Mécanique

Chapitre 7

Mouvement de charges dans un champ $(\vec{E},\vec{B})$

Mouvement de charges dans un champ $(\vec{E},\vec{B})$

Nous savons déjà que les charges, immobiles ou en mouvements, sont des sources de champ électrique et magnétique. Nous allons voir dans ce chapitre qu'en plus d'être source du champ, elles *subissent* des effets dus à la présence de ces champs, des effets mécaniques.

Ainsi dans ce chapitre, nous verrons comment le mouvement des charges est influencé par la présence de champs électrique ou magnétique statiques. Si dans la première partie, nous nous intéresserons aux mouvements de particules « seules » dans l'espace, nous verrons dans la deuxième partie l'interaction entre le champ magnétique et le mouvement d'ensemble de charges appelé « courant électrique ».

I – Force subie par une charge

I·1 – La force électromagnétique

I·1·i – expressions

✩ version force de Lorentz

✧ Cette force est « donnée » par les lois de la nature. C'est une des lois de base.

> La force subie par un point matériel de charge q plongé dans un champ électromagnétique est la *force de* Lorentz qui s'écrit :
> $$\vec{f} = q\left(\vec{E}(M(t)) + \vec{v}(t) \wedge \vec{B}(M(t))\right) \qquad \text{avec}$$
> ➜ $\vec{v}(t)$ la vitesse du point matériel par rapport au référentiel d'étude
> ➜ $\vec{E}(M(t))$ et $\vec{B}(M(t))$ les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à l'endroit $M(t)$ où se trouve le point matériel à l'instant t

ne pas confondre $\vec{E}_{M(t)}$ avec $\vec{E}(M,t)$. Le premier est le champ à l'endroit où se trouve le point M à l'instant t alors que le 2$^{\text{e}}$ sous-entend que le champ $\vec{E}$ est *a priori* non uniforme et non constant. Autrement dit dans le premier cas, nous nous intéressons à la valeur du champ en un point bien précis de l'espace, alors que dans le 2$^{\text{e}}$ nous sommes plutôt en train de considérer la totalité du champ dans son ensemble.

✧ Comme ici, « ce » qui exerce la force est le champ $(\vec{E},\vec{B})$, il n'est **pas possible** d'appliquer la 3$^{\text{e}}$ loi de Newton qui, rappelons-le, ne concerne que des *points matériels*.

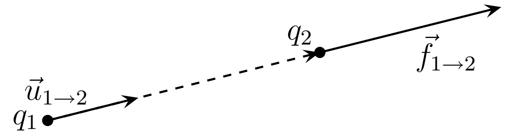
✧ Insistons : la 3$^{\text{e}}$ loi de Newton reste valable, c'est juste que la force de Lorentz n'entre pas dans son champ d'application.

✩ version force de Coulomb

✧ Nous connaissons le champ créé par une charge ponctuelle (ou au moins de symétrie sphérique), nous pouvons donc en déduire la force qu'elle exerce :

La force exercée par une charge immobile q_1 sur une autre charge immobile q_2 s'écrit :

$$\vec{f}_{1\to 2} = \frac{q_1\,q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_{1\to 2} = \frac{q_1\,q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{{M_1M_2}^3}$$



✧ Même si cette loi n'est en toute rigueur valable que pour des charges immobiles, elle reste une excellente approximation pour des charges en mouvement à des vitesses faibles devant la lumière et pas trop éloignées l'une de l'autre.

✧ Cette deuxième approximation (l'éloignement) sera précisé en 2e année.

La force de COULOMB est une force newtonienne qui s'écrit :

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\,\vec{u}_r \qquad \text{avec} \qquad k = -\frac{q_1\,q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}.$$

✧ Nous constatons que deux charges de même signe ont tendance à se repousser alors que deux charges de signes opposés ont tendance à s'attirer.

La force de COULOMB peut-être attractive ou répulsive.

✯ force magnétique

✧ Nous en reparlerons dans la suite du chapitre lorsque nous aurons vu le lien entre un courant et le mouvement d'une charge.

✧ Nous retiendrons :

Le champ magnétique créé par une charge en mouvement est tel que :

$$B_{\text{créé}} \propto \mu_0 \times \frac{q_{\text{source}}\,v_{\text{source}}}{r^2}$$

✧ Nous allons voir pourquoi nous allons systématiquement le négliger.

I·1·*ii* – ordres de grandeur

Valeurs fondamentales :

➜ charge élémentaire : $e = 1{,}6.10^{-19}$ C
➜ masse de l'électron : $m_{\text{e}} = 9.10^{-31}$ kg
➜ masse du proton : $m_{\text{p}} = 1{,}7.10^{-27}$ kg

✯ version LORENTZ

◕ partie électrique

- Une pile plate de 4,5 V dont les deux électrodes sont séparées de 1 cm engendre un champ électrique de 450 V.m^{-1}.
- Pour qu'il y ait une étincelle dans de l'air sec, il faut que le champ électrique dépasse les 3 MV.m^{-1}.
- Prenons un champ très faible de 10^3 V.m^{-1} et comparons la force de Lorentz subie par un proton à son poids :

$$\frac{\|\vec{f}_{\mathrm{L}}\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{e\,E}{m\,g} = \frac{1{,}6.10^{-19} \times 10^3}{1{,}7.10^{-27} \times 10} = 10^{10}$$

- Nous pouvons donc négliger le poids devant la force de Lorentz.

partie magnétique

- Le champ magnétique créé par la Terre est de l'ordre de 10^{-5} T, celui par un magnet de 10^{-3} T.
- En laboratoire, il n'est pas très difficile d'obtenir des champs de l'ordre de 0,1 à 1 T.
- Exprimons le rapport de la force de Lorentz sur le poids :

$$\frac{\|\vec{f}_{\mathrm{L}}\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{e\,v\,B}{m\,g} = \frac{v}{v_{\mathrm{crit}}} \qquad \text{avec} \qquad v_{\mathrm{crit}} = \frac{m\,g}{e\,B} = \frac{1{,}7 \times 10^{-27} \times 10}{1{,}6 \times 10^{-19} \times 0{,}1} = 10^{-5}\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

- Dès qu'une particule va à des vitesses bien supérieure à la vitesse critique précédente, nous pourons négliger l'influence du poids.

conclusion

> Au niveau des particules élémentaires, le poids sera toujours négligeable devant la force de Lorentz.

s'il s'agit d'objets macroscopiques chargés (cf. électricité statique), le poids ne sera pas forcément négligeable.

pour pouvoir négliger le poids devant la force de Lorentz, il faut que cette dernière existe.

✯ version Coulomb

- Écrivons le rapport entre la force de Coulomb et le poids d'un proton :

$$\frac{\|\vec{f}_{\mathrm{C}}\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{\dfrac{q^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}}{m\,g} = \frac{{r_0}^2}{r^2} \qquad \text{avec} \qquad {r_0}^2 = \frac{q_1\,q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,m\,g} = \frac{(1{,}2 \times 10^{-19})^2}{4\,\pi \times \dfrac{10^{-9}}{36\,\pi} \times 1{,}7 \times 10^{-27} \times 10} = 10^{-2}\ \mathrm{m}^2$$

- Ce qui donne $r_0 \simeq 10$ cm.
- Ainsi dès que deux charges sont proches $r < 10$ cm le poids devient négligeable devant la force de Coulomb.

I·1·*iii* – vision énergétique

★ **version Lorentz**

> La force de Lorentz est conservative s'il n'y a pas de champ magnétique et que le champ électrique ne dépend pas du temps. Dans ces conditions, une charge q possède l'énergie potentielle
> $$E_{\text{p}} = q\,V$$

✧ Pour le montrer, partons de l'expression de la force de Lorentz compte-tenu de l'absence du champ magnétique.

$$\vec{f} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q\,\vec{E}$$

✧ Comme le champ électrique est électrostatique, nous avons

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V \qquad \leadsto \qquad \vec{f} = -q\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(q\,V)$$

✧ Ce qui montre bien que la force est conservative.

★ **version Coulomb**

> La force de Coulomb dérive de l'énergie potentielle
> $$E_{\text{p}} = \frac{q_1\,q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} \qquad \text{où}$$
> r est la distance entre les deux charges.

✧ La démonstration a déjà été faite dans le cadre des forces newtoniennes.

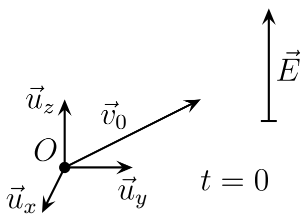
✧ En effet, une force newtonienne $\vec{f} = -\dfrac{k}{r^2}\,\vec{u}_r$ est associée à l'énergie potentielle $E_{\text{p}} = -\dfrac{k}{r}$ et la force de Coulomb est une force newtonienne avec $k = -\dfrac{q_1\,q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}$.

I·2 – Exemples fondamentaux

I·2·i – mouvement dans un champ $\vec{E}$ uniforme et constant

★ **présentation, analyse**

✧ Considérons une particule de charge q en mouvement dans un champ électrique uniforme et constant $\vec{E}$.



✧ Analyse physique :
- ➜ comme il s'agit d'une particule dans un champ, le mouvement sera essentiellement déterminé par la force de Lorentz
- ➜ ici il y a trois degrés de liberté *a priori* puisque la particule peut se mouvoir dans les trois directions de l'espace

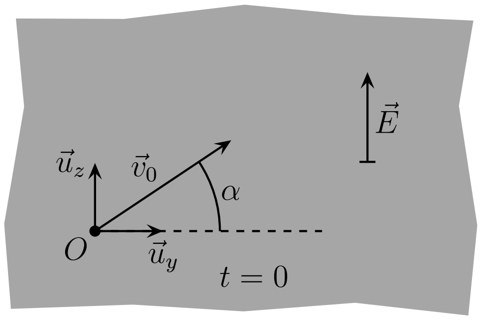
➜ la force de LORENTZ à **tout** instant et la vitesse à **l'instant initial** étant dans le même plan $(\vec{E},\vec{v}_0)$, l'ensemble du mouvement se fera dans ce plan donc il n'y a que deux degrés de description

➜ les grandeurs pertinentes sont m (inertie), q, E (action) ainsi que v_0 et un angle entre $\vec{v}_0$ et $\vec{E}$.

✧ Analyse technique :

➜ choisissons le repérage de telle sorte qu'un axe soit parallèle à $\vec{E}$

➜ 2 degrés de description, nous allons utiliser un PFD



✯ équation d'évolution

✧ En négligeant le poids devant la force de LORENTZ, le PFD appliqué à la particule dans le référentiel galiléen du laboratoire donne :

$$m\,\vec{a}(t) = q\,\vec{E} \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{a}(t) = \frac{q}{m}\,\vec{E}$$

✧ Il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré et donc d'un cas que nous avons déjà rencontré lors de l'étude de la chute libre.

✯ résolution

✧ La résolution est très rapide (ne pas oublier les conditions initiales)

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = \dfrac{q\,E}{m} \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = v_0\,\cos\alpha \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{q\,E\,t}{m} + v_0\,\sin\alpha \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x(t) = 0 \\ y(t) = (v_0\,\cos\alpha)\,t \\ z(t) = \dfrac{q\,E\,t^2}{2\,m} + (v_0\,\sin\alpha)\,t \end{array}\right.$$

✧ Pour avoir la trajectoire, éliminons t entre $y(t)$ et $z(t)$

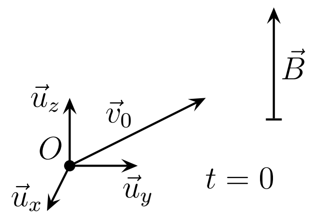
$$t = \frac{y}{v_0\,\cos\alpha} \qquad \rightsquigarrow \qquad z = \frac{q\,E}{2\,m\,\cos^2\alpha}\times t^2 + (\tan\alpha)\,t$$

> La trajectoire d'une particule dans un champ électrique **uniforme** et **constant** est une parabole ou une droite suivant les conditions initiales.

I·2·*ii* – mouvement dans un champ $\vec{B}$ uniforme et constant

✯ présentation, analyse

✧ Considérons une particule de charge q en mouvement dans un champ électrique uniforme et constant $\vec{B}$.



✧ Analyse physique :

➜ comme il s'agit d'une particule dans un champ, le mouvement sera essentiellement déterminé par la force de Lorentz

➜ ici il y a trois degrés de liberté *a priori* puisque la particule peut se mouvoir dans les trois directions de l'espace

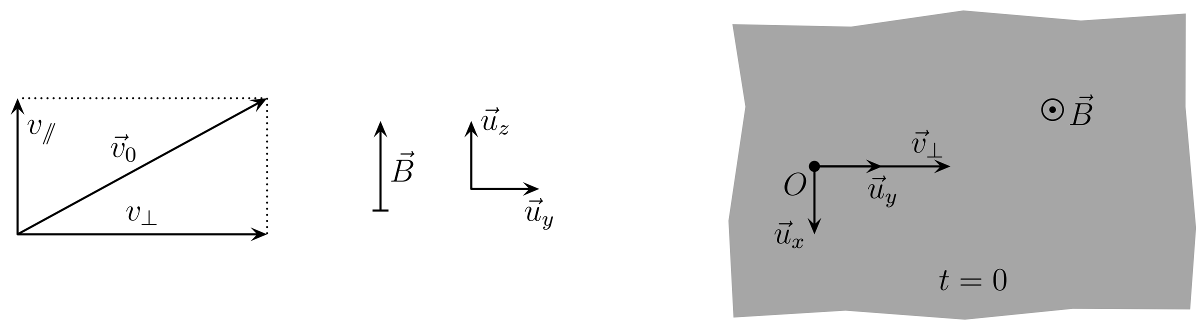
➜ la force de Lorentz à **tout** instant orthogonale à $\vec{B}$ et comme à l'instant initial la vitesse n'est **pas** orthogonale à $\vec{B}$ aussi, nous pouvons en déduire que le mouvement ne sera **pas** plan.

