Premiers pas en mécanique du point

I – Phénoménologie

DÉF Un *point matériel* est un point géométrique affecté d'une masse $m > 0$ exprimée en kg.

LOI Tout objet solide indéformable se comporte exactement comme un point matériel lorsqu'il ne tourne pas sur lui-même.

DÉF Le *référentiel* est ce par rapport à quoi quelque chose bouge.

LOI Un référentiel est toujours immobile par rapport à lui-même.

DÉF Un *repère* est la manière que nous avons de décrire la façon dont un objet bouge par rapport à un référentiel.

LOI Il existe donc de multiples repère pour un même référentiel.

DÉF Le *mouvement* d'un objet ou d'un point matériel est l'ensemble des caractéristiques qui permettent de décrire son déplacement par rapport à un référentiel : position, vitesse et accélération.

DÉF La *position* d'un point matériel sera repérée par le *vecteur position*

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y + z(t)\,\vec{u}_z$$

LOI Le vecteur position a une norme en mètre.

DÉF La *vitesse* d'un point matériel caractérise la manière dont la position change avec le temps et s'écrit :

$$\vec{v}(t) \triangleq \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}$$

LOI Le vecteur vitesse a une norme en m.s^{-1}.

LOI La vitesse d'un point par rapport à un référentiel est un vecteur dont les composantes sont :

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_z \overset{\text{not}}{=} \dot{x}(t)\,\vec{u}_x + \dot{y}(t)\,\vec{u}_y + \dot{z}(t)\,\vec{u}_z$$

LOI La dérivation de vecteurs se fait comme la dérivation de fonctions usuelles. En particulier, si $\vec{u}$ est un vecteur constant dans le temps, $\dfrac{\mathrm{d}x(t)\,\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}$.

DÉF L'*accélération* d'un point matériel caractérise la manière dont la vitesse change avec le temps et s'écrit :

$$\vec{a}(t) \triangleq \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}$$

LOI L'accélération est aussi la dérivée seconde du vecteur position :

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

LOI Le vecteur accélération a une norme en m.s^{-2}.

LOI L'accélération d'un point par rapport à un référentiel est un vecteur dont les composantes sont :

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{u}_z \overset{\text{not}}{=} \ddot{x}(t)\,\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\,\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\,\vec{u}_z$$

LOI Une force se représente par un vecteur. Il faut donc trois choses pour la décrire entièrement :
- ➜ soit les trois composantes du vecteur dans une base
- ➜ soit sa direction, son sens et sa norme en newton

LOI Dès que deux objets sont en contact l'un avec l'autre, ils exercent une force l'un sur l'autre.

LOI — Quand deux objets ne sont pas en contact l'un avec l'autre, ils n'exercent aucune force l'un sur l'autre.

LOI — Il est complètement inutile de connaître le mouvement d'un corps pour déterminer la nature des forces qui s'exercent sur lui.

II – Il bouge !

LOI — Dans un référentiel galiléen, pour tout point matériel M de masse m subissant les forces $\vec{f}_i$, nous pouvons écrire :

$$\sum \vec{f}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{où} \qquad \vec{p}(t) = m\,\vec{v}(t)$$

$\vec{p}(t)$ est appelée la *quantité de mouvement*.

LOI — La quantité de mouvement caractérise le mouvement d'un point matériel.

LOI — Dans un référentiel galiléen, pour tout point matériel M de masse m subissant les forces $\vec{f}_i$, nous pouvons écrire :

$$\sum \vec{f}_i = m\,\vec{a}(t)$$

DÉF — La *masse inertielle* est la grandeur qui caractérise la capacité qu'a un point matériel à résister aux effets des forces.

DÉF — Un *système* est une partie arbitraire (donc à préciser explicitement) du dispositif étudié pour lequel les lois seront écrites.

DÉF — La *chute libre* correspond à un mouvement où un objet est soumis uniquement à son poids.

LOI — Le poids a tendance à entraîner les objets vers le bas.

LOI — Le poids d'un point matériel de masse m s'écrit $\vec{P} = m\,\vec{g}$ où $\vec{g}$ est *l'accélération de pesanteur* qui vaut $\|\vec{g}\| \simeq 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

LOI — Sauf cas très particuliers de mouvements amples par rapport à la Terre, nous pouvons considérer que $\vec{g} = \mathrm{C^{te}}$.

DÉF — La *masse grave* caractérise la capacité d'un corps à subir la gravité, *ie.* à être attiré par les autres masses.

DÉF — Un mouvement est dit *uniformément accéléré* si tout au long du mouvement l'accélération est vectoriellement constante.

LOI — Un mouvement uniformément accéléré est un mouvement plan.

LOI — Dans le cas d'une chute libre sans vitesse initiale, la trajectoire est rectiligne.

LOI — La vitesse après une chute libre de hauteur h sans vitesse initiale a une norme de $v = \sqrt{2\,g\,h}$.

DÉF — La *trajectoire* est l'ensemble des points par lequel est passé ou passera le point matériel étudié.

LOI — Lors d'un mouvement uniformément accéléré, la trajectoire est parabolique ou rectiligne.

DÉF — Lorsqu'un objet est plongé dans un fluide et qu'il est en mouvement par rapport à celui-ci, il subit une force de *frottement fluide*.

LOI — Les forces de frottement fluide ont tendance à faire en sorte que la vitesse de l'objet devienne égale à celle du fluide.

LOI — Pour un fluide au repos dans le référentiel d'étude, la force de frottement est vectoriellement opposée au vecteur vitesse de l'objet subissant la force.

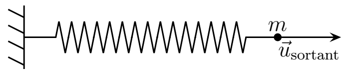
LOI — La force de frottement fluide a une intensité telle que :
- ➜ si la vitesse n'est pas trop importante, elle est proportionnelle à cette dernière, *ie.* $\|\vec{f}\| = \lambda\, v$, soit $\vec{f} = -\lambda\,\vec{v}$: les frottements sont dits *linéaires*
- ➜ si la vitesse est importante, elle est proportionnelle au carré de la norme de la vitesse, *ie.* $\|\vec{f}\| = h\,v^2$, soit $\vec{f} = -h\,v\,\vec{v}$: les frottements sont dits *quadratiques*

h et λ sont des constantes phénoménologiques qui dépendent de l'objet (matériau, forme) et du fluide.

DÉF — Un *ressort idéal* est un ressort sans masse, parfaitement élastique à spires non jointives. Il est caractérisé par sa longueur naturelle ℓ_0 et sa constante de raideur k en $\mathrm{N.m^{-1}}$.

LOI — Plus la constante de raideur k d'un ressort est grande, plus le ressort est dur.

LOI — La force qu'exerce un ressort idéal sur un objet accroché à une de ses extrémité s'exprime sous la forme $\vec{f} = -k\,(\Delta\ell)\,\vec{u}_{\text{sortant}}$ où :
- ➜ k est la constante de raideur
- ➜ $\Delta\ell \triangleq \ell - \ell_0 \gtreqless 0$ est *l'allongement* du ressort
- ➜ $\vec{u}_{\text{sortant}}$ est le vecteur unitaire toujours dirigé vers l'extérieur et tangent au ressort au niveau de ce qui subit la force



LOI — Les élastiques exercent une force élastique de type $-k\,(\Delta\ell)\,\vec{u}_{\text{sortant}}$ en étirement et n'exercent aucune force en compression.

LOI — La pulsation propre d'une masse accrochée à un ressort de constante de raideur k vaut

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

III – Trajectoires circulaire

DÉF — Une trajectoire est *circulaire* lorsqu'elle forme un cercle ou un arc de cercle.

LOI — Pour repérer un point sur un cercle, il suffit de la donnée d'un seul nombre : $\theta(t)$.

LOI — Tout le mouvement est contenu dans $\theta(t)$ lorsque la trajectoire est circulaire.

LOI — Le vecteur position d'un point situé sur un cercle s'écrit $\overrightarrow{OM}(t) \triangleq R\,\vec{u}_r$.

LOI — Le vecteur $\vec{u}_r$ dépend de la position de M et est donc, en particulier, fonction du temps.

LOI — Pour un point M évoluant sur une trajectoire circulaire de rayon R repéré par $\theta(t)$, le vecteur vitesse s'écrit

$$\vec{v}(t) = R\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_\theta$$

où $\vec{u}_\theta$ est le vecteur tangent à la trajectoire dans le sens de θ.

LOI — Pour un point M évoluant sur une trajectoire circulaire de rayon R repéré par θ, le vecteur accélération s'écrit

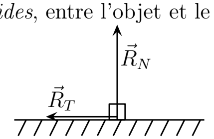
$$\vec{a}(t) = -R\,\dot{\theta}^2(t)\,\vec{u}_r + R\,\ddot{\theta}(t)\,\vec{u}_\theta \qquad \text{ou} \qquad \vec{a}(t) = -\frac{v^2(t)}{R}\,\vec{u}_r + \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_\theta.$$

DÉF — Un *fil idéal* est un fil sans masse, sans raideur, parfaitement inextensible et infiniment souple

LOI — Un fil idéal exerce une force qui s'écrit $\vec{T} = -T\,\vec{u}_{\text{sortant}}$ avec
- ➜ T une norme inconnue et *a priori* fonction du temps
- ➜ $\vec{u}_{\text{sortant}}$ tangent au fil à son extrémité

LOI — Pour un pendule simple de longueur ℓ il y a *isochronisme* des petites oscillations à la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.

LOI — L'action exercée par un support sur un objet se décompose en deux composantes :
- ➜ l'action normale notée $\vec{R}_N$ dirigée vers l'extérieur du support caractérisant le fait que l'objet ne peut pas rentrer dans le support
- ➜ l'action tangentielle notée $\vec{R}_T$ parallèle au plan du support et caractérisant les frottements, appelés *frottements solides*, entre l'objet et le support



Loi

L'action normale exercée par un support s'écrit $\vec{R}_N = R_N\,\vec{u}_{\text{sortant}}$ avec :
- ➜ $\vec{u}_{\text{sortant}}$ normal au support au point de contact
- ➜ $R_N \geqslant 0$ s'il peut y avoir décollement
- ➜ $R_N \lessgtr 0$ s'il ne peut pas y avoir de décollement

Loi

Il y a rupture de contact entre deux objets dès lors que la norme de l'interaction de contact entre les deux devient nulle.

Loi

Les solutions d'une équation différentielle de forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2} - {\omega_0}^2\,\alpha(t) = \text{qqch}(t)$$

s'écrivent $\alpha(t) = A\,\cosh(\omega_0\,t) + B\,\sinh(\omega_0\,t) + \alpha_{\text{p}}(t)$ où A et B sont les constantes d'intégration.

IV – Mouvements plus complexes

Loi

Il existe des référentiels dits *galiléens* dans lesquels tout point matériel a une trajectoire rectiligne uniforme si et seulement si la résultante des forces qu'il subit est nulle.

Loi

Un mouvement d'un point matériel est dit *uniforme* si la norme de son vecteur vitesse est constant.

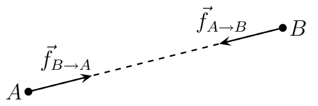
Loi

Les forces ne servent pas à faire avancer mais à modifier la quantité de mouvement d'un point matériel.

Loi

Lorsque deux points matériels sont en interaction, alors :

$\vec{f}_{A\to B} = -\vec{f}_{B\to A}$ **et** $\vec{f}_{A\to B} /\!\!/ \overrightarrow{AB}$



Loi

L'action tangentielle exercée par un support dépend de si l'objet glisse ou non sur le support.
- ➜ si l'objet glisse sur le support :
  - ➜ la direction de $\vec{R}_T$ est la même que celle de la vitesse qu'a l'objet par rapport au support
  - ➜ $\vec{R}_T$ est opposée à la vitesse qu'a l'objet par rapport au support
  - ➜ la norme de $\vec{R}_T$ vaut $\|\vec{R}_T\| = f\,\|\vec{R}_N\|$ où f est le coefficient de frottement
- ➜ si l'objet ne glisse pas sur le support :
  - ➜ la direction de $\vec{R}_T$ est inconnue
  - ➜ le sens de $\vec{R}_T$ est inconnu
  - ➜ la norme de $\vec{R}_T$ vérifie $\|\vec{R}_T\| \leqslant f\,\|\vec{R}_N\|$ où f est le coefficient de frottement

Déf

Une poulie est dite *idéale* si elle est sans masse et que sa rotation s'effectue sans frottement sur l'axe.

Loi

Lorsqu'un fil idéal passe par des poulies idéale, la tension que le fil exerce à chacune de ses deux extrémités est la même à chaque instant mais reste inconnue et de norme variable.

Loi

Pour repérer un point en coordonnées cylindro-polaires, il faut trois nombres :
- ➜ $r(t) \geqslant 0$, la distance à l'axe privilégié
- ➜ $\theta(t)$, un angle
- ➜ $z(t)$ la cote

Loi

En coordonnées cylindro-polaire, la position est décrite par la donnée des trois grandeurs (r,θ,z) et le vecteur position s'écrit

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\,\vec{u}_r(t) + z(t)\,\vec{u}_z$$

Loi

Dans la base cylindro-polaire : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}(t)\,\vec{u}_\theta$.

✧ Et finalement :

Loi

Dans la base cylindro-polaire, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\,\vec{u}_r + r(t)\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_\theta + \dot{z}(t)\,\vec{u}_z$$

Loi

Dans la base cylindro-polaire : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_r$.

Loi

Dans la base cylindro-polaire, le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t)\,\dot{\theta}^2(t)\right)\vec{u}_r + \left(2\,\dot{r}(t)\,\dot{\theta} + r(t)\,\ddot{\theta}(t)\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}(t)\,\vec{u}_z$$