La mécanique autrement qu'en forces

I – Évolutions conservatives

LOI — Une évolution ne peut être conservative que si elle est libre.

LOI — Pour une évolution libre soit conservative, il suffit qu'il n'y ait aucun frottements.

LOI — Pour une évolution conservative, la vitesse à un endroit peut être déduite de la donnée des conditions initiales indépendamment du temps écoulé.

DÉF — L'*énergie cinétique* est l'énergie que possède un objet du fait même de son mouvement.

LOI — L'énergie cinétique, notée E_c d'un point matériel de masse m s'écrit $E_c = \dfrac{1}{2}\, m\, v^2(t)$.

DÉF — L'*énergie potentielle* est une énergie due à la position particulière d'un objet et qui peut se transformer en énergie cinétique ou réciproquement.

DÉF — L'énergie potentielle due au poids est appelée *énergie potentielle de pesanteur*.

LOI — L'énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel de masse m s'écrit :
$E_{pp} = m\, g\, (z - z_{réf})$ où :
- ➜ $\vec{u}_z$ est un axe vertical vers le haut
- ➜ $z_{réf}$ est la cote de référence (arbitraire) pour laquelle l'énergie potentielle de pesanteur est nulle

DÉF — L'énergie potentielle due à la force exercée par un ressort est appelée *énergie potentielle élastique*.

LOI — L'énergie potentielle élastique d'un point matériel fixé à un bâti par l'intermédiaire d'un ressort s'écrit : $E_{p,el} = \dfrac{1}{2}\, k\, (\Delta\ell)^2$ où :
- ➜ k est la constante de raideur du ressort
- ➜ $(\Delta\ell) = \ell - \ell_0$ est l'allongement du ressort

LOI — Pour qu'il y ait évolution conservative, il ne faut pas de force de frottement fluide.

LOI — Pour qu'il y ait évolution conservative, il faut que les forces de frottement solide soient telles que :
- ➜ il y ait glissement sans frottement
- ➜ il y ait frottement sans glissement

LOI — Pour qu'il y ait évolution conservative, les forces de liaison rigide doivent se faire sur des points immobiles.

DÉF — L'*énergie mécanique* représente le total de l'énergie intéressante en mécanique et vaut :
$$E_m \triangleq E_c + E_p$$

LOI — Lorsqu'un système $\mathscr{S}$ subit une évolution conservative par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$, son énergie mécanique est constante au cours du temps.
$$E_m = C^{te}$$

LOI — La force est toujours dirigée dans le sens des énergie potentielles décroissantes.

LOI — Un point matériel est en équilibre en des points où l'énergie potentielle est stationnaire.

LOI — Les zones de minimum d'énergie potentielle correspondent à des positions d'équilibre stable alors que les zones où l'énergie potentielle est maximale correspondent à des équilibres instables.

DÉF — Lorsqu'un dispositif est tel que la variable qui caractérise sa position ne peut pas devenir infinie, l'état dans lequel il est est dit *état lié*.
Si le paramètre de position peut devenir infini, il s'agit d'un *état de diffusion*.

LOI — Un même dispositif peut être dans un état lié ou de diffusion suivant les conditions initiales.

II – Échanges énergétiques

Déf Une force est dite *résistante* lorsqu'elle a tendance à faire diminuer l'énergie cinétique d'un objet.

Déf Une force est dite *motrice* lorsqu'elle a tendance à faire augmenter l'énergie cinétique d'un objet.

Loi Les caractères « résistant » et « moteur » d'une force dépendent de la force, du dispositif et aussi du référentiel d'étude.

Loi Pour qu'une force soit motrice, il faut que le vecteur qui la représente soit dans le même sens que le vecteur vitesse du point matériel.

Loi La puissance fournie par une force $\vec{f}$ à un point matériel animé de la vitesse $\vec{v}$ s'écrit :

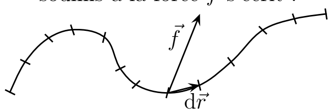
$$\mathscr{P} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

Déf L'énergie fournie par une force s'appelle le *travail* fourni par la force et se note W.

Loi Le travail élémentaire fourni par une force $\vec{f}$ à un point matériel qui se déplace de $\mathrm{d}\vec{r}$ s'écrit :

$$\delta W = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Loi Le travail total reçu par un point matériel entre deux points A et B de sa trajectoire soumis à la force $\vec{f}$ s'écrit :



$$W_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Loi *A priori* le travail fourni par la force entre les deux points A et B dépendent de la trajectoire suivie.

PCSI1, Fabert (Metz) Mécanique n°2 PCSI1, Fabert (Metz)

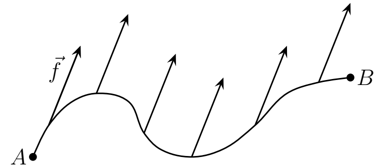
Loi En coordonnées cartésiennes, le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$$

Loi En coordonnées cylindro-polaire, le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

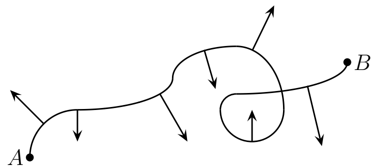
$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$$

Loi Un point matériel reçoit de la part d'une force vectoriellement constante $\vec{f}$ entre deux points A et B de sa trajectoire le travail :



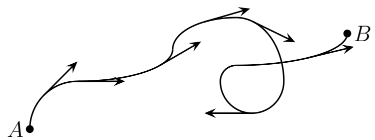
$$W_{AB} = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Loi Un point matériel reçoit de la part d'une force $\vec{f}$ constamment orthogonale à la trajectoire un travail nul.



$$W_{AB} = 0$$

Loi Un point matériel reçoit de la part d'une force $\vec{f}$ constamment parallèle à la trajectoire et d'intensité constante le travail :



$W_{AB} = \pm \ell_{AB}\,f$ où ℓ_{AB} est la longueur totale du trajet parcouru entre A et B et le signe dépendant du caractère moteur ou résistant de la force.

