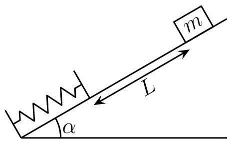
La mécanique autrement qu'en forces

Exercice 1 Masse et ressort

On abandonne sans vitesse initiale un cube de masse m sur un plan matériel incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le cube glisse alors sans frottement sur la ligne de plus grande pente sur une distance L avant de rencontrer un butoir solidaire d'un long ressort (idéal) de raideur k, disposé comme l'indique le schéma ci-contre.

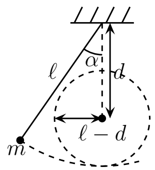


Les masses du ressort et du butoir sont négligeables, on admettra que cela implique la continuité de la vitesse de la masse lors du choc. On modélisera le cube par un point matériel.

1. Déterminer la longueur maximale dont le ressort est comprimé.
2. En quel point la vitesse du cube est-elle maximale ?

Exercice 2 Un pendule qui s'enroule

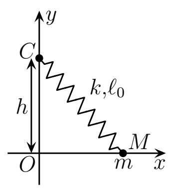
Un point M de masse m est suspendu à un point fixe A par un fil de longueur ℓ, constituant ainsi un pendule ; on abandonne ce pendule sans vitesse initiale, le fil faisant avec la verticale un angle α. Une tige fixe est placée à l'aplomb du point A à la distance $d < \ell$ de A, de sorte que le fil heurte cette tige lorsque le pendule passe par sa position d'équilibre.



1. Montrer que la vitesse de M se conserve au cours du choc.
2. En prenant $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, déterminer la condition pour que le fil s'enroule autour de la tige en restant tendu.

Exercice 3 Oscillateur anharmonique

On dispose d'un ressort élastique de raideur k, de longueur naturelle ℓ_0 (longueur au repos) et de masse négligeable. L'une des extrémités de ce ressort est relié à un point C et l'autre à un anneau de masse m, coulissant sans frottements sur un axe (Ox) horizontal dont la distance h au point C peut être réglée à volonté.



1. Que peut-on prévoir concernant le comportement du système pour les cas : $\ell_0 < h$ et $\ell_0 > h$? On envisagera d'abord une réponse intuitive, puis une étude fondée sur l'énergie potentielle de ce système à évolution conservative pour vérifier ces affirmations.
2. Le cas $\ell_0 = h$ est un cas limite intéressant correspondant à des oscillations qualifiées d'anharmoniques, car non sinusoïdales. Ayant réglé la distance OC pour se trouver dans une telle situation, on abandonne sans vitesse initiale l'anneau à la distance $x = a$ du point O.
   Montrer que l'intégrale première du mouvement (*ie.* l'écriture de la conservation de l'énergie mécanique) se simplifie en : $\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \dfrac{k}{8\,{\ell_0}^2}(a^4 - x^4)$ après un développement limité à l'ordre le plus bas de l'énergie potentielle.
   En déduire que la période d'un tel mouvement est de la forme $T = 8\,I\left(\dfrac{\ell_0}{a}\right)\left(\dfrac{m}{k}\right)^{1/2}$, où $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}} \simeq 1{,}31$.

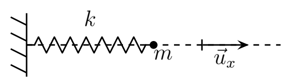
Exercice 4 Oscillations à une dimension

Une particule de masse m se déplace sans frottement sur un axe (Ox) galiléen dans le champ de force $F(x)$ dérivant de l'énergie potentielle : $E_{\mathrm{p}}(x) = \dfrac{m\,\omega^2}{2}\left(x^2 + \dfrac{a^4}{x^2}\right)$, où ω et a étant des constantes positives. On se restreint à $x > 0$.

1. (a) Montrer qu'il existe une position d'équilibre stable.
   (b) Calculer la période des oscillations autour de cette position d'équilibre.
2. (a) La particule occupant la position d'équilibre avec une vitesse initiale de valeur v_0 quelconque, montrer qu'elle décrit ultérieurement un mouvement périodique.
   (b) Exprimer la vitesse $\dot{x}$ en fonction de la position et des autres constantes de l'énoncé.
   (c) En remarquant que $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\dot{x}}$, écrire l'intégrale permettant de calculer la période T des oscillations.
   (d) Montrer que l'intégrale précédente s'exprime en fonction de $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u\,(1-u)}} = \pi$.
   (e) Commenter le résultat obtenu.

Exercice 5 Oscillateur amorti

On considère une masse au bout d'un ressort horizontal soumis à une force de frottement solide.



On rappelle qu'un frottement solide se caractérise par :

➜ lorsque $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{f}\cdot\vec{v} < 0$ et $\|\vec{f}\| = \lambda\,N$ où λ est le coefficient de frottement et N la norme de la réaction normale du support.

➜ lorsque $\vec{v} = \vec{0}$, $\|\vec{f}\| < \lambda N$.

On choisit l'origine du repère de telle sorte que lorsque la masse m est en O, le ressort a sa longueur naturelle. On note ${\omega_0}^2 = \dfrac{k}{m}$.

1. Montrer qu'il existe une plage d'équilibre, *ie.* que l'on peut avoir $x(t) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$ pour x compris entre $-a$ et a (a à déterminer).
2. Écrire l'équation différentielle du mouvement. On introduira $\varepsilon = \pm 1$ tel que $\varepsilon\,\dot{x} < 0$.
3. (a) Déterminer la solution $x_1(t)$ de l'équation différentielle lorsque $\varepsilon = 1$ (préciser le sens du mouvement) avec $x_1(0) = X_1 > a$ et $\dot{x_1}(0) = 0$.
   (b) Déterminer la solution $x_2(t)$ de l'équation différentielle lorsque $\varepsilon = -1$ (préciser le sens du mouvement) avec $x_2(0) = X_2 < -a$ et $\dot{x_2}(0) = 0$.
4. (a) Montrer que, dans le plan de phase $(x,\dfrac{\dot{x}}{\omega_0})$, $x_1(t)$ correspond à un demi cercle, dont on déterminera le rayon, situé dans le demi-plan inférieur et centré sur $(a{,}0)$.
   (b) Montrer que, dans le plan de phase $(x,\dfrac{\dot{x}}{\omega_0})$, $x_2(t)$ correspond à un demi cercle, dont on déterminera le rayon, situé dans le demi-plan supérieur et centré sur $(-a{,}0)$.
   (c) En déduire la construction graphique de la trajectoire du mouvement dans le plan de phase à partir de la condition initiale : $x(0) = X_0 > a$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Exercice 6 Théorème du viriel

Soit une particule de masse m, de vitesse $\vec{v}$, soumise à la force $\vec{F}$ et repérée par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, O étant un point fixe d'un référentiel galiléen.

1. (a) En posant $A = m\vec{v}\cdot\vec{r}$, exprimer $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $\vec{F}\cdot\vec{r}$ et de l'énergie cinétique E_c de la particule.
   (b) En déduire que si la particule reste à distance finie du point O et garde une vitesse finie, on a la relation : $\langle E_\mathrm{c}\rangle = -\dfrac{1}{2}\langle\vec{F}\cdot\vec{r}\rangle$ où le symbole $\langle\ \rangle$ représente la valeur moyenne dans le temps prise sur une durée très longue.
2. On suppose maintenant que $\vec{F}$ dérive du potentiel $V(r) = -k\,r^{-n}$, *ie.* s'écrit $\vec{F} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\,\vec{u}_r$.
   (a) Déduire de la question 1b une relation entre E_c et V.
   (b) Expliciter ce résultat quand $V(r)$ est un potentiel d'oscillateur harmonique ($n = -2$).