Mécanique des systèmes de points

I – Mouvement d'ensemble

DÉF Pour deux points matériels M_1 et M_2 de masse respective m_1 et m_2, leur *centre de masse* noté G est tel que :

$$m_1\,\overrightarrow{GM_1} + m_2\,\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$$

LOI Pour deux points M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 séparés de $\ell(t)$, le centre de masse G est situé entre les deux et est tel que :

$$GM_1(t) = \frac{m_2}{m_1+m_2} \times \ell(t) \qquad \text{et} \qquad GM_2(t) = \frac{m_1}{m_1+m_2} \times \ell(t)$$

LOI Le centre de masse est toujours du côté où le système est le plus massique.

LOI Soient deux points matériels M_1 et M_2 de centre de masse G. Alors :

$$\overrightarrow{OG}(t) = \frac{m_1\,\overrightarrow{OM_1}(t) + m_2\,\overrightarrow{OM_2}(t)}{m_1+m_2}$$

LOI Soient deux points matériels M_1 et M_2 de centre de masse G. Alors :

$$x_G(t) = \frac{m_1\,x_1(t) + m_2\,x_2(t)}{m_1+m_2} \qquad y_G(t) = \frac{m_1\,y_1(t) + m_2\,y_2(t)}{m_1+m_2} \qquad z_G(t) = \frac{m_1\,z_1(t) + m_2\,z_2(t)}{m_1+m_2}$$

LOI Soient deux points matériels M_1 et M_2 de centre de masse G. Alors :

$$\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G,t) = \frac{m_1\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1,t) + m_2\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2,t)}{m_1+m_2}$$

DÉF Le mouvement du centre de masse d'un système est appelé *mouvement d'ensemble*.

DÉF Un *système* est défini arbitrairement et a pour rôle de délimiter ce sur quoi s'appliquent les lois physiques.

DÉF Tout ce qui n'est pas dans le système fait partie de l'*extérieur*.

DÉF Une force qui s'exerce entre deux points matériels d'un même système est appelée *force intérieure*.

DÉF Une force exercée par l'extérieur d'un système sur une partie d'un système est appelée *force extérieure*.

DÉF L'*interaction intérieure* $\vec{f}_{1\leftrightarrow 2}$ est l'ensemble des deux forces intérieures $\vec{f}_{1\to 2}$ et $\vec{f}_{1\to 2}$.

LOI Soit un système $\mathscr{S}$ soumis aux forces extérieures $\vec{f}_{\text{ext}\to 1}$ et $\vec{f}_{\text{ext}\to 2}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$ quelconque, alors, en notant G le centre de masse de $\mathscr{S}$:

$$m_{\text{tot}}\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G,t)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{f}_{\text{ext}} \quad \text{avec :}$$

- ➜ $m_{\text{tot}} \stackrel{\text{not}}{=} m_1 + m_2$ la masse totale du système $\mathscr{S}$
- ➜ $\sum \vec{f}_{\text{ext}} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{f}_{\text{ext}\to 1} + \vec{f}_{\text{ext}\to 2}$ la résultante des forces extérieures

LOI Lorsque chaque partie d'un système est immobile à un instant (initial entre autre), alors le centre de masse est aussi immobile à cet instant.

DÉF La *quantité de mouvement* par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$ d'un point matériel M de masse m qui possède la vitesse $\vec{v}_{|\mathscr{R}}(t)$ vaut :

$$\vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t) = m\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t)$$

LOI La quantité de mouvement d'un système est la somme des quantités de mouvement de ses parties :

$$\vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S},t) = \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M_1,t) + \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M_2,t)$$

DÉF Une grandeur est dite *extensive* si la valeur qu'elle a pour un système est la somme des valeurs qu'elle a pour chacune de ses parties.

LOI La quantité de mouvement est extensive.