Déf Une force est dite *conservative* lorsque le travail qu'elle fournit à un point matériel ne dépend pas de la trajectoire de ce dernier mais uniquement des positions initiale et finale du point matériel.

DÉF

À chaque force conservative est associée une *énergie potentielle* $E_p(M)$ ne dépendant que de la position et telle que :
- ➜ le travail élémentaire s'écrive $\delta W = -\mathrm{d}E_p$
- ➜ le travail fourni entre A et B s'écrive $W_{AB} = -\Delta E_p = -(E_p(B) - E_p(A))$

LOI

L'énergie potentielle associée à une force conservative est définie à une constante arbitraire près.

LOI

Si deux forces $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ sont conservatives d'énergies potentielles respectives $E_{p1}(M)$ et $E_{p2}(M)$ alors leur résultante $\vec{F}$ est conservative d'énergie potentielle associée $E_{p,tot}(M) = E_{p1}(M) + E_{p2}(M)$.

LOI

Une convention usuelle consiste à choisir l'énergie potentielle nulle à l'endroit où la force associée est nulle.

LOI

Si un point matériel a une trajectoire rectiligne d'axe Ox et possède l'énergie potentielle $E_p(x)$, alors la force associée vaut :

$$\vec{f} = -\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}\,\vec{u}_x$$

LOI

Les positions d'équilibres d'un point matériel possédant l'énergie potentielle E_p sont les points de l'espace où cette énergie potentielle est stationnaire.

DÉF

Une position d'équilibre est dite *stable* si un point matériel légérèment écarté de cette position subit des forces qui tend à l'y faire revenir.
Une position d'équilibre est dite *invariante* si un point matériel légérèment écarté de cette position ne subit aucune force.
Dans les autres cas, la position d'équilibre est dite *instable*.

LOI

Les positions d'équilibre stables correspondent à des points où l'énergie potentielle est minimale.

LOI

THÉORÈME DE LA PUISSANCE CINÉTIQUE

Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum \vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\vec{f}) \text{ où :}$$

- ➜ E_c est l'énergie cinétique de M
- ➜ $\mathscr{P}(\vec{f})$ est la puissance fournie par la force $\vec{f}$

LOI

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum \vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Alors entre deux points A de sa trajectoire :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{f}) \text{ où :}$$

- ➜ $\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$ est la variation d'énergie cinétique de M
- ➜ $W(\vec{f})$ est le travail fourni par la force $\vec{f}$

LOI

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum \vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Alors entre deux points A de sa trajectoire :

$$\Delta E_m = \sum W(\vec{f}_{nc}) \text{ où :}$$

- ➜ $\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A)$ est la variation d'énergie mécanique de M
- ➜ $W(\vec{f}_{nc})$ est le travail fourni par les forces non conservatives

---

LOI

THÉORÈME DE LA PUISSANCE MÉCANIQUE

Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum \vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\vec{f}_{nc}) \text{ où :}$$

- ➜ E_m est l'énergie cinétique de M
- ➜ $\mathscr{P}(\vec{f}_{nc})$ est la puissance fournie par la force $\vec{f}$

DÉF

Le nombre minimal de grandeurs permettant de décrire entièrement la position d'un dispositif est appelé le *nombre de degré de description*.

DÉF

L'ensemble des mouvements qu'un dispositif peut accomplir sans contrainte est appelé *nombre de degré de liberté*.

LOI

Les petites évolutions autour d'une position d'équilibre stable sont (presque) toujours sinusoïdales.

III – Visualiser toutes les évolutions en un graphique

DÉF

Le *plan de phase* est le plan qui permet de représenter la vitesse en fonction de la position.

Loi Dans le plan de phase, les trajectoires tournent globalement dans le sens horaire.

Loi Dans le plan de phase, les points de vitesse nulle sont situés sur l'axe des absisses.

Loi Dans le plan de phase, en régime libre, deux trajectoires ne peuvent pas se croiser.

Loi Pour un régime libre, la trajectoire dans le plan de phase coupe perpendiculairement l'axe des abscisses en des points où il n'y a pas équilibre.

Loi Dans le plan de phase, les trajectoires autour d'une position d'équilibre stables sont elliptiques.

Loi Dans le plan de phase, les trajectoires ont tendance à s'écarter des positions d'équilibre instables.

Loi Dans le plan de phase, toutes les trajectoires d'un régime libre pour laquelle il y a des frottements finissent sur l'axe des abscisses.

Loi Dans le plan de phase, un mouvement périodique correspond à une trajectoire fermée.

Loi Dans le plan de phase, les états de diffusion ont des trajectoires qui partent vers l'infini sur l'axe des abscisses.