Oscillateur harmonique

I – Oscillateur harmonique amorti en régime libre

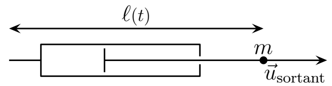
....

DÉF Un dispositif se comporte comme un *oscillateur harmonique* lorsque la force de rappel qui tend à le ramener à sa position d'équilibre stable est proportionnelle à son écart avec cette position d'équilibre.

LOI Un amortisseur est caractérisé par sa constante d'amortissement h exprimé en N.s.m^{-1}. Plus la constante d'amortissement h d'un amortisseur est grande, plus l'amortisseur est dur.

LOI La force qu'exerce un amortisseur sur un objet accroché à une de ses extrémité s'exprime sous la forme $\vec{f} = -h \dfrac{\mathrm{d}\ell(t)}{\mathrm{d}t}\, \vec{u}_{\text{sortant}}$ où :

➜ h est la constante d'amortissement
➜ $\ell(t)$ est la longueur de l'amortisseur
➜ $\vec{u}_{\text{sortant}}$ est le vecteur unitaire toujours dirigé vers l'extérieur et tangent à l'amortisseur au niveau de ce qui subit la force



✧ Il n'est en rien étonnant que la force exercée par un amortisseur ressemble beaucoup à une force de frottement fluide étant donné qu'un amortisseur est rempli d'un fluide à l'intérieur duquel bouge un piston.

I·0·i – équation différentielle régissant l'évolution

✧ Faisons la liste des forces qui s'exercent sur M :
➜ force à distance : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g} = -m\,\vec{u}_x$
➜ force de contact :
➜ la tension exercée par le ressort :

$$\vec{T} = -k\,(\ell_1(t) - \ell_0)\,\vec{u}_{\text{sortant}} = +k\,(H - x(t) - \ell_0)\,\vec{u}_x$$

➜ la force exercée par l'amortisseur :

$$\vec{f} = -h\,\frac{\mathrm{d}\ell_2(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_{\text{sortant},2} = -h\,\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \ell_2(t) = x(t)$$

✧ Écrivons le PFD sur la masse et projetons le sur $\vec{u}_x$.

$$\vec{P} + \vec{T}_{\text{ressort}} + \vec{f}_{\text{am}} = m\,\vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad -m\,g - k\,(H - x(t) - \ell_0)\,(-1) - h\,\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\,(+1) = m\,\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

✧ En simplifiant nous obtenons :

$$-m\,g + k\,(H - x(t) - \ell_0) - h\,\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{h}{m}\,\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,x(t) = -g + \frac{k}{m}\,(H - \ell_0)$$

✯ position d'équilibre

✧ Déterminons la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$.
✧ L'équilibre est un mouvement particulier, c'est donc une solution de l'équation différentielle régissant $x(t)$.
✧ Introduisons donc la solution $x(t) = x_{\text{éq}} = \mathrm{C}^{\text{te}}$ dans l'équation différentielle :

$$0 + 0 + \frac{k}{m}\,x_{\text{éq}} = -g + \frac{k}{m}\,(H - \ell_0) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{x_{\text{éq}} = H - \ell_0 - \frac{m\,g}{k}}$$

✧ Ce résultat en plus d'être homogène est cohérent :
➜ plus H est grand plus $x_{\text{éq}}$ est grand
➜ plus ℓ_0 est grand plus $x_{\text{éq}}$ est petit
➜ plus m est grand plus $x_{\text{éq}}$ est petit
➜ plus k est grand plus $x_{\text{éq}}$ est grand
➜ et surtout h, *ie.* l'amortisseur, n'intervient pas dans le résultat !