➜ les grandeurs pertinentes sont m (inertie), q, B (action) ainsi que v_0 et un angle entre $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$.

✧ Analyse technique :

➜ choisissons le repérage de telle sorte qu'un axe soit parallèle à $\vec{B}$ et que, dans le plan orthogonal à $\vec{B}$, la vitesse soit suivant un seul axe.

➜ il y a 3 degrés de description donc nous allons utiliser un PFD



✯ équations d'évolution

✧ Comme il s'agit d'un mouvement d'une particule dans un champ, nous pouvons négliger le poids devant la force de Lorentz et ainsi le PFD appliqué à la particule dans le référentiel galiléen du laboratoire s'écrit

$$m\,\vec{a}(t) = q\,\vec{v}(t)\wedge\vec{B} \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{a}(t) = \frac{q}{m}\times\begin{pmatrix} v_x(t)\\ v_y(t)\\ v_z(t)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix}$$

✧ Une fois le calcul des composantes du produit vectoriel effectué, nous arrivons à

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \dfrac{q\,B}{m}\,v_y(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\dfrac{q\,B}{m}\,v_x(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0\end{array}\right.$$

✯ résolution

☯ suivant $\vec{B}$

✧ Il s'agit de la projection sur $\vec{u}_z$

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = \mathrm{C^{te}} = v_{/\!/} \qquad \rightsquigarrow \qquad z(t) = v_{/\!/}\,t$$

✧ Il s'agit d'un mouvement uniforme **sur l'axe parallèle à** B.

☯ dans le plan orthogonal à $\vec{B}$, méthode 1

✧ Commençons par réécrire les équations en considérant $q > 0$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(t) = \omega_{\mathrm{c}}\,v_y(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}(t) = -\omega_{\mathrm{c}}\,v_x(t)\end{array}\right. \qquad \text{où} \qquad \omega_{\mathrm{c}} = \frac{q\,B}{m}$$

$\omega_{\mathrm{c}} = \dfrac{|q|\,B}{m}$ est appelée la *pulsation cyclotron*.

✧ Le nom s'expliquera de lui-même au sous-paragraphe suivant.
✧ Nous pouvons ainsi résoudre par substitution

$$v_x(t) = -\frac{1}{\omega_{\mathrm{c}}} \times v_y(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad -\frac{1}{\omega_{\mathrm{c}}} \times \frac{\mathrm{d}^2v_y}{\mathrm{d}t^2}(t) = \omega_{\mathrm{c}}\,v_y(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2v_y}{\mathrm{d}t^2}(t) + {\omega_{\mathrm{c}}}^2\,v_y(t) = 0$$

✧ De même

$$v_y(t) = \frac{1}{\omega_{\mathrm{c}}} \times v_x(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{1}{\omega_{\mathrm{c}}} \times \frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\omega_{\mathrm{c}}\,v_x(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2}(t) + {\omega_{\mathrm{c}}}^2\,v_x(t) = 0$$

✧ Et ainsi, en rapprochant les deux équations, cela donne

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}t^2}(t) + {\omega_{\mathrm{c}}}^2\,v_x(t) = 0\\ \dfrac{\mathrm{d}^2v_y}{\mathrm{d}t^2}(t) + {\omega_{\mathrm{c}}}^2\,v_y(t) = 0\end{array}\right. \qquad \rightsquigarrow \qquad \left\{\begin{array}{l}v_x(t) = A\,\cos(\omega_{\mathrm{c}}\,t) + B\,\sin(\omega_{\mathrm{c}}\,t)\\ v_y(t) = A'\,\cos(\omega_{\mathrm{c}}\,t) + B'\,\sin(\omega_{\mathrm{c}}\,t)\end{array}\right.$$

✧ Les conditions initiales se voient sur le schéma pour $v_x(0)$ et $v_y(0)$ et se trouvent à l'aide des équations différentielles pour $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(0)$ et $\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}(0)$

$$\left\{\begin{array}{l} v_x(0) = 0 \\ v_y(0) = v_\perp \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(0) = \omega_\mathrm{c}\,v_\perp \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}(0) = 0 \end{array}\right.$$

✧ Cela donne

$$v_x(0) = v_\perp\,\sin\left(\omega_\mathrm{c}\,t\right) \qquad \text{et} \qquad v_y(t) = v_\perp\,\cos\left(\omega_\mathrm{c}\,t\right)$$

✧ Cette méthode :
- ➜ présente l'avantage d'être assez intuitive
- ➜ présente l'inconvénient de faire appel à des conditions initiales cachées (à cause du fait qu'à un moment il a fallu dériver une équation pour substituer)

dans le plan orthogonal à $\vec{B}$, méthode 2

✧ Introduisons une fonction complexe inconnue (comme nous l'avons fait avec le pendule de Foucault) $\underline{H}(t) = v_x(t) + \mathrm{j}\,v_y(t)$.

✧ L'équation différentielle vérifiée par $\underline{H}(t)$ s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\underline{H}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(t) + \mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}(t) = \omega_\mathrm{c}\,v_y(t) - \mathrm{j}\,\omega_\mathrm{c}\,v_x(t) = -\mathrm{j}\,\omega_\mathrm{c}\,\big(v_x + \mathrm{j}\,v_y(t)\big) = -\mathrm{j}\,\omega_\mathrm{c}\,\underline{H}(t)$$

✧ Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant qui se résout très vite

$$\frac{\mathrm{d}\underline{H}}{\mathrm{d}t}(t) + \mathrm{j}\,\omega_\mathrm{c}\,\underline{H}(t) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \underline{H}(t) = \underline{H_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega_\mathrm{c}\,t}$$

✧ Or les conditions initiales donnent

$$\underline{H}(0) = v_x(0) + \mathrm{j}\,v_y(0) = \mathrm{j}\,v_\perp \qquad \rightsquigarrow \qquad \underline{H}(t) = \mathrm{j}\,v_\perp\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega_\mathrm{c}\,t}$$

✧ Et en revenant aux notations réelles

$$v_x(t) = \mathfrak{Re}\,\big(\underline{H}(t)\big) = +v_\perp\,\sin\left(\omega_\mathrm{c}\,t\right) \qquad \text{et} \qquad v_y(t) = \mathfrak{Im}\,\big(\underline{H}(t)\big) = +v_\perp\,\cos\left(\omega_\mathrm{c}\,t\right)$$

✧ Il s'agit bien du même résultat.

✧ Cette méthode :
- ➜ permet de se contenter des conditions initiales « naturelles »
- ➜ fait passer par un intermédiaire de calcul non naturel

✧ À chacun maintenant de choisir sa méthode.

trajectoire dans le plan orthogonal à $\vec{B}$

✧ Á partir de l'expression des vitesses $v_x(t)$ et $v_y(t)$ nous trouvons, toujours en faisant attention aux conditions initiales

$$x(t) = \frac{v_\perp}{\omega_\mathrm{c}}\,\big(1 - \cos\left(\omega_\mathrm{c}\,t\right)\big) \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{v_\perp}{\omega_\mathrm{c}}\,\sin\left(\omega_\mathrm{c}\,t\right)$$

✧ Il s'agit là d'une trajectoire circulaire uniforme :

➜ de rayon $R = \left|\dfrac{v_\perp}{\omega_c}\right| = \dfrac{m\,v_\perp}{q\,B}$

➜ comme ici le signe de ω_c change avec q, le mouvement se fait dans le sens indirect pour $q > 0$ et dans le sens direct pour $q < 0$

rassemblement

✧ En tenant compte du fait que $q \lessgtr 0$, nous avons

> La trajectoire d'une particule dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$ est hélicoïdale d'axe la direction de $\vec{B}$ et de rayon $R = \dfrac{m\,v_\perp}{|q|\,B}$ où $v_\perp$ est la composante de la vitesse dans le plan orthogonal à $\vec{B}$.

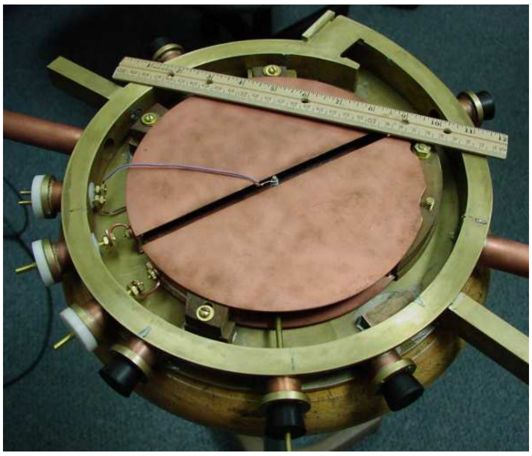
✧ Tout se passe comme si les particules s'enroulaient autour des lignes de champ, les charges positives et négatives ne s'enroulant pas dans le même sens.

I·2·*iii* – application au cyclotron

✯ présentation du dispositif

✧ Un cyclotron est un dispositif qui permet d'accélérer des particules avec un appareillage de taille modeste surtout par rapport au LHC qui mesure 27 km de circonférence : un cyclotron tient aisément dans une pièce de travail usuelle.

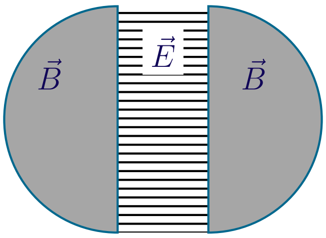
✧ Sur la photo ci-dessous, le réglet fait 30 cm.



✧ Un cyclotron est essentiellement composé

➜ de deux dés dans lequels règle un champ magnétique uniforme et constant

➜ un espace interdé dans lequel règle un champ électrique contrôlé par un générateur sinusoïdal



✧ Pour la suite, considérons que :

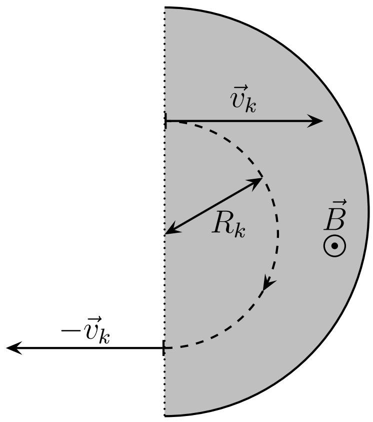
➜ les particules accélérées sont des particules α (noyaux d'hélium) de charge $q = 2\,e > 0$

➜ l'ensemble du mouvement est dans le plan du schéma

✯ fonctionnement

mouvement dans un dé

✧ Imaginons une particule α qui arrive dans la zone de transition avec une vitesse $\vec{v}_k$.



✧ Alors nous savons qu'il aura une trajectoire circulaire :
- ➜ de rayon $R_k = \dfrac{m\,v_k}{2\,e\,B}$
- ➜ de pulsation *cyclotron* $\omega_c = \dfrac{2\,e\,B}{m}$

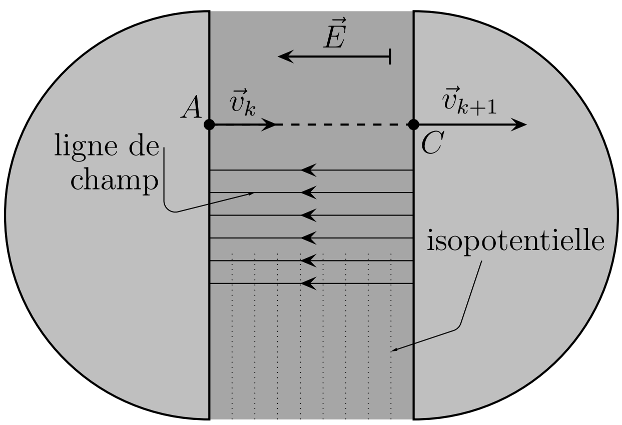
✧ Ainsi, pour ressortir, il faudra que l'électron ait fait un demi-tour ce qui correspond à la durée

$$\delta t_k = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi\,m}{2\,e\,B}$$

✧ Remarquons que cette durée est intrinsèque au dispositif et ne dépend pas de la vitesse de la particule α.

mouvement dans la zone de transition

✧ Considérons une particule α qui sort d'un dé à la vitesse v_k et cherchons la vitesse v_{k+1} à laquelle elle arrive dans le dé suivant.



✧ Ici comme la trajectoire est rectiligne et que seule nous intéresse la vitesse, nous allons utiliser une méthode énergétique.

✧ Faisons l'approximation que les lignes de champ sont bien rectilignes et donc que les isopotentielle sont parallèles aux faces planes des dés.

✧ Alors, comme seule agit la force de LORENTZ, conservative, nous pouvons écrire la conservation de l'énergie pour l'électron entre les points A et C ce qui donne :

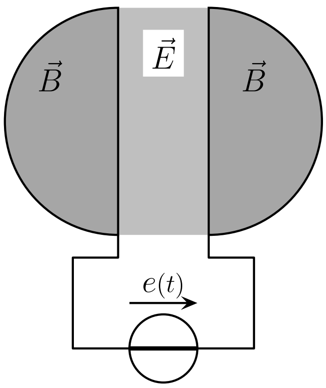
$$\frac{1}{2}\,m\,{v_k}^2 + 2\,e\,V_A = \frac{1}{2}\,m\,{v_{k+1}}^2 + 2\,e\,V_C \qquad \leadsto \qquad \frac{1}{2}\,m\,{v_{k+1}}^2 = \frac{1}{2}\,m\,{v_k}^2 + 2\,e\,(V_A - V_C)$$

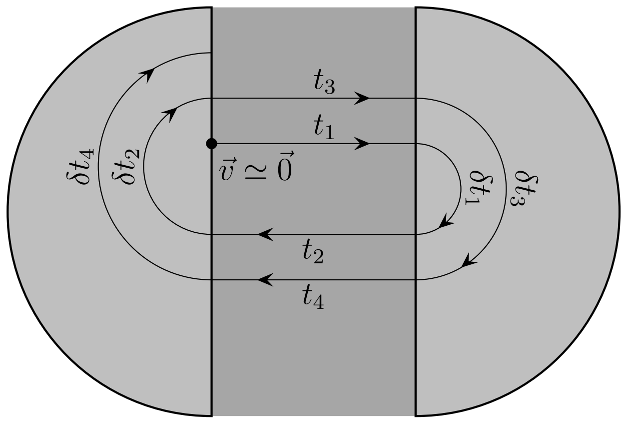
✧ Ainsi quand $V_A > V_C$ la particule α est effectivement accélérée.

