Mécanique en référentiel non galiléen

Exercice 1 Tournez manège

À la fête foraine, un observateur H regarde depuis le sol un manège. Il observe les mouvements d'un cheval C animé d'un mouvement alternatif vertical par rapport au plateau et d'une voiture V fixé au plateau du manège.

On note $\mathscr{R}_C$, $\mathscr{R}_V$ et $\mathscr{R}_H$ les référentiels respectivement liés à C, V, H. La voiture se trouve à $d_V = 5{,}0$ m de l'axe de rotation du manège et l'observateur H à $d_H = 10$ m.

1. Décrire :
   (a) la trajectoire de C dans $\mathscr{R}_V$ et dans $\mathscr{R}_H$;
   (b) la trajectoire de H dans $\mathscr{R}_V$.
2. Déterminer, pour un tour de manège :
   (a) la distance parcourue par V dans $\mathscr{R}_H$;
   (b) celle parcourue par H dans $\mathscr{R}_V$.

Exercice 2 Palet sur une demi-sphère

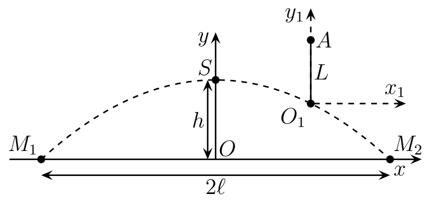
Un palet que l'on considérera ponctuel est placé au sommet d'une demi-sphère de rayon R fixée à une plate-forme mobile. La plate-forme tractée se met en mouvement avec une accélération horizontale a_0 constante.

En négligeant tout frottement avec l'air et avec demi-sphère, déterminer l'équation donnant l'angle de rupture du contact entre le palet et la demi-sphère en fonction de a_0/g et résoudre graphiquement l'équation précédente.

Exercice 3 Poids apparant dans un véhicule

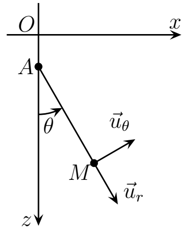
Un véhicule a un mouvement de translation uniforme de vitesse $\vec{v}$ sur une route curviligne d'équation cartésienne $y = f(x)$. On lui associe un référentiel $\mathscr{R}'$ de centre O_1 et en translation par rapport au référentiel terrestre $\mathscr{R}$. Un passager modélisé par un point matériel A de masse m est lié à l'origine O_1 par un siège modélisé par une tige verticale de longueure fixe L. On a donc A immobile dans $\mathscr{R}'$.

1. Montrer que la composante cartésienne, suivant la verticale ascendante (Oy) de l'accélération de O_1 dans $\mathscr{R}$ s'écrit $\dfrac{v^2\,f''}{(1+f'^2)^2}$, f' et f'' désignant les dérivées première et seconde de f par rapport à x.
2. Calculer la composante verticale R_y de la force que le siège exerce sur le passager, c'est ce que l'on appelle poids apparant.
3. Montrer que $R_y = P$ (poids du passager) lorsque le véhicule est au repos et comparer le poids apparant au poids du passager suivant que la route forme une bosse ou un creux.
4. Le profil de la route forme une bosse assimilable à un arc de parabole dont les caractéristiques sont données sur la figure suivante.



Pour quelle valeur de la vitesse y a-t-il impesanteur (poids apparant nul) en S ?

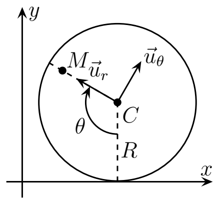
Exercice 4 Oscillateur paramétrique mécanique



1. Établir l'équation d'évolution de $\theta(t)$ d'un pendule simple réalisé avec une masse m placée à l'extrémité d'une tige de masse négligeable et de longueur ℓ dont l'autre extrémité A oscille verticalement autour de l'origine O : $\overrightarrow{OA} = h\,\cos(\gamma\,t)\,\vec{u}_z$. On note ${\omega_0}^2 = \dfrac{g}{\ell}$ et $\alpha = \dfrac{h\,\gamma^2}{g}$.
2. En supposant que le pendule oscille à faible amplitude (*ie.* $\sin\theta \simeq \theta$), on va montrer qu'il existe une valeur de γ telle que l'amplitude des oscillation augmente : c'est la résonance paramétrique.
   (a) Après avoir simplifié puis multiplié par $\dot\theta$ l'expression précédente, montrer que l'on a :
   $$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot\theta^2 + {\omega_0}^2\,\theta^2) = -{\omega_0}^2\,\alpha\,\theta\,\dot\theta\,\cos(\gamma\,t)$$
   (b) On suppose que $\theta(t) = A(t)\,\cos(\omega_0\,t+\varphi)$ avec $A(t)$ lentement variable sur une période propre, *ie.* $\dot A\,T_0 \ll A$.
   Montrer, dans ces conditions, que l'équation précédente se ramène à :
   $$\frac{1}{A^2}\frac{\mathrm{d}A^2}{\mathrm{d}t} = \omega_0\,\alpha\,\sin(2\,\omega_0\,t + 2\,\varphi)\,\cos(\gamma\,t)$$
   (c) Calculer la valeur moyenne de $\dfrac{1}{A^2}\dfrac{\mathrm{d}A^2}{\mathrm{d}t}$ et montrer que pour $\gamma = 2\,\omega_0$, on a :
   $$\left\langle \frac{1}{A^2}\frac{\mathrm{d}A^2}{\mathrm{d}t}\right\rangle \neq 0$$
   Conclure sur l'augmentation de l'amplitude des oscillations.