✯ écart à l'équilibre

✧ Cherchons l'équation différentielle vérifiée par $X(t) \triangleq x(t) - x_{\text{éq}}$. Pour cela, remplaçons, dans l'équation différentielle régissant l'évolution $x(t)$ par $x_{\text{éq}} + X(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2X(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{h}{m}\,\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,X(t) + \frac{k}{m}\,x_{\text{éq}} = -g + \frac{k}{m}\,(H - \ell_0)$$

✧ Et avec la condition d'équilibre :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2X(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{h}{m}\,\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,X(t) = 0}$$

✧ Oh oh ... voilà une équation qui a un gros air de déjà vu ! Le fait que le second membre soit nul est rassurant : $X(t)$ est l'écart à l'équilibre donc $X(t) = 0$ est forcément une solution.
✧ Nous remarquons aussi que, comme pour le ressort vertical tout seul, la pesanteur n'intervient pas dans le mouvement.

✯ écriture canonique

✧ Identifions avec l'écriture canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2X(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,X(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{h}{m} \\ {\omega_0}^2 = \dfrac{k}{m} \end{array} \right.$$

◇ Et ainsi $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \omega_0\,\dfrac{m}{h} = \dfrac{\sqrt{k\,m}}{h}$.
◇ Le facteur de qualité est d'autant plus faible que l'amortissement est grand. Rien de plus naturel !

I·1 – Cas sans frottement

I·1·*i* – équation horaire

◇ Si l'amortissement est nul $h = 0$, alors l'équation différentielle devient :

$$\frac{\mathrm{d}^2 X(t)}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2\, X(t) = 0$$

◇ Cette équation différentielle admet comme solution $X(t) = X_0\,\cos(\omega_0\,t + \varphi)$ avec X_0 et φ qui dépendent des conditions initiales.

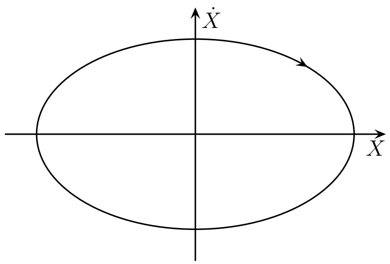
LOI Un oscillateur harmonique oscille sinusoïdalement autour de sa position d'équilibre.

I·1·*ii* – représentation dans le plan de phase

◇ Cherchons la vitesse : $\dot{X}(t) = -\omega_0\,X_0\,\sin(\omega_0\,t + \varphi)$.
◇ Pour éliminer les t et trouver le lien entre $\dot{X}$ et X, rien de plus facile avec un bonne vieille formule trigo :

$$\cos^2() + \sin^2() = 1 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{X^2}{{X_0}^2} + \frac{\dot{X}^2}{{\omega_0}^2\,{X_0}^2} = 1$$

◇ C'est l'équation d'une ellipse.



LOI Un oscillateur harmonique non amorti en régime libre a une trajectoire elliptique dans le plan de phase.

I·1·*iii* – aspect énergétique

✭ valeur moyenne de l'énergie cinétique

◇ Calculons la moyenne de l'énergie cinétique.
◇ Comme le mouvement est périodique, nous avons naturellement :

$$\langle E_\mathrm{c}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\,m\,\dot{X}^2(t)\,\mathrm{d}t$$

◇ Avec $\dot{X}(t) = -X_0\,\omega_0\,\sin(\omega_0\,t + \varphi)$, cela donne :

$$\begin{aligned}\langle E_\mathrm{c}\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\,m\,{\omega_0}^2\,{X_0}^2\,\sin^2(\omega_0\,t+\varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{m\,{\omega_0}^2\,{X_0}^2}{2\,T}\int_0^T \sin^2(\omega_0\,t+\varphi)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{m\,{\omega_0}^2\,{X_0}^2}{2\,T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\,\omega_0\,t + 2\,\varphi)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{m\,{\omega_0}^2\,{X_0}^2}{4\,T}\left[t - \frac{\sin(2\,\omega_0\,t+2\,\varphi)}{2\,\omega_0}\right]_0^T\\ &= \frac{m\,{\omega_0}^2\,{X_0}^2}{4\,T}\left(T - \frac{\sin(2\,\omega_0\,T + 2\,\varphi) - \sin(2\,\varphi)}{2\,\omega_0}\right) = \frac{m\,{\omega_0}^2\,{X_0}^2}{4}\end{aligned}$$

