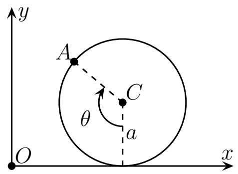
Premiers pas en mécanique du point

Exercice 1 ROUE DE VÉLO

Une roue circulaire de rayon a roule sans glisser sur l'axe (Ox) tout en restant dans le plan (Oxy). Un point A de la roue coïncide à l'instant $t = 0$ avec l'origine du repère. Le centre C a une vitesse constante $\vec{v}_0$.



1. Déterminer les coordonnées de A à l'instant t.
2. Calculer le module du vecteur vitesse de A et commenter.

Exercice 2 MOUVEMENT PARABOLIQUE

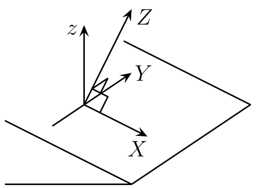
Un point mobile M décrit une parabole d'équation $y = \alpha\, x^2$ ($\alpha > 0$). La composante v_x de sa vitesse est constante.

Déterminer v_y et la norme v de la vitesse en fonction de v_x et de x.

Exercice 3 PLAN INCLINÉ

Un objet représenté par un point matériel M glisse sans frottements sur un plan incliné. Sont définis par rapport à ce plan :

➜ (Oz) : axe vertical ;
➜ (OX) : axe de plus grande pente orienté vers le bas ;
➜ (OZ) : axe normal au plan incliné ;
➜ α : angle (Oz),(OZ) (remarquons que α est également l'angle de la ligne de la plus grand pente avec l'horizontale).

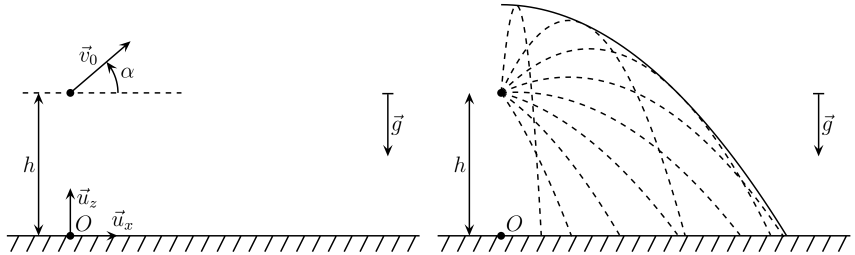


La position d'un point sur le plan incliné est représenté par les coordonnées $(X{,}Y)$.

1. **Étude statique.** M est immobile, retenu par un fil parallèle au plan incliné.
   Déterminer la tension du fil ainsi que la réaction du plan incliné.
2. **Étude dynamique.**
   Déterminer l'accélération du M, la réaction du plan et la nature des trajectoires en fonction de la vitesse initiale $\vec{v}_0$.

Exercice 4 PARABOLE DE SÉCURITÉ

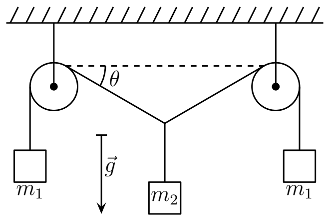
On considère un objet lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ d'une hauteur h.



1. Déterminer la trajectoire de l'objet.
2. Déterminer la flèche de l'objet, *ie.* la cote du point le plus haut atteint.
3. Déterminer l'expression de la courbe limitant les points accessibles des points non accessibles par un tir à v_0 fixé et à α variable (cf. schéma ➁). *En dessous de cette courbe, un point peut éventuellement être atteint, au dessus de cette courbe, c'est impossible, le lieu est en sécurité, d'où le nom donné à cette courbe.*

Exercice 5 POULIES À L'ÉQUILIBRE

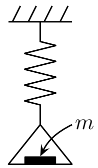
Les poulies et les fils disposés selon le schéma ci-dessous sont idéaux.



Déterminer l'angle θ à l'équilibre.

Exercice 6 NE PAS TOMBER

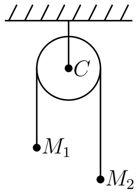
À l'extrémité inférieure d'un ressort vertical de raideur k est suspendu un plateau de masse négligeable sur lequel on a placé un objet de masse m. On lâche le plateau sans vitesse initiale après l'avoir descendu d'une altitude A par rapport à sa position d'équilibre. Les frottements sont négligés.



Déterminer la valeur de A à ne pas dépasser afin que l'objet ne décolle jamais du plateau.

Exercice 7 MACHINE D'ATWOOD

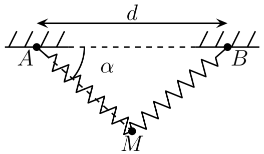
Deux objets de masse m_1 et m_2 , assimilés à des points matériels, sont suspendus aux deux brins d'un fil idéal qui passe dans la gorge d'une poulie idéale, accrochée en un point fixe. On pose : $\vec{a}(M_1) = a_1(t)\,\vec{u}_z$ et $\vec{a}(M_2) = a_2(t)\,\vec{u}_z$.



Déterminer $a_1(t)$ et $a_2(t)$ ainsi que l'intensité des forces T_1 et T_2 que le fil exerce sur M_1 et M_2.

Exercice 8 UN CERTAIN ÉQUILIBRE

Un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0, est fixé par ses extrémités en deux points A et B de même altitude et distants de d. Il est lesté en son milieu par un objet quasi ponctuel de masse m.



1. Montrer que la force que le ressort exerce en chacun de ses point est la même (en intensité) que celle qu'elle exerce à son extrémité.
2. Déterminer l'angle α à l'équilibre analytiquement et numériquement.