Loi

La quantité de mouvement d'un système $\mathscr{S}$ par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$ s'écrit :

$$\vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S},t) = m_{\text{tot}}\,\vec{v}_{|\mathscr{R}}(G,t) \qquad \text{où :}$$

➜ m_{tot} est la masse totale du système
➜ G est le centre de masse du système

II – Mouvement propre

Déf

Le *référentiel barycentrique*, noté $\mathscr{R}^\star$ est le référentiel en translation par rapport au référentiel d'étude $\mathscr{R}$ et dont le centre est le centre de masse du système $\mathscr{S}$ étudié.

Loi

Le vecteur rotation du référentiel barycentrique par rapport au référentiel d'étude est nul : $\vec{\Omega}_{\mathscr{R}^\star/\mathscr{R}} = \vec{0}$.

Loi

Les grandeurs relatives au référentiel barycentrique $\mathscr{R}^\star$ sont notées avec une astérisque : $\vec{v}^{\,\star}$, $\vec{a}^{\,\star}$, ...

Loi

La loi de composition des vitesses s'écrit, pour le référentiel barycentrique :

$$\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_i,t) = \vec{v}_{|\mathscr{R}}(G,t) + \vec{v}_{\mathscr{R}^\star}(M_i,t)$$

ce que nous noterons aussi : $\vec{v}_i(t) = \vec{v}_G(t) + \vec{v}_i^{\,\star}(t)$.

Loi

La loi de composition des accélérations s'écrit, pour le référentiel barycentrique :

$$\vec{a}_{|\mathscr{R}}(M_i,t) = \vec{a}_{|\mathscr{R}}(G,t) + \vec{a}_{\mathscr{R}^\star}(M_i,t)$$

ce que nous noterons aussi : $\vec{a}_i(t) = \vec{a}_G(t) + \vec{a}_i^{\,\star}(t)$.

Loi

Un vecteur possède la même dérivée par rapport aux référentiel d'étude et barycentrique :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}^\star} \overset{\text{not}}{=} \frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Loi

La quantité de mouvement d'un système par rapport à son référentiel barycentrique est nulle :

$$\vec{p}_{|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S}) = \vec{0}$$

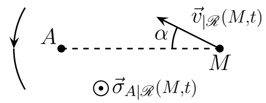
Déf

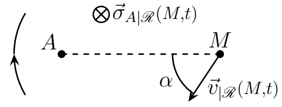
Le *moment cinétique* d'un point M par rapport à un point A dans un référentiel $\mathscr{R}$ vaut :

$$\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t) \triangleq \overrightarrow{AM}(t) \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(M,t)$$

interprétation

✧ Voyons ce que cela donne sur un exemple. Prenons un point M et un point M animé de la vitesse $\vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t)$.





✧ Le moment cinétique est donc :
➜ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$
➜ de norme d'autant plus grande que α est proche de $\dfrac{\pi}{2}$ *ie.* d'une rotation de centre A
➜ dans le sens de la rotation

Loi

Le moment cinétique $\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)$ d'un point M par rapport à un point A dans un référentiel $\mathscr{R}$ caractérise la rotation que M a autour de A :
➜ $\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)$ a pour direction l'axe instantané de rotation
➜ $\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)$ a pour sens le sens instantané de rotation

Déf

Le *moment cinétique scalaire* d'un point M par rapport à un axe Δ de vecteur directeur $\vec{u}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$ vaut :

$$\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(M,t) \triangleq \vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)\cdot\vec{u} \qquad \text{où :}$$

A est un point quelconque de Δ.

✧ Étant donné que σ_Δ est défini à partir d'un produit scalaire, il peut être positif ou négatif.

Loi

Le moment cinétique scalaire est une grandeur algébrique.

Loi

Un moment ne conserve que la partie utile pour la rotation.

Loi

Pour un mouvement plan, le moment cinétique d'un point s'écrit, avec le repérage naturel :

$$\vec{\sigma}_O(M) = m\,r^2(t)\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z \qquad \text{et} \qquad \sigma_\Delta = m\,r^2(t)\,\dot{\theta}(t)$$

Loi

Le moment cinétique par rapport à un pint représente la quantité de rotation autour de ce point.