Exercice 5 Valve sur une roue

Une roue de rayon R et de centre C roule sans glisser sur l'axe (Ox) en restant dans le plan (xOy). La valve est au point M à une distance b de l'axe de la roue. On note v_C (resp. a_C) la norme de la vitesse (resp. de l'accélération) de C par rapport à la route.



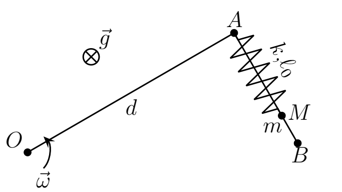
1. En utilisant la méthode du changement de référentiel, exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération de M par rapport à la route.
2. Déterminer la norme maximale du vecteur accélération de la valve.
   Faire l'application numérique avec $R = 30$ cm, $b = 20$ cm, $v_C = 100$ km.h^{-1} et $a_C = 2{,}0$ m.s^{-2}.

Exercice 6 Périodes sidérales

1. **Jour solaire et jour sidéral**
   La durée du jour solaire moyen est la durée T_m qui sépare, en moyenne, deux positions successives du Soleil au zénith dans son mouvement dans le référentiel terrestre. La durée du jour sidéral est la durée T_s que met la Terre pour faire un tour sur elle-même dans le référentiel géocentrique (référentiel dans lequel le centre de la Terre est immobile).
   Montrer que $T_\mathrm{m} - T_\mathrm{s} = \dfrac{{T_\mathrm{m}}^2}{T_\mathrm{a} + T_\mathrm{m}}$ où T_a est la période de révolution de la Terre autour du Soleil.
   Calculer $T_\mathrm{m} - T_\mathrm{s}$ sachant que $T_\mathrm{m} = 86\,400$ s et $T_\mathrm{a} = 365{,}25\,T_\mathrm{m}$.
2. **Lunaison synodique et lunaison sidérale**
   La lunaison synodique est la durée T_n qui sépare deux positions successives de la nouvelle lune. La lunaison sidérale est la durée T_s de révolution de la Lune autour de la Terre dans le référentiel géocentrique (référentiel dans lequel le centre de la Terre est fixe).
   Montrer que $T_\mathrm{n} - T_\mathrm{s} = \dfrac{{T_\mathrm{s}}^2}{T_\mathrm{a} - T_\mathrm{s}}$ où T_a est la période de révolution de la Terre autour du Soleil.
   Calculer $T_\mathrm{n} - T_\mathrm{s}$ en jour, sachant que $T_\mathrm{s} = 27{,}3$ j et $T_\mathrm{a} = 365{,}25$ j.

Exercice 7 Tachymètre

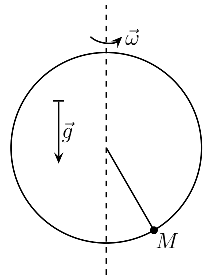
Le L métallique OAB tourne à vitesse angulaire constante ω dans le plan horizontal autour de l'axe vertical (Oz). Un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0 est fixé en A au dispositif et à son extrémité est attaché un anneau de masse m qui coulisse sans frottement sur la partie rectiligne AB. On désigne par $\ell_\text{éq}$ la longueur du ressort à l'équilibre dans le référentiel tournant.



1. Déterminer l'expression de $\ell_\text{éq}$ en fonction de ω.
2. L'appareil peut-il servir de tachymètre ?

Exercice 8 Anneau sur un cerceau

Un anneau de masse m peut glisser sans frottement sur un cerceau de rayon R placée dans un plan vertical ; ce dernier tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de son diamètre vertical par rapport au référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. La position de l'anneau est repéré par l'angle θ.



Discuter, suivant les valeurs de R, m, g et ω les positions d'équilibre de l'anneau dans le référentiel lié au cerceau.

Exercice 9 Manège

Un manège est en rotation à vitesse angulaire constante ω. Un objet est déposé sans vitesse initiale sur le plateau à la distance r_0 de l'axe. En supposant que l'objet peut se déplacer sans frottement sur le plateau du manège, étudier ses trajectoires dans le référentiel $\widetilde{\mathscr{R}}$ lié au sol lié au sol et dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié au manège suivant que l'objet est déposé par un expérimentateur lié au sol ou par un expérimentateur sur le manège.

