution s'écrit, en notant $\vec{f} = \vec{f}_{1\to 2}$:

$$\mu\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{f}(r)$$

> La *particule fictive* M d'un système isolé de deux point matériels M_1 et M_2 est le point matériel fictif de vecteur position dans le référentiel barycentrique $\overrightarrow{GM} = M_1M_2$ et de masse $\mu = \dfrac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}$, appelée *masse réduite*.

✧ Tout se passe comme si la particule M subissait la force $\vec{f}$. Et pourtant ce n'est pas possible puisque la particule M est comme la cuillère de Néo : elle n'existe pas !

IV·2·*iii* – changement de problème

✧ En notant $\vec{r}_1 = \overrightarrow{GM_1}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{GM_2}$ les vecteurs positions des deux points matériels dans le référentiel barycentrique, nous avons :

$$\begin{cases} m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2 = \vec{0} \\ \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r} \end{cases} \qquad \leadsto \qquad \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{r}$$

✧ Dans ces conditions, il suffit de connaître $\vec{r}$ pour remonter aux positions $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ par homothétie.

✧ Nous allons donc maintenant nous intéresser à cette particule fictive.

IV·2·*iv* – cas où $m_1 \gg m_2$

✧ Dans ce cas, nous trouvons :

$$\mu = \frac{m_1\,m_2}{m_1+m_2} \simeq m_2\ ; \qquad \vec{r}_1 = \vec{0}\ ; \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}$$

> Dans un système de deux points matériels dans lequel l'un des points a une masse très supérieure à l'autre, la particule fictive s'identifie avec le point de masse la plus faible.

✧ Cela permet de justifier tout ce que nous avons fait dans le début du chapitre, notamment que le Soleil ou la Terre suivant le cas était au centre du référentiel.

IV·3 – Une « vraie » particule fictive ?

IV·3·*i* – un moment cinétique très particulier

✧ Calculons le moment cinétique du système dans le référentiel barycentrique $\mathscr{R}$:

$$\vec{\sigma} = \vec{r}_1 \wedge m_1\,\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2\,\vec{v}_2$$

✧ D'après les relations précédentes avec la particule fictive, nous avons :

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}\ ; \qquad \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v}\ ; \qquad \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{v}$$

✧ Cela donne, en remplaçant :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} &= -\frac{m_2\,m_1}{m_1+m_2}\,\vec{r}\wedge\vec{v_1} + \frac{m_2\,m_1}{m_1+m_2}\,\vec{r}\wedge\vec{v_2}\\ &= \mu\,\vec{r}\wedge(\vec{r}_2-\vec{r}_1) = \mu\,\vec{r}\wedge\vec{v}\end{aligned}$$

Le moment cinétique d'un système isolé de deux points matériel est égal au moment cinétique de sa particule fictive associée.

IV·3·*ii* – une énergie cinétique tout aussi particulière

✧ Calculons de même l'énergie cinétique de $\mathscr{S}$ dans le référentiel barycentrique.

$$\begin{aligned}E_\text{c} &= \frac{1}{2}\,m_1\,{v_1}^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,{v_2}^2 = \frac{1}{2}\,m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\,v\right)^2 + \frac{1}{2}\,m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\,v\right)^2\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{m_1\,{m_2}^2+{m_1}^2\,m_2}{m_1+m_2}\,v_2 = \frac{1}{2}\times\frac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}\,v^2 = \frac{1}{2}\,\mu\,v^2\end{aligned}$$

L'énergie cinétique d'un système isolé de deux points matériel est égal à l'énergie cinétique de sa particule fictive associée.

✧ Finalement la particule fictive est extrêmement intéressante car :
- ➜ elle permet de trouver les trajectoires des deux points matériels
- ➜ elle permet de trouver le moment cinétique et l'énergie cinétique du système dans le référentiel barycentrique (grandeurs intrinsèques) sans avoir à repasser par les moments cinétiques des deux points matériels

IV·3·*iii* – et une quantité de mouvement ...

✧ Pour la quantité de mouvement du système, nous avons :

$$\vec{p} = m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2 = -\frac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v} + \frac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v} = \vec{0}$$

✧ Après tout, c'est normal, c'est le référentiel barycentrique quand même !

✧ En revanche, nous pouvons voir que :

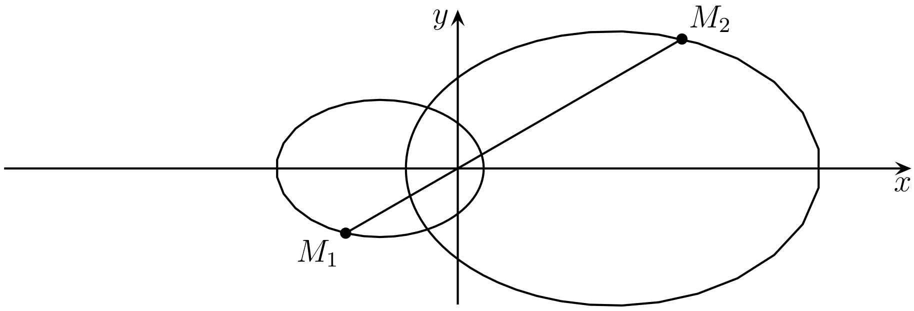
$$\vec{p_1} = m_1\,\vec{v}_1 = -\frac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v} = -\mu\,\vec{v} \qquad \text{et} \qquad \vec{p_2} = \mu\,\vec{v}$$

✧ Dans le référentiel barycentrique, chaque point matériel a, au signe près, la quantité de mouvement de la particule fictive.