✯ caractéristiques globales

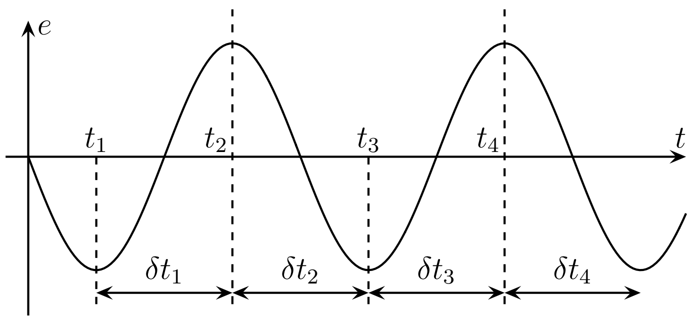
✧ Pour que la particule α soit accélérée à chaque passage dans la zone de champ $\vec{E}$, il est nécessaire de changer le sens des potentiels.

✧ Pour cela les faces des dés sont reliées à un générateur sinusoïdal.





✧ Le but est de faire en sorte que pendant que l'électron change de direction, la différence de potentiels change de signe.



◕ vitesse maximale

✧ Prenons un cyclotron tel que
- ➜ le rayon d'un dé vaille $R = 50$ cm
- ➜ le champ magnétique soit de norme $B = 1{,}0$ T

✧ Alors la trajectoire dans un dé impose :

$$R_{\text{mx}} = \frac{m\,v_{\text{max}}}{2\,e\,B} \qquad \leadsto \qquad v_{\text{max}} = \frac{2\,e\,B\,R_{\text{max}}}{m} = \underline{2{,}3}9306 \times 10^{7}\ \text{m.s}^{-1}$$

✧ Rappelons ici que

$$m_\alpha = 2\,m_{\text{p}} + 2\,m_{\text{n}} \qquad \text{avec} \qquad m_{\text{p}} = 1{,}6726 \times 10^{-27}\ \text{kg} \quad \text{et} \quad m_{\text{n}} = 1{,}6749 \times 10^{-27}\ \text{kg} \simeq m_{\text{p}}$$

durée de l'accélération

✧ À chaque demi-tour l'énergie cinétique augmente de $2\,e\,U_0$ où U_0 est l'amplitude de la tension du générateur sinusoïdal.

✧ Il faut donc N demi-tours avec $N = \dfrac{E_{\text{c,max}}}{2\,e\,U_0}$.

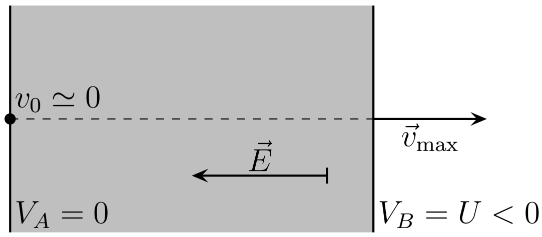
✧ Sachant que chaque demi-tour dure $\delta t = \dfrac{2\,e\,B}{\pi\,m}$ nous avons :

$$\Delta t = N\,\delta t = \frac{E_{\text{c,max}}}{2\,e\,U_0} \times \frac{\pi\,m}{2\,e\,B} = \frac{\pi\,R^2\,B}{2\,U_0} = \underline{3{,}9}2699 \times 10^{-5}\text{ s}$$

✧ Pour l'AN nous avons pris $U_0 = 10$ kV.

intérêt

✧ Si la particule α avait été accélérée par un dispositif linéaire, *ie.* par une simple différence de potentiels, la situation aurait été la suivante.



✧ Pour avoir la même énergie cinétique finale, il aurait fallu une tension

$$U = \frac{E_{\text{c,max}}}{2\,e} = 5{,}9 \times 10^6\text{ V}$$

✧ Cette tension est clairement plus difficile à réaliser.

retour sur les approximations

✧ Le cyclotron présenté ci-dessus est idéalisé.

✧ Pour le rendre plus conforme à la réalité, il est nécessaire de prendre en compte :
- ➜ le mouvement vertical des particules, mouvement qu'il convient de maîtriser par les conditions initiales pour par un effet de confienement
- ➜ la durée de transition dans la zone de champ $\vec{E}$ qui peut devenir telle qu'il ne soit plus vraiment possible d'y considérer le champ comme constant.

✧ En ce qui concerne la limite relativiste, rappelons que les effets sont en $\left(\dfrac{v}{c}\right)^2$ soit, ici, de l'ordre de 0,6 %. Ils restent pour l'instant négligeables, mais en cas de vitesse supérieure, il faudra y recourir.

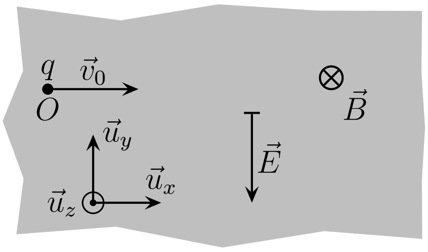
I·3 – Sélecteur de vitesse

I·3·*i* – dispositif

présentation, analyse

✧ Considérons une particule de charge q qui entre dans une zone où régnent un champ électrique uniforme et constant ainsi qu'un champ magnétique uniforme et constant.

✧ Les champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux et le dispositif est tel que la vitesse initiale est orthogonale à $\vec{E}$ et $\vec{B}$.



✧ Le but est de trouver la trajectoire de la particule.

✧ Analyse physique :
- ➜ la particule étant une particule, nous pourrons négliger l'action du poids, nous ne prendrons donc en compte que la force de Lorentz
- ➜ comme la force de Lorentz est toujours dans le plan orthogonal à $\vec{B}$ et que la vitesse initiale l'est aussi, nous pouvons dire que le mouvement est plan, il n'y aura donc que deux degrés de description
- ➜ les grandeurs pertinentes sont m (inertie), q, E et B (action) et v_0 (condition initiale)

✧ Analyse technique :
- ➜ le choix du repérage est immédiat vu que $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{v}_0$ sont orthogonaux
- ➜ étant donné qu'il y a deux degrés de description, nous allons utiliser le PFD

I·3·*ii* – équations horaires

✫ équations d'évolution

✧ Écrivons le PFD appliqué à la particule dans le référentiel galiléen du laboratoire tout en négligeant le poids

$$m\,\vec{a}(t) = q\,\left(\vec{E}(M(t)) + \vec{v}(t) \wedge \vec{B}(M(t))\right) \overset{\text{chp unif}}{=} q\,\left(\vec{E} + \vec{v}(t) \wedge \vec{B}\right)$$

✧ Nous avons ainsi

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} 0 \\ -E \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} m\,\ddot{x}(t) = -q\,B\,\dot{y}(t) \\ m\,\ddot{y}(t) = -q\,E + q\,B\,\dot{x}(t) \\ m\,\ddot{z}(t) = 0 \end{array} \right.$$

✧ La dernière équation combinée à $v_z(0) = 0$ nous apprends que le mouvement est plan, ce que nous savions déjà.

✧ Réécrivons les équations en introduisant la pulsation (cyclotron) $\omega_0 = \dfrac{q\,B}{m}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}(t) + \omega_0\,\dot{y}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) - \omega_0\,\dot{x}(t) = -\dfrac{q\,E}{m} \end{array} \right. \qquad \rightsquigarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}(t) + \omega_0\,\dot{y}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) - \omega_0\,\dot{x}(t) = -\omega_0\,\dfrac{E}{B} \end{array} \right.$$

✫ résolution

✧ Nous allons utiliser la technique de la fonction complexe inconnue. Posons $\underline{H}(t) = x(t) + \mathrm{j}\,y(t)$.

✧ Alors, grâce à la linéarité de l'opérateur dérivée :

$$\underline{\ddot{H}}(t) = \ddot{x}(t) + \mathrm{j}\,\ddot{y}(t) \qquad = -\omega_0\,\dot{y}(t) + \mathrm{j}\left(-\omega_0\,\frac{E}{B} + \omega_0\,\dot{x}(t)\right)$$
$$= \mathrm{j}\,\omega_0\left(\dot{x}(t) + \mathrm{j}\,\dot{y}(t)\right) - \mathrm{j}\,\omega_0\,\frac{E}{B} \qquad = \mathrm{j}\,\omega_0\,\underline{\dot{H}}(t) - \mathrm{j}\,\omega_0\,\frac{E}{B}$$

✧ Ainsi nous obtenons l'équation différentielle

$$\underline{\ddot{H}}(t) - \mathrm{j}\,\omega_0\,\underline{\dot{H}}(t) = -\mathrm{j}\,\omega_0\,\frac{E}{B}$$

✧ Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants du **premier** ordre en $\underline{\dot{H}}(t)$.
✧ Compte tenu de la condition initiale $\underline{\dot{H}}(0) = \dot{x}(0) + \mathrm{j}\,\dot{y}(0) = v_0$ nous obtenons la solution :

$$\underline{\dot{H}}(t) = \left(v_0 - \frac{E}{B}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega_0\,t} + \frac{E}{B} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{cases} v_x(t) = \mathfrak{Re}\left(\underline{\dot{H}}(t)\right) = \left(v_0 - \dfrac{E}{B}\right)\cos\left(\omega_0\,t\right) + \dfrac{E}{B} \\[2ex] v_y(t) = \mathfrak{Im}\left(\underline{\dot{H}}(t)\right) = \left(v_0 - \dfrac{E}{B}\right)\sin\left(\omega_0\,t\right) \end{cases}$$

I·3·*iii* – trajectoires

✯ expression

✧ En tenant compte des conditions initiales $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$ nous trouvons

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\omega_0}\left(v_0 - \dfrac{E}{B}\right)\sin\left(\omega_0\,t\right) + \dfrac{E}{B}\times t \\[2ex] y(t) = \dfrac{1}{\omega_0}\left(v_0 - \dfrac{E}{B}\right)\left(1 - \cos\left(\omega_0\,t\right)\right) \end{cases}$$

✯ interprétation

✧ Nous pouvons réécrire l'expression de $x(t)$ sous la forme

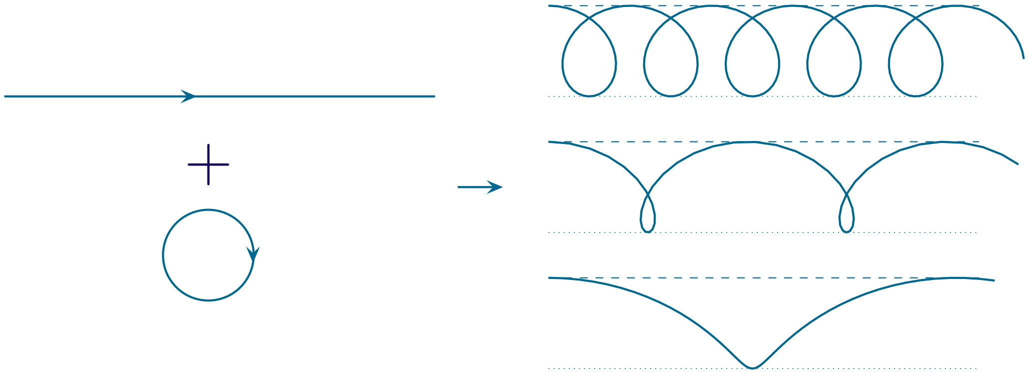
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad \text{où} \qquad x_1(t) = \frac{1}{\omega_0}\left(v_0 - \frac{E}{B}\right)\sin\left(\omega_0\,t\right) \qquad \text{et} \qquad x_2(t) = \frac{E}{B}\times t$$

✧ Ainsi en notant $y(t) = y_1(t)$ nous pouvons dire que le mouvement global est la superpostion de :

➜ $(x_1(t),y_1(t))$, cercle de rayon $\left|\dfrac{1}{\omega_0}\left(v_0 - \dfrac{E}{B}\right)\right|$

➜ $(x_2(t),0)$ trajectoire rectiligne uniforme de vitesse $\dfrac{E}{B}$

✧ Visuellement, suivant le rapport entre vitesse de la trajectoire uniforme, la vitesse initiale et la norme du champ magnétique, il est possible d'avoir plusieurs types de trajectoires.



◇ Dans le cas très particulier où $v_0 = \dfrac{E}{B}$, alors la trajectoire est purement rectiligne : la partie magnétique de la force de LORENTZ compense exactement la partie électrique.
◇ En plaçant un diaphragme en face de la zone où sont éjectées les particules, il est possible de ne conserver que celles qui ont eu une trajectoire rectiligne donc uniquement celles qui ont « exactement » la vitesse $v_0 = \dfrac{E}{B}$.