Loi

Soit M un point matériel soumis à $\sum \vec{f}$ dans $\mathscr{R}$ un référentiel quelconque. Alors pour tout point A fixe par rapport à $\mathscr{R}$, nous pouvons écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}) \qquad \text{où :}$$

- ➜ $\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)$ est le moment cinétique de M par rapport à A
- ➜ $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$ est le moment de la force $\vec{f}$ par rapport à A.

Loi

Le moment d'une force s'exprime en N.m.

Loi

Soit M un point matériel soumis à $\sum \vec{f}$ dans $\mathscr{R}$ un référentiel quelconque. Alors pour tout axe Δ fixe par rapport à $\mathscr{R}$, nous pouvons écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(M,t)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{f}) \qquad \text{où :}$$

- ➜ $\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(M,t)$ est le moment cinétique scalaire de M par rapport à A
- ➜ $\mathscr{M}_\Delta(\vec{f})$ est le moment scalaire de la force $\vec{f}$ par rapport à A.

Déf

La *droite d'action* d'une force est la droite colinéaire à la force passant par le point qui la subit.

Déf

Le *bras de levier* d'une force par rapport à un axe de rotation Δ est la distance la plus courte entre sa droite d'action et l'axe Δ.

Loi

Le moment scalaire d'une force par rapport à un axe Δ s'écrit :

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{f}) = \pm f\, b_\ell \qquad \text{où :}$$

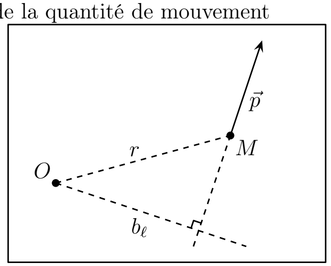
- ➜ le signe dépend de la convention d'orientation de la rotation
- ➜ f est la norme de la force
- ➜ b_ℓ est le bras de levier de la force

Loi

Le moment cinétique scalaire par rapport à un axe Δ s'écrit :

$$\sigma_\Delta = \pm p\, b_\ell = \pm m\, v\, b_\ell \qquad \text{où :}$$

- ➜ le signe dépend de la convention d'orientation de la rotation
- ➜ $p = m\,v$ est la norme de la quantité de mouvement
- ➜ b_ℓ est le bras de levier de la quantité de mouvement



Loi

Le moment cinétique est une grandeur extensive.

Loi

Soit un système $\mathscr{S}$ étudié dans le référentiel $\mathscr{R}$ quelconque et A un point fixe de $\mathscr{R}$, alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}_{\text{ext}}) \quad \text{où :}$$

- ➜ $\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(\mathscr{S})$ est le moment cinétique du système $\mathscr{S}$ par rapport à A dans $\mathscr{R}$
- ➜ $\sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}_{\text{ext}}) \overset{\text{not}}{=} \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{f}_{\text{ext}\to 1} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{f}_{\text{ext}\to 2}$ est le moment total exercé par les forces extérieures.

Loi

Soit un système $\mathscr{S}$ étudié dans le référentiel $\mathscr{R}$ quelconque et Δ un axe fixe de $\mathscr{R}$, alors :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{f}_{\text{ext}}) \quad \text{où :}$$

- ➜ $\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(\mathscr{S})$ est le moment cinétique scalaire du système $\mathscr{S}$ par rapport à A dans $\mathscr{R}$
- ➜ $\sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{f}_{\text{ext}})$ est le moment scalaire total exercé par les forces extérieures.

Loi

Lorsqu'un objet tourne sans frottement autour d'un axe, l'axe exerce un moment nul sur cet objet.

Loi

Lorsqu'un objet tourne avec frottement autour d'un axe à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, l'axe exerce sur cet objet un moment de la forme :

- ➜ frottements fluides : $\vec{\Gamma} = -\lambda\,\vec{\Omega}$
- ➜ frottements solides :
  - ➜ $\|\vec{\Gamma}\| = \Gamma_0 = \text{C}^{\text{te}}$ et $\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Omega} < 0$ lorsque $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$
  - ➜ $\|\vec{\Gamma}\| \leqslant \Gamma_0$ lorsque $\vec{\Omega} = \vec{0}$

Loi

Lorsqu'un objet est entraîné par à un moteur à tourner autour d'un axe à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, l'axe exerce sur cet objet un moment de la forme :

$$\|\vec{\Gamma}_{\text{m}}\| = \Gamma_{\text{m}} = \text{C}^{\text{te}} \quad \text{avec} \quad \vec{\Gamma}\cdot\vec{\Omega} > 0$$

Loi

Dans le cas d'une liaison d'axe, il ne faut pas déterminer le moment exercé par l'axe en s'aidant du schéma mais de manière physique, suivant la nature de la liaison.