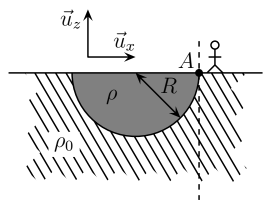
Exercice 10 Tir sportif

Un champion olympique de tir sportif décide de monter une salle d'entraînement au niveau de l'équateur terrestre.

1. On suppose que le pas de tir est sur l'équateur, que les cibles sont à $D = 100$ m vers l'est et que le tir est initialement horizontal.
   (a) Dans quelle sens (haut, bas, droite, gauche) les balles seront-elles déviées ?
   (b) À combien se chiffrera cet écart si on suppose que le mouvement de la balle se fait sans frottement et qu'il dure $t_0 = 0{,}2$ s ?
2. Mêmes questions si le pas de tir est sur l'équateur et les cible sont à $D = 100$ m vers l'ouest.

Exercice 11 Particularité géologique

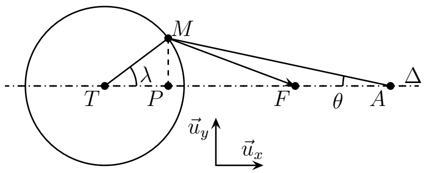
On modélise une particularité géologique (montagne érodée, nappe de pétrole, …) par une demi sphère de rayon R de densité ρ à la surface de la Terre au sein d'une zone de densité $\rho_0 > \rho$.



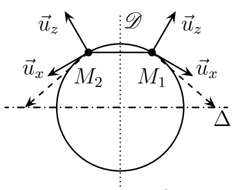
1. Justifier que l'accélération de pesanteur $\vec{g}$ fait un angle avec la verticale attendue (en pointillés), c'est-à-dire la verticale qu'il y aurait eu s'il n'y avait pas eu de défaut.
2. Déterminer, au point A, cet écart angulaire α en fonction de g_0 (norme de l'accélération de pesanteur), ρ, ρ_0 et R. Pour cela, on montrera que le défaut est gravitationnellement équivalent à l'ajout, à une Terre sans défaut, d'une demi-sphère de densité $\rho - \rho_0$ et on cherchera la composante sur $\vec{u}_x$ de l'attraction gravitationnelle d'une telle demi-sphère.

Exercice 12 Construction de Proctor

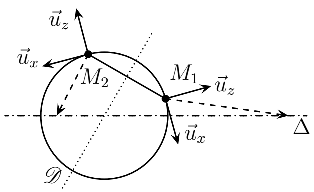
La construction de Proctor permet de déterminer très facilement la direction et l'importance relative du terme de marée dû à un astre. La construction est la suivante. On note T le centre de la Terre, R son rayon, A le centre de l'astre, M_A sa masse, Δ la droite (AT) et M le point où l'on veut déterminer la direction du terme de marée. On se place dans le plan ATM. P est le projeté de M sur Δ, F le point tel que $\overrightarrow{TF} = 3\,\overrightarrow{TP}$. Dans ces conditions le terme de marée est proportionnel à $\overrightarrow{MF}$.



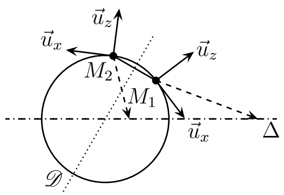
1. On se propose de démontrer la construction précédente.
   (a) Rappeler l'expression vectorielle du terme de marée en M noté $\vec{\mathscr{M}}_A(M)$.
   (b) En choisissant $\vec{u}_x = \dfrac{\overrightarrow{TA}}{\|\overrightarrow{TA}\|}$ et $\vec{u}_y = \dfrac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}$ et en notant $d = TA$, $R = TM$, $r = AM$ et λ l'angle $(\overrightarrow{TP},\overrightarrow{TM})$, montrer que $\vec{\mathscr{M}}_A(M) = \dfrac{G\,M_A\,R}{d^3}(2\cos\lambda\,\vec{u}_x - \sin\lambda\,\vec{u}_y)$. Comme l'astre responsable du terme de marrée est éloigné (!), on fera les calculs à l'ordre 1 en $\dfrac{R}{d}$ et θ.
   (c) Montrer que $\overrightarrow{MF} = \kappa\,(2\cos\lambda\,\vec{u}_x - \sin\lambda\,\vec{u}_y)$ en précisant κ et justifer la construction de Proctor.
2. À partir des schémas suivants sur lesquels on a représenté en pointillés les directions des termes de marée, expliquer pourquoi les marées de la situation ① sont appelées « semi-diurnes », celles de la situation ② « semi-diurne à inégalité diurnes » et celles du type ③ « diurnes ». La droite $\mathscr{D}$ est l'axe de rotation de la Terre. Sur chacun des schémas, $\vec{u}_z$ représente la verticale locale et $\vec{u}_x$ le vecteur local qui pointe « du large vers la côte ».



situation ①



situation ②



situation ③