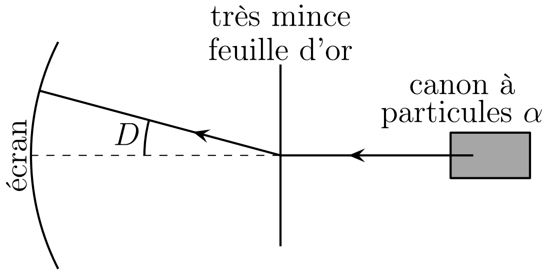
◇ Ce dispositif permet de sélectionner des particules suivant leur vitesse, d'où son nom.

I·4 – Expérience de RUTHERFORD

I·4·i – dispositif

✩ expérience

◇ L'expérience réalisée pour la première fois en 1909 par Hans GEIGER[1] et Ernest MARSDEN et dirigée par Ernest RUTHERFORD consiste à bombarder une très fine feuille d'or par des particule α et d'observer leurs déviations à l'aide d'un écran sensible aux particules α.

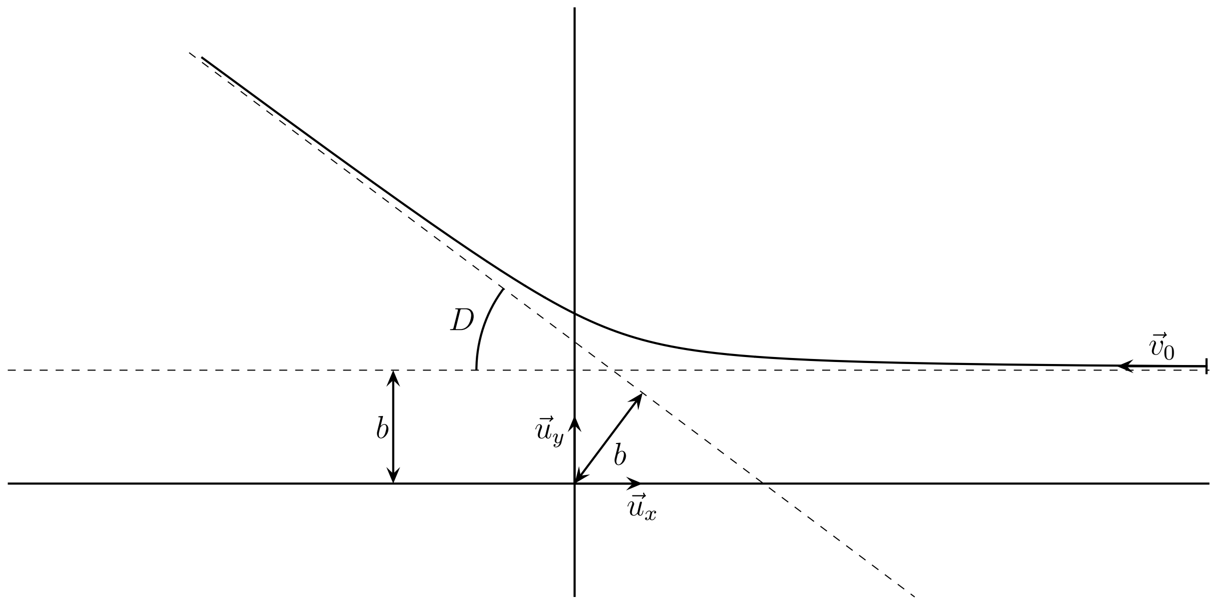


◇ Cette expérience avait pour but d'explorer la matière au niveau atomique afin d'essayer de déterminer comment celle-ci est constituée.
◇ Au niveau des résultats, il est apparu que :
- ➜ de nombreuses particules passaient tout droit, ce qui a mené à l'idée de la structure lacunaire de la matière
- ➜ quelques particules revenaient en arrière, ce qui a mené à l'hypothèse d'un atome constitué d'un noyau très petit par rapport à la taille de l'atome

[1] Le même que le compteur.

✯ modélisation, analyse

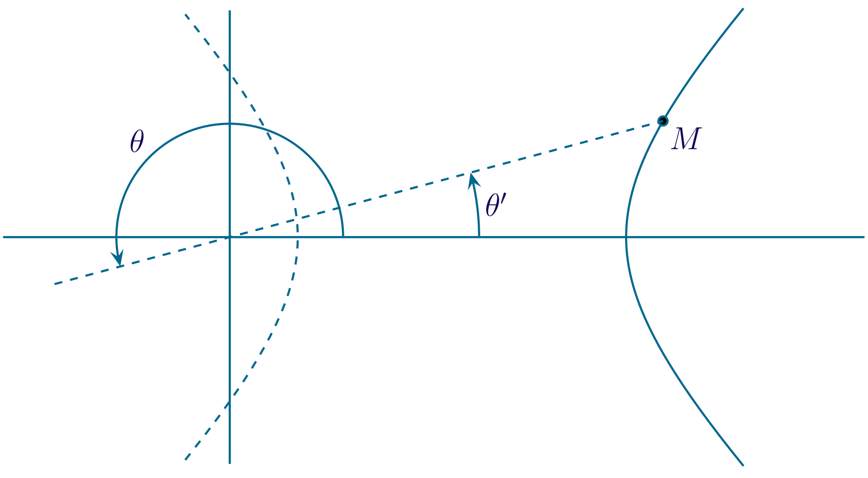
✧ Modélisons l'interaction entre une particule α et un noyau d'or ($Z = 79$) de la manière suivante.



✧ La particule α de charge $q = 2\,e > 0$ est repoussée par le noyau d'or de charge $Z\,e > 0$.
✧ L'interaction entre ces deux particules est newtonienne et donc comme la particule arrive de l'infini avec une vitesse non nulle, la trajectoire sera une hyperbole.
✧ Le paramètre d'impact est b.
✧ Le but va être de relier la déviation D au paramètre d'impact b et aux grandeurs pertinentes du problème, à savoir m (inertie), $k = -\dfrac{2\,Z\,e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}$ pour l'interaction et v_0 (condition initiale).

✯ interlude mathématique

✧ Dans le cas d'une trajectoire hyperbolique, celle-ci s'écrit $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\,\cos\theta}$ et fait apparaître deux branches.



✧ Dans le cas d'un mouvement à force répulsive, seule la branche en trait plein nous intéresse.
✧ Or, mathématiquement, c'est celle qui correspond à $r(\theta) \leqslant 0$ et θ, angle non naturel, ce qui, physiquement, n'est pas acceptable.
✧ C'est pourquoi nous allons plutôt réécrire la solution en fonction de θ' (angle naturel) et avec $r \geqslant 0$.

$$r'(\theta') = -r(\theta') = -\frac{p}{1 + e\,\cos(\theta' + \pi)} = -\frac{p}{1 - e\,\cos(\theta')} = \frac{p}{e\,\cos(\theta') - 1}$$

> La trajectoire d'un point matériel dans un champ de force newtonien est hyperbolique et s'écrit
> $$r(\theta) = \frac{p}{e\,\cos(\theta - \theta_0) - 1}$$

I·4·*ii* – angle de déviation d'une particule α

✫ plan de bataille

✧ Nous allons procéder en quatre étapes :
- ➜ écrire la solution générale de la trajectoire sous une forme simple
- ➜ relier les constantes d'intégration de la trajectoire à l'angle D recherché
- ➜ calculer la ou les constantes idoines
- ➜ injecter le résultat dans l'expression de D et simplifier

✫ écriture générale avec le formalisme de BINET

✧ Comme ici le repérage choisi n'est **pas** tel que l'axe focal de l'hyperbole soit confondu avec l'axe (Ox), il est nécessaire d'écrire la trajectoire sous la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{e\,\cos(\theta + \varphi) - 1}$$

✧ Utilisons le formalisme de BINET

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} = \frac{1}{p}\,\big(e\,\cos(\theta + \varphi) - 1\big)$$

✧ Notons aussi que θ est tel que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi - D$.

✫ expression de D en fonction des constantes d'intégration

✧ Lorsque $\theta \longrightarrow 0$, la particule α est sur une asymptote et nous avons alors

$$r(\theta) \longrightarrow +\infty \qquad \rightsquigarrow \qquad u(\theta) \longrightarrow 0$$

✧ De même, pour $\theta \longrightarrow \pi - D$, la particule α est sur l'autre asymptote et ainsi

$$r(\theta) \longrightarrow +\infty \qquad \rightsquigarrow \qquad u(\theta) \longrightarrow 0$$

✧ Nous pouvons en déduire, d'après l'expression de $u(\theta)$

$$\cos(0 + \varphi) = \cos(\pi - D + \varphi) \qquad \rightsquigarrow \qquad -\varphi = \pi - D + \varphi \qquad \rightsquigarrow \qquad D = 2\,\varphi + \pi$$

✧ Autrement dit, il suffit de déterminer φ et nous aurons la déviation.
✧ Insistons sur le fait que nous avons besoin de ne calculer ni e ni p.

✯ détermination des constantes d'intégration

✧ Retrouvons tout d'abord l'expression de la vitesse en variables de BINET sachant que $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$.

✧ La composante sur $\vec{u}_r$ donne, avec $\sigma = m\,r^2\,\dot{\theta}$:

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u} \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \dot{\theta} \times \left(-\frac{1}{u^2}\right) \times u'(\theta) = -r^2\,\dot{\theta}\,u'(\theta) = -\frac{\sigma}{m}\,u'(\theta)$$

✧ Pour la composante sur $\vec{u}_\theta$ nous avons

$$r\,\dot{\theta} = \frac{\sigma}{m\,r} = \frac{\sigma}{m}\,u(\theta)$$

✧ Donc finalement $\vec{v} = \dfrac{\sigma}{m}\,\Big(-u'(\theta)\,\vec{u}_r + u(\theta)\,\vec{u}_\theta\Big)$.

✧ Exploitons la vitesse initiale en remarquant que lorsque $\theta = 0$, $\vec{u}_r(0) = \vec{u}_x$ et $\vec{u}_\theta(0) = \vec{u}_y$

$$\vec{v}(0) = -v_0\,\vec{u}_r(0) = \frac{\sigma}{m}\,\Big(-u'(0)\,\vec{u}_r(0) + u(0)\,\vec{u}_\theta(0)\Big)$$

✧ La composante sur $\vec{u}_\theta$ donne

$$u(0) = 0 \quad \leadsto \quad \frac{1}{p}\,\big(e\,\cos\varphi - 1\big) \quad \leadsto \quad \cos\varphi = +\frac{1}{e}$$

✧ Comme $u'(\theta) = -\dfrac{e\,\sin(\theta+\varphi)}{p}$, la composante sur $\vec{u}_r$ en $\theta = 0$ donne

$$-\frac{\sigma}{m}\,u'(0) = -v_0 \quad \leadsto \quad -v_0 = +\frac{\sigma\,e}{m\,p}\,\sin\varphi \quad \leadsto \quad \sin\varphi = -\frac{m\,p\,v_0}{\sigma\,e}$$

✧ Et ainsi nous trouvons $\tan\varphi = -\dfrac{m\,p\,v_0}{\sigma}$.

✯ simplification

✧ De $D = \pi + 2\,\varphi$, nous tirons

$$\varphi = \frac{D}{2} - \frac{\pi}{2} \quad \leadsto \quad \tan\left(\frac{D}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{D}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{D}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos\dfrac{D}{2}}{\sin\dfrac{D}{2}}$$

✧ Nous avons donc

$$\frac{1}{\tan\dfrac{D}{2}} = -\frac{m\,p\,v_0}{\sigma} \quad \leadsto \quad \tan\frac{D}{2} = -\frac{\sigma}{m\,p\,v_0}$$

✧ En reprenant un vieux résultat qui n'est pas à connaître mais à savoir redémontrer (au moins avec l'homogénéité)

$$p = -\frac{\sigma^2}{m\,k} \quad \leadsto \quad \tan\frac{D}{2} = \frac{k}{\sigma\,v_0}$$

✧ Enfin, le bras de levier nous permet d'écrire

$$\sigma = +b\,m\,v_0 \quad \leadsto \quad \tan\frac{D}{2} = \frac{k}{m\,b\,{v_0}^2}$$

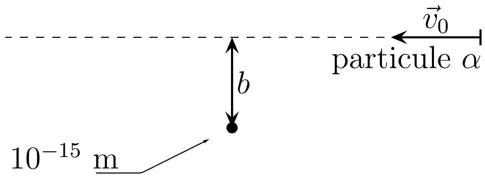
✧ Il s'agit bien d'un résultat homogène puisque nous pouvons l'écrire sous la forme

$$\tan\frac{D}{2} = \frac{k}{m\,b\,{v_0}^2} \equiv \frac{k}{r} \times \frac{1}{m\,v^2} \equiv \frac{E_{\text{p}}}{E_{\text{c}}} \equiv 1$$

I·4·*iii* – déviation d'un faisceau de particules α

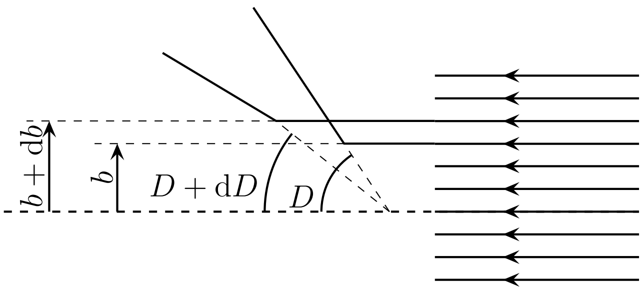
✯ en réalité ...

✧ Il faut bien voir que cette interaction se fait à l'échelle microscopique et qu'en réalité la distance b est totalement incontrolée.



✯ ... le travail n'est pas terminé

✧ Pour interpréter correctement l'expérience, il envisager quelle proportion de particule arrive entre l'angle D et l'angle $D + \mathrm{d}D$.