LOI La valeur moyenne temporelle d'un $\cos(\omega\,t)$ ou d'un $\sin(\omega\,t)$ est nulle :

$$\langle\cos(\omega\,t+\varphi)\rangle = \langle\sin(\omega\,t+\varphi)\rangle = 0$$

LOI La valeur moyenne temporelle d'un $\cos^2(\omega\,t)$ ou d'un $\sin^2(\omega\,t)$ vaut $\dfrac{1}{2}$:

$$\langle\cos^2(\omega\,t+\varphi)\rangle = \langle\sin^2(\omega\,t+\varphi)\rangle = \frac{1}{2}$$

◇ Et avec l'expression de ω_0 nous arrivons à $\langle E_\mathrm{c}\rangle = \dfrac{k\,{X_0}^2}{4}$.

✭ valeur moyenne de l'énergie potentielle

◇ Cherchons tout d'abord l'énergie potentielle associée à la force subie par l'oscillateur harmonique qu'est $X(t)$.
◇ L'équation différentielle vérifiée par $X(t)$ est $\dfrac{\mathrm{d}^2X(t)}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{m}\,X(t) = 0$ ce qui donne le PFD équivalent :

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k\,X(t)$$

◇ Tout se passe comme si la masse était soumise uniquement à la force $-k\,X(t)\,\vec{u}_x$.
◇ Comme le déplacement élémentaire est vertical, il se réduit à $\mathrm{d}X\,\vec{u}_x$ et le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W = \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -k\,X\,\mathrm{d}X \overset{?}{=} -\mathrm{d}E_\mathrm{p} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}X} = k\,X \quad \rightsquigarrow \quad E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\,k\,X^2 + \mathrm{C^{te}}$$

◇ Et en prenant la constante nulle là où la force est nulle aussi, *ie.* en $X = 0$, nous trouvons $E_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2}\,k\,X^2$.
◇ Nous pouvons donc maintenant déterminer l'énergie potentielle moyenne :

$$\langle E_\mathrm{p}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\,k\,X^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\,k\,{X_0}^2\,\cos^2(\omega\,t+\varphi)\,\mathrm{d}t$$

◇ Ce qui donne, avec le résultat précédent : $\langle E_\mathrm{p}\rangle = \dfrac{k\,{X_0}^2}{4}$.

✯ résultat et interprétation

✧ Nous pouvons constater que $\langle E_{\rm p} \rangle = \langle E_{\rm c} \rangle$.

Loi

En régime libre, un oscillateur harmonique non amorti possède, en moyenne, autant d'énergie potentielle que d'énergie cinétique.

✧ Remarquons une fois de plus que les oscillations ont pour origine un échange énergétique entre deux formes différentes d'énergie : cinétique et potentielle.

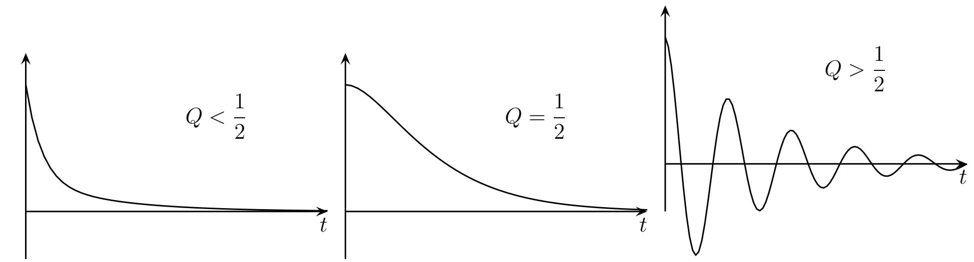
I·2 – Oscillations avec frottements

I·2·*i* – pour une évolution connue

✧ L'équation différentielle vérifiée par $X(t)$ s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2 X(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,X(t) = 0$$

✧ Nous savons déjà la résoudre (cf. circuits en régime transitoire). Le type de solution dépend du facteur de qualité :

