Oscillateur harmonique

Exercice 1 Associations de ressorts

Déterminer la constante de raideur du ressort équivalent à l'association de deux ressorts idéaux de même longueur naturelle ℓ_0 mais de raideur k_1 et k_2 différentes mis bout à bout (association série) ou côte à côte (association parallèle).

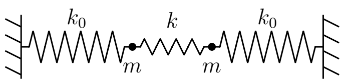
Exercice 2 Mesure de viscosité

Une sphère de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0. Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η, la sphère est soumise à une force de frottement donnée par la formule de STOKES : $\vec{f} = -6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la sphère dans le liquide. On néglige la poussée d'ARCHIMÈDE.

1. Écrire l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période T.
2. Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables, la période des oscillations est T_0. Déterminer le coefficient de viscosité η du liquide en fonction de m, r, T et T_0.

Exercice 3 Couplage d'oscillateurs

On considère le dispositif représenté sur le schéma ci-dessous. Les positions des deux masses sont représentées par leur abscisses comptées à partir de leur position d'équilibre.

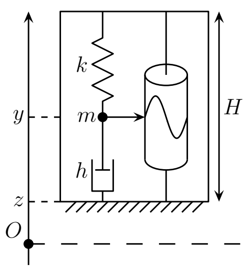


On suppose que lorsque $x_1 = x_2 = 0$, les ressorts ont leurs longueurs naturelles. Les deux masses glissent sans frottement sur l'axe (Ox) qui est horizontal.

1. Écrire les équations du mouvement des deux masses.
2. On pose $X(t) = x_1(t) + x_2(t)$ et $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$. À quelles équations satisfont $X(t)$ et $x(t)$?
3. À l'instant $t = 0$, les conditions initiales sont les suivantes : $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = v_0$, $\dot{x}_2(0) = 0$. Déterminer les expressions complètes de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Exercice 4 Sismographe

Un sismographe est constitué d'un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0, d'un amortisseur de coefficient de frottement h et d'une masse m considérée comme ponctuelle. Le ressort et l'amortisseur sont fixés à un cadre rigide. Un stylet reproduisant les déplacements verticaux de la masse m par rapport au cadre est fixé au niveau de la masse m (voir figure).

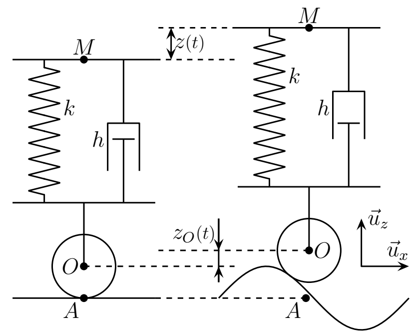


Le cadre est mis en mouvement vertical sinusoïdal : $z(t) = Z\,\cos(\omega\,t)$. Le référentiel $\mathscr{R}$ repéré par $(O,\vec{u}_z)$ est supposé galiléen.

1. Déterminer l'équation d'évolution de $y(t)$, cote de la masse M dans le référentiel $\mathscr{R}$.
2. En déduire l'équation d'évolution de $x(t)$, écart entre la longueur $\ell(t)$ du ressort à un instant t et sa longueur $\ell_{\text{éq}}$ à l'équilibre.
3. Déterminer l'amplitude réelle X des oscillations de la masse et tracer l'allure pour quelques valeurs du facteur de qualité.
4. Comment choisir Q pour que X vaille Z à 5 % près sur la plus grande plage de pulsations possible ?

Exercice 5 Amortisseur d'un véhicule

Un véhicule automobile est modélisé par une masse m placée en M et reposant sur une roue de centre O par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k mis en parallèle avec un amortisseur de coefficient d'amortissement h. En toutes circonstances, l'axe OM reste vertical. On se propose d'étudier le comportement du véhicule lorsqu'il a la vitesse v suivant (Ox) sur une route dont le profil impose au centre O de la roue un déplacement $z_O(t) = a\,\cos\left(2\,\pi\,\dfrac{x}{\lambda}\right)$ par rapport à sa position initiale.



On repère le mouvement de la masse par son déplacement $z(t)$ par rapport à sa position au repos lorsque le véhicule est immobile.

On admet que le référentiel lié à la voiture et repéré par $(A,\vec{u}_x,\vec{u}_z)$ est galiléen.