Déf

Le *point d'application* C d'un ensemble de forces $\vec{f}_i$ est le point virtuel où la résultante des forces doit s'exercer pour avoir le même effet rotatoire que la résultante des moments de chaque force :

$$\sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}_i) = \sum \left(\overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{f}_i\right) \triangleq \overrightarrow{AC} \wedge \left(\sum \vec{f}_i\right)$$

✧ Il ne faut pas s'offusquer du caractère « virtuel » du point d'application. En effet ce point n'existe pas plus que le centre de masse, point virtuel s'il en est (il n'y a qu'à songer au centre de masse d'un cerceau pour s'en persuader.)

le point d'application est en général défini pour un ensemble de forces de même nature (point d'application du poids, des forces de pression, ...)

Loi

Le point d'application du poids est confondu avec le centre de masse G.

Loi

Soit un système $\mathscr{S}$ étudié dans un référentiel $\mathscr{R}$, nous pouvons écrire pour tout point A :

$$\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}_{|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) + \vec{\sigma}_{|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S})$$

Loi

Un système de point ne se comporte pas comme un point unique en G où toute la masse serait concentrée.

Loi

Soit un système $\mathscr{S}$ étudié dans son référentiel barycentrique $\mathscr{R}^\star$ associé, alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}^\star(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{f}_{\text{ext}}) \quad \text{où :}$$

➜ $\vec{\sigma}^\star(\mathscr{S})$ est le moment cinétique du système $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{R}^\star$

➜ $\sum \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{f}_{\text{ext}})$ est le moment des forces extérieures par rapport à G qui s'appliquent dans le référentiel $\mathscr{R}$

Loi

Le poids ne permet pas d'influencer la rotation propre.

Déf

Le *centre de gravité* est le point d'application des forces de gravitation.

✧ Pour que le centre de gravité soit différent du centre de masse, il faut faire appel à des termes de marée, *ie.* cela concerne des objets étendus dans un champ de gravitation non uniforme.

III – Aspect énergétique

Loi

Soit un système $\mathscr{S}$ étudié dans un référentiel $\mathscr{R}$ quelconque :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}|\mathscr{R}}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}_{\text{ext}} + \sum \mathscr{P}_{\text{int}} \quad \text{où :}$$

➜ $\sum \mathscr{P}_{\text{ext}} = \vec{f}_{\text{ext}\to 1} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) + \vec{f}_{\text{ext}\to 2} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2)$ est la puissance fournie par les forces extérieures à l'ensemble des points matériels ;

➜ $\sum \mathscr{P}_{\text{int}} = \vec{f}_{2\to 1} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) + \vec{f}_{1\to 2} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2)$ est la puissance fournie par les interactions intérieures.

Loi

Le calcul des travaux fournis par les interactions intérieures est indépendant du référentiel dans lequel ils sont calculés.

Loi

L'énergie fournie par une interaction intérieure est une grandeur intrinsèque.

Déf

Un système de deux points matériel est dit *solide* lorsque la distance entre ses deux points est constante : $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \mathrm{C}^{\text{te}}$.

Remarque : pour un système de plus que deux points matériels, il faut que la distance entre chaque paire de points soit constante.

✧ En fait un solide n'est ni plus ni moins qu'un système indéformable dont la seule possibilité est de se translater et de tourner sur lui-même.

une association de deux solides n'est pas un solide ! À partir du moment où il y a déformation, nous ne pouvons plus parler de solide.

Loi

Pour un système solide la puissance des interactions intérieure est nulle, *ie.*

$$\sum \mathscr{P}_{\text{int}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum W_{\text{int}} = 0$$

Loi

Un solide ne dissipe ni ne crée d'énergie.