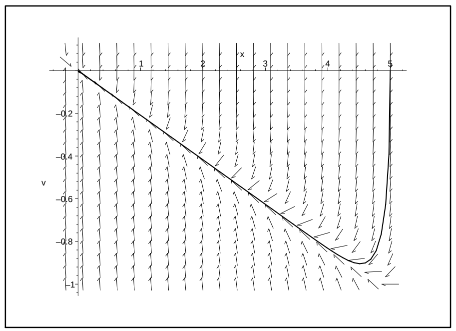


I·2·*ii* – vue dans le plan de phase

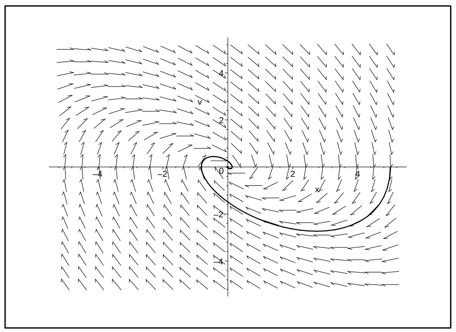
✧ Regardons les 6 trajectoires suivantes dans le plan de phase où seul le facteur de qualité varie. Il vaut : 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 ; 5 ; 50.

✧ Jouons à « qui est qui ? »

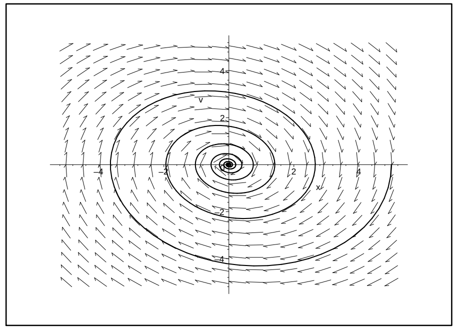
Graphique 1



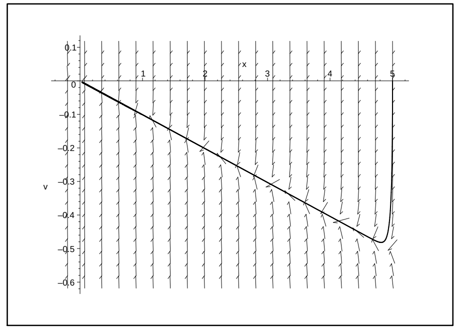
Graphique 2



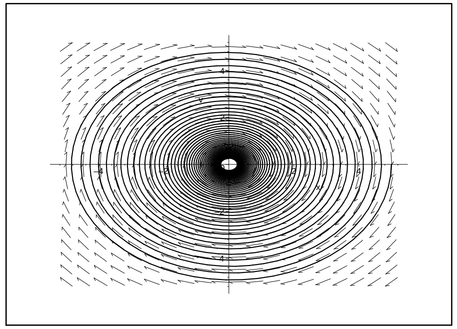
Graphique 3



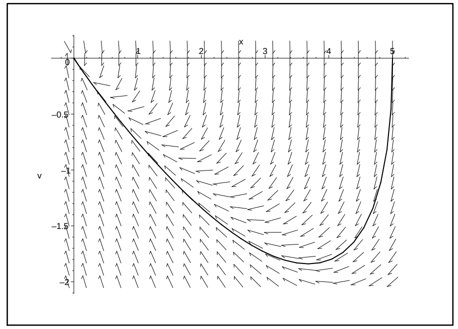
Graphique 4



Graphique 5



Graphique 6



✧ Repérer les trajectoires correspondant aux régimes pseudo-périodique est facile : il y a oscillation **donc** la trajectoire passe aussi en $X(t) < 0$. Associer les bons facteurs de qualité ne pose pas non plus de soucis particulier : plus il y a d'oscillations, plus le facteur de qualité est grand.

✧ Et pour les autres ? Nous ne pouvons plus nous fier aux oscillations puisqu'il n'y en a plus. La seule différence, c'est la rapiditié avec laquelle l'OH atteint son régime permanent. Malheureusement, cette durée n'est pas visible sur les plans de phase. Cependant comme les conditions initiales et le régime permanent sont tous identique, les évolutions les plus courtes seront les plus rapides. Il nous suffit donc de regarder les valeurs de vitesse pour savoir qui est le plus rapide. Nous obtenons donc que $Q = 0{,}5$ correspond au graphique 6, que $Q = 0{,}2$ correspond au graphique 1 et $Q = 0{,}1$ au graphique 4.