✧ Pour cela il faut commencer par établir le lien entre nombre de particules qui arrivent entre b et $b + \mathrm{d}b$ sans oublier le fait que tout se passe en trois dimension.

✧ Une fois cette étape réalisée, il est possible d'avoir la proportion de particules arrivant entre D et $D + \mathrm{d}D$ puis de comparer avec les résultats expérimentaux.

II – Étude du courant électrique

Le but de cette partie est d'étudier d'un point de vue mécanique le courant électrique.

II·1 – Description du courant électrique

II·1·*i* – kesako ?

Un *courant électrique* est un déplacement de charges, quelles que soient ces charges : électrons, ions, protons, ...

◇ Exemples de courants électriques :
- ➜ dans les conducteurs électriques (notamment les métaux)
- ➜ dans les solutions électrolytiques
- ➜ les étincelles, la foudre, ... sont aussi des courants électriques

II·1·*ii* – vecteur densité de courant

◇ Pour décrire un courant, il faut donc préciser combien de charges vont où.

Le *vecteur densité de courant volumique* $\vec{\jmath}$ est défini par :

$$\vec{\jmath} \triangleq \sum_i n_i\, q_i\, \vec{v}_i$$

- ➜ n_i est la densité volumique du porteur de charge i ;
- ➜ q_i est la charge d'**un** porteur i ;
- ➜ $\vec{v}_i$ est la vitesse d'ensemble des porteurs i.

◇ Avec $[n_i] = (\text{m})^{-3}$, $[q_i] = (\text{C})$ et $[\vec{v}_i] = (\text{m}).(\text{s})^{-1}$ nous trouvons :

$$[\vec{\jmath}] = (\text{A}).(\text{m})^{-2}$$

◇ Bien que l'unité et le nom ne le montre pas, $\vec{\jmath}$ est un courant *volumique* au sens où il s'agit d'une grandeur représentant un courant électrique pouvant bouger dans un *volume*.

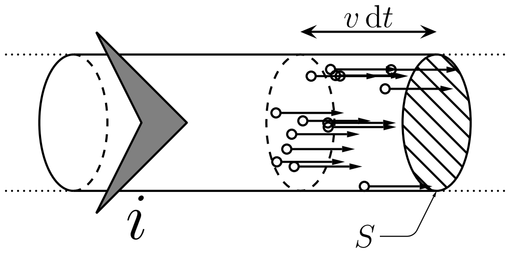
Lorsqu'il n'y a qu'un seul type de porteur de charge (comme cela sera le cas dans la suite), nous avons tout simplement $\vec{\jmath} = n\, q\, \vec{v}$.

II·1·*iii* – lien avec l'intensité

✩ cas particulier très fréquent

◇ Rappelons que l'intensité est, par définition, la quantité de charge qui traverse une section donnée de conducteur dans le sens de la flèche représentant i.

◇ En faisant un zoom sur une section de conducteur, nous allons regarder combien passent pendant la durée dt.



✧ Pour cela supposons que tous les porteurs de charges ont la même vitesse $\vec{v}$ correspondant à la vitesse de dérive (ou « vitesse d'ensemble »).
✧ Comme pendant la durée $\mathrm{d}t$ tous les porteurs parcourent la distance $v\,\mathrm{d}t$, nous voyons que seuls les porteurs contenus, au départ, dans le cylindre de section S et de hauteur $v\,\mathrm{d}t$ passeront la section de contrôle.
✧ En notant $\mathrm{d}N$ le nombre de porteurs traversant S pendant $\mathrm{d}t$, nous avons donc, par définition de la densité volumique :

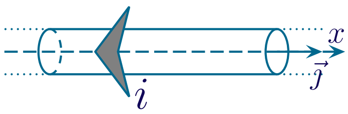
$$\mathrm{d}N = n\,\mathrm{d}\mathscr{V} = n\,S\,v\,\mathrm{d}t$$

✧ Cela donne une charge $\mathrm{d}q = q\,\mathrm{d}N = n\,q\,S\,v\,\mathrm{d}t$ et une intensité valant $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = n\,q\,v\,S$ ou encore :

> Dans un conducteur de section droite S, l'intensité s'écrit
> $$i = j \times S$$

✧ Pour $i > 0$, il faut donc $j = n\,q\,v > 0$ ce qui correspond à :
- ➜ $q < 0$ et $v < 0$: des électrons vont dans le sens opposé au courant ;
- ➜ $q > 0$ et $v > 0$: des charges positives vont dans le sens du courant.

STOP Il faut faire attention aux conventions. Dans le cas représenté ci-dessous nous avons $i = -j_x\,S$ car il faut $j_x < 0$ pour avoir $i > 0$.



✯ généralisation

> *L'intensité* qui passe à travers une section $\mathscr{S}$ est le flux du vecteur densité de courant volumique à travers cette surface :
> $$i = \iint_{P\in\mathscr{S}} \vec{\jmath}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P$$

✧ C'est pour cette raison que le vecteur $\vec{\jmath}$ est aussi appelé « *vecteur densité surfacique de courant volumique* ».

II·1·*iv* – retrouver l'expression du champ magnétique créé par une charge

✧ Maintenant que nous savons comment relier le mouvement des charges au courant électrique, nous pouvons faire l'opération inverse : partir d'une loi concernant les courants électriques et revenir à la loi concernant les charges.

✧ Prenons la loi de Biot et Savart et cherchons le champ créé par « un bout » de circuit :

$$\vec{B}(M) = \oint_{P\in\mathscr{C}} \frac{\mu_0}{4\,\pi} \times \frac{i\,\mathrm{d}\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{d}\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \times \frac{i\,\mathrm{d}\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

✧ Or, d'après ce qui précède, nous pouvons écrire, avec $\vec{u}$ le vecteur tangent au circuit électrique

$$i\,\mathrm{d}\vec{\ell}_P = j\,S\,\mathrm{d}\ell\,\vec{u} = n\,q\,v\,S\,\mathrm{d}\ell\,\vec{u} = \mathrm{d}N \times q\,\vec{v}$$

✧ Comme, du point de vue de M, toutes les charges du morceau élémentaire $\mathrm{d}\vec{\ell}_P$ sont au même point P, nous pouvons dire que ces $\mathrm{d}N$ charges créent le même champ magnétique ou encore que le champ magnétique créé par *une* charge s'écrit :

$$\vec{B}_P(M) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \times q_P\,\vec{v}(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

✧ Ce qu'il y a d'extraordinaire, c'est que cette loi de champ magnétique créé par **une** charge n'est vraie que pour les particules qui ont de faibles vitesses et de faibles accélération **mais** que la loi de Biot et Savart reste la même, quelles que soient les vitesses et les accélérations des porteurs de charges créant le courant.

II·2 – Courant dans un conducteur

II·2·*i* – des électrons libres ...

✧ Sans faire une grande théorie très complexe et faisant appel à la mécanique quantique, nous pouvons dire qu'il y a deux types d'électrons dans les matériaux conducteurs :
  ➜ les électrons de conduction participant au courant électrique ;
  ➜ les électrons de valences responsables de la cohésion du matériau.

✧ Les électrons de conduction sont dits *libres* car ils se comportent comme si **rien** n'entravait leurs mouvement dans le conducteur, pourvu seulement qu'ils restent dans le matériau. Il faut vraiment les voir comme un gaz dans un récipient que serait le métal.

✧ Les électrons de valence, eux, restent autour des noyaux atomiques.

II·2·*ii* – ... à deux vitesses

✯ vitesse de dérive

✧ Recherchons numériquement la vitesse de dérive, ou vitesse d'ensemble, des électrons dans un fil de cuivre de section $S = 1{,}0$ mm^2 parcouru par un courant d'intensité $I = 1{,}0$ A.

✧ Pour cela, nous admettons qu'il y a un électron libre par atome de cuivre et nous allons utiliser les valeurs tabulées :
  ➜ masse volumique du cuivre : $8{,}90.10^3$ kg.m^{-3} ;
  ➜ masse molaire du cuivre : $65{,}5$ g.mol^{-1} ;
  ➜ nombre d'Avogadro : $\mathscr{N}_{\mathrm{A}} = 6{,}02.10^{23}$ mol^{-1} ;
  ➜ charge élémentaire : $e = 1{,}6.10^{-19}$ C.

✧ Nous trouvons alors :
  ➜ une densité volumique de porteur : $n = \underline{8{,}1}79847 \times 10^{28}$ m^{-3} ;
  ➜ un vecteur densité volumique de courant : $j = \underline{1{,}0} \times 10^{6}$ C.m^{-2} ;
  ➜ une vitesse de dérive : $\boxed{v = \underline{7{,}6}40729 \times 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}}$.

✧ Nous constatons que la vitesse de dérive est vraiment très faible par rapport à la vitesse de la lumière, vitesse à laquelle « va » l'électricité.

✯ vitesse particulaire

✧ Nous verrons plus tard que la moyenne de l'énergie cinétique d'une particule libre est telle que $\langle e_{c,i} \rangle = \dfrac{3}{2}\,k_B\,T$ où $k_B =$ est la constante de BOLTZMANN et T la température.

✧ Comme $\langle e_{c,i} \rangle = \dfrac{1}{2}\,m_e\,\langle v^2 \rangle$, nous trouvons :

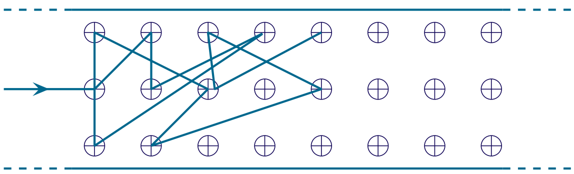
$$v_{\text{part}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3\,k_B\,T}{m_e}} = \underline{1},16806 \times 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

✧ Cette fois nous pouvons remarquer que cette vitesse est bien plus élevée que la vitesse de dérive tout en restant inférieure à celle de la lumière.

✯ trajectoire

✧ Pour expliquer la différence notable entre les deux vitesses, nous devons prendre en compte le fait que les électrons, parfois (souvent !), se « cognent » contre les ions du réseau cristallin.

✧ Cela donne une trajectoire semblable à celle représentée ci-dessous.



✧ Ainsi nous pouvons voir que si entre deux « chocs » les électrons avancent très vite, en moyenne, ils n'avancent que très lentement.

II·2·*iii* – modèle de DRÜDE

✧ Nous allons modéliser les effets des pertes énergétiques des électrons contre les ions du réseau cristallin (les « chocs ») par une force de frottement de type fluide :

$$\vec{f} = -h\,\vec{v}_i \overset{\text{not}}{=} -\frac{m}{\tau}\,\vec{v}(i) \quad \text{où :}$$

➜ m la masse d'un électron ;
➜ $\vec{v}(i)$ est la vitesse de l'électron considéré ;
➜ τ est la durée caractéristique de perte énergétique que nous pouvons interpréter comme étant la durée entre deux chocs successif et vaut $\boxed{\tau \simeq 10^{-14}\text{ s}}$.

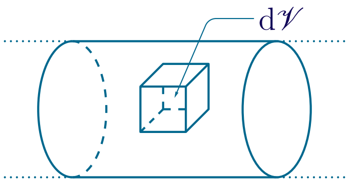
> Dans le modèle de DRÜDE, τ représente la durée caractéristique de perte énergétique, durée assimilable à la durée entre deux chocs successifs.
> Dans les bons conducteurs $\tau \simeq 10^{-14}$ s.

II·3 – En présence d'un champ électrique : loi d'OHM

II·3·*i* – équation d'évolution

✯ première approche

✧ Étudions le système $\mathscr{S}$ constitué des électrons de conduction contenus dans un petit élément de volume $d\mathscr{V}$.



✧ Les forces qui s'exercent dessus sont :
- ➜ le poids : négligé dès lors qu'il y a des forces de LORENTZ
- ➜ $\displaystyle\sum_{e^-}(-e)\,\vec{E}(i)$: la force de LORENTZ due au champ créé par l'opérateur
- ➜ $\displaystyle\sum_{e^-}(-e)\,\vec{E}_{\text{cond}}(i)$: la force de LORENTZ due au champ créé par les ions du réseau cristallin
- ➜ $\displaystyle\sum_{e^-}-\frac{m}{\tau}\,\vec{v}(i)$: la résultante des forces de « frottement » exercée par le réseau sur chaque électron

✧ Le TCI s'écrit donc, en notant $\vec{v} \overset{\text{not}}{=} \vec{v}(G)$ la vitesse de dérive :

$$m_{\text{tot}}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum_{e^-}(-e)\,\vec{E}(i) + \sum_{e^-}(-e)\,\vec{E}_{\text{cond}}(i) + \sum_{e^-}-\frac{m}{\tau}\,\vec{v}(i)$$

✯ réécriture du TCI

la masse totale

✧ Nous avons tout de suite, en notant n la densité volumique d'électrons libres :

$$m_{\text{tot}} = m\,\mathrm{d}N = m\,n\,\mathrm{d}\mathscr{V}$$

la force de LORENTZ créée par l'utilisateur

✧ Plaçons dans le cas où le champ $\vec{E}$ est uniforme sur le volume d$\mathscr{V}$ considéré.
✧ Nous avons alors :

$$\sum_{e^-}(-e)\,\vec{E}(i) = \sum_{e^-}(-e)\,\vec{E} = \mathrm{d}N\times(-e)\,\vec{E} = -e\,n\,\mathrm{d}\mathscr{V}\times\vec{E}$$

la force de frottement créée par le réseau cristallin

✧ Faisons tout d'abord l'hypothèse que cette force n'est pas modifiée par l'opérateur.
✧ Nous avons successivement :

$$\sum_{e^-}-\frac{m}{\tau}\,\vec{v}(i) = -\frac{1}{\tau}\sum_{e^-}m\,\vec{v}(i) = -\frac{1}{\tau}\times\vec{p}(\mathscr{S}) = -\frac{1}{\tau}\,m_{\text{tot}}\,\vec{v} = -\frac{m\,n\,\mathrm{d}\mathscr{V}}{\tau}\times\vec{v}$$

la force de LORENTZ créée par le réseau cristallin

✧ Lorsqu'il n'y a pas de champ créé par l'utilisateur, il n'y a pas de courant électrique.
✧ Nous pouvons donc écrire, en utilisant le TCI initial :

$$\vec{0} = \vec{0} + \sum_{e^-}(-e)\,\vec{E}_{\text{cond}}(i) + \vec{0}$$

✧ Ce qui donne : $\displaystyle\sum_{e^-}(-e)\vec{E}_{\text{cond}}(i) = \vec{0}$.