Loi

Dans un référentiel $\mathscr{R}$ quelconque, pour un système $\mathscr{S}$ dont le point M_1 évolue sur la trajectoire A_1B_1 pendant que M_2 évolue sur A_2B_2, nous avons

$$\Delta E_{\text{m}|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) = \sum W_{\text{nc,ext}} + \sum W_{\text{nc,int}} \quad \text{où :}$$

- ➜ $E_{\text{m}|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) = E_{\text{c}|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) + E_{\text{p,ext}}(\mathscr{S}) + E_{\text{p,int}}(\mathscr{S})$ est l'énergie mécanique du système ;
- ➜ $E_{\text{p,ext}}(\mathscr{S})$ est l'énergie potentielle associée aux forces extérieures ;
- ➜ $E_{\text{p,int}}(\mathscr{S})$ est l'énergie potentielle interne associée aux interactions intérieures ;
- ➜ $\displaystyle\sum W_{\text{nc,ext}} = \int_{A_1}^{B_1} \vec{f}_{\text{ext}\to 1} \cdot \text{d}\vec{r}_1 + \int_{A_2}^{B_2} \vec{f}_{\text{ext}\to 2} \cdot \text{d}\vec{r}_2$ est le travail fourni par les forces extérieures non conservatives ;
- ➜ $\displaystyle\sum W_{\text{nc,int}} = \int_{A_1}^{B_1} \vec{f}_{2\to 1} \cdot \text{d}\vec{r}_1 + \int_{A_2}^{B_2} \vec{f}_{1\to 2} \cdot \text{d}\vec{r}_2$ est le travail fourni par les interactions intérieures non conservatives.

Loi

Dans un référentiel $\mathscr{R}$ quelconque, pour un système $\mathscr{S}$, nous avons :

$$\frac{\text{d}E_{\text{m}|\mathscr{R}}(\mathscr{S})}{\text{d}t} = \sum \mathscr{P}_{\text{nc,ext}} + \sum \mathscr{P}_{\text{nc,int}} \quad \text{où :}$$

- ➜ $\sum \mathscr{P}_{\text{nc,ext}} = \vec{f}_{\text{ext}\to 1} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) + \vec{f}_{\text{ext}\to 2} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2)$ est la puissance fournie par les forces extérieures non conservatives ;
- ➜ $\sum \mathscr{P}_{\text{nc,int}} = \vec{f}_{2\to 1} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_1) + \vec{f}_{1\to 2} \cdot \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M_2)$ est la puissance fournie par les interactions intérieures non conservatives.

Loi

Pour le poids, tant du point de vue des forces que du point de vue énergétique, tout se passe comme si le système était concentré en G.

Loi

L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle interne à un système de deux points de masses m_1 et m_2 séparés de r s'écrit :

$$E_{\text{p,grav,int}} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r}$$

Loi

Lorsqu'un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0 est inclus dans un système, il contient l'énergie potentielle interne :

$$E_{\text{p,int,él}} = \frac{1}{2}\,k\,(\ell - \ell_0)^2$$

Loi

Pour une interaction intérieur à distance, nous pouvons écrire :

$$W_{\text{int}} = -\Delta E_{\text{p,int}}$$

Loi

L'interaction entre deux points rigidement liés fournit une puissance nulle.

Loi

Toute liaison interne qui est :

- ➜ avec frottement sans glissement ;
- ➜ avec glissement sans frottement ;

fournit une puissance nulle au système dans lequel elle est.

Loi

Les glissements sans frottement et les engrenages ne dissipent ni n'apportent d'énergie.

Loi

Pour tout système $\mathscr{S}$ étudié dans un référentiel $\mathscr{R}$, nous pouvons écrire :

$$E_{\text{c}|\mathscr{R}}(\mathscr{S}) = \frac{1}{2}\,m_{\text{tot}}\,{v_{|\mathscr{R}}}^2(G) + E_{\text{c}|\mathscr{R}^\star}(\mathscr{S})$$

Loi

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la somme des moments qui s'exercent sur un système soit nulle.