I·3 – Analogie avec le circuit R,L,C série

✧ Allons au-delà de la simple constatation de la similarité de l'équation différentielle.

✧ Cherchons quelles grandeurs caractéristiques jouent des rôles analogues.

✧ Nous avons ainsi :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \longleftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \longleftrightarrow Q = \frac{\sqrt{k\,m}}{h}$$

✧ Vu que les grandeurs physiques mises en jeu R, L, C, h, k et m sont non homogènes, il existera plusieurs analogies possibles. Cherchons la plus simple.

✧ Remarquons que R et h n'interviennent qu'à un endroit et posons $\boxed{R \leftrightarrow h}$. Il reste :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{L\,C}} \longleftrightarrow \sqrt{\dfrac{k}{m}}\\ \sqrt{\dfrac{L}{C}} \longleftrightarrow \sqrt{k\,m}\end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{C} \longleftrightarrow k\\ L \longleftrightarrow m\end{array}\right.}$$

✧ Les analogies permettent d'étudier expérimentalement des dispositifs à partir de montages sensiblement différents. Par exemple ici il est possible d'étudier les oscillations d'une masse à partir d'un circuit R,L,C série.

L'analogie n'est pas ici entre la mécanique et l'électrocinétique, mais entre un montage particulier en mécanique et un montage particulier en électrocinétique.

II – Oscillations non linéaires

Loi — Pour le pendule simple, il y a isochronisme des petites oscillations.

Loi — L'isochronisme des oscillations n'est pas une loi générale.

III – Oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé

Loi — La réponse d'un dispositif linéaire à une excitation sinusoïdale est elle aussi sinusoïdale de même pulsation que la pulsation d'excitation.

Déf — Pour une grandeur sinusoïdale $X(t) = X_\mathrm{m} \cos(\omega\,t+\varphi)$:
- ➜ $X_\mathrm{m} > 0$ est *l'amplitude*
- ➜ $\omega > 0$ est la *pulsation*
- ➜ $\omega\,t+\varphi$ est la *phase instantannée*
- ➜ φ est la *phase à l'origine* (des dates)

Déf — Une grandeur sinusoïdale réelle $X(t) = X_\mathrm{m} \cos(\omega\,t+\varphi)$ est représentée par la *grandeur complexe* notée $\underline{X}(t)$ qui vaut :

$$\underline{X}(t) \triangleq X_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t+\varphi)} \overset{\text{not}}{=} \underline{X_\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t} \text{ où } \underline{X_\mathrm{m}} \text{ est l'}\textit{amplitude complexe.}$$

Loi — Entre une grandeur réelle $X(t)$ et sa grandeur complexe associée $\underline{X}(t)$ nous avons :

$$X(t) = \mathfrak{Re}(\underline{X}(t))$$

Loi — Toutes les informations intéressantes d'une grandeur sinusoïdale sont dans l'amplitude complexe.

Loi — La représentation complexe d'une dérivée est la dérivée de la représentation complexe.

Loi — Pour dériver une grandeur sinusoïdale complexe, il suffit de multiplier par $\mathrm{j}\,\omega$.

Déf — Une grandeur *réduite* est une grandeur adimensionalisée à partir d'une grandeur caractéristique de référence.

Loi — Pour déterminer le comportement asymptotique d'une fonction, il suffit de garder le ou les termes prédominants.

Déf — Il y a *résonance* dès lors que la réponse d'un dispositif est supérieure à l'excitation.

Loi — La résonance en élongation n'existe que si Q est assez grand. Quand elle existe, elle n'est pas exactement située à la pulsation propre sauf si $Q \gg 1$.

Loi — En ce qui concerne le régime sinusoïdal forcé, nous pouvons dire $Q \gg 1$ dès que $Q > 5$.

Déf — La résonance est dite *aigüe* lorsque le pic de résonance est étroit.

Loi — La résonance en vitesse existe toujours et se fait à la pulsation propre.