Données : $m = 1{,}2$ kg ; $g = 9{,}8$ m.s^{-2} ; $\ell_0 = 1{,}0$ m ; $k = 2{,}3.10^2$ N.m^{-1} ; $d = 1{,}2$ m.

Exercice 9 CHUTE AVEC FROTTEMENTS FLUIDES QUADRATIQUES

Un objet de masse m, modélisé par un point matériel, est lancé verticalement, vers le haut depuis le point O avec une vitesse de valeur v_0. L'action de l'air se réduit à une force de frottement opposée à la vitesse et de norme $f = k\,v^2$. On note $v_{\text{lim}} \overset{\text{not}}{=} \sqrt{\dfrac{m\,g}{k}}$ et $\ell \overset{\text{not}}{=} \dfrac{m}{2\,k}$.

1. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $\xi(z) \overset{\text{not}}{=} v^2(z)$ lors de la montée et lors de la descente.
2. Résoudre cette équation différente pour la montée et la descente.
3. Déterminer la vitesse lorsque l'objet retombe en O.

Exercice 10 CHUTE D'UNE BILLE DE PLOMB

On considère une sphère de plomb de rayon a et de masse volumique ρ.

1. Dans un premier temps, la sphère est suspendue à un point fixe O par un fil et se trouve placée dans une soufflerie ; la vitesse du vent, horizontale, a pour valeur v_0 et le fil fait alors un angle α avec la verticale.
   Sachant que la résistance de l'air est de norme $f = k\,\pi\,a^2\,{v_0}^2$ où v_0 est la vitesse du vent, déterminer le coefficient k dans le système S.I.

2. Cette sphère est maintenant lâchée dans l'air immobile, hors de la soufflerie, sans vitesse initiale. La norme de la force de frottement s'écrit alors $f = k\,\pi\,a^2\,v^2$ où v est cette fois ci la vitesse de l'objet et avec le même k qu'à la question précédente.
   (a) Justifier la différence entre les expressions des forces de frottement à la première et à la deuxième question.
   (b) Calculer sa vitesse limite ; à quelle hauteur de chute dans le vide cette vitesse correspond-elle ?
   (c) Pour une chute de deux mètres de haut, quelle fraction du poids la force de frottement représente-t-elle ?

Données : $a = 1{,}0$ cm ; $\rho = 11{,}34$ g.cm^{-3} ; $v_0 = 10$ m.s^{-1} ; $\alpha = 1{,}68.10^{-1}$ rad ; $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

Exercice 11 CENTRIFUGEUSE

Au cours de leur entraînement, pour habituer leurs organismes à supporter les fortes accélérations du décollage et de l'entrée dans l'atmosphère, les cosmonautes sont placés sur un siège fixé à l'extrémité d'un bras de longueur ℓ, en rotation de vitesse angulaire ω dans un plan horizontal.

Calculer ω en tours par minute, si $\ell = 5{,}0$ m et si l'accélération obtenue a pour valeur $6\,g$. Donner la nationalité de ces hommes de l'espace.

Donnée : $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

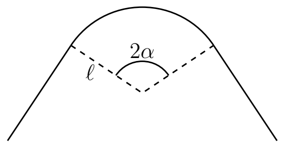
Exercice 12 SPIRALE

Un mobile M parcourt avec une vitesse de norme constante v la spirale d'équation polaire : $r(\theta) = a\,\theta$.

Exprimer en fonction de θ et de v le vecteur vitesse de M.

Exercice 13 LES DANGERS DE LA VITESSE

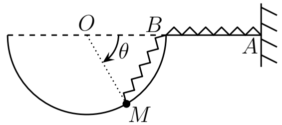
Une automobile, assimilée à un point matériel, circule à la vitesse v uniforme, sur une piste au profil accidenté. Elle franchit une bosse, modélisée par deux portions rectilignes raccordées par un arc de cercle de rayon ℓ et d'angle 2α.



À quelle condition garde-t-elle le contact avec le sol ?

Exercice 14 POINT MATÉRIEL DANS UNE RIGOLE

Un point matériel M de masse m dans le référentiel du laboratoire est solidaire d'une rigole circulaire (de centre O et de rayon b) sur laquelle il peut glisser sans frottement. Il est fixé en un point A du plan horizontal par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Le bord de la rigole est à la distance ℓ_0 du point A.



1. Déterminer la position d'équilibre θ_0 en fonction de m, g, k et b.
2. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de M vérifiée par $\theta(t)$.
3. Déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre. On pourra poser $\theta(t) = \theta_0 + \varepsilon(t)$ dans l'équation différentielle avec $\varepsilon(t) \ll \theta_0$ et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $\varepsilon(t)$.

Exercice 15 Quatre souris en formation

Quatre souris A, B, C et D se trouvent aux quatre coins d'un carré fictif $ABCD$ de côté a et chacune court en direction de l'autre avec la même valeur constante de la vitesse v. A court vers B, B vers C, C vers D et D vers A. On choisit le centre du carré initial comme origine O du repère.

1. Au bout de combien de temps se rencontreront-elles ?
2. Quelle distance L auront-elles parcourue ?
3. Déterminer la trajectoire $r(\theta)$ de la souris A avec comme positions initiales en coordonnées polaires : $A\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $B\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi}{4}\right)$, $C\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $D\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},-\dfrac{3\,\pi}{4}\right)$.
4. Déterminer les équations du mouvement $r(t)$ et $\theta(t)$.

Exercice 16 promeneur du dimanche

Un homme partant du point O décrit l'axe (Oy) avec la vitesse constante v. Son chien part du point A sur (Ox) perpendiculaire à (Oy) $(OA = a)$ et se dirige constamment vers lui à la vitesse $2v$.

Déterminer la trajectoire du chien et le temps mis pour rejoindre son maître.