IV·4 – Lien entre le problème à deux corps et celui de la particule fictive

IV·4·*i* – mouvement des deux corps

- Prenons l'exemple d'un mouvement elliptique.
- Alors les trajectoires des deux corps sont des ellipses.



- Les deux corps sont en mouvement dans le référentiel barycentrique qui leur est attaché.

IV·4·*ii* – une troisième loi de Képler approximative

- Démontrons la loi de Képler.
- Pour cela considérons la particule fictive sur une trajectoire circulaire de demi-grand axe a et de demi-petit axe b.
- En une période T, la particule fictive fait un tour complet donc balaie la surface totale de l'ellipse, à savoir $\pi\,a\,b$. Cela donne :

$$\mathscr{V} = \frac{C}{2} = \frac{\sigma}{2\,\mu} = \frac{\pi\,a\,b}{T} \quad \text{avec} \quad b = a\sqrt{1-e^2} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\sigma}{\mu} = \frac{2\,\pi}{T}\,a^2\sqrt{1-e^2}$$

- Exprimons maintenant le moment cinétique en fonction de a et e à partir de relations obtenues précédemment :

$$p = \frac{\sigma^2}{\mu\,k} \quad \text{et} \quad a = \frac{p}{1-e^2} \qquad \rightsquigarrow \qquad a\,(1-e^2)\,\mu\,k = \sigma^2$$

- Nous obtenons ainsi :

$$\left(\frac{2\,\pi}{T}\,a^2\sqrt{1-e^2}\right)^2 = \frac{a\,(1-e^2)\,\mu\,k}{\mu^2} \qquad \rightsquigarrow \qquad T^2 = \frac{4\,\pi^2\,\mu}{k}\,a^3 = \frac{4\,\pi^2}{G\,(m_1+m_2)}\,a^3$$

- Finalement nous pouvons constater que T^2 n'est pas tout à fait proportionnel à a^3 car le coefficient dépend de ce qui tourne autour de M_1.
- En revanche si, comme dans le cas du système solaire, l'un des corps a une masse m_1 très supérieure à l'autre, alors $T^2 = \dfrac{4\,\pi^2}{G\,m_1}\,a^3$ et le facteur de proportionnalité devient indépendant de m_2, *ie.* de ce qui tourne autour de M_1.

IV·4·*iii* – le problème à trois corps

- Si le problème de deux **points matériels** en interaction newtonienne admet une solution exacte et connue, tout autre problème, si proche soit-il n'admet pas de solution exacte et connue dans le cas général.

- ✧ Si l'un des deux corps n'est pas tout à fait à répartition sphérique de masse, les trajectoires peuvent être légèrement modifiées.
- ✧ De même pour 3 points matériels (ex : Soleil, Terre, Lune), les mouvements peuvent être très différents suivant les conditions initiales et les rapports de masse.
- ✧ Signalons qu'il existe quelques solutions exactes dans quelques cas particuliers et que ces solutions (notamment les points de Lagrange) sont physiquement intéressantes au niveau astronomique (positionnement de satellites ou de météorites).

Interaction newtonienne

Au niveau du cours

✯ Les définitions

✧ Sont à savoir :
- ➜ champ de forces central, champ de force newtonien
- ➜ énergie potentielle effective
- ➜ conique, ellipse, parabole, hyperbole
- ➜ particule fictive, masse réduite

✯ Les grandeurs

✧ Connaître la dimension de l'excentricité d'une conique, du paramètre d'une conique

✯ Les lois

✧ Connaître :
- ➜ la loi d'attraction gravitationnelle
- ➜ la loi de conservation du moment cinétique pour un mouvement dans un champ de forces central
- ➜ la loi des aires
- ➜ l'expression de la trajectoire d'un point matériel dans un champ de force newtonien
- ➜ le lien entre énergie et forme de la trajectoire d'une conique
- ➜ les lois de KÉPLER

✯ la phénoménologie

✧ Connaître :
- ➜ l'interprétation de la loi des aires

✯ les exemples fondamentaux

✧ Le mouvement circulaire dans le champ de forces newtonien.

Au niveau de l'analyse

✯ Analyse physique

✧ Savoir déterminer *a priori* la forme d'une trajectoire.

Au niveau des savoir-faire

✯ exercices classiques

✧ Savoir :
- ➜ retrouver l'expression de l'énergie potentielle effective
- ➜ retrouver les vitesses de satellisation et de libération

Table des matières