✯ équation en $\vec{v}$

✧ En rassemblant tous les résultats précédents, nous obtenons d'abord :

$$m\,n\,\mathrm{d}\mathscr{V}\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\,n\,\mathrm{d}\mathscr{V} \times \vec{E} - \frac{m\,n\,\mathrm{d}\mathscr{V}}{\tau}\,\vec{v} \qquad \leadsto \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,\vec{v} = -\frac{e}{m}\,\vec{E}$$

✯ équation en $\vec{\jmath}$

✧ Multiplions l'équation précédente par $-n\,e$. Cela donne :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\jmath}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,\vec{\jmath} = \frac{n\,e^2}{m}\,\vec{E}$$

II·3·*ii* – résolution

✧ Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants, dont la solution est :

$$\vec{v} = \vec{\lambda}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - \frac{e\,\tau}{m}\vec{E}$$

✧ λ est une constante d'intégration qui dépend des conditions initiales, *ie.* du dernier choc avec un ion du réseau cristallin : c'est donc une grandeur qui change extrêmement souvent et qui peut donc être considérée comme aléatoire.

✧ Au bout de $5\,\tau$ la vitesse limite est atteinte.

✧ Comme $\tau \simeq 10^{-14}$ s, la vitesse limite est atteinte au bout de 10^{-13} s, ce qui est très inférieur au temps caractéristique de changement du champ $\vec{E}$

✧ Nous pouvons donc considérer que la vitesse limite est atteinte instantanément : c'est **l'approximation des régimes quasi-stationnaires**.

II·3·*iii* – mobilité

> La *mobilité* μ d'un porteur de charge est définie par :
> $$\vec{v} \triangleq \mu\,\vec{E}$$
> où $\vec{v}$ est la vitesse d'ensemble du porteur considéré.

✧ La mobilité μ peut être positive ou négative :
- ➜ $\mu > 0$ pour des porteurs de charges positives (qui vont alors dans le sens de $\vec{E}$) ;
- ➜ $\mu < 0$ pour des porteurs de charges négatives (qui vont alors dans le sens opposé à $\vec{E}$).

✧ Ici $\mu = -\dfrac{e\,\tau}{m}$.

✧ Cette notion est essentiellement utilisée en chimie pour la conductométrie.

II·3·*iv* – loi d'OHM locale

✧ Le vecteur densité de courant se réécrit :

$$\vec{\jmath} = -e\,n\,\vec{v} = \frac{n\,e^2\,\tau}{m}\,\vec{E}$$

✧ Le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique, c'est la loi d'OHM locale.

✧ La loi d'OHM est dite locale car cette loi s'applique *en un point* et non *pour un dipôle*.

Pour un matériau conducteur, la loi d'Ohm locale s'écrit :

$$\vec{\jmath} = \gamma\,\vec{E}$$

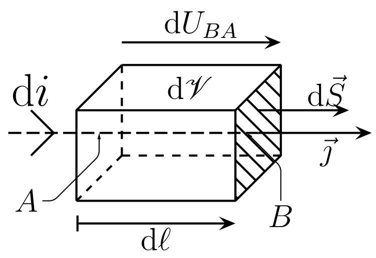
où γ est la *conductivité* du matériau en S.m^{-1}.

✧ Nous avons toujours $\gamma > 0$ et ici, dans ce modèle, $\gamma = \dfrac{n\,e^2\,\tau}{m}$.

II·3·v – et $u = R\,i$ alors ?

✭ retrouver $u = R\,i$ pour un volume élémentaire

✧ Choisissons un élément de volume $\mathrm{d}\mathscr{V}$ sous la forme d'un pavé de telle sorte qu'une paire de faces soit orthogonale à $\vec{\jmath}$.



✧ De $\vec{\jmath} = \gamma\,\vec{E}$ écrivons d'abord $\mathrm{d}i = j\,\mathrm{d}S = \gamma\,E\,S$.

✧ Comme $E = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\ell}$ nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}i = -\frac{\gamma\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\ell}\,\mathrm{d}V \qquad &= -\frac{\gamma\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\ell}\,(V_B - V_A) \\ = -\frac{\gamma\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\ell}\,\mathrm{d}U_{BA} \qquad &= \frac{\gamma\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\ell}\,\mathrm{d}U_{AB} \end{aligned}$$

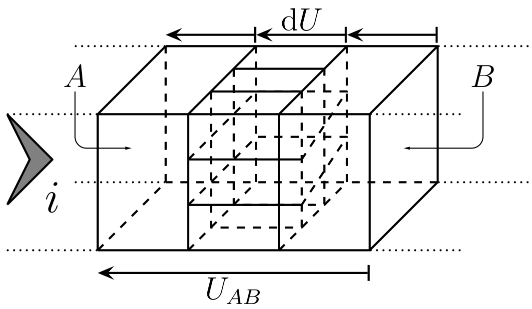
✧ Il s'agit bien $u = R\,i$ pour le petit élément de volume en convention récepteur avec :

Pour un élement de volume de longueur $\mathrm{d}\ell$ dans le sens de $\vec{\jmath}$ et de section $\mathrm{d}S$ orthogonalement à $\vec{\jmath}$ la résistance élémentaire vaut :

$$\mathrm{d}R = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}S}$$

✭ retrouver $u = R\,i$ pour un conducteur rectiligne de section constante

✧ Pour retrouver l'expression de la résistance d'un conducteur rectiligne de section constante, nous allons le découper par la pensée en tranches infinitésimales de longueur $\mathrm{d}\ell$, chacune étant ensuite découpée en petits volumes de section $\mathrm{d}S$.



✧ Comme l'intensité l'intensité totale i traversant une tranche n'est autre que la somme des intensités traversant chaque petit élément de volume (additivité du courant), nous avons successivement :

$$i = \int \mathrm{d}i \qquad = \int \frac{\gamma\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\ell}\,\mathrm{d}U$$
$$= \frac{\gamma\,\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\ell}\int \mathrm{d}S \qquad = \frac{\gamma\,S\,\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\ell}$$

✧ Utilisons ensuite l'additivité des tensions aux bornes de chaque tranche, ce qui donne :

$$U_{AB} = \int \mathrm{d}U \qquad = \int \frac{i\,\mathrm{d}\ell}{\gamma\,S}$$
$$= \frac{i}{\gamma\,S}\int \mathrm{d}\ell \qquad = \frac{i\,\ell}{\gamma\,S}$$

✧ Nous obtenons bien $u = R\,i$ pour un conducteur.

> Pour un conducteur rectiligne de section constante S, la résistance s'écrit :
>
> $$R = \frac{1}{\gamma} \times \frac{\ell}{S} \quad \text{où :}$$
>
> ➜ γ est la conductivité du matériau ;
> ➜ ℓ est la longueur totale du conducteur considéré ;
> ➜ S est la section du conducteur.

✧ Nous constatons que :
- ➜ la résistance est d'autant plus petite que la conductivité est élevée ;
- ➜ la résistance est d'autant plus grande que le conducteur est long ;
- ➜ la résistance est inversement proportionnelle à la section du conducteur.

STOP La section est la surface d'une tranche de conducteur et pas la surface qu'enferme le conducteur !

II·3·*vi* – bilan

✯ le circuit est fermé

✧ Nous avions commencé l'année sur le potentiel, nous avons ensuite parlé de mécanique et maintenant nous faisons de l'électromagnétisme.

✧ Ces trois domaines sont intimement reliés comme nous pouvons le voir notamment grâce à la notion de potentiel :
- ➜ la différence de potentiels, *ie.* la tension, est une des deux notions fondamentales de l'électrocinétique
- ➜ le potentiel électrostatique est à un facteur multiplicatif près l'énergie potentielle des charges mobiles du courant électrique
- ➜ le potentiel électrostatique est une grandeur permettant de décrire le champ électrostatique

✯ **retour sur les hypothèses**

✧ Nous en avons fait deux :
- ➜ le champ ne varie pas trop sur un petit volume
- ➜ le champ ne varie pas trop vite

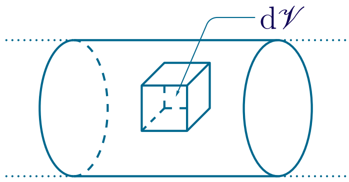
✧ Comme le lecteur le verra en 2e année, ces deux relations sont intimement liées car le champ électromagnétique est un phénomène propagatif ce qui implique que plus les variations temporelles sont rapides (*ie.* plus la fréquence est élevée) plus les variations spatiales sont petites (*ie.* plus la longueur d'onde est petite).

II·4 – En présence de champs électrique et magnétique : effet Hall

II·4·i – nouvelle équation d'évolution de $\vec{\jmath}$

✯ **le TCI**

✧ Reprenons l'étude du système $\mathscr{S}$ constitué des électrons libres contenus dans le volume $\mathrm{d}\mathscr{V}$.



✧ Le bilan des forces est identique au cas précédent, seule l'expression de la force de Lorentz créé par l'utilisateur change :
- ➜ le poids : négligé dès lors qu'il y a des forces de Lorentz ;
- ➜ $\displaystyle\sum_{e^-}(-e)\left(\vec{E}(i)+\vec{v}(i)\wedge\vec{B}(i)\right)$: la force de Lorentz due au champ créé par l'opérateur ;
- ➜ $\displaystyle\sum_{e^-}(-e)\,\vec{E}_{\text{cond}}(i)$: la force de Lorentz due au champ créé par les ions du réseau cristallin ;
- ➜ $\displaystyle\sum_{e^-}-\frac{m}{\tau}\,\vec{v}(i)$: la résultante des forces de « frottement » exercée par le réseau sur chaque électron ;

✧ Rappelons que la force de frottement n'existe pas « en vrai » et qu'il ne s'agit que d'un modèle rendant compte des pertes énergétiques que subissent les électrons suite aux interactions avec les noyaux.

✯ **réécriture des forces**

✧ Nous avons, de la même manière que précédemment :
- ➜ $m_{\text{tot}}=m\,n\,\mathrm{d}\mathscr{V}$;
- ➜ $\displaystyle\sum_{e^-}(-e)\,\vec{E}(i)=-e\,n\,\mathrm{d}\mathscr{V}\times\vec{E}$;
- ➜ $\displaystyle\sum_{e^-}-\frac{m}{\tau}\,\vec{v}(i)=-\frac{m\,n\,\mathrm{d}\mathscr{V}}{\tau}\,\vec{v}$;
- ➜ $\displaystyle\sum_{e^-}(-e)\vec{E}_{\text{cond}}(i)=\vec{0}$.

✧ Il reste à exprimer $\displaystyle\sum_{e^-}(-e)\vec{v}(i)\wedge\vec{B}(i)$.

✧ En faisant la même approximation que précédemment, à savoir que le champ $\vec{B}(i)$ est uniforme sur le volume élémentaire d$\mathscr{V}$ nous obtenons successivement :

$$\sum_{e^-}(-e)\vec{v}(i)\wedge\vec{B}(i) = \sum_{e^-}(-e)\,\vec{v}(i)\wedge\vec{B} \qquad = -\frac{e}{m}\left(\sum m\,\vec{v}(i)\right)\wedge\vec{B}$$
$$= -\frac{e}{m}\,\vec{p}(\mathscr{S})\wedge\vec{B} \qquad = -\frac{e}{m}\,m_{\text{tot}}\,\vec{v}\wedge\vec{B}$$
$$= -e\,n\,\mathrm{d}\mathscr{V}\,\vec{v}\wedge\vec{B}$$

✯ rassemblement

✧ En rassemblant le tout, nous arrivons ainsi à

$$n\,\mathrm{d}\mathscr{V}\,m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\,n\,\mathrm{d}\mathscr{V}\,\vec{E} - n\,e\,\mathrm{d}\mathscr{V}\,\vec{v}\wedge\vec{B} - \frac{m}{\tau}\,\vec{v}$$

✧ Cela donne d'abord

$$m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{m}{\tau}\,\vec{v} = -e\,\vec{E} - e\,\vec{v}\wedge\vec{B}$$

✧ Et, en multipliant par $-n\,e$

$$m\,\frac{\mathrm{d}\vec{\jmath}}{\mathrm{d}t} + \frac{m}{\tau}\,\vec{\jmath} = n\,e^2\,\vec{E} - e\,\vec{\jmath}\wedge\vec{B}$$

II·4·*ii* – nouveau vecteur $\vec{\jmath}$ et constante de HALL

✧ Plaçons-nous, comme précédemment dans l'approximation des régimes quasi-stationnaire.

✧ Nous avons alors $m\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{\jmath}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ et ainsi :

$$\frac{m}{\tau}\,\vec{\jmath} = n\,e^2\,\vec{E} - e\,\vec{\jmath}\wedge\vec{B} \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{\jmath} = \frac{n\,e^2\,\tau}{m}\,\vec{E} - \frac{e\,\tau}{m}\,\vec{\jmath}\wedge\vec{B}$$

✧ Ce que nous allons réécrire pour pouvoir faire apparaître la conductivité γ

$$\vec{\jmath} = \gamma\,\left(\vec{E} + R_{\text{H}}\,\vec{\jmath}\wedge\vec{B}\right)$$

✧ R_{H} est appelé la constante de HALL du matériau.