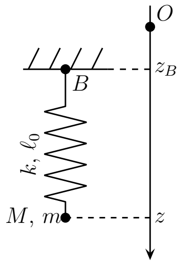
1. Que représente λ dans l'expression de $z_O(t)$?
2. Établir l'équation différentielle en $z(t)$ du mouvement de la masse lorsque la vitesse v suivant x est constante.
3. Déterminer l'amplitude du mouvement d'oscillation vertical du véhicule en régime permanent. À quelle allure convient-il de rouler pour que cette amplitude soit aussi faible que possible ?

Exercice 6 Bilan énergétique en régime forcé

Un ressort idéal de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0 est disposé verticalement.

Son extrémité supérieure B est reliée à un bâti dont on peut faire varier la cote de manière sinusoïdale, $z_B(t) = A\,\cos(\omega\,t)$, et un corps M assimilable à un point de masse m est accroché à son autre extrémité.

L'action de l'air ambiant se traduit par une force de frottement du type $\vec{f} = -h\vec{v}$, $\vec{v}$ étant la vitesse de M dans le référentiel $\mathscr{R}(O,\vec{u}_z)$ avec $\vec{u}_z$ vers le bas, et h un coefficient positif.



1. Déterminer l'équation d'évolution de la cote $z(t)$ de M. On introduira la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.
2. En déduire l'équation d'évolution de $x(t) = z(t) - z_{\text{éq}}$, écart à l'équilibre de la masse.
3. Déterminer les amplitudes complexes $\underline{X_{\text{m}}}$ et $\underline{V_{\text{m}}}$ respectivement de l'écart à l'équilibre et de la vitesse de M.
4. Déterminer les déphasages ϕ et φ respectivement entre l'écart à l'équilibre $x(t)$ et le terme excitateur $z_B(t)$ puis entre la vitesse $\dot{x}(t)$ et le terme excitateur $z_B(t)$.
5. En reprenant la notation réelle, déterminer les expressions de :
   (a) l'énergie $\mathscr{E}_{\text{f}}$ fournie par les frottements en une période ;
   (b) l'énergie $\mathscr{E}_{\text{r}}$ fournie par le ressort en une période ;
   (c) l'énergie $\mathscr{E}_{\text{p}}$ fournie par le poids en une période ;
   (d) l'énergie cinétique $\mathscr{E}_{\text{c}}$ maximale ;
   (e) la différence $\Delta\mathscr{E}_{\text{pp}}$ des énergie potentielle entre les cotes maximale et au repos de M.
6. Écrire et vérifier le bilan énergétique en fonction des énergies calculées à la question précédente.

Exercice 7 Particule dans un puits de potentiel

On considère un point matériel M de masse m astreint à se déplacer sur un axe (Ox) avec $x \geqslant 0$ et soumis à un champ de forces dérivant du potentiel $E_{\text{p}}(x) = E_0 \left(\dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{a}{x} \right)$.

1. Tracer l'allure de $E_{\text{p}}(x)$.
2. Déterminer la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ en fonction de E_0 et a.
3. (a) Faire un développement limité à l'ordre 2 de $E_{\text{p}}(x)$ autour de $x_{\text{éq}}$ et en déduire l'équation d'évolution de $\varepsilon(t)$ défini par $x(t) = x_{\text{éq}} + \varepsilon(t)$.
   (b) Montrer que l'on a, alors, $x(t) = x_{\text{éq}} + X_{\text{m}} \cos(\omega_0\, t + \varphi)$ où ω_0 est une pulsation à déterminer en fonction de E_0 et $x_{\text{éq}}$ et $X_{\text{m}} \ll x_{\text{éq}}$.
4. (a) Faire un développement limité à l'ordre 3 de $E_{\text{p}}(x)$ autour de $x_{\text{éq}}$ et en déduire la nouvelle équation d'évolution de $\varepsilon(t)$.
   (b) On suppose que $x(t) = x_{\text{éq}} + A + X_{\text{m}} \cos(\omega_0\, t) + B \cos(2\,\omega_0\, t)$ avec $A \ll X_{\text{m}}$, $B \ll X_{\text{m}}$ et $X_{\text{m}} \ll x_{\text{éq}}$.
   Déterminer les expressions de A et A.
   (c) Commenter.

On rappelle que, pour $\varepsilon \ll 1$: $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\,\varepsilon + \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}\,\varepsilon^2 + \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)}{6}\,\varepsilon^3$.