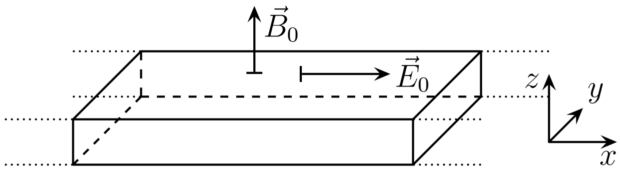
✧ La constante de HALL qui, ici, vaut $R_{\text{H}} = -\dfrac{1}{ne}$ peut être positive ou négative :

- ➜ $R_{\text{H}} > 0$ correspond à un matériau dont le courant est dû à des porteurs de charges positives ;
- ➜ $R_{\text{H}} < 0$ correspond à un matériau dont le courant est dû à des porteurs de charges négatives.

II·4·*iii* – solution dans un cas particulier

✯ une géométrie particulière

✧ Étudions le cas d'un conducteur rectiligne infini de section rectangulaire plongé dans un champ $\vec{E}_0$ et dans un champ $\vec{B}_0$.



✧ Les champs $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$ sont uniformes.

✯ vision en régime quasi-stationnaire

✧ « Quasi-stationnaire » ou « stationnaire » ont la même conséquence au niveau des raisonnements : nous pouvons faire comme si toutes les grandeurs étaient indépendantes du temps.

simplification du vecteur densité de courant

✧ Étant donné qu'il y a invariance par translation suivant $\vec{u}_x$, le vecteur densité de courant ne dépend que de y et de z : $\vec{\jmath} = \vec{\jmath}(y,z)$.
✧ On suppose que le vecteur densité de courant est uniforme à l'intérieur du ruban[2].
✧ Dans ces condition, comme le vecteur densité de courant représente le mouvement des électrons et que ces derniers ne peuvent pas sortir du conducteur, il ne peut pas y avoir de composantes de $\vec{\jmath}$ sur $\vec{u}_y$ et sur $\vec{u}_z$.
✧ Nous avons donc $\vec{\jmath} = j\,\vec{u}_x$.

effet HALL

✧ Reprenons l'équation régissant $\vec{\jmath}$:

$$\vec{\jmath} = \gamma\left(\vec{E} + R_{\mathrm{H}}\vec{\jmath}\wedge\vec{B}\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{\jmath} \overset{\text{not}}{=} \vec{\jmath}_1 + \vec{\jmath}_2 \qquad \text{où :}$$

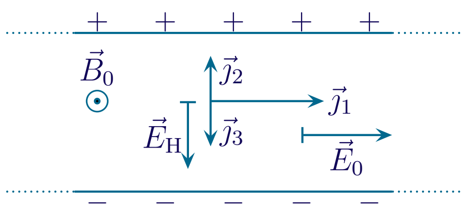
➜ $\vec{\jmath}_1 = \gamma\,\vec{E}$ est colinéaire à $\vec{u}_x$;
➜ $\vec{\jmath}_2 = \gamma\,R_{\mathrm{H}}\,\vec{\jmath}\wedge\vec{B}$ est orthogonal à $\vec{u}_x$;

✧ La présence de $\vec{\jmath}_2$ est incompatible avec le fait que $\vec{\jmath}$ ne doit avoir de composantes que sur $\vec{u}_x$: il **doit** donc y avoir un champ supplémentaire $\vec{E}_{\mathrm{H}}$, appelé champ de HALL, qui permet d'enlever $\vec{\jmath}_2$.
✧ En fait nous avons

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{perçu}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\mathrm{H}} \qquad \text{où} \qquad \vec{E}_{\mathrm{H}} = -R_{\mathrm{H}} \times \vec{\jmath}\wedge\vec{B}_0$$

vue de dessus

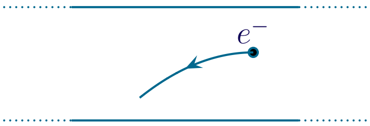
✧ Nous voyons que le champ de HALL $\vec{E}_{\mathrm{H}}$ a tendance à faire « monter » les électrons (associés au courant $\vec{\jmath}_3$) alors que le champ $\vec{B}_0$ a tendance à les faire descendre (et à provoquer le courant $\vec{\jmath}_2$).
✧ Le champ de HALL ne peut s'expliquer que par la présence de charges sur les faces du conducteur.



[2] Le lecteur trouvera la justification de cette hypothèse en 2e année lorsqu'il étudiera la notion d'« effet de peau »

✯ vision du régime transitoire

✧ La situation est la suivante vue de dessus.



✧ Au début les électrons, globalement immobiles, subissent une force qui tend à les faire bouger vers la gauche. À partir de ce moment là la force en $-e\,\vec{v}\wedge\vec{B}_0$ va les dévier vers le bas.

✧ Les électrons qui arrivent sur la face inférieure ne peuvent plus bouger et s'y accumulent, ce qui crée un excès d'électrons sur la face inférieure. De même les électrons qui étaient initialement sur la face supérieure ne sont pas remplacés : il y a un déficit d'électrons sur la face supérieure, d'où la présence de charges positives.

✧ L'accumulation de charges négatives sur la face inférieure et de charges positives sur la face supérieure conduit à la formation d'un champ électrique $\vec{E}_{\text{H}}$, tel un condensateur.

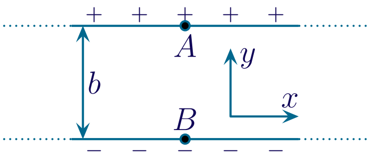
✧ Nous pouvons aussi interpréter le champ de HALL de la manière suivante : les charges de même signe se repoussant, l'accumulation d'électrons sur la face inférieure repousse les électrons qui auraient tendance à y venir.

✧ Finalement, le champ de HALL n'est pas créé par les charges responsables du courant mais par d'autres charges qui ne se déplacent plus, c'est pourquoi nous ne les voyons pas apparaître dans l'équation différentielle régissant l'évolution de $\vec{\jmath}$.

✯ d'où le nom : sonde à effet HALL

✧ Reprenons la situation en régime quasi-stationnaire.

✧ Étant donné qu'il règne un champ électrique entre les deux faces inférieure et supérieure, nous pouvons chercher à mesurer la différence de potentiel entre deux points face à face.



✧ Le champ de HALL s'écrit, par définition (cf. plus haut)

$$\vec{E}_{\text{H}} = -R_{\text{H}}\,(j\,\vec{u}_x \wedge B\,\vec{u}_z) \qquad \rightsquigarrow \qquad E_{\text{H},y} = R_{\text{H}}\,j_x\,B_z$$

✧ Le champ de HALL étant un champ électrique comme un autre nous avons

$$E_y = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{d}V = V_A - V_B = U_{AB} = -b\,E_y$$

✧ Ainsi, en notant a l'épaisseur, nous pouvons écrire

$$j_x = \frac{I}{a\,b} \quad \rightsquigarrow \quad U_{AB} = -\frac{I\,R_{\text{H}}\,B_z}{a} \qquad \rightsquigarrow \qquad U_AB = \frac{I}{n\,a\,e} \times B_z$$

✧ Cette loi nous permet de dire qu'ne mesure de U_AB conjointement à I permet :
- ➜ de déterminer R_{H} connaissant B_z (étude de matériaux) ;
- ➜ de déterminer B_z connaissant R_{H} (mesure de champ magnétique) : c'est la sonde à effet HALL.

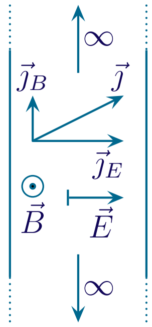
✧ Application numérique pour du Cuivre avec : $I = 1{,}0$ A, $a = 1{,}0$ mm et $B_z = 100$ mT :

$$\boxed{U_{AB} = \underline{7{,}6}40729 \times 10^{-9}\ \text{V}}$$

✧ Nous constatons que les différences de potentiel sont extrêmement faibles, ce qui implique des précautions et une méthodologie toute particulière dans l'acte de mesure.

✯ c'était un cas particulier

✧ L'effet Hall (accumulation de charges provoquant un champ électrique) n'est pas systématique mais dépend de la géométrie. Dans le cas d'un conducteur infiniment large, comme représenté ci-dessous, il n'y a pas d'effet Hall.



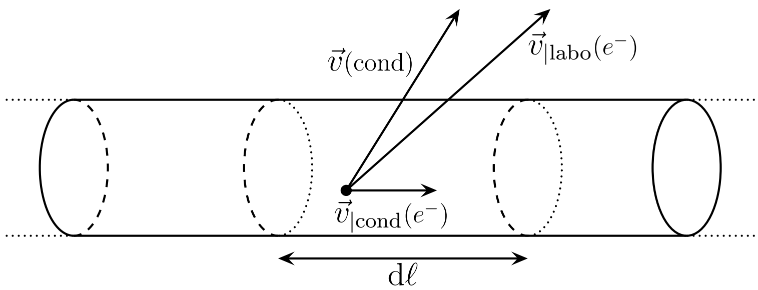
✧ Remarquons que dans la situation au-dessus, les électrons ne vont plus « tout droit » mais « en diagonale », ils traversent donc davantage de conducteur ce qui fait que, pour eux, le conducteur est plus grand.
✧ Et puisque la résistance d'un conducteur est proportionnelle à sa longueur, dans la situation précédente, la résistance a augmenté : c'est l'effet de magnéto-résistance.
✧ Insistons : parfois, en présence de champ magnétique, la résistance d'un matériau augmente non pas à cause d'un nouvel effet, d'une nouvelle interaction, mais à cause de l'augmentation de la longueur des lignes de courant.

II·5 – Force exercée par un champ $\vec{B}$ sur un circuit électrique : force de Laplace

✧ Le but est maintenant de déterminer la force exercée par un champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sur un circuit électrique parcouru par un courant.

II·5·i – bilan des forces extérieures

✧ Étudions cette fois un élément de volume $\mathrm{d}\mathscr{V}$ de conducteur parcouru par un courant de vecteur densité volumique $\vec{\jmath}$ et possédant la vitesse $\vec{v}(\text{cond})$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}$.



✧ Dans cet élèment de volume, il y a trois types de porteurs :
➜ les noyaux de densité n_1, de charge q_1 et immobiles dans le conducteur donc de vitesse $\vec{v}(\text{cond})$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}$;
➜ les électrons de valence de densité n_2, de charge $-e$ et immobiles dans le conducteur donc de vitesse $\vec{v}(\text{cond})$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}$;

➜ les électrons libres de densité n_3, de charge $-e$ avec la vitesse $\vec{v}_{|\text{cond}}$ par rapport au conducteur donc de vitesse $\vec{v}_{|\text{cond}}(e^-) + \vec{v}(\text{cond})$ par rapport le référentiel $\mathscr{R}$.

✧ Pour le système contenu dans $\text{d}\mathscr{V}$, les forces exercées par le champ sont :

porteur	due au champ $\vec{E}$	due au champ $\vec{B}$
noyau	$n_1\,\text{d}\mathscr{V} \times q_1\,\vec{E}$	$n_1\,\text{d}\mathscr{V} \times q_1\,\vec{v}(\text{cond}) \wedge \vec{B}$
électron de valence	$n_2\,\text{d}\mathscr{V} \times (-e\,\vec{E})$	$n_2\,\text{d}\mathscr{V} \times (-e\,\vec{v}(\text{cond})) \wedge \vec{B}$
électron libre	$n_3\,\text{d}\mathscr{V} \times (-e\,\vec{E})$	$n_3\,\text{d}\mathscr{V} \times (-e)(\vec{v}(\text{cond}) + \vec{v}_{|\text{cond}}(e^-)) \wedge \vec{B}$
somme	$\text{d}\mathscr{V}(n_1\,q_1 - n_2\,e - n_3\,e)\vec{E}$	$\text{d}\mathscr{V}(n_1\,q_1 - n_2\,e - n_3\,e)\vec{v}(\text{cond}) \wedge \vec{B}$ $-\text{d}\mathscr{V}\,n_3\,\vec{v}_{|\text{cond}}(e^-) \wedge \vec{B}$

✧ De plus la neutralité du conducteur impose

$$n_1\,q_1 + (-e)\,n_2 + (-e)\,n_3 = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad n_1\,q_1 - e\,n_2 - e\,n_3 = 0$$

✧ Ce qui nous permet de simplifier les résultantes

porteur	due au champ $\vec{E}$	due au champ $\vec{B}$
résultante	$\vec{0}$	$\vec{0} - \text{d}\mathscr{V}\,n_3\,\vec{v}_{|\text{cond}}(e^-) \wedge \vec{B}$

✧ Finalement, pour l'élément de conducteur $\text{d}\mathscr{V}$, la force subie de la part du champ électromagnétique s'écrit donc :

$$\text{d}\vec{f}_\text{L} = -\text{d}\mathscr{V}\,n_3\,\vec{v}(e^-) \wedge \vec{B} \overset{\text{not}}{=} -\text{d}\mathscr{V}\,n_3\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

II·5·*ii* – force de LAPLACE

✯ version volumique

✧ Nous pouvons réécrire la force de LAPLACE à l'aide du vecteur densité de courant $\vec{\jmath} = -n_3\,e\,\vec{v}$:

> La force de LAPLACE subie par un élément de volume $\text{d}\mathscr{V}$ parcouru par un courant de densité $\vec{\jmath}$ s'écrit :
> $$\text{d}\vec{f}_\text{L} = \text{d}\mathscr{V}\,\vec{\jmath} \wedge \vec{B}$$

✯ version linéique

✧ Nous utiliserons plus souvent la version linéique, notamment parce que dans de très nombreux cas, le rayon du fil du conducteur est très faible par rapport aux longueurs caractéristiques du problème. En d'autres termes, dans ces cas là tout comme nous l'avions fait en électromagnétisme, nous considèrons le conducteur comme un fil infiniment fin.

✧ Isolons un petit volume $\text{d}\mathscr{V}$ de conducteur de section $\text{d}S$ et de longueur $\text{d}\ell$.

✧ Alors, en notant $\vec{\jmath} = j\,\vec{T}$ nous avons successivement :

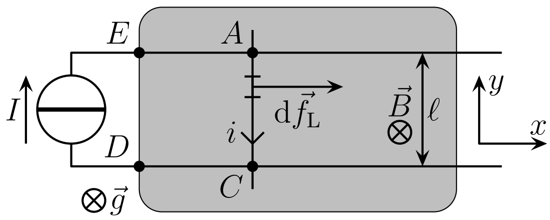
$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{f}_{\mathrm{L}} &= \mathrm{d}\mathscr{V}\,\vec{\jmath}\wedge\vec{B} \qquad = j\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\ell\,\vec{T}\wedge\vec{B} \\ &= i\,\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\vec{B} \end{aligned}$$

> La force de LAPLACE élémentaire s'exerçant sur une portion de circuit de longueur $\mathrm{d}\ell$ parcourue par un courant d'intensité i plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ s'écrit :
> $\mathrm{d}\vec{f}_{\mathrm{L}} = i\,\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\vec{B}$ où :
> $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est dans le sens de la flèche représentant i.

II·5·*iii* – utilisation avec le TCI

✯ dispositif

✧ Une tige conductrice de masse m peut rouler sur des rails fixes horizontaux, eux aussi conducteurs. Un générateur de courant est relié au circuit.



✧ La force de LAPLACE s'exerce sur les parties EA, AC et CD du circuit, mais comme les rails sont fixes, seul la tige va bouger.

✯ TCI

✧ Considèrons le système { tige } qui subit dans le référentiel galiléen du laboratoire :
- ➜ le poids $\vec{P}$ vertical ;
- ➜ la force de LAPLACE $\vec{f}_{\mathrm{L}}$;
- ➜ la réaction exercée par les rails $\vec{R}$ vertical.

✧ Comme le mouvement est uniquement horizontal, nous avons $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$ et le TCI en projection sur $\vec{u}_x$ donne :

$$m\,\ddot{x}_G(t) = f_{\mathrm{L},x}$$

✯ résultante de la force de LAPLACE

✧ Pour déterminer la résultante de la force de LAPLACE, nous allons découper par la pensée la tige en petits morceaux, déterminer la force qui s'exerce sur chacun d'eux et sommer le tout.

✧ Sur chaque petit morceau de la tige parcouru par un courant (donc entre A et C), la force élémentaire de LAPLACE qui s'exerce s'écrit :

$$\mathrm{d}\vec{f}_{\mathrm{L}} = I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I\,(-\mathrm{d}\ell\,\vec{u}_y) \wedge (-B\vec{u}_z) \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{d}\vec{f}_{\mathrm{L}} = +I\,B\,\mathrm{d}\ell\,\vec{u}_x$$

Ici nous avons le choix pour l'écrire de $\mathrm{d}\vec{\ell}$:

- ➜ soit nous l'écrivons $\mathrm{d}\vec{\ell} = \pm \mathrm{d}\ell\,\vec{u}_x$ en réfléchissant au signe (donc au sens de $\mathrm{d}\vec{\ell}$ par rapport à $\vec{u}_x$) et nous sommerons des $\mathrm{d}\ell > 0$ pour la résultante
- ➜ soit nous l'écrivons $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}y\,\vec{u}_y$ et nous sommerons des $\mathrm{d}y \gtrless 0$ lors de la résultante en faisant très attention aux bornes d'intégration

✧ Il ne reste plus qu'à sommer le tout :

$$\vec{f}_{\mathrm{L}} = \int \mathrm{d}\vec{f}_{\mathrm{L}} \qquad = \int_A^C +I\,B\mathrm{d}\ell\,\vec{u}_x$$
$$= -I\,B\,\vec{u}_x \times \int_A^C \mathrm{d}\ell \qquad = I\,B\,\ell\,\vec{u}_x$$

✫ **regroupement**

✧ En reportant dans le TCI nous arrivons à

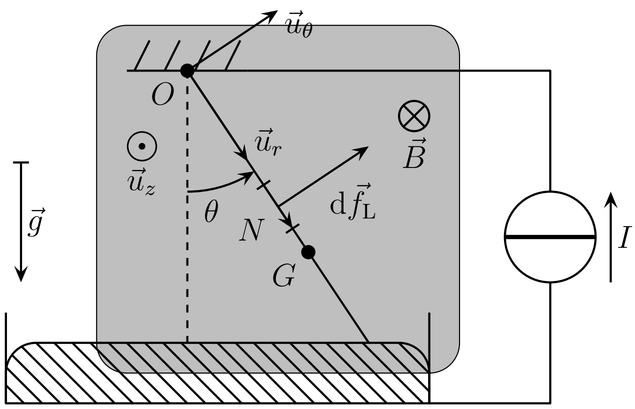
$$\ddot{x}_G(t) = \frac{I\,B\,\ell}{m}$$

✧ Il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré.

II·5·*iv* – utilisation avec le TMC

✫ **dispositif**

✧ Une tige de masse m, de longueur ℓ peut tourner sans frottement autour de O. Son extrémité inférieure plonge dans du mercure relié à un circuit électrique dans lequel est placé un générateur idéal de courant. La barre est déséquilibrée : son centre de masse est aux deux-tiers de la longueur : $OG = \dfrac{2}{3}\,\ell$.



✧ Le but est de trouver $\theta_{\text{éq}}$ d'équilibre.

✯ TMC

✧ Considérons le système { tige } dans le référentiel galiléen du laboratoire.
✧ Les forces qui s'exercent sur le système sont :
- ➜ le poids $\vec{P}$;
- ➜ la force de LAPLACE $\vec{f}_{\text{L}}$;
- ➜ la réaction d'axe en O qui se fait sans frottement $\vec{R}$;
- ➜ la poussée d'ARCHIMÈDE exercée par le mercure (négligée).

✧ Comme nous ne cherchons que l'équilibre, nous avons

$$\vec{0} = \vec{\mathscr{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathscr{M}}_O(\vec{f}_{\text{L}}) + \vec{\mathscr{M}}_O(\vec{R})$$

✧ Comme la réaction d'axe se fait sans frottement nous avons

$$\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{R}) = \vec{0}$$

☕ *Remarque* : ce n'est **pas** parce que la réaction d'axe passe par O que son moment est nul mais bel et bien parce que la rotation se fait sans frottement. Une réaction d'axe avec frottement correspond à une rotation « grippée ».

✧ Nous avons par propriété du poids :

$$\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} \qquad = \frac{2}{3}\,\ell\,\vec{u}_r \wedge (m\,g\,\cos\theta\,\vec{u}_r - m\,g\,\sin\theta\,\vec{u}_\theta)$$
$$= -\frac{2\,\ell}{3}\,m\,g\,\sin\theta\,\vec{u}_z$$

☕ *Remarque* : Il n'était pas possible ici de calculer le moment du poids de manière plus « physique » car nous ne connaissons pas la répartition de masse mais seulement la position de G … ce qui suffit.

✯ moment de la force de LAPLACE

✧ Pour calculer le moment de la force de LAPLACE, nous allons utiliser la même technique que pour calculer la résultante dans le cas précédent : découper la tige en petits morceaux, déterminer pour chacun le moment de la force de LAPLACE et sommer le tout.
✧ Pour un petit morceau autour du point N, nous avons $\text{d}\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{f}_{\text{L}}) = \overrightarrow{ON} \wedge \text{d}\vec{f}_{\text{L}}$. Or

$$\text{d}\vec{f}_{\text{L}} = I\,\text{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I\,\text{d}r\vec{u}_r \wedge (-B\,\vec{u}_z) \qquad \rightsquigarrow \qquad \text{d}\vec{f}_{\text{L}} = BI\text{d}r\vec{u}_\theta$$

✧ Et ainsi

$$\text{d}\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{f}_{\text{L}}) = r\,\vec{u}_r \wedge B\,I\,\text{d}r\,\vec{u}_\theta = B\,I\,r\,\text{d}r\,\vec{u}_z$$

✧ Il ne reste plus qu'à sommer

$$\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{f}_{\text{L}}) = \int \text{d}\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{f}_{\text{L}}) \qquad = \int_0^\ell B\,I\,r\,\text{d}r\,\vec{u}_z$$
$$= B\,I\,\vec{u}_z \times \int_0^\ell r\,\text{d}r \qquad = \frac{B\,I\,\ell^2}{2}\,\vec{u}_z$$

✯ regroupement

✧ Nous avons donc, à l'équilibre :

$$-\frac{2}{3}\,m\,g\,\ell\,\sin\theta_{\text{éq}}\,\vec{u}_z + \frac{B\,I\,\ell^2}{2}\,\vec{u}_z = \vec{0} \qquad \rightsquigarrow \qquad \sin\theta_{\text{éq}} = \frac{3\,B\,I\ell}{4\,m\,g}$$

Remarque : pour appliquer le TMC en version dynamique, il aurait fallu calculer le moment cinétique de la barre et, pour cela, nous aurions utilisé la même technique que pour calculer le moment de la force de LAPLACE à savoir découper la tige en petits morceaux, déterminer pour chaque petit morceau le moment cinétique et sommer le tout. Notons que pour cela il aurait fallu connaître précisément la répartition de masse.

✯ recherche du point d'application

✧ Le point d'application C de la force de LAPLACE est défini par (avec $\vec{f}_{\text{L}}$ est la résultante des forces de LAPLACE) :

$$\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{f}_{\text{L}}) = \overrightarrow{OC} \wedge \vec{f}_{\text{L}}$$

✧ Déterminons $\vec{f}_{\text{L}}$ de la même manière que précedemment, en sommant des forces élémentaires.

$$\vec{f}_{\text{L}} = \int \mathrm{d}\vec{f}_{\text{L}} \qquad = \int_0^\ell B\,I\,\mathrm{d}r\,\vec{u}_\theta \text{ calcul fait ci-dessus}$$
$$= B\,I\,\vec{u}_\theta \times \int_0^\ell \mathrm{d}r \qquad = B\,I\,\ell\,\vec{u}_\theta$$

✧ Cherchons un point C sur la tige, *ie.* $\overrightarrow{OC}$ sous la force $\overrightarrow{OC} = c\,\vec{u}_r$, ce qui donne :

$$c\,\vec{u}_r \wedge B\,I\,\ell\,\vec{u}_\theta = \frac{B\,I\,\ell^2}{2}\,\vec{u}_z \qquad \rightsquigarrow \qquad c = \frac{\ell}{2}$$

✧ Et donc nous pouvons voir que le point d'application n'est pas confondu avec le centre de masse.

Le centre de masse n'est **pas** le point qui subit toutes les forces.

Mouvement de charges dans un champ ($\vec{E}$,$\vec{B}$)

Au niveau du cours

✯ Les définitions

✧ Sont à savoir :
- ➜ courant électrique, vecteur densité de courant électrique
- ➜ intensité, mobilité
- ➜ le modèle de DRÜDE d'un conducteur ohmique

✯ Les grandeurs

✧ Savoir vérifier l'homogénéité d'une force de LORENTZ, COULOMB ou LAPLACE.

✯ Les lois

✧ Connaître :
- ➜ les forces de LORENTZ et de COULOMB ainsi que les énergie associées
- ➜ la loi d'OHM LOCALE, l'expression de la résistance d'un conducteur
- ➜ la force de LAPLACE

✯ la phénoménologie

✧ Connaître :
- ➜ l'effet d'un champ $\vec{E}$ uniforme et constant sur une particule
- ➜ l'effet d'un champ $\vec{B}$ uniforme et constant sur une particule
- ➜ l'interprétation des différentes forces qui agissent sur les électrons dans le modèle de DRÜDE
- ➜ la méthode pour retrouver le sens et la direction des forces de LAPLACE
- ➜ l'interprétation de l'effet HALL au niveau microscopique

✯ les exemples fondamentaux

✧ Savoir :
- ➜ retrouver la trajectoire d'une particule chargée dans un champ $\vec{E}$ uniforme et constant
- ➜ retrouver la trajectoire d'une particule chargée dans un champ $\vec{B}$ uniforme et constant
- ➜ retrouver la force qui s'exerce sur le rail de LAPLACE

Au niveau de l'analyse

✯ Analyse physique

✧ Savoir :
- ➜ déterminer *a priori* si le mouvement d'une particule dans un champ $\vec{E}$ et / ou $\vec{B}$ est plan ou non
- ➜ déterimner *a priori* sens et direction de la force de LAPLACE

Au niveau des savoir-faire

✯ outils mathématiques

✧ Connaître :
- ➜ l'expression particulière d'une parabole dans le cas d'une interaction répulsive.
- ➜ la méthode de changement de fonction complexe inconnue

✯ petits gestes

✧ Il faut savoir :
- ➜ calculer la résultante des forces de Laplace à partir d'un découpage du conducteur
- ➜ calculer le moment des forces de Laplace à partir d'un découpage du conducteur

✯ exercices classiques

✧ Savoir :
- ➜ refaire l'exemple du sélecteur de vitesse
- ➜ refaire l'exemple du cyclotron